

Universidad de Granada
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

Tesis doctoral

**ANÁLISIS DE LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN TEXTOS
ESCOLARES Y SU COMPRENSIÓN POR ESTUDIANTES
DE EDUCACIÓN BÁSICA**

Jocelyn D. Pallauta

Granada, 2022

Universidad de Granada
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación



UNIVERSIDAD DE GRANADA

ANÁLISIS DE LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN TEXTOS ESCOLARES Y SU COMPRENSIÓN POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección del Dr. Pedro Arteaga Cezón y la Dra. María Magdalena Gea Serrano, que presenta Dña. Jocelyn D. Pallauta para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

Fdo. Jocelyn D. Pallauta
Vº Bº de los directores:

Fdo. Pedro Arteaga Cezón

Fdo. María Magdalena Gea Serrano

Reconocimiento

Investigación realizada en el marco del Grupo PAI, FQM126 (Junta de Andalucía), el proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y financiada por la Beca ANID Folio: 72190280.

A mi Alonso, la luz de mi vida
A Rosita, mi madre

AGRADECIMIENTOS

Quisiera en estas líneas poder dar mi más sincero reconocimiento a todas las personas que han contribuido de una u otra forma a que este proceso llegue a su fin.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis directores de Tesis la Dra. María Magdalena Gea y el Dr. Pedro Arteaga, ambos me apoyaron en todo momento no solo desde el aspecto académico, sino que también desde el ámbito personal el cual no estuvo exento de dificultades durante el proceso de elaboración de esta Tesis. María, gracias por comprender mi situación e instarme siempre a asumir nuevos desafíos, mostrándome constantemente tu confianza en mis capacidades. Pedro, agradezco que siempre me dieras palabras de aliento acompañadas de una sonrisa que me animaban a continuar.

Asimismo, me gustaría agradecer especialmente a la Dra. Carmen Batanero por su consejo y orientación, trabajar a su lado y aprender de usted durante estos años ha sido sin duda, además de un privilegio, un sueño hecho realidad. Gracias por creer en mí.

En segundo lugar, quisiera reconocer la colaboración de los maestros y estudiantes que hicieron posible la recolección de los datos, especialmente cuando el contexto en medio de la pandemia generada por el COVID-19 era tan compleja y restrictiva. También, deseo manifestar mi agradecimiento a los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que fueron parte de mi formación cuando realicé el Máster en Didáctica de la Matemática y de quienes aprendí mucho.

Por otro lado, no puedo dejar de agradecer a mis amigos más cercanos de aquí y los de Chile, quienes a pesar de la distancia siempre sentí muy cerca, gracias a todos por apoyarme y brindarme la energía que necesitaba para continuar este camino en la persecución de mis sueños.

Para finalizar, quiero agradecer a mi familia por apoyarme desde la distancia. Gracias mi pequeño ALONSO por entender la importancia de mi trabajo y ser un niño virtuoso, eres sin duda la fuerza que me anima a seguir hacia adelante. A mi madre, quien tengo la certeza que desde algún lugar siempre me acompaña y guía mis pasos, gracias por respetar y apoyarme en mis decisiones, pese a lo difícil que te podían resultar.

RESUMEN

La tesis doctoral aborda el análisis de las tareas relacionadas con tablas estadísticas planteadas en los libros de texto chilenos y españoles, así como la evaluación de la comprensión sobre el tema en estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria. El interés del tema se justifica por el amplio uso de las tablas estadísticas en diferentes contextos y la carencia de investigaciones previas sobre el tema en el contexto español.

Se utiliza como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. También nos basamos en documentos curriculares, y en investigaciones previas que tratan sobre la comprensión de las tablas estadísticas. A partir de estos fundamentos, esta investigación ha seguido las etapas que se describen a continuación.

En primera instancia, se analiza la presencia de las tablas estadísticas en los directrices curriculares de Chile y España. Así también, se analizan dos muestras de libros de texto de ambos países. La muestra chilena se compone de 12 textos escolares de 5° a 8° curso (10 a 13 años), y la española se constituye de 24 libros de texto que abarcan los últimos cursos de Educación Primaria (5° y 6° curso) y toda la Educación Secundaria Obligatoria. Se realiza un análisis semiótico de las tablas estadísticas en los textos, identificando los objetos matemáticos primarios definidos en el Enfoque Ontosemiótico, así como otras variables que inciden en la comprensión de este objeto. Asimismo, se identifican algunos conflictos semióticos potenciales. Dicho análisis se conforma en la base para determinar la definición semántica del cuestionario para evaluar la comprensión de los estudiantes sobre este tema.

En una segunda etapa, se diseña y valida un cuestionario de respuesta abierta, basado en la definición semántica realizada en la etapa anterior, para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas con estudiantes españoles de 1° y 3° curso de ESO. Los ítems propuestos para el cuestionario fueron seleccionados y validados a través de juicio de expertos.

Por último, se aplicó el cuestionario sobre la comprensión de la tabla estadística a una muestra de 277 estudiantes españoles de 1° y 3° curso de la Educación Secundaria Obligatoria, pertenecientes a dos centros públicos de la Comunidad Autónoma de Andalucía. A partir de sus respuestas se analizan los conocimientos matemáticos, identificando y clasificando sus principales conflictos semióticos.

Entre los principales aportes de este trabajo, se considera la entrega de información detallada sobre el significado institucional de referencia en los libros de texto y en los lineamientos curriculares. Por otra parte, se aporta información sobre el significado personal atribuido a las tablas estadísticas por parte de los estudiantes. Así también se aporta información relacionada con las características psicométricas del instrumento, el cual se podría aplicar en otros contextos. Otra contribución son las diferentes publicaciones derivadas de la tesis.

ABSTRACT

This doctoral thesis focuses on the analysis of tasks concerning statistical tables in Chilean and Spanish textbooks, as well as the evaluation of how much secondary school pupils in Spain understand the subject. The importance of the topic is justified by the wide use of statistical tables in different fields and the lack of previous research on the subject in the Spanish education.

The Ontosemiotic approach to mathematical cognition and instruction is used as a theoretical framework. The investigation is based on the analysis of curriculum documents and on previous research on understanding of statistical tables. Considering these foundations this research has carried out the following stages.

Firstly, the presence of statistical tables in the curricular guidelines of Chile and Spain is analysed. In addition, two samples of textbooks from both countries are analysed. The Chilean sample consists of 12 school textbooks from 5th to 8th grade (10-13 years old), and the Spanish sample consists of 24 textbooks from the last years of Primary Education (5th and 6th grades) and all Compulsory Secondary Education. A semiotic analysis of the statistical tables in the texts is carried out identifying the primary mathematical objects defined in the Ontosemiotic Approach, as well as other variables that affect the understanding of this object. In addition, some potential semiotic conflicts are identified. This analysis is the base for determining the semantic definition of the questionnaire to evaluate students' understanding of this topic.

Secondly, we designed and validated a questionnaire, based on the semantic definition performed in the previous stage, to assess the understanding of statistical tables with Spanish pupils of 1st and 3rd grades of Compulsory Secondary Education (ESO). The questionnaire items were selected and validated through expert judgement.

Lastly, the questionnaire about the understanding of the statistical tables was applied to a sample of 277 Spanish pupils of 1st and 3rd grades of Compulsory Secondary Education, who attended to two public schools in the Autonomous Community of Andalusia. Based on their answers, mathematical knowledge is analyzed, identifying and classifying its main semiotic conflicts.

The main contributions of this work are, on the one hand, to provide detailed information on the institutional meaning of reference in textbooks and curriculum guidelines. On the other hand, information is provided on the personal meaning attributed to the statistical tables by the pupils. It also gives information related to the psychometric characteristics of the instrument, which could be applied in other contexts.

Finally, the publications derived from the thesis are other contributions that are also included in this report.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	5
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.1. INTRODUCCIÓN	5
1.2. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS	6
1.2.1. IMPORTANCIA DE LA TABLA ESTADÍSTICA PARA EL ESTUDIANTE	7
1.3. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL CURRÍCULO	8
1.3.1. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL CURRÍCULO CHILENO	8
1.3.2. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL.....	11
1.3.3. PERSPECTIVA INTERNACIONAL.....	18
1.4. MARCO TEÓRICO	19
1.4.1. SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO	20
1.4.2. TIPOS DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS	22
1.4.3. FACETAS DUALES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.....	23
1.4.4. FUNCIÓN SEMIÓTICA Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS	25
1.4.5. IDONEIDAD DIDÁCTICA	26
1.5. LA TABLA ESTADÍSTICA COMO OBJETO MATEMÁTICO: UN ANÁLISIS SEMIÓTICO	28
1.5.1. TIPOS DE TABLAS ESTADÍSTICAS	28
1.5.2. SITUACIONES-PROBLEMA.....	31
1.5.3. LENGUAJE	34
1.5.4. CONCEPTOS	36
1.5.5. PROPIEDADES.....	40
1.5.6. PROCEDIMIENTOS	44
1.5.7. ARGUMENTOS	45
1.5.8. CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS	45
1.6. OBJETIVOS GENERALES DEL TRABAJO	51
1.7. HIPÓTESIS INICIALES	53
1.8. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO Y CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS	54
CAPÍTULO 2	57
ANTECEDENTES	57
2.1. INTRODUCCIÓN	57
2.2. ELEMENTOS EN LA COMPRESIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS	57
2.2.1. COMPONENTES DE LA TABLA ESTADÍSTICA.....	58
2.2.2. NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA.....	59
2.3. LECTURA DE TABLAS ESTADÍSTICAS	62
2.3.1. PROCESOS COGNITIVOS ASOCIADOS A LA LECTURA.....	62
2.3.2. NIVELES DE LECTURA	64
2.3.3. LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR NIÑOS	68
2.3.4. LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR ADOLESCENTES Y ESTUDIANTES ADULTOS.....	70
2.3.5. LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR FUTUROS PROFESORES.....	75
2.4. CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS	77

2.4.1.	ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS.....	77
2.4.2.	CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR NIÑOS	79
2.4.3.	CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR ADOLESCENTES Y ESTUDIANTES ADULTOS.....	81
2.4.4.	CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN Y EN ACTIVO	82
2.5.	INVESTIGACIONES SOBRE ANÁLISIS DE TABLAS ESTADÍSTICAS EN LIBROS DE TEXTO.....	84
<i>CAPÍTULO 3.....</i>		<i>91</i>
<i>ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES CHILENOS.....</i>		<i>91</i>
3.1.	INTRODUCCIÓN.....	91
3.2.	EL LIBRO DE TEXTO COMO RECURSO DIDÁCTICO.....	91
3.3.	OBJETIVO DEL ESTUDIO.....	92
3.4.	HIPÓTESIS INICIALES	94
3.5.	MÉTODO	95
3.5.1.	MUESTRA DE TEXTOS ANALIZADOS.....	96
3.5.2.	MÉTODO DE ANÁLISIS	97
3.6.	RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA VARIEDAD DE TABLAS Y CONTEXTOS	98
3.6.1.	TIPO DE TABLA Y NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA	98
3.6.2.	CONTEXTO.....	103
3.7.	RESULTADOS DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA TABLA ESTADÍSTICA EN LOS TEXTOS.....	106
3.7.1.	SITUACIONES-PROBLEMAS EN TORNO A LA TABLA ESTADÍSTICA.....	106
3.7.2.	PROCEDIMIENTOS CON TABLAS ESTADÍSTICAS	111
3.7.3.	EL LENGUAJE UTILIZADO EN LAS TABLAS.....	115
3.8.	PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD.....	117
3.9.	NIVEL DE LECTURA.....	117
3.10.	USO DE LA TECNOLOGÍA.....	120
3.11.	CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS	121
3.12.	SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE EVALUACIÓN.....	123
3.13.	CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO	125
3.13.1.	CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS.....	125
3.13.2.	CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS	128
3.14.	IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL TRATAMIENTO DE LAS TABLAS EN LOS TEXTOS ANALIZADOS	130
<i>CAPÍTULO 4.....</i>		<i>133</i>
<i>ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES</i>		<i>133</i>
4.1.	INTRODUCCIÓN.....	133
4.2.	OBJETIVO DEL ESTUDIO.....	134
4.3.	HIPÓTESIS INICIALES	135
4.4.	MÉTODO	137
4.4.1.	MUESTRA DE LIBROS DE TEXTO ANALIZADOS	137
4.4.2.	MÉTODO DE ANÁLISIS	139

4.5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA VARIEDAD DE TABLAS Y CONTEXTOS	140
4.5.1. TIPO DE TABLA Y NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA	140
4.5.2. TIPO DE VARIABLE	145
4.5.3. CONTEXTO	148
4.6. ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA TABLA ESTADÍSTICA EN LOS TEXTOS 152	
4.6.1. SITUACIONES-PROBLEMAS EN TORNO A LA TABLA ESTADÍSTICA	152
4.6.2. EL LENGUAJE UTILIZADO EN LAS TABLAS	158
4.6.3. PROCEDIMIENTOS CON TABLAS ESTADÍSTICAS	161
4.6.4. CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS TABLAS ESTADÍSTICAS	168
4.6.5. PROPIEDADES UTILIZADAS EN LAS TABLAS ESTADÍSTICAS	171
4.6.6. ARGUMENTOS UTILIZADOS CON LAS TABLAS ESTADÍSTICAS	172
4.7. PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD	174
4.8. NIVEL DE LECTURA	176
4.9. USO DE LA TECNOLOGÍA	179
4.10. CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS	181
4.11. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE EVALUACIÓN	185
4.12. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO	188
4.12.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS.....	188
4.12.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS	191
4.13. IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL TRATAMIENTO DE LAS TABLAS EN LOS TEXTOS ANALIZADOS	192
<i>CAPÍTULO 5</i>	<i>195</i>
<i>CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN</i>	<i>195</i>
5.1. INTRODUCCIÓN	195
5.2. OBJETIVO DEL ESTUDIO	195
5.3. CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO	196
5.3.1. VARIABLES CONSIDERADAS Y ESPECIFICACIÓN DEL CONTENIDO.....	197
5.3.2. CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE ÍTEMS	199
5.3.3. JUICIO DE EXPERTOS Y APROXIMACIÓN A LA VALIDEZ	201
5.3.4. MUESTRA DE EXPERTOS	202
5.3.5. RESULTADOS DE LA VALORACIÓN DE LOS EXPERTOS	206
5.4. ÍTEMS QUE COMPONEN EL CUESTIONARIO	223
5.5. SÍNTESIS. SIGNIFICADO EVALUADO POR EL CUESTIONARIO	238
<i>CAPÍTULO 6</i>	<i>241</i>
<i>EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES</i>	<i>241</i>
6.1. INTRODUCCIÓN	241
6.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO	242
6.3. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA Y CONTEXTO	244
6.4. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS	245
6.5. RESULTADOS DE LOS ÍTEMS	245
6.5.1. RESULTADOS DEL ÍTEM 1: TRADUCIR UN LISTADO DE DATOS A TABLA DE FRECUENCIAS	245

6.5.2.	RESULTADOS DEL ÍTEM 2. LEER UNA TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS 252	
6.5.3.	RESULTADOS DEL ÍTEM 3. TRADUCIR UN GRÁFICO A TABLA DE FRECUENCIAS.....	259
6.5.4.	RESULTADOS EN EL ÍTEM 4. COMPLETAR UNA TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS	267
6.5.5.	RESULTADOS DEL ÍTEM 5. ARGUMENTAR Y PREDECIR VALORES EN TABLAS 274	
6.5.6.	RESULTADOS DEL ÍTEM 6. TRADUCIR UN GRÁFICO A UNA TABLA DE CONTINGENCIA	279
6.5.7.	RESULTADOS DEL ÍTEM 7. ARGUMENTAR A PARTIR DE UNA TABLA	286
6.5.8.	RESULTADOS DEL ÍTEM 8. LEER TABLA DE FRECUENCIAS CON DATOS AGRUPADOS.....	290
6.5.9.	RESULTADOS DEL ÍTEM 9. TRADUCIR UNA DESCRIPCIÓN VERBAL A TABLA DE CONTINGENCIA	296
6.6.	SÍNTESIS DE RESULTADOS	301
6.6.1.	PUNTUACIÓN GLOBAL DEL CUESTIONARIO	301
6.6.2.	PROPIEDADES PSICOMÉTRICAS DEL CUESTIONARIO.....	304
6.6.3.	RESUMEN DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS.....	310
6.7.	CONCLUSIONES	311
6.7.1.	CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS.....	311
6.7.2.	CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS	314
<i>CAPÍTULO 7</i>		317
<i>CONCLUSIONES</i>		317
7.1. INTRODUCCIÓN		317
7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS GENERALES DEL TRABAJO		317
7.3. PRINCIPALES APORTACIONES		320
7.4. LIMITACIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS		322
<i>REFERENCIAS</i>		325
<i>ANEXO</i>		343

INTRODUCCIÓN

La habilidad en la lectura crítica de datos es una necesidad en el mundo actual, dado que a menudo las tablas y gráficos estadísticos son utilizados para transmitir información en los diferentes medios de comunicación, la prensa o Internet, así como en el ámbito profesional (Gal, 2002; 2019). La adecuada lectura e interpretación de estas representaciones permitirá al ciudadano tomar mejores decisiones en diferentes contextos (Engel, 2019). Estas habilidades han tomado especial relevancia en el periodo de incertidumbre vivido tras la crisis sanitaria generada por el COVID-19, en que los datos tienen un rol fundamental en las diferentes medidas implementadas para controlar la propagación de la pandemia (Rodríguez-Muñiz et al., 2020).

Dada la relevancia de los diferentes tipos representaciones en la formación de los ciudadanos. La tabla estadística cumple un importante papel en la representación de la información, como en el desarrollo del razonamiento estadístico. Asimismo este objeto matemático posee una alta presencia en los lineamientos curriculares de diferentes países (MECD, 2014; MINEDUC, 2018; NCTM, 2014). Sin embargo, a pesar de su relevancia, existe una carencia de investigaciones que aborden, de manera exclusiva, este contenido (Koschat, 2005; Estrella y Estrella, 2020) producto, principalmente, de su aparente simpleza (Duval, 2003; Martí, 2009).

Con el fin de ofrecer nuevos resultados en esta línea de investigación, y contribuir en la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las tablas estadísticas, esta Tesis doctoral aborda dos problemas relacionados:

- a. El análisis del contenido sobre las tablas estadísticas en los libros de texto de Enseñanza Básica de Chile y España, con la finalidad de aproximarse a la descripción del significado institucional de referencia en torno al tema en ambos países.
- b. La evaluación de los conocimientos sobre tablas estadísticas en una muestra de estudiantes españoles de Educación Secundaria, con la finalidad de caracterizar el significado personal que alcanzan dichos estudiantes del tema.

La Tesis se organiza en torno a siete capítulos relacionados, los cuales describen y fundamentan la investigación desarrollada. A continuación, se sintetizan los contenidos de cada uno de estos capítulos.

En el Capítulo 1 se expone el problema de investigación, justificando la importancia de la tabla estadística en la formación del estudiante como dentro de la propia estadística. Se analiza su presencia en las directrices curriculares chilenas y españolas, junto a una perspectiva internacional. Asimismo se describen los fundamentos, que son las diferentes herramientas teóricas que ofrece el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino et al. 2007; 2019). Se finaliza con un análisis semiótico de este objeto matemático, y la presentación de los objetivos e hipótesis de esta investigación.

El Capítulo 2 resume las investigaciones consultadas más relevantes sobre tablas estadísticas, describiendo los diferentes componentes de este objeto matemático, así como los modelos que describen los procesos que inciden en la comprensión de la tabla. Se

analizan las jerarquías que variados autores proponen para describir los niveles de lectura y complejidad semiótica de los gráficos, que también son válidos para el caso de las tablas estadísticas, destacando los que serán utilizados en este trabajo. A continuación, se describen y clasifican los resultados de las diferentes investigaciones analizadas, considerando la lectura y la construcción de tablas estadísticas. Se completa este análisis con una síntesis de investigaciones sobre análisis de tablas estadísticas en libros de texto dirigidos a diferentes niveles educativos.

Los Capítulos 3 y 4 presentan los resultados del estudio de libros de texto chilenos y españoles dirigidos a la Educación Básica, respectivamente. La muestra se conforma de un amplio número de textos, los cuales abarcan los últimos cursos de la Educación Básica en ambos países. Para el análisis se consideran diferentes variables, muchas de ellas descritas en los antecedentes, comparando entre libros de un mismo curso, editorial y país. Asimismo, se caracteriza el significado de la tabla en los libros de cada país, identificando algunos conflictos semióticos potenciales. Dichos análisis permiten caracterizar el significado institucional de referencia implementado para los cursos abordados, y que junto al estudio de las directrices curriculares, se conforma en la base para la posterior construcción de un instrumento de evaluación.

La información obtenida en el análisis de los libros de texto junto a las investigaciones previas fueron el apoyo para la construcción del instrumento de evaluación. En el Capítulo 5 se detalla en profundidad el proceso de elaboración del cuestionario utilizado en este estudio, el cual fue desarrollado de manera rigurosa y sistemática de acuerdo a normas metodológicas (Cohen et al, 2018). Para la construcción del cuestionario se partió de la elaboración de un banco de ítems que consideró las diferentes variables establecidas previamente. La selección de los ítems que conformarían el cuestionario final fue realizada mediante una valoración de juicio de expertos en Didáctica de la Matemática, quienes debían seleccionar el ítem más idóneo entre tres opciones de acuerdo al objetivo de investigación. Cabe destacar que todos los expertos consultados son académicos especialistas que investigan temáticas en Educación Estadística. A lo largo del capítulo se describen los resultados de dicha evaluación, finalizando con un análisis semiótico de cada uno de los ítems que componen el cuestionario final y que sería aplicado a una muestra de estudiantes españoles de 1º y 3º curso de ESO.

En el Capítulo 6 se describen los resultados del estudio de evaluación realizado con dicho instrumento, el cual fue aplicado a una muestra de 277 estudiantes españoles de 1º y 3º curso de la Educación Secundaria Obligatoria, pertenecientes a dos centros públicos de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Se presenta en detalle los resultados obtenidos en cada uno de los nueve ítems propuestos, en los cuales se valoró la calidad de la respuesta, nivel de lectura alcanzado, así como los conflictos semióticos cognitivos observados. Dicho análisis contempló también la puntuación total de cada ítem así como del total del cuestionario, según curso. El análisis incorpora también el estudio de las características psicométricas del instrumento, como el índice de dificultad, discriminación de los ítems, fiabilidad y validez. Finalmente, se caracteriza y resume los variados tipos de conflictos semióticos detectados en las respuestas de los estudiantes.

Para finalizar, en el Capítulo 7 se discuten las conclusiones respecto a los objetivos planteados, analizando las principales aportaciones, entre las que destacan la caracterización detallada del significado institucional de referencia del objeto matemático tabla estadística, el significado personal atribuido por parte de los estudiantes a propósito del estudio de evaluación, cuyos resultados han sido publicados en diferentes contribuciones. Para cerrar el capítulo se identifican líneas de trabajo futuras junto a las limitaciones de estudio.

La memoria finaliza con la incorporación de las referencias utilizadas y un anexo que detalla los trabajos derivados de esta Tesis doctoral, ya sean publicaciones o presentaciones en diferentes congresos.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

- 1.1. Introducción
- 1.2. Las tablas estadísticas
 - 1.2.1. Importancia de la tabla estadística para el estudiante
- 1.3. Las tablas estadísticas en el currículo
 - 1.3.1. Las tablas estadísticas en el currículo chileno
 - 1.3.2. Las tablas estadísticas en el currículo español
 - 1.3.3. Perspectiva internacional
- 1.4. Marco teórico
 - 1.4.1. Significado de un objeto matemáticos
 - 1.4.2. Tipos de objetos y procesos matemáticos
 - 1.4.3. Facetas duales del conocimiento matemático
 - 1.4.4. Función semiótica y conflictos semióticos
 - 1.4.5. Idoneidad didáctica
- 1.5. La tabla estadística como objeto matemático: un análisis semiótico
 - 1.5.1. Tipos de tablas
 - 1.5.2. Situaciones-problema
 - 1.5.3. Lenguaje
 - 1.5.4. Conceptos
 - 1.5.5. Propiedades
 - 1.5.6. Procedimientos
 - 1.5.7. Argumentos
 - 1.5.8. Configuraciones ontosemióticas
- 1.6. Objetivos generales del trabajo
- 1.7. Hipótesis iniciales
- 1.8. Organización del trabajo y características metodológicas

1.1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad nos encontramos en presencia de un amplio acceso a la información y resúmenes estadísticos, pues distintas organizaciones nacionales e internacionales las proporcionan a través de sus plataformas digitales. Igualmente la televisión, los periódicos, sitios de Internet, presentan también escenarios con gran variedad de datos estadísticos (Gal, 2002; 2019).

Así, resulta de importancia una formación en estadística que proporcione a las personas herramientas que les permitan hacer inferencias, distinguir la información relevante, y realizar operaciones matemáticas con los datos contenidos en gráficos o tablas. En resumen, los ciudadanos requieren poder comprender e interpretar la información recibida a través de diferentes formatos, y de esta manera tomar mejores decisiones (Arteaga et al., 2011; Batanero, 2013; 2019; Engel, 2019).

Por estas razones, en el currículum escolar de distintos países, como Chile y España (MECD, 2014; MEFP, 2022a; MINEDUC, 2018), se ha incorporado el estudio de la estadística y la probabilidad desde temprana edad, reconociendo su importancia en la formación de los ciudadanos (Burrill y Biehler, 2011). En esta línea, desde hace más de treinta años, el Currículo y Estándares de Evaluación para Matemáticas Escolares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2014), sostiene la importancia de que los estudiantes aprendan a

analizar datos de manera descriptiva e inferencial, pues los resultados de estudios muestran que su interpretación y uso por los estudiantes es muy superficial, incluso en alumnos de ciencia con talento (Eshach y Schwartz, 2002).

La incorporación de la estadística a partir de los primeros niveles educativos, ha provocado un aumento de la investigación sobre las maneras de enseñar y aprender esta disciplina. Cazorla (2002), indica que una de las líneas fundamentales en este campo de investigación, es el desarrollo de habilidades para resolver problemas y analizar datos, razón que motiva a conocer el uso de representaciones, en este caso la tabla estadística, que permite a las personas resolver problemas (Larkin y Simon, 1987).

Profundizar en el formato tabular, implica abordar la variedad de tipos y usos de las tablas estadísticas, ya que aunque existen algunas investigaciones dirigidas al estudio de las gráficas y tablas de manera conjunta, en la mayor parte de ellas, el énfasis está sólo en los gráficos estadísticos (Gabucio et al., 2010). Es necesario, entonces, examinar los aspectos que diferencian los variados tipos de representaciones tabulares, con el fin de distinguirlas para conocer las dificultades cognitivas que pueden surgir en su estudio (Martí, 2009).

Como sugiere Moore (1991), la estadística es la ciencia de los datos, y las tablas estadísticas cumplen un rol importante en la comunicación y organización de la información. Por otra parte, coincidimos con Koschat (2005) en que las tablas estadísticas han sido desatendidas, lo que se manifiesta, por ejemplo, en una carencia de calidad de las tablas que exponen informaciones cotidianas en diferentes medios de comunicación.

En este contexto, se plantea evaluar la comprensión de los escolares de las tablas estadísticas, a partir de un cuestionario de elaboración propia. Previamente, se realizará un análisis de la presentación de este contenido matemático en una muestra de textos escolares chilenos y españoles, centrando la atención en los niveles de 5° a 8° Básico (10 a 13 años) en el caso chileno, mientras que en el contexto español se aborda de 5° y 6° curso de Educación Primaria y de 1° a 4° de Educación Secundaria Obligatoria, que son los niveles educativos en donde se desarrolla en profundidad el tema en ambos países.

A continuación, se profundiza en la problemática de investigación, analizando el marco curricular del tema y su significado desde el marco teórico de esta investigación, concretando con ello los objetivos e hipótesis de este trabajo y describiendo su organización y metodología.

1.2. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS

Las tablas y gráficos estadísticos son herramientas eficaces para la resolución de problemas, y en la organización, comunicación y análisis de grandes cantidades de datos (Cazorla, 2002), y por esta razón son frecuentemente utilizadas, en variados contextos. En este sentido, autores como Burgess (2002) advierten la importancia de que el estudiante sea capaz de representar datos en una tabla, incorporando en ella más de una variable, pues este proceso permitirá generalizar y con ello establecer mejores conclusiones.

Aparentemente, las tablas estadísticas son una manera sencilla de organizar la información, ya que en muchas situaciones las personas presentan datos en tablas, pero a

menudo son difíciles de interpretar (Eshach y Schwartz, 2002). Duval (2003) sostiene que la facilidad para tratar con este objeto es falaz, porque existe una variedad de tipos de tablas estadísticas que deben ser leídas de manera diferente. Además, su construcción es una tarea cognitivamente compleja, donde uno de los principales requisitos es comprender el listado de datos, que es, en sí mismo un tipo de tabla, ya que de esto dependerá la tabla que se utilice, y con ello el nivel de comprensión requerido para su adecuada elaboración. A pesar de que los estudiantes utilizan representaciones tabulares en distintos temas de la matemática, o en otras materias, las tablas estadísticas conllevan una especial dificultad, como se analizará en este capítulo y el siguiente.

Por otra parte, la existencia de distintos tipos de tablas estadísticas, precisa de diferentes procesos cognitivos, por lo que resulta importante ofrecer a los estudiantes tareas que promuevan su construcción, lectura, análisis e interpretación, enfatizando en su diversidad, fortalezas y debilidades. Al respecto, se deben considerar dos puntos fundamentales en cuanto a la construcción y tratamiento de tablas estadísticas, como son, la organización de la propia representación, es decir la componente semiótica asociada a la tabla, y la parte cognitiva, la cual requiere de un análisis de las cualidades de las tablas y sus relaciones respecto a las diferentes representaciones gráficas (Duval, 2003).

Otro aspecto de importancia en una tabla, lo constituye la visualización (Henriques y Ponte, 2014), ya que, usualmente, las tablas son caracterizadas por la información que administran, clasificada en filas y columnas. Estrella y Estrella (2020) consideran esta representación ventajosa, porque permite ordenar la información por medio de la intersección de filas y columnas, distribuyéndolas visualmente, lo que la convierte en una distribución gráfica en la que se muestra información cualitativa y cuantitativa, facilitando la interpretación de la información y la resolución de problemas.

1.2.1. IMPORTANCIA DE LA TABLA ESTADÍSTICA PARA EL ESTUDIANTE

Según Wild et al. (2018), la relevancia que está adquiriendo la estadística y probabilidad involucra un reto para educadores e investigadores en la exploración de maneras de enseñanza y aprendizaje. Cobb (2015) y Ridgway (2015), de forma paralela, sugieren una revisión de los planes de estudios de estadística a nivel universitario, en lo que respecta a los currículos tanto de primaria, como de secundaria, en busca de potenciar el razonamiento de habilidades para tratar con datos. Esto explica la introducción de la estadística desde temprana edad en los currículos de diversos países (Alsina et al., 2021).

El estudio de las tablas estadísticas resulta importante en la formación del estudiante, debido a que es uno de los principales medios para exponer información de variados ámbitos. Feinberg y Wainer (2011) afirman que las tablas son el formato más utilizado y continuará su predominancia, especialmente, en las ciencias, dado que esta representación permite registrar datos reales, presentes en diversos aspectos de la vida cotidiana. Por su versatilidad y variedad de usos, los estudiantes entran en contacto con estas desde muy temprana edad, y en variados contextos, con el supuesto de que las tablas son sencillas, tanto en su interpretación como en su construcción. Una de las razones para considerarlas simples, podría ser creer que son una consecuencia del aprendizaje de leer, escribir y operar, entre otros (Martí, 2009).

Las tablas son familiares para los profesores por su flexibilidad cognitiva, que les permite representar diversos contenidos o referentes (Eilam et al., 2014). Sin embargo, Martí (2009) señala que su enseñanza explícita es escasamente abordada en la escuela primaria, y las tareas que las involucran apuntan a su interpretación o completación. Solo en algunas ocasiones se desarrollan tareas como la construcción, en la que se organice sistemáticamente un conjunto de datos, labor que es fundamental, porque permite al estudiante aplicar una serie de herramientas cognitivas que promueven reorganizar los datos y resolver problemas con éxito. Igualmente Koschat (2005) manifiesta que en la enseñanza de las tablas estadísticas se priorizan los procedimientos, o uso de pautas rutinarias y sobre todo, se centra más la atención en las características que debe poseer un gráfico, pero se descuidan los aspectos fundamentales para la construcción de una tabla, como son: la elección de las filas y columnas que la componen, la disposición de la información en dichas filas y columnas, o la presentación de los datos según el conjunto numérico, factores primordiales para su construcción e interpretación (Martí, 2009).

Así mismo, constituyen un soporte fundamental en el estudio de una variable estadística bidimensional (Gea, 2014). Una tabla estadística ofrece una estructura específica del espacio, donde no sólo se muestran números, sino toda la diversidad de relaciones posibles entre ellos. Así, su adecuada construcción requiere seguir ciertas convenciones (Estrella, 2014; Feinberg y Wainer, 2011) con el objeto de facilitar su lectura, interpretación, y trabajar diferentes conceptos implícitos en ella como, por ejemplo, la asociación, la probabilidad, o el estudio de las distribuciones unidimensionales (Ortiz, 2002).

En resumen, las tablas estadísticas son frecuentemente empleadas, tanto dentro como fuera de la escuela, y permiten organizar la información con el objeto de favorecer la correcta interpretación de los datos y así dar respuesta a interrogantes planteadas inicialmente, o formular nuevas cuestiones una vez analizadas. Con todo ello, se muestra la relevancia de esta representación, en la formación de los estudiantes; sin embargo, su enseñanza y aprendizaje no está exenta de dificultades, lo que ha sido escasamente abordado por la literatura (Brizuela y Lara-Roth, 2002; Garcia-Mila et al., 2014).

1.3. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL CURRÍCULO

El trabajo se enmarca en el último ciclo de la Enseñanza Básica del sistema educativo chileno y los últimos cursos de la Enseñanza Primaria junto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en España, por lo que centramos la atención en los objetivos de aprendizaje propuestos en las bases curriculares decretadas por el Ministerio de Educación de Chile para este nivel (MINEDUC, 2015; 2018) y los Reales Decretos españoles (MECD, 2014; 2015). A continuación, se presenta un análisis de los documentos curriculares de ambos países, el cual es complementado por otros, como los Principios y estándares para la matemática del NCTM (2014) y el Proyecto GAISE (Franklin et al., 2005).

1.3.1. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL CURRÍCULO CHILENO

La Educación Básica en Chile es obligatoria y comprende desde los 6 a los 13

años (1° a 8° Básico), en el presente estudio se aborda la enseñanza de las tablas estadísticas desde 5° a 8° Básico (10 a 13 años). Los lineamientos curriculares en Chile son establecidos por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2015; 2018). Para la Enseñanza Básica, dichos documentos promueven el desarrollo de un pensamiento matemático basado en cuatro habilidades: resolver problemas, representar, modelar y, argumentar y comunicar. También plantean el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), como un apoyo para la organización de información y comunicación de resultados.

Tabla 1.3.1.1. Objetivos de aprendizaje sobre tablas estadísticas en Enseñanza Básica en Chile (MINEDUC, 2015; 2018)

Curso	Objetivos de Aprendizaje sobre tablas estadísticas
1°	-Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.
2°	-Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas. -Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.
3°	-Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. -Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.
4°	-Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos. -Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.
5°	-Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones.
6°	-Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.
7°	-Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo. -Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: <ul style="list-style-type: none"> • Utilizando frecuencias relativas. -Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.
8°	-Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles: <ul style="list-style-type: none"> • Identificando la población que está sobre o bajo el percentil. • Representándolas con diagramas, incluyendo el diagrama de cajón, de manera manual y/o con software educativo. -Evaluar la forma en que los datos están presentados: <ul style="list-style-type: none"> • Justificando la elección del gráfico para una determinada situación y su correspondiente conjunto de datos.

El currículo chileno contempla cinco ejes en la asignatura de matemática para los estudiantes de 1° a 6° Básico (MINEDUC, 2018): (1) Números y operaciones; (2) Patrones y álgebra; (3) Geometría; (4) Medición; y (5) Datos y probabilidades; mientras

que para 7° y 8° Básico los ejes son (MINEDUC, 2015): (1) Números; (2) Álgebra y funciones; (3) Geometría; y (4) Probabilidad y estadística.

Las tablas estadísticas se incorporan en los ejes de *Datos y probabilidades* (1° a 6° Básico), y *Probabilidad y estadística* (7° Básico a 2° Medio). Los aprendizajes esperados son detallados en la Tabla 1.3.1.1, donde se observa que en los primeros tres cursos de Enseñanza Básica se trabaja con tablas de conteo, como medio de registro de datos propios del entorno cercano al estudiante. En cuarto curso, se introduce el uso de las tablas de frecuencia, principalmente, como procedimiento previo para construir gráficas, con información emanada de diferentes fuentes o resultados de juegos aleatorios, lo que hace que la herramienta tabular y gráfica sea considerada como medio que permite al estudiante establecer conclusiones sobre situaciones-problema en diferentes contextos.

En quinto curso se inicia el estudio más profundo de las tablas, puesto que se incorpora el estudio de la tabla de datos de doble entrada (Figura 1.3.1.1), asociada a tareas de completar, interpretar y traducir de lenguaje tabular a gráfico de línea. Esta enseñanza es continuada en sexto curso, a partir de la información presentada en tablas, los estudiantes deben construir gráficos de barras doble, y además se añade el estudio de los gráficos de tallo y hoja; por ejemplo en la Figura 1.3.1.2, se pide traducir desde una tabla de datos a un diagrama de tallo y hojas.

b Leer e interpretar la información correspondiente a las temperaturas máximas de los diez primeros días del mes de octubre en los años 2009 y 2010

	2009	2010
01/10/2010	22°	24°
02/10/2010	25°	25°
03/10/2010	26°	20°
04/10/2010	21°	18°
05/10/2010	18°	19°
06/10/2010	20°	21°
07/10/2010	25°	18°
08/10/2010	26°	20°

Figura 1.3.1.1. Ejemplo de actividad 5° Básico (MINEDUC, 2013a, p. 147)

La tabla siguiente muestra las edades de 10 familiares de los alumnos de 6° básico Fabián y Carla.

Edad de 10 familiares	
Fabián	18 19 20 24 45 48 75 79 14 20
Carla	14 14 13 16 40 42 19 20 63 64

- a Ordenan los datos de menor a mayor.
- b Los representan en un diagrama de tallo y hojas.
- c Los comparan, usando las representaciones anteriores.

Figura 1.3.1.2. Ejemplo de actividad 6° Básico (MINEDUC, 2013b, p. 140)

En séptimo curso aparecen las tablas de frecuencias absolutas y relativas (porcentual), las cuales son utilizadas para registrar datos de una muestra, o de experimentos aleatorios como en la Figura 1.3.1.3, posteriormente en dicha tarea se solicita representar la información en un gráfico circular y de barras.

Lanzan un dado 60 veces y completan la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	
Cantidad de veces que salió experimentalmente							60
Parte del total							
Porcentaje							

- › Hacen un gráfico circular con los datos de la tabla.
- › Hacen un gráfico de barra con los datos de la tabla.

Figura 1.3.1.3. Ejemplo de actividad 7° Básico (MINEDUC, 2016a, p. 167)

En octavo curso, se incluyen las medidas de posición (percentiles y cuartiles) en diferentes tipos de representaciones. Cabe señalar, que los lineamientos recomiendan, en sus objetivos de aprendizaje, la utilización de herramientas tecnológicas, con el objeto de profundizar en el análisis de los datos, y con ello poder realizar mejores descripciones y conjeturas respecto a su comportamiento, como es posible de apreciar en la Figura 1.3.1.4.

1. Al inicio del año escolar, los alumnos del 8° nivel de un colegio efectuaron una encuesta con la pregunta: ¿cuántos libros leíste en tus vacaciones? El resultado está documentado en la siguiente lista:

CANTIDAD DE LIBROS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NÚMERO DE ALUMNOS	14	9	3	1	1						2

- a. ¿Qué llama la atención al ver la distribución de las frecuencias?
- b. Calculan la media de los libros leídos, sin considerar los alumnos que leyeron 10 libros cada uno.
- c. Calculan el percentil 50 (la mediana) de todos los libros leídos, lo comparan con el resultado del ejercicio a. y comentan la diferencia.
- d. Determinan la mediana de la distribución de los datos.
- e. Determinan la moda de la distribución de los datos.
- f. ¿Cuál de las medidas de tendencia central representa mejor la distribución de los datos? Explican y comunican las respuestas.

Figura 1.3.1.4. Ejemplo de actividad 8° Básico (MINEDUC, 2016b, p. 170)

Por último, las tablas estadísticas son consideradas en las actitudes que deben promoverse de manera integrada con los conocimientos y habilidades de la asignatura, en concreto, para la habilidad de *Representar*:

Se espera que los alumnos extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación (MINEDUC, 2015, p. 97).

1.3.2. LAS TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL

El organismo que establece los lineamientos curriculares en España es el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD, 2014; 2015). La Educación Primaria obligatoria se compone de tres ciclos, cada uno compuesto de dos cursos escolares y comprende desde los 6 a los 11 años de edad, mientras que la Educación Secundaria Obligatoria comprende dos ciclos, el primero compuesto de tres cursos escolares y el segundo de uno y abarca a estudiantes desde los 12 a los 16 años de edad. Los estudiantes

de Enseñanza Secundaria a partir del tercer curso podrán optar a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas o bien a Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas (MECD, 2015, p.178).

La Educación Primaria, se rige por el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, el cual establece que uno de los objetivos asociados a la matemática será que los niños y niñas puedan “desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlo a situaciones de su vida cotidiana” (MECD, 2014, p. 19354).

Los contenidos de la asignatura de matemática, en Educación Primaria se organizan en cinco bloques, el primero de ellos es de carácter transversal: (1) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; (2) Números; (3) Medida; (4) Geometría; (5) Estadística y probabilidad. Estos bloques se pueden interconectar, además, su tratamiento se puede organizar y secuenciar según el interés de cada centro educativo.

La tabla estadística, al igual que en otros países (NCTM, 2014), se contempla en el sistema educativo español desde los primeros niveles educativos, a través del estudio de las frecuencias absolutas y relativas para analizar situaciones del entorno cercano del estudiante (MECD, 2014). En la Tabla 1.3.2.1 se recogen los contenidos, criterios de evaluación junto a los estándares de aprendizaje evaluables del bloque de Estadística y Probabilidad (MECD, 2014, p. 19393).

Podemos observar que estos contenidos son detallados en lo que se refiere a la evaluación, pues se incluyen criterios y estándares de aprendizaje evaluables. Respecto a nuestro objeto de estudio, la tabla estadística, se encuentra presente tanto de manera explícita como implícita, pues los datos recolectados en una investigación son ordenados y clasificados a través de tablas estadísticas y posteriormente estos pueden ser representados en gráficos estadísticos. También para el cálculo de medidas de tendencia central, la tabla estadística es utilizada, ya sea proporcionando la información o como soporte para facilitar los cálculos cuando se trabaja con grandes cantidades de datos.

Tabla 1.3.2.1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con tablas estadísticas, Bloque de Estadística y probabilidad, Educación Primaria (MECD, 2014, p. 19393)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
- Gráficos y parámetros estadísticos. Recogida y utilizando algunos recursos familiares. Clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.	1. Recoger y registrar información cuantificable, sencillos de representación gráfica: tablas de datos, barras, diagramas lineales, comunicando la información.	1.1. Identifica datos cualitativos y cuantitativos en situaciones familiares. 2.1. Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos, de su entorno, utilizándolos para construir tablas de frecuencias absolutas y relativas.
- Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas.	2. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.	2.2. Aplica de forma intuitiva a situaciones familiares, las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.
- Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagrama de barras, (posible, imposible, seguro, más o	3. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado	2.3. Realiza e interpreta gráficos muy sencillos: diagramas de barras,

<p>poligonales y sectoriales, con datos sencillos en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. - Análisis crítico de las informaciones que se presentan de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las estadísticas.</p> <p>- Carácter aleatorio de algunas experiencias. - Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.</p>	<p>menos probable) de situaciones poligonales y sectoriales, con datos obtenidos de situaciones muy cercanas.</p> <p>4. Identificar, resolver problemas 3.1. Realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.</p> <p>4.1. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos matemáticos adecuados y propios de estadística estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.</p> <p>4.2. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.</p>
--	---

La Enseñanza Secundaria Obligatoria, se enmarca en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Para los cursos de 1º y 2º ESO la asignatura de matemática persigue que el estudiante desarrolle una competencia matemática, entendida como la “habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas” (MECD, 2015, p. 407). La asignatura de matemática de estos primeros dos cursos se compone de cinco bloques, en que el primero de ellos posee un carácter integrador y debe ser abordado simultáneamente en conjunto con los demás: (1) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; (2) Números y Álgebra; (3) Geometría; (4) Funciones; (5) Estadística y probabilidad.

En la Tabla 1.3.2.2 se recogen los contenidos, criterios de evaluación junto a los estándares de aprendizaje evaluables del bloque de Estadística y probabilidad para 1º y 2º curso de ESO (MECD, 2015, p. 473) relacionados con las tablas estadísticas. En este nivel podemos apreciar que se sugiere la incorporación del uso de herramientas tecnológicas en el estudio de la estadística y probabilidad a diferencia de Educación Primaria, estos recursos permiten analizar e interpretar de mejor manera la información, sobre todo cuando se trabaja con un volumen importante de datos.

Tabla 1.3.2.2. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables relacionados con tablas estadísticas, Bloque de Estadística y Probabilidad 1º y 2º de ESO (MECD, 2015, p. 473)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none"> - Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas. - Variables cualitativas y cuantitativas. - Frecuencias absolutas y relativas. - Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. - Medidas de tendencia central. - Medidas de dispersión. - Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos. 2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada. 3. Diferenciar los fenómenos determinados de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad. 4. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente. 1.4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas. 2.1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas. 2.2. Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada. 3.2. Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación. 4.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos.

A partir del 3º curso de la ESO, los estudiantes pueden elegir Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas o bien Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Respecto a las Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, para los dos últimos cursos de secundaria, los estudiantes profundizaran en el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático, “concretamente en la capacidad de analizar e investigar, interpretar y comunicar matemáticamente diversos fenómenos y problemas en distintos contextos, así como de proporcionar soluciones prácticas a los mismos” (MECD, 2015, p. 390). Al igual que en los cursos anteriores, esta asignatura contará con cinco bloques temáticos, en que el primero de ellos tiene un carácter transversal y debe ser tratado de forma simultánea con los demás bloques: (1) Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas; (2) Números y Álgebra; (3) Geometría, Funciones, y (5) Estadística y Probabilidad.

En las Tablas 1.3.2.3 y 1.3.2.4 se presenta un resumen con los contenidos, criterios de evaluación junto a los estándares de aprendizaje evaluables del bloque de Estadística y probabilidad para 3º y 4º curso de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (MECD, 2015, p. 391) relacionados con las tablas estadísticas.

Tabla 1.3.2.3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables con tablas estadísticas, Bloque de Estadística y Probabilidad 3ºESO Matemáticas académicas, (MECD, 2015, p. 391)

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none"> - Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas. - Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. - Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades. - Parámetros de dispersión. - Diagrama de caja y bigotes. - Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. - Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada. 2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas. 3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad. 4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento. 	<ol style="list-style-type: none"> 1.4. Elabora tablas de frecuencias, relaciona los distintos tipos de frecuencias y obtiene información de la tabla elaborada. 2.1. Calcula e interpreta las medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos. 2.2. Calcula los parámetros de dispersión (rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación) de una variable estadística (con calculadora y con hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos. 3.2. Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión. 3.3. Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada. 4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales.

Tabla 1.3.2.4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables con tablas estadísticas, Bloque de Estadística y Probabilidad 4ºESO Matemáticas académicas (MECD, 2015, p. 398)

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
<ul style="list-style-type: none"> - Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Resolver diferentes situaciones problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de proba- 	<ol style="list-style-type: none"> 1.6. Interpreta un estudio estadístico a partir de

y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades.	bilidades y técnicas de recuento adecuadas.	situaciones concretas cercanas al alumno.
- Probabilidad condicionada.	2. Calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.	2.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia.
- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico.	3. Utilizar el lenguaje adecuado para la descripción de datos y analizar e interpretar datos estadísticos que aparecen en los medios de comunicación.	4.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos estadísticos.
- Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.	4. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales y bidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador), y valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.	4.2. Representa datos estadísticos utilizando los medios tecnológicos más adecuados.
- Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.		4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).
- Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.		4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables.
- Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.		

La asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, posee los mismos cinco bloques que la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, sin embargo, su tratamiento se enfoca en la aplicación práctica de conocimientos, en lugar de ahondar en conocimientos teóricos (MECD, 2015). Las Tablas 1.3.2.5 y 1.3.2.6 muestran algunos de los contenidos, criterios de evaluación junto a los estándares de aprendizaje evaluables del bloque de Estadística y probabilidad para 3º y 4º ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas (MECD, 2015) relacionados con las tablas estadísticas.

Tabla 1.3.2.5. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables con tablas estadísticas, Bloque de Estadística y Probabilidad 3ºESO Matemáticas aplicadas (MECD, 2015, p. 403)

Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º ESO		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
- Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: un conjunto de datos cualitativas, discretas y continuas.	1. Elaborar informaciones estadísticas para describir la situación adecuada a la analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la estudiada.	1.4. Elabora tablas de frecuencias, relaciona los distintos tipos de frecuencias y obtiene información de la tabla elaborada.
- Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos.		2.1. Calcula e interpreta las medidas de posición de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos.
- Gráficas estadísticas.		

- Parámetros de posición: media, moda, mediana y cuartiles. Cálculo, interpretación y propiedades.	2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.	2.2. Calcula los parámetros de dispersión de una variable (con calculadora y con hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos.
- Parámetros de dispersión: rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.	3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad	3.2. Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión.
-Diagrama de caja y bigotes.		3.3. Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística que haya analizado
-Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.		

Tabla 1.3.2.6. Contenidos, criterios de evaluación y estándares evaluables con tablas estadísticas, Bloque de Estadística y Probabilidad 4ºESO Matemáticas aplicadas (MECD, 2015, p. 407)

Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º ESO		
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
- Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación.	1. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.	1.3. Emplea el vocabulario adecuado para interpretar y comentar tablas de datos, gráficos estadísticos y parámetros estadísticos.
- Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión.	2. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, en distribuciones unidimensionales, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo), valorando cualitativamente la representatividad de las muestras utilizadas.	2.1. Discrimina si los datos recogidos en un estudio estadístico corresponden a una variable discreta o continua. 2.2. Elabora tablas de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.
- Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.	3. Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con técnicas de recuento como los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.	2.3. Calcula los parámetros estadísticos (media aritmética, recorrido, desviación típica, cuartiles), en variables discretas y continuas, con la ayuda de la calculadora o de una hoja de cálculo. 2.4. Representa gráficamente datos estadísticos recogidos en tablas de frecuencias, mediante diagramas de barras e histogramas.
- Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación.		3.1. Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos.
- Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio.		3.2. Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.
- Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace.		
- Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama de árbol.		

A partir de 3º curso de ESO, en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y aplicadas, además de las tablas con frecuencias absolutas y relativas,

aparecen en los contenidos las tablas que incluyen frecuencias acumuladas y con datos agrupados en intervalos, las que se emplean tanto para el estudio de las medidas de centralización y dispersión, como para el cálculo de probabilidades.

Las tablas de contingencia aparecen en 4º de ESO en las matemáticas académicas y aplicadas, pero con diferente finalidad, en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se emplean para el cálculo de probabilidades condicionadas (Ver Tabla 1.3.2.4), mientras que en las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas se utilizan como un medio para calcular probabilidades simples y compuestas (Ver Tabla 1.3.2.6).

Respecto al uso de la tecnología, los cursos finales de secundaria incluyen la utilización de recursos como calculadoras u hojas de cálculo, con el fin de construir representaciones ya sean tablas o gráficos estadísticos, y también para facilitar o comprobar el cálculo de diferentes estadísticos.

1.3.3. PERSPECTIVA INTERNACIONAL

Las tablas estadísticas, son parte de los contenidos de enseñanza en dos documentos importantes: En los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del NCTM (2000), donde los temas de la estadística y probabilidad aparecen como un eje longitudinal denominado Análisis de Datos y Probabilidad, desde la etapa infantil (nivel K-2) hasta la Secundaria y Bachillerato. Y en el Proyecto GAISE (Franklin et al., 2005), el cual se fundamenta en los principios y estándares marcados por el NCTM, con el principal objetivo de proporcionar un marco conceptual de educación estadística desde la etapa infantil (nivel K-2) hasta la entrada a la universidad.

En relación al NCTM (2000), el bloque de Análisis de Datos y Probabilidad es incorporado por la necesidad de que los estudiantes tengan habilidades estadísticas, que les permitan ser ciudadanos informados, así como consumidores inteligentes. Los estándares contemplan el estudio de las tablas estadísticas, y sus implicaciones, principalmente, a través de un eje que propone que los estudiantes puedan formular y responder preguntas a través de la recopilación y organización de datos. En los primeros niveles educativos y hasta segundo curso se plantean las siguientes expectativas de aprendizaje (NCTM, 2000, p. 112): “Proponer preguntas y recoger datos relativos a ellos y a su entorno; Ordenar y clasificar objetos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquéllos; Representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos”.

En relación a los grados de tercero a quinto, las propuestas relativas a las tablas estadísticas son (NCTM, 2000, p. 180):

Diseñar investigaciones que permitan dar respuesta a ciertas interrogantes y razonar sobre cómo los métodos de recogida de información, pueden afectar al conjunto de datos. Recoger datos de diferentes fuentes (observación, encuestas y experimentos).

- Representar la información recogida en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Diferenciar la representación de datos numéricos y categóricos.
- Representar los datos de diferentes formas, comparar y evaluar qué aspectos importantes, de la información disponible, se evidencian de mejor forma con una u otra forma de representación.
- Entregar justificadamente conclusiones y predicciones, basados de los datos recogidos.
- Comparar representaciones diferentes del mismo conjunto de datos, y evaluar cómo cada

una muestra aspectos importantes de los datos.

En los grados de 6° a 8°, las propuestas relativas a las tablas estadísticas son:

Antes de llegar a los niveles medios, los alumnos deberían haber adquirido experiencia en la recogida, organización y representación de conjuntos de datos. Asimismo, deberían estar familiarizados tanto con las herramientas para representarlos (tablas, diagramas de puntos, de barras y poligonales), como con las medidas de centralización y dispersión (mediana, moda y rango) (NCTM, 2000, p. 253).

En esta etapa, el docente debe profundizar en el estudio de nuevas representaciones que relacionen poblaciones, muestras, o relaciones entre dos variables dentro de una población o muestra según las siguientes expectativas (NCTM, 2000, p. 252):

Seleccionar, crear y utilizar representaciones gráficas apropiadas de datos, incluyendo histogramas, gráficos de caja y nubes de puntos, para discutir y comprender la correspondencia entre conjuntos de datos y sus representaciones; así como utilizar conjeturas para formular nuevas preguntas y programar nuevos estudios para contestarlas.

De manera complementaria, el proyecto GAISE (Franklin et al., 2005) se fundamenta en la importancia de desarrollar el pensamiento estadístico en los estudiantes, enfocando la enseñanza de la estadística como un proceso de investigación, el que involucra la toma de decisiones, y resolución de problemas que permita desarrollar, en los estudiantes, un pensamiento multivariado. Centrando la atención en los conceptos fundamentales del pensamiento estadístico, propone una enseñanza de la estadística activa, mediante el uso de datos reales en contexto, haciendo uso de la tecnología, y donde la evaluación es un medio que tiene el rol de promover la mejora en el aprendizaje del alumno. Para la formación en educación estadística, plantea el seguimiento de etapas de enseñanza como: (1) Formulación de preguntas; (2) Recolección de datos; (3) Análisis de datos; (4) Interpretación de resultados. Este marco promueve una educación estadística progresiva, el logro de objetivos se mide en tres niveles de desarrollo A, B y C, en el que se contempla el uso de la representación tabular como una herramienta de diferente tipo: frecuencias, doble entrada, etc.

En este sentido, Zapata-Cardona (2011), basándose en los principios del proyecto GAISE, destaca la necesidad de fomentar en las aulas el desarrollo de la alfabetización y razonamiento estadístico, a partir de datos reales para promover la comprensión conceptual en lugar de procedimientos algorítmicos, complementado con el uso de la tecnología para el análisis de los datos, así como emplear la evaluación como un instrumento de mejora de aprendizajes.

En definitiva, ambos documentos coinciden en destacar la importancia de promover el desarrollo de habilidades estadísticas en los estudiantes, a través de la recolección y análisis de datos de su interés, desde temprana edad, con el fin de que cuenten con herramientas que les permitan tomar mejores decisiones en su vida cotidiana.

1.4. MARCO TEÓRICO

El presente estudio se basa en los principios que fundamentan el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (en adelante, EOS), que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994;

Godino, 2002; 2003; Godino et al., 2007; 2019). Dicho marco ha provisto a la investigación en Didáctica de la Matemática de una colección de herramientas, según el nivel de análisis didáctico a realizar (Godino, 2017):

- a. El análisis epistémico y cognitivo de las entidades primarias, que parte de los tipos de problemas y sistemas de prácticas que constituyen su significado sistémico, propiciando un terreno firme donde se pueda interpretar la naturaleza de los conflictos semióticos que se manifiesten, así como la elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
- b. El análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; la identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de enseñanza y aprendizaje (dimensión normativa); y
- c. La valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Cada uno de estos niveles de análisis, tiene un peso diferente según el momento del proceso didáctico considerado, y constituye un modo de análisis didáctico que permite describir, explicar y valorar los procesos de estudio (Font et al., 2010).

1.4.1. SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO

En el EOS se concibe la actividad matemática como un conjunto de prácticas (operativas y discursivas), realizadas para resolver problemas que permiten el surgimiento de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; 2019). Se entiende por objeto, todo elemento que interviene en los sistemas de prácticas de tipo ostensivo (símbolos, gráficos, etc.) o abstracto (no perceptivo).

La práctica matemática es entendida como todas las manifestaciones (verbal, gráficas, entre otras), empleadas en la resolución de problemas matemáticos, junto con el transmitir soluciones, aprobarlas, generalizarlas o transferirlas de contexto. Así, se distingue el tipo de práctica en personal, o compartidas por una institución; en este último caso, se conforma por un grupo de personas implicadas en resolver un mismo tipo de situaciones-problema, y que comparten prácticas reguladas por normas y formas de funcionamiento en la propia institución (Godino y Batanero, 1994).

El significado de un objeto matemático es fruto del sistema de prácticas, de índole personal o institucional, que son realizadas a través de dicho objeto matemático y para cada uno de ellos se distinguen diferentes tipos de significados (Figura 1.4.1.1).

El significado institucional, recoge la relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, y los entiende como un sistema de prácticas realizados en una institución (Godino, 2003). Para su análisis didáctico, se propone una tipología de significados, como los que siguen:

- *Referencial*, comprende el sistema de prácticas más amplio inherente al objeto, que se tendrá en cuenta en el saber científico, y del que parten en su elaboración las orientaciones curriculares. Conocer el significado de referencia de un objeto matemático, involucrará profundizar en aspectos históricos-epistemológicos, y explorar los diversos contextos en los que es empleado.
- *Pretendido*, referido al significado restringido propuesto a los estudiantes,

atendiendo a diversos factores, como puede ser las orientaciones curriculares o la planificación de un proceso de enseñanza para un nivel educativo, temporalización, conocimientos previos de los estudiantes, etc.

- *Implementado*, correspondiente al sistema de prácticas realizado de forma efectiva por el profesor en la clase de matemáticas, y puede ocurrir que sean menos que las pretendidas.
- *Evaluado*, es un subsistema de prácticas, que conforman la evaluación del significado adquirido en el proceso de enseñanza y aprendizaje, el que debiera ser representativo del significado implementado.

Por otra parte, en relación al significado personal de un objeto matemático, se proponen los siguientes tipos:

- *Global*, atañe a los sistemas de prácticas personales que un sujeto podría desplegar respecto a un objeto matemático.
- *Declarado*, informa de las prácticas evidenciadas en las tareas de evaluación propuestas por el profesor, se incluyen las respuestas correctas e incorrectas desde la perspectiva institucional.
- *Logrado*, asociado a las prácticas personales en conformidad con la pauta establecida por la institución. El análisis da cuenta de las modificaciones de significados personales luego de la instrucción, para ello es necesario conocer los *significados iniciales* del estudiante y los que *finalmente alcance* (Godino, 2003).

La Figura 1.4.1.1 refleja la lógica del proceso de enseñanza y aprendizaje; en el que se espera una aproximación gradual del significado personal del estudiante al significado institucional. En este sentido, el EOS busca dar respuestas, desde la Didáctica de la Matemática, a los procesos que se dan en la enseñanza de un objeto matemático, a partir, de la perspectiva de los significados institucionales y personales, los que pueden ser profundizados, conforme se avance en el nivel de análisis (Godino, 2012).



Figura 1.4.1.1 Significados institucionales y personales (Godino, 2017, p. 8)

1.4.2. TIPOS DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

En la descripción de la actividad matemática, intervienen y surgen una variedad y diversidad de objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.), y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), los que pueden clasificarse atendiendo a su naturaleza. Cuando los sistemas de prácticas son compartidos en una institución los objetos se identifican como “objetos institucionales”, por otra parte, si surgen en los sistemas de prácticas personales se consideran “objetos personales” (Godino, 2003).

El EOS, en un primer nivel, aborda el análisis epistémico y cognitivo, el que se puede observar desde la dimensión institucional y/o personal. Este análisis persigue explorar los sistemas de prácticas expresadas por un sujeto, o institución, ante una clase de situaciones-problemas, ya que es necesario interpretar los conceptos, medios expresivos y argumentativos, puestos en juego en la resolución de una situación-problema (Godino, 2012).

El marco, como punto de partida, distingue una tipología de objetos primarios (Figura 1.4.1.2) como situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, y argumentos (Godino et al., 2007; 2019). Se empleará esta clasificación para el análisis del significado de la tabla estadística, el que será detallado posteriormente:

- *Situación-Problema*, son las aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, que inducen la actividad matemática. Pueden estar agrupados en tipos o clases de problemas, y es importante que estas situaciones obedezcan a un contexto que permita aplicar conocimientos (Godino et al., 2006). En el presente trabajo, serán analizadas las situaciones propuestas en los libros de texto que involucren tratar con representaciones tabulares.
- *Lenguaje* o elementos lingüísticos, referidos a los términos, expresiones, notaciones o gráficos empleados para representar la información entregada en la situación-problema, las operaciones que se realizan, los objetos matemáticos, y la solución determinada. En nuestro caso la tabla estadística, se constituye un lenguaje por sí misma.
- *Conceptos-definición*, son evocados de forma implícita o explícita, por el resolutor cuando aborda una situación-problema, aparecen mediante definiciones o descripciones. Por ejemplo, tipo de variable, frecuencias absolutas, relativas, porcentuales, etc.
- *Propiedades*, son los enunciados de los objetos matemáticos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.
- *Acciones o procedimientos*, corresponden al conjunto de acciones que realiza el sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo). Por ejemplo, recoger datos, y luego con ellos construir una tabla de frecuencias absolutas.
- *Argumentos*, son los enunciados (propiedades, teoremas, etc.) usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, o bien la solución de los problemas. Por ejemplo, justificar el valor faltante de una frecuencia relativa asociada a una categoría, con el argumento de que el total de la suma de frecuencias relativas de todas las modalidades que toma una variable unidimensional es igual a 1.

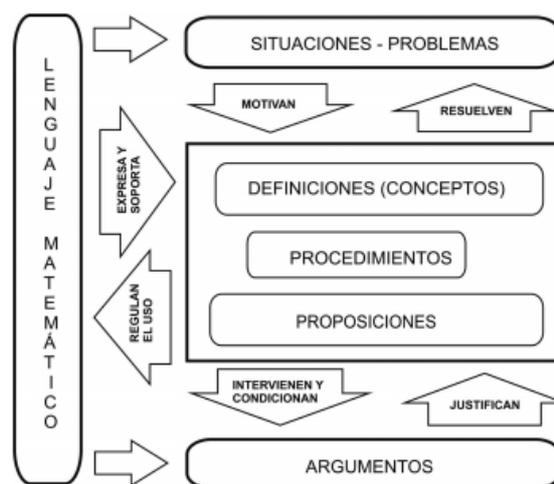


Figura 1.4.1.2. Configuración de objetos primarios (Font y Godino, 2006, p. 69)

La interacción de los objetos, antes mencionados, forman configuraciones que pueden ser de tipo epistémico (si son propias de una institución) y cognitivo (si son específicas del estudiante). A partir de las prácticas, un objeto matemático adquiere un sentido y significado (Ramos y Font, 2006), el cual es posible clasificar en diferentes clases de prácticas más específicas, las que provienen de una configuración epistémica (redes de objetos institucionales), o cognitivas (redes de objetos personales).

Con el fin de realizar un análisis más profundo de la actividad matemática, a partir de los objetos primarios detallados anteriormente, es posible establecer criterios para categorizar los procesos matemáticos asociados. El surgimiento de objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar a través de los correspondientes procesos matemáticos primarios de comunicación, planteamiento de problemas, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmos, rutinas, etc.) y argumentación (Godino et al., 2007; 2019). Por otra parte, la resolución de problemas y el modelamiento matemático, son considerados como mega-procesos en los que intervienen los señalados anteriormente (Font et al., 2010), por medio de configuraciones complejas de procesos matemáticos primarios, en el que se establecen conexiones entre los objetos, generalizando técnicas, reglas y justificaciones (Godino et al., 2007; 2019).

1.4.3. FACETAS DUALES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Este modelo, a su vez, es complementado con otras herramientas que permiten describir y relacionar diferentes objetos matemáticos que participan en las prácticas matemáticas, de acuerdo al contexto y juego de lenguaje en que se desarrollen. Para ello, se consideran cinco facetas o dimensiones duales: institucional y personal, ostensiva y no ostensiva, extensiva e intensiva, unitaria y sistémica, expresión y contenido.

Faceta institucional y personal

Dependiendo del foco de interés el que puede ser el sujeto, la institución, o bien la interacción entre ambos, se considera esta faceta del conocimiento matemático. Si se centra en el sujeto, hablamos de objetos personales (faceta personal del conocimiento

matemático), como por ejemplo, la respuesta entregadas por los estudiantes ante tareas, o evaluaciones. Por otra parte, si se considera la institución, a través de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor en la clase, hablamos de faceta institucional del conocimiento matemático. La distinción entre la faceta personal e institucional de los conocimientos matemáticos, cobra especial relevancia en la descripción y explicación de las interacciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2002).

Faceta ostensiva y no ostensiva

Los objetos matemáticos, a nivel personal e institucional, tienen una faceta ostensiva (perceptible) y otra no ostensiva (abstracta). Esta distinción se adapta a los diferentes objetos primarios (y secundarios). Un objeto ostensivo, como una palabra, un gráfico, también es posible que sea pensado o imaginado, por un sujeto o en el discurso matemático institucional, un ejemplo de ello es la ausencia del signo de multiplicar en la notación algebraica (Godino et al., 2007; 2019).

Faceta extensiva e intensiva

En la actividad matemática, de manera progresiva se van generalizando los objetos matemáticos, cuando se avanza en nivel educacional. Distinguir lo particular de lo general, y el nivel de abstracción para conseguir la generalización, ha sido asumido por la dualidad extensiva e intensiva. Un objeto extensivo corresponde a un caso particular de una clase más general, lo que corresponde a un objeto intensivo. Por ejemplo, la función $y = 3x+5$ (objeto extensivo), es un caso particular de la familia de funciones lineales de la forma $y = mx+n$ (objeto intensivo).

Faceta unitaria y sistémica

En el trabajo matemático, el sujeto despliega, en la mayoría de los casos, una serie de objetos matemáticos con un significado conocido para él, y los utiliza como herramientas para desarrollar una determinada tarea. Los objetos matemáticos conocidos, son considerados entidades unitarias. Por ejemplo, en la enseñanza de los algoritmos para la suma y la resta, en Educación Primaria, el sistema decimal (decenas, centenas, etc.) se considera algo conocido o unitario (Godino, 2002).

Faceta expresión y contenido

Corresponden al antecedente y consecuente de las funciones semióticas. En la actividad matemática y en los procesos de construcción y uso de objetos matemáticos, se caracterizan por estar relacionados. La distinción entre expresión y contenido permite tener presente que los objetos no se encuentran aislados, sino que estos se relacionan unos con otros, lo que implica finalmente que la actividad matemática tiene un carácter relacional. Cada tipo de objeto, puede tomar el rol de significante o significado en las funciones semióticas establecidas por una persona o institución (Godino et al., 2007; 2019).

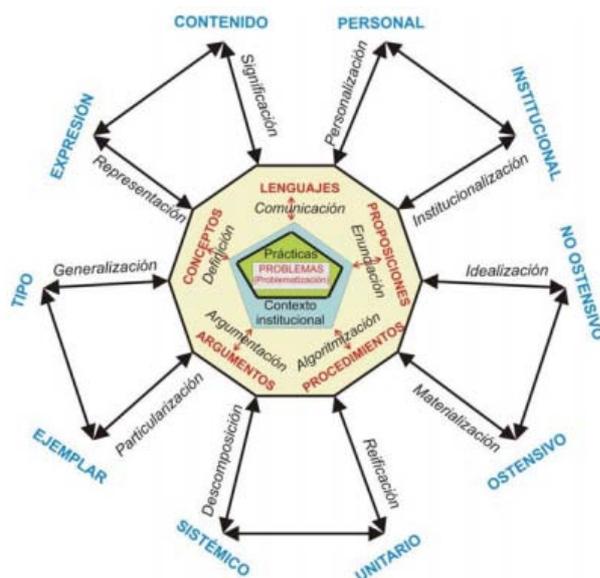


Figura 1.4.1.3. Configuración ontosemiótica (Godino, 2017, p. 9)

Las facetas detalladas anteriormente, son agrupadas en pares que son dualmente y dialécticamente complementarias. En la Figura 1.4.1.3, es posible apreciar los procesos que se pueden generar en cada una de estas facetas:

- Faceta institucional y personal: Institucionalización-personalización.
- Faceta ostensiva y no ostensiva: Materialización/concreción-idealización/abstracción.
- Faceta extensiva e intensiva: Generalización-particularización.
- Faceta unitaria y sistémica: Análisis/descomposición-síntesis/reificación.
- Faceta expresión y contenido: Expresión/representación-significación.

A partir de los sistemas de prácticas con los objetos primarios (lenguaje, situaciones-problema, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) surgen los diferentes objetos secundarios, que por medio de su relación construyen configuraciones ontosemióticas (Figura 1.4.1.3).

1.4.4. FUNCIÓN SEMIÓTICA Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Son variados los autores que han profundizado sobre la comprensión; algunos la entienden como un proceso mental, otros como una competencia (Godino, 2017). Desde una posición pragmática en el EOS, se entiende la comprensión como una competencia, puesto que se considera que un sujeto comprende un objeto matemático, cuando es capaz de emplearlo de forma competente al desarrollar una tarea. Cuando se realizan prácticas matemáticas, se despliegan una serie de objetos matemáticos, los cuales se van relacionando. Un instrumento para un análisis *ontológico-semiótico* de estas relaciones lo constituye la *función semiótica* (Godino, 2003). La idea de *función semiótica* propone la interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O, por parte de un sujeto X (persona o sujeto) de acuerdo a las funciones semióticas que X realiza y en las que participa el objeto O (Godino, 2003). Una función semiótica involucra un acto de semiosis por un sujeto interpretante y se conforma en un conocimiento (Godino et al., 2006).

Dependiendo de las relaciones de dependencia entre la expresión y el contenido

es posible establecer tres tipos de funciones semióticas: si un objeto es puesto, en lugar de otro con cierto propósito lo entendemos como una función *semiótica representacional*. Cuando un objeto emplea a otro, u otros como instrumento lo entendemos como *función semiótica instrumental*; por otra parte, si dos o más objetos conforman un sistema en el que surgen nuevos objetos hablamos de *función semiótica estructural* (Godino et al., 2006).

El estudiante activa su propia trama de funciones semióticas, las que serán apropiadas si se conforman de acuerdo a lo establecido por la institución, en otra circunstancia se considera un *conflicto semiótico*, el que se caracteriza, según Godino (2002), por una “disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (p. 250). Cuando se realiza una confrontación entre los significados asignados a los objetos matemáticos por dos instituciones, o por una persona y un referente institucional, es posible de identificar conflictos semióticos (Godino, 2002). La noción de conflicto semiótico será considerada tanto en el análisis de la muestra de los libros de texto chilenos y españoles, así como en las respuestas entregadas por los estudiantes españoles al cuestionario de evaluación.

1.4.5. IDONEIDAD DIDÁCTICA

El EOS también considera la evaluación del proceso de enseñanza aprendizaje, por medio de la *idoneidad didáctica* (Godino et al., 2007; 2019). Esta se entiende como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte) recoge ciertas características que lo señalen como óptimo o apropiado para adherir los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizajes) y los significados institucionales pretendidos o implementados (asociados a la enseñanza), en el que se tenga presente el contexto y los recursos disponibles (entorno) (Godino, 2017).

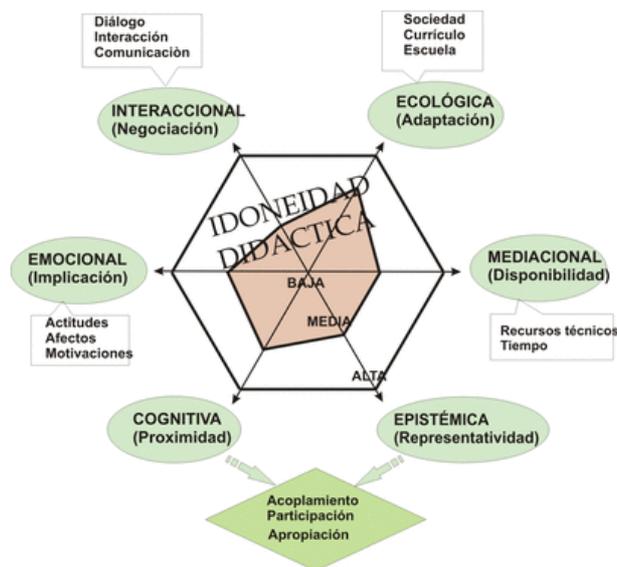


Figura 1.4.5.1. Idoneidad didáctica (Godino, 2017, p. 13)

Es decir, la idoneidad didáctica es una noción que provee de criterios para valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (ver Figura 1.4.5.1), la cual se divide en seis facetas que se articulan de manera coherente y sistemática:

- *Idoneidad epistémica*: Se trata de la representatividad de los significados implementados o pretendidos, respecto al significado de referencia del objeto matemático que se está estudiando. En este caso, corresponde al conocimiento matemático de la tabla estadística, de acuerdo a los objetos matemáticos (problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos) y procesos asociados.
- *Idoneidad cognitiva*: Corresponde al grado en que son adheridos los significados personales logrados con los significados pretendidos/implementados. Para valorarla se debe conocer el razonamiento, aprendizaje y dificultades que presenten los estudiantes. En el caso de las tablas estadísticas, con el análisis de las respuestas entregadas en el cuestionario de evaluación podremos profundizar en este aspecto y valorar si existe una evolución de significados conforme se avanza de nivel escolar.
- *Idoneidad interaccional*: Identifica el grado en que el diseño de enseñanza y aprendizaje permite adelantar posibles conflictos semióticos, y la manera de resolverlos cuando surgen en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: Se corresponde con el conocimiento del uso de herramientas tecnológicas y recursos manipulativos necesarios para la enseñanza aprendizaje, atendiendo al tema en estudio y al nivel escolar al que va dirigido.
- *Idoneidad afectiva*: Es el grado en que los estudiantes se involucran en el proceso de enseñanza. En este tipo de idoneidad, se consideran factores institucionales, del estudiante y su historia escolar.
- *Idoneidad ecológica*: Se refiere al grado en que el proceso de enseñanza aprendizaje se ajusta a un marco local (proyecto educativo del centro) y general (sociedad).

En la idoneidad didáctica, se busca interrelacionar las diferentes facetas que participan en el diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. A pesar de que el logro de una alta idoneidad didáctica, requiere atender a las diferentes facetas, descritas anteriormente, es central prestar mayor interés tanto a la faceta epistémica y mediacional, como a la ecológica. Por otra parte, para avanzar en la superación de las dificultades en el aprendizaje, es necesario trabajar con los significados pretendidos, con acciones como la adaptación al nivel educativo y contexto escolar, y con la incorporación de recursos tecnológicos al proceso de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2013).

De este modo, la idoneidad didáctica es un punto de partida para la construcción de una teoría de la instrucción matemática, dirigida a mejorar de manera paulatina los procesos de enseñanza.

1.5. LA TABLA ESTADÍSTICA COMO OBJETO MATEMÁTICO: UN ANÁLISIS SEMIÓTICO

A continuación, se describe el análisis semiótico de este objeto matemático, según el marco del EOS descrito en la Sección 1.4 de este capítulo, el cual permitirá identificar los diferentes elementos primarios que componen su significado institucional. Cabe señalar, que en términos del EOS, la tabla estadística se enmarcaría en un tipo de lenguaje, sin embargo, como señala Godino (2003) en determinadas circunstancias un elemento del lenguaje, una definición, propiedad o acción puede situarse como el objeto matemático en estudio, lo que ocurre en este caso, desde una perspectiva sistémica en la que se considera su estructura, elementos constitutivos, así como las situaciones en donde cobra sentido. Resultados parciales de este análisis han sido publicados en Pallauta et al. (2020).

1.5.1. TIPOS DE TABLAS ESTADÍSTICAS

Las tablas estadísticas poseen características que la distinguen de las que se puedan emplear en otros campos del conocimiento. Por lo tanto, identificar los tipos de tablas utilizadas en la enseñanza de la estadística, es beneficioso para resaltar la diversidad presente en la materia, las pautas para su lectura y las dificultades que se pueden presentar en su estudio. En este aspecto, Lahanier-Reuter (2003), identifica tres tipos de tablas presentes en la enseñanza de la estadística: tabla de datos, tabla de distribución de variable, y la tabla de contingencia. Cada una de ellas posee un rol y una función específica que la dota de forma y sentido, lo que se analiza a continuación.

Tabla de datos

Habitualmente surgen de una investigación, como uno de sus resultados preliminares, ya que estas tablas permiten la primera organización de un conjunto de datos. Tiene forma de matriz y contiene, para cada individuo de la muestra, los valores de una, o varias variables. Se caracteriza por su gran tamaño, como se puede ver en la Figura 1.5.1.1, dado que poseen tantas filas (o columnas) como individuos. En la parte superior de la tabla existe un encabezado con la descripción de la variable o variables recogidas de cada sujeto y, en ocasiones, estas variables aparecen obedeciendo cierta jerarquía u orden. Generalmente, la primera columna de la izquierda, contiene el listado con los elementos o sujetos del estudio, mientras que en cada una de las siguientes columnas aparecen el listado con los datos asociados a cada variable registrada. En particular, en la Figura 1.5.1.1, las filas corresponden a cada variable registrada (calificación según tipo de evaluación) y sus valores vienen dados por columnas, para cada sujeto.

Interpreta la información de la siguiente tabla en la que se muestran las calificaciones obtenidas por Ramón, Sofía y Carlos en Matemática. Luego, responde.

Calificaciones en Matemática			
Evaluación	Nombres		
	Ramón	Sofía	Carlos
1	4,5	6,0	5,6
2	6,2	4,4	4,5
3	5,5	4,3	6,7
4	4,7	4,3	6,3
5	4,8	5,0	5,4
6	6,5	6,1	6,6
7	6,2	5,9	5,8
Trabajo investigación	6,0	6,6	5,5

Figura 1.5.1.1. Ejemplo de tabla de datos (Castro, 2017, p. 106)

Tabla de distribución de una variable

Esta tabla se construye, generalmente, a partir de los datos emanados de una tabla de datos y describe la distribución de una variable, dado que asocia cada modalidad de la variable, con el número de sujetos (frecuencia) que presentan dicha modalidad. Este tipo de tabla suele representar varias columnas destinadas a diferentes tipos de frecuencias (absolutas, relativas, acumuladas porcentajes), las cuales son indicadas en la parte superior de la tabla (primera fila). En la primera columna se describen las diferentes modalidades o valores de la variable. Y en cada una de las siguientes columnas, las celdas de la tabla contienen la frecuencia que corresponde a dicho valor o modalidad. Estas frecuencias pueden ser descritas con símbolos como x_i , n_i , f_i . En ocasiones, la última fila es destinada para registrar valores totales, según sea el interés. Si el número de valores de la variable o categorías es pequeño, se puede intercambiar filas y columnas en la tabla.

En base a investigaciones (Cobo y Batanero, 2000) que destacan la diferencia que existe en el tratamiento de tablas de distribución de una variable, de acuerdo con los objetos matemáticos que en ellas se incorporan, se han distinguido tres tipos:

Tabla de frecuencias ordinarias. En este tipo, son consideradas las frecuencias absolutas y/o relativas (Figura 1.5.1.2). Se conforma de columnas (o filas) en la primera de las cuales son mostrados los valores, o categorías de la variable (x_i , para $i = 1, \dots, k$), mientras que en las siguientes se representa la frecuencia absoluta (n_i , para $i = 1, \dots, k$) y/o relativa (f_i) para cada modalidad o valor de la variable. Este tipo de frecuencias, son definidas sólo en un conjunto de valores discretos o nominales, que es el conjunto de valores de la variable.

Edad		
Edad (años)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
4	14	
5	10	
6	8	
7	6	
8	2	

Si se pregunta la edad a otro niño del colegio:

- ¿Cuál es la respuesta más probable?

Figura 1.5.1.2. Ejemplo de tabla de frecuencias ordinarias (Santis, 2016, p. 150)

Tabla de frecuencias acumuladas. Su forma es similar a las tabla de frecuencias ordinarias, en la que se incluye una columna para registrar las frecuencias acumuladas, como se puede apreciar en la Figura 1.5.1.3. Sin embargo, se consideró significativo distinguir este tipo de tabla respecto a la anterior, por dos razones, la primera es porque las frecuencias acumuladas, a diferencia de las ordinarias, se definen en un conjunto ordenado de valores, mientras que la segunda razón es que su tratamiento involucra el manejo de desigualdades.

Calcula los valores de los cuartiles a partir de la información de la tabla.

Cantidad de hermanos de un grupo de estudiantes		
Cantidad de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	3	3
1	9	12
2	6	18
3	18	36
4	3	39
5	2	41

Cuartil 1 (25%)	Cuartil 2 (50%)	Cuartil 3 (75%)
$0,25 \cdot 41 = 10,25$ $Q_1 = 1$	$0,5 \cdot 41 = 20,5$ $Q_2 = 3$	$0,75 \cdot 41 = 30,75$ $Q_3 = 3$

Figura 1.5.1.3. Ejemplo de tabla de frecuencias acumuladas (Catalán et al., 2016, p. 317)

Tabla de frecuencias agrupadas en intervalos: La estructura matemática de este tipo de tabla es compleja (Mayén et al., 2009), ya que involucra agrupar las modalidades de una variable en intervalos, lo que implica el trabajo con valores aproximados, y no los originales. Es necesario tener presente, que en este tipo de tablas el significado de los diferentes tipos de frecuencias se referirá a intervalos de valores, en lugar de valores discretos o nominales. Por lo mismo, en la Figura 1.5.1.4 se pide al estudiante solo indicar el intervalo en que se encuentra cada cuartil, dado que el libro de texto se dirige a un nivel educativo en el que aún se carece de conocimientos para poder determinarlo.

Determina el intervalo en que se encuentra cada cuartil.

Ingreso mensual de 128 familias	
Ingreso (miles de pesos)	Frecuencia absoluta
$[0, 100[$	10
$[100, 200[$	28
$[200, 300[$	34
$[300, 400[$	40
$[400, 500]$	16

a. Cuartil 1.
b. Cuartil 2.
c. Cuartil 3.

Figura 1.5.1.4. Ejemplo de tabla agrupadas en intervalos (Catalán et al., 2016, p. 317)

Tabla de contingencia

Corresponde a la tabla que representa datos del cruce de dos variables estadísticas. En la parte superior de la tabla (primera fila), se indican las modalidades que toma una de las variables, mientras que, en la primera columna de la izquierda se describen los valores de la segunda variable. El cuerpo de la tabla, está formado por las frecuencias conjuntas que corresponde a la modalidad de la fila para la primera variable y de la columna para la segunda. Como en el caso anterior, las frecuencias de las celdas

pueden ser absolutas o relativas, pero en este caso, aparecen diferentes tipos de frecuencias relativas (respecto a la fila o la columna). Habitualmente, la última fila y columna son destinadas a registrar subtotales de filas y columnas respectivamente. También las tablas de frecuencia se pueden subclasificar en:

Tabla de contingencia de frecuencias ordinarias. En los niveles educativos abordados, usualmente se consideran las frecuencias ordinarias, por ejemplo, la Figura 1.5.1.5 expone una tabla que relaciona las variables sexo (hombre y mujer) y especialidad (mecánica y contador). En la tarea, el estudiante debe calcular la probabilidad de determinados sucesos.

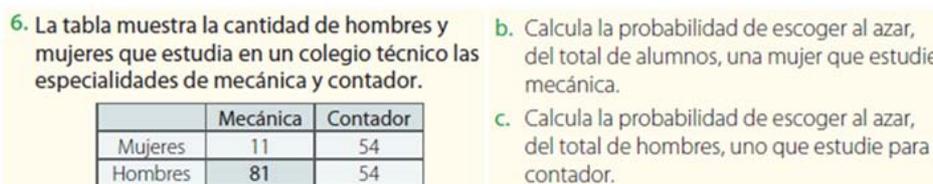


Figura 1.5.1.5. Tabla de contingencia (Merino et al., 2016, p. 348)

Tabla de contingencia con agrupación de valores de una variable en intervalos. En este tipo de tabla se considera la agrupación de los valores de una de las variables en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia (absoluta o relativa).

En síntesis, esta clasificación permite realizar algunas observaciones como que los tipos de tablas, a pesar de que visualmente sean muy similares, implican variedad de objetos matemáticos asociados, que podrían ser diferentes de una a otra. Por lo tanto, resolver tareas en que estén presentes estos diversos tipos de tablas, requiere de diferentes demandas cognitivas, las que no siempre son explicitadas o abordadas por los profesores en la escuela. A continuación, se describen los objetos matemáticos ligados a las tablas estadísticas.

1.5.2. SITUACIONES-PROBLEMA

En el EOS, la situación-problema tiene un rol relevante, pues los objetos matemáticos intervienen y emergen de las prácticas, personales o institucionales, al resolver problemas (Godino et al., 2007, 2019). A continuación, se han clasificado las situaciones-problema (SP) presentes en el trabajo con tablas estadísticas, a partir del análisis realizado de las bases curriculares propuestas por el NCTM (2014), el proyecto GAISE (Franklin et al., 2005), los lineamientos curriculares chilenos (MINEDUC, 2015; 2018) y españoles (MECD, 2014, 2015), así como de textos de estadística:

- SP1. El primero de estos problemas sería el resumen y *organización de los datos*, que llevaría a la organización de un listado de datos. Se produce cuando se recogen datos con algún propósito y es necesario registrarlos. Como Estrella (2014) sugiere, este uso es muy antiguo y se ha encontrado en diferentes civilizaciones.
- SP2. Otro problema diferente sería la *construcción de la distribución de una variable estadística*, que es considerada una tarea cognitivamente compleja (Duval, 2003; Martí, 2009), en la que se lleva a cabo el cálculo de diversos tipos de frecuencia y su organización en una tabla de distribución. Involucra la acción

de representar un conjunto de datos, asociados a una variable estadística unidimensional, en una tabla en que se presenten una o varios tipos de frecuencias, como absolutas, relativas o acumuladas. Aparece con la necesidad de resumir un listado o tabla de datos, teniendo en cuenta que los mismos valores de la variable se repiten en el listado. Se podrían diferenciar subproblemas, según si se trabaja con más de una variable y las frecuencias que se desea calcular. Dependiendo de la extensión del listado de datos, en algunos casos es necesario distribuir las modalidades de la variable por medio de la agrupación en intervalos.

- SP3. Se debe destacar también los problemas que surgen de procesos de *traducción entre representaciones*, o transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999), en general, cuando se desea pasar de un gráfico a una tabla, o bien de un tipo de tabla a otra. Este cambio de representación de los datos y su posterior análisis involucra una serie de tareas, como distinguir y clasificar datos, cálculo de medidas de tendencia central o dispersión en una variable, cálculo de frecuencia de datos, entre otros (Chick, 2004). Este tipo de situación-problema fue dividido en cuatro categorías, para diferenciar cada uno de los procesos de traducción identificados en la tabla estadística.
 - SP3.1. *Traducción de tabla a gráfico, o viceversa*, se trata de representar en una tabla estadística la información que proporciona un gráfico, el que puede ser de diferente tipo (barras, circular, diagrama de tallo y hojas, diagrama de caja, entre otros) o realizar el proceso contrario.
 - SP3.2. *Traducción de tabla a tabla*, es un proceso que involucra pasar, por ejemplo, de una tabla de contingencia a una de datos, o viceversa, o bien de frecuencias no agrupadas a otra con frecuencias agrupadas.
 - SP3.3. *Traducción de texto a tabla, o viceversa*, implica llevar la información suministrada de modo verbal a una tabla estadística, o bien producir dicha información mediante la interpretación de la misma. Este tipo de traducción se recomienda para facilitar los cálculos y análisis en torno a una situación relatada a modo de texto.
 - SP3.4 *Traducción de tabla a resumen estadístico, o viceversa*, se pide completar una tabla estadística, por ejemplo, indicando algún estadístico en particular (media, mediana, rango, etc.) o bien realizar cálculos con datos representados en una tabla, como: establecer el porcentaje correspondiente a una determinada modalidad de la variable, la probabilidad frecuencial o teórica de algún suceso de un experimento aleatorio, calcular medidas de tendencia central (media, mediana o moda), dispersión (rango, etc.), o de posición (cuartiles, percentiles), etc.
- SP4. *Clasificación cruzada de dos variables*. La tabla de doble entrada permite organizar la distribución de frecuencias de la variable estadística bidimensional mediante tantas filas y columnas como modalidades presenten las variables que la conforman. En cada cruce de modalidades de las respectivas variables, se representa la frecuencia conjunta (absoluta o relativa) de los datos. Así mismo, se destaca la importancia de la tabla de doble entrada en el estudio de la asociación entre variables estadísticas bidimensionales. Gea et al. (2013) clasifican en tres

grandes tipos las situaciones-problema en estudios bidimensionales, donde el primero de ellos se refiere a resumir o representar los datos bivariantes, traduciéndolos desde un registro a otro (gráfico, tabular, numérico, etc.), así como las actividades de lectura o construcción de dichas representaciones.

- SP4.1. La *organización de la información* de un conjunto de datos bivariados es un aspecto importante en el estudio posterior de temas como la correlación y regresión (Gea et al., 2013).
- SP4.2. *Análisis de las variables que conforman la variable estadística bidimensional*. Cuando se analiza la variable estadística bidimensional, es necesario delimitar cada una de las variables que la constituyen. En esta categoría, se considera el análisis descriptivo de cada variable y los pasos requeridos para completar una tabla de doble entrada conocidas las medias marginales (Gea, 2014).
- SP4.3. *Estudio de la asociación entre las variables que conforman la tabla*. Este tipo de situación-problema fue analizado por Gea (2014) para variables estadísticas cuantitativas y apunta al estudio sobre la dependencia funcional o estadística de las variables, su intensidad y sentido, así como establecer, en caso de dependencia intensa, su tipo (lineal) y función de máximo ajuste a los datos de la distribución.

En la Tabla 1.5.2.1 se presenta un resumen de las situaciones-problemas que implícita o explícitamente caracterizan a los tres tipos principales de tablas estadísticas, recordemos que la Tabla de distribución se ha subdividido en tres categorías (ordinarias: Ord; acumuladas: Ac; datos agrupados: Agrup.), su distinción se basa en los distintos objetos matemáticos que en estas intervienen (Cobo y Batanero, 2000), dotándolas de diferente sentido y nivel de complejidad para el estudiante.

Se observa que el campo de problemas SP4, con sus diferentes subproblemas, sería propio de la tabla de doble entrada o contingencia, mientras que los primeros tipos de situaciones-problemas son más usuales en las tablas de datos y de distribución de una variable.

Tabla 1.5.2.1. Campos de problemas ligados a los diferentes tipos de tablas estadísticas

Situaciones-problemas	Tabla de datos	Tabla de distribución de una variable			Tabla de doble entrada o contingencia	
		Ord.	Ac.	Agr.	Ord.	Agr.
SP1. Organización de los datos	x	x	x	x	x	x
SP2. Construcción de la distribución de una variable estadística		x	x	x		
SP3. Traducción de						
1. Tabla a gráfico o viceversa	x	x	x	x	x	x
2. Tabla a tabla	x	x	x	x	x	x
3. Texto a tabla o viceversa		x	x	x	x	x
4. Tabla a estadístico o viceversa	x	x	x	x	x	x
SP4. Realizar una clasificación cruzada de dos variables						
1. Organización de la información					x	x

2. Análisis de las variables que conforman la variable estadística bidimensional	x	x
3. Estudio de la asociación estadística entre las variables que conforman la tabla.	x	x

1.5.3. LENGUAJE

En las tablas estadísticas, se utiliza un lenguaje matemático variado mediante términos, expresiones, símbolos, notaciones, etc., por la forma en que se comunica el enunciado de la situación-problema, el procedimiento y la solución de dicha situación-problema. En el caso particular de la tabla estadística, se constituye en un lenguaje por sí misma, como señala Godino (2003), pues las disposiciones tabulares, de diferente tipo, son de carácter lingüístico, ya que son utilizadas de manera frecuente para presentar datos estadísticos, así como los gráficos, esquemas, ilustraciones, los cuales formarían parte de un lenguaje de tipo gráfico. A pesar de esto, como hemos indicado, la tabla estadística, se constituye en nuestro foco de interés y, de acuerdo al EOS, tomaría la función de objeto, ya que en algunas circunstancias un elemento como el lenguaje, puede ser parte de la fenomenología (situaciones-problemas) de uso para otro objeto matemático (Godino, 2003). Los diferentes tipos de lenguajes que enriquecen el significado de la tabla estadística junto a su construcción conceptual (Planas et al., 2018) son detallados a continuación.

Lenguaje verbal

En el lenguaje verbal, Barwell (2005) advierte que en las clases de matemáticas, la mayor parte de las palabras utilizadas tienen algún grado de ambigüedad, puesto que pueden ser empleadas con diferentes significados, y este significado se va enriqueciendo fruto de la interacción, en este caso entre el maestro y el estudiante. Moschkovich (2003), señala que dirigir la enseñanza de la matemática enfatizando solo el lenguaje formal, y relegando al lenguaje verbal o cotidiano puede ser perjudicial, porque ambos pueden ser complementados en las prácticas discursivas en torno a la actividad matemática.

Este tipo de lenguaje es posible de distinguir en la presentación de la estructura tabular, en informaciones como el título (breve y entendible), indicaciones del tamaño de la muestra (si es posible), las modalidades que toma la variable (si es de tipo cualitativa), así como también, en la etiquetas de los encabezados. En algunos casos las etiquetas utilizadas para denominar las frecuencias (e.g. absolutas, relativas, porcentajes) o fila inferior (total) vienen indicadas mediante lenguaje verbal. Además, en algunos casos, se añaden otros términos y expresiones; por ejemplo, cuando a partir de una tabla se pide calcular un cierto valor, como la media, mediana o moda.

En la Tabla 1.5.3.1 se presentan los términos básicos y específicos encontrados en el estudio con tablas estadísticas. De cada tipo se ha encontrado una amplia variedad, que muestran la riqueza conceptual y la complejidad con que se desarrolla la enseñanza de este tema. Además, entre los términos no específicos, aparecen algunos que hacen referencia a términos de diferentes tipos de gráficos (barras, líneas, sectores), los que, en

algunos casos, son originados a partir de una tabla estadística, otros son relativos al pensamiento numérico (decimales, fracciones, porcentaje), o a la probabilidad (tipos de sucesos, espacio muestral), por lo que se observa la implicación de varios bloques de contenidos que participan en el estudio de las tablas estadísticas.

Tabla 1.5.3.1. Términos básicos y específicos relacionados con las tablas estadísticas

Términos no específicos	Términos específicos del tema
Medidas de centralización (mediana, moda y media), medidas de posición (cuartiles, percentiles, deciles), medidas de dispersión (rango), probabilidad, gráficos (lineal, barras, diagrama de cajas, diagrama de tallo y hojas, sectores), histograma, tamaño de la muestra, muestra representativa, tipos de sucesos, espacio muestral, proporcionalidad, probabilidad.	Variable estadística (cualitativa, cuantitativa: continua, discreta), modalidad, categoría, intervalos, extremos del intervalo, amplitud del intervalo, marca de clase, frecuencia (absoluta, acumulada, relativa, relativa porcentual, relativa acumulada), frecuencia conjunta (absoluta, relativa, condicionada, marginal), tabla de datos, datos, tabla de distribución de frecuencias de una variable, tabla de contingencia o de doble entrada, sumatorio (totales), fila (columna), población, individuo, muestra.

Lenguaje simbólico

En algunos casos se añade el lenguaje simbólico en el trabajo con las tablas, por ejemplo, para expresar las etiquetas en la tabla. Las notaciones simbólicas y expresiones algebraicas, son introducidas desde temprana edad en la escuela (Quinnell y Carter, 2012), permiten una comunicación abstracta entre los individuos, abordando niveles de mayor complejidad. Gea (2014), en base a diferentes autores señala la variedad de funciones que pueden tomar los símbolos matemáticos como: comunicación, registro del conocimiento, formación de nuevos conceptos, confección de clasificaciones, explicación, facilitar la actividad reflexiva, mostrar estructuras matemáticas, automatizar las manipulaciones rutinarias, recuperar información de la memoria y generar una actividad creativa.

En las tablas estadísticas, dependiendo si se representa una o dos variables, se presenta lenguaje simbólico, especialmente en las etiquetas de los márgenes, filas superiores, inferiores, primera columna de la izquierda y última columna, donde aparecen símbolos y operaciones como los expuestos en la Tabla 1.5.3.2.

Tabla 1.5.3.2. Tipos de símbolos y operaciones presentes en las tablas estadísticas

Notación	Concepto representado
=, %	Igualdad, Porcentaje
(...), [...], (...), [...]	Intervalos (abierto, semiabierto a la derecha o izquierda y cerrado)
\sum	Sumatorio sin subíndices
N, n	Número total de individuos en la población o de observaciones
x_i ; n_i , f_i	Valor de una variable X; Frecuencia absoluta o relativa
N_i ; F_i ;	Frecuencia absoluta acumulada y relativa acumulada
f_{ij} , f_i , f_j	Frecuencia absoluta conjunta, absoluta marginal en X o en Y
\bar{x} , M_e , M_o	Media en X, Mediana, Moda
$(x_i - \bar{x})^2$, σ	Distancia a la media al cuadrado en un valor de X, Desviación típica
Q_i , P_i , D_i	Cuartiles, Percentiles y Deciles

Lenguaje numérico

El cuerpo de datos de la tabla estadística se distribuye en una estructura rectangular formado por celdas, conformadas por la intersección de filas y columnas, en que, generalmente, la primera columna izquierda y la primera fila de la tabla no forman parte del cuerpo de datos. En particular, las tablas estadísticas se caracterizan por exponer información de datos reales, lo que no siempre es posible en el lenguaje gráfico (Estrella, 2014). En este sentido, Koschat (2005) advierte que, a menudo, se toma la decisión de incluir tablas inapropiadas en documentos (en su forma original en datos brutos), sin preocuparse por utilizar un lenguaje numérico apropiado que estructure la tabla. En este sentido, se debe tener en cuenta, que en el cuerpo de datos pueden aparecer diferentes tipos de números como enteros y racionales (decimales, fraccionarios). Feinberg y Wainer (2011), sostienen la conveniencia de redondear a lo más a dos cifras decimales las cantidades expuestas en las celdas, para facilitar la interpretación de la información proporcionada por la tabla.

Lenguaje diagramático

Los diagramas son considerados como un recurso visual que potencia el razonamiento matemático, y de otras disciplinas. En este caso, la tabla estadística constituye un posicionamiento espacial de una o dos dimensiones (derecha, izquierda, arriba, abajo, intersección, diagonal), a través de sus filas y columnas, que permite realizar transformaciones, combinaciones y construcciones, obedeciendo a ciertas reglas sintácticas o semánticas. El trabajo con este objeto se conformaría, en términos de Godino et al. (2015), en un razonamiento diagramático caracterizado por aspectos asociados a la tabla. Esta tiene una estructura consistente en una disposición espacial específica de sus partes y elementos, y relaciones espaciales entre sus elementos. A través de su estructura se pueden ejecutar operaciones guiadas por reglas, que tienen un carácter genérico, el que permite la construcción de ejemplares similares, entre otros aspectos. En este sentido se debe tener presente, el conflicto que pueden generar las relaciones entre los objetos, empleados en la actividad matemática y los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.), por la confusión que puede generar el objeto matemático con sus diferentes representaciones (Godino et al., 2015). En el caso de la tabla estadística sería por la variedad que podemos encontrar de ellas, como se detalló anteriormente.

1.5.4. CONCEPTOS

En la actividad matemática, se llevan a cabo acciones sobre objetos matemáticos con los que se opera o se razona para resolver una situación-problema. Algunos de estos objetos matemáticos, que son referidos con símbolos, expresiones, términos, etc., así como con definiciones, son los conceptos, es decir, ideas matemáticas generales que son aplicadas, o emergen de la actividad matemática (Godino, 2003). Un concepto matemático se reconoce por su definición y sus propiedades, las que pueden ser más o menos formales y profundas de acuerdo a la institución, lo que implica que tengan un

carácter relativo. Las definiciones de conceptos son evocados por el estudiante cuando resuelve una situación-problema, por lo que es importante analizar el tratamiento de estos objetos en la enseñanza, porque la progresiva construcción de su significado incidirá en los conceptos que se expliquen y utilicen (Godino, 2002).

En la resolución de situaciones que involucran tablas estadísticas, el nivel educativo determina los conceptos utilizados y el grado de profundidad de su estudio. En el contexto chileno, desde 5° hasta 8° año Básico (10 a 13 años), y en el contexto español, desde 5° a 6° de Educación Primaria y 1° hasta 4° de la Educación Secundaria Obligatoria, los contenidos referidos al uso de tablas estadísticas son los establecidos, de modo explícito o implícito, en las orientaciones curriculares de cada país (MECD, 2014; 2015, MINEDUC, 2015; 2018), que se describen a continuación.

Población, individuos, censo y muestras

La tabla estadística recoge datos de toda o parte de una población. Una *población* corresponde al conjunto total de elementos que son de interés estudiar en una situación. Puede tratarse de personas, animales, etc. y cada uno de ellos recibe el nombre de *individuo* de la población.

En el estudio de una población, se busca profundizar respecto al conocimiento de una determinada característica en la misma, y si la población es de tamaño reducido, el procedimiento consistirá en la inspección de cada individuo, así, el proceso de obtención de la información será considerar a toda la población utilizando lo que se denomina *censo* (Bologna, 2012). Pero, frecuentemente, el estudio de toda la población es casi imposible, costoso, demoroso, lo cual implica que se realice un análisis estadístico para estudiar la población mediante inferencia a partir de una *muestra* tomada de la misma, que consiste en seleccionar parte de la población mediante individuos que representen del modo más fiel a la población que representan. Para esto se exige, fundamentalmente, que la muestra sea *representativa* (lo que sería una propiedad de la muestra).

Variable, valores

La *variable* corresponde a cualquier característica que se pueda observar o medir en los individuos de una población o muestra, y puede tomar diferentes valores en diferentes individuos. Cada modalidad de la variable X se denota por x_i , para $i = 1, \dots, K$; con K el total de valores o modalidades que puede tomar la variable en los individuos que se estudian.

En variables numéricas se podría también considerar el *rango* de variación de la variable, que corresponde a la diferencia entre su valor máximo y mínimo en la población o muestra.

Intervalos de clase

Las variables cuantitativas, principalmente las de tipo continuo, toman un número grande de valores diferentes, lo que hace necesario, a veces, producir una tabla en la que se agrupe estos valores en unos pocos intervalos, aunque implique una pérdida de información, algo que hay que tener en cuenta cuando se interprete este tipo de tablas en

datos agrupados (Batanero y Godino, 2001).

La construcción de tablas con variables agrupadas requiere decidir la cantidad de intervalos a considerar, la cual dependerá del interés que se persiga. Generalmente, para establecer la cantidad de intervalos se aproxima al entero más próximo a la raíz cuadrada del número total de datos. Además, en la distribución de frecuencias con datos agrupados, se debe considerar las nociones de *máximo* (mayor valor de la variable), *mínimo* (menor valor de la variable) y *recorrido o rango*, que se refiere a la diferencia entre el máximo y mínimo de la variable.

Cada intervalo considerado se denomina *clase*, en el cual es posible identificar su *extremo superior* (E_{i+1}), su *extremo inferior* (E_i) y la *marca de clase*, que se corresponde con la media de los extremos de la clase y se representa por x_i . Como observación, se asume que los intervalos son semiabiertos por la derecha a excepción de la última clase que es un intervalo cerrado.

Distribución de frecuencias de variables estadísticas

La distribución de una variable se refiere al conjunto de valores de la misma, junto con la frecuencia correspondiente a cada valor, entendiéndose por frecuencia al número de veces que aparece, o se repite, el valor de la variable en el total de individuos que se estudian. En realidad, se trataría matemáticamente de una función que, a cada valor de la variable le asigna su frecuencia, aunque, a diferencia de otros tipos de funciones, generalmente, no se encuentra una expresión algebraica que las ligue. Se distinguen diferentes tipos de frecuencia (Johnson y Kuby, 2012) que están relacionadas unas con otras:

- *Frecuencia absoluta*, que registra el número de veces (número de individuos) que se observa (presentan) la característica de la variable X en su correspondiente modalidad i , que se denota por n_i (para $i = 1, \dots, k$).
- *Frecuencia relativa*, que indica la proporción con que se observa la característica de la variable X en su correspondiente modalidad i respecto del total de individuos considerados. Se denota por $f_i = \frac{n_i}{N}$ (para $i = 1, \dots, k$) donde N es el total de individuos analizados y n_i la frecuencia absoluta de la modalidad x_i . Este tipo de frecuencia permite obtener otro tipo de frecuencia relacionada como es el caso de la *frecuencia porcentual*, o porcentaje. La frecuencia relativa es una función lineal de la absoluta y de la porcentual, y viceversa.
- *Frecuencia acumulada*, que se refiere al total de individuos en que se observan valores de la variable menores a un valor determinado de dicha variable. Se obtiene sumando la frecuencia de cada uno de los valores o modalidades de la variable inferiores al considerado. Este tipo de frecuencia se puede obtener para cada uno de los tipos de frecuencias anteriormente descritas. La relación entre la frecuencia absoluta, relativa y porcentual sería lineal, pero la frecuencia acumulada no guarda relación lineal con ninguna frecuencia ordinaria. De la frecuencia acumulada también se derivan los conceptos de percentil y rango intercuartílico, así como de mediana.

- Probabilidades. A partir de la distribución de frecuencias (absolutas, relativas o condicionales) podría calcularse la probabilidad de un cierto valor, si se supone que los datos son el resultado de un proceso aleatorio. En este sentido, Ortiz (2002) destaca la idea de frecuencia relativa, puesto que se conforma en la base de la concepción frecuencial de la probabilidad, donde la probabilidad de un suceso se define como el límite al que tiende su frecuencia relativa cuando se repite una gran cantidad de veces un ensayo en condiciones idénticas.

La frecuencia absoluta y relativa de un suceso A se definiría como si un determinado experimento aleatorio se repite N veces, y el suceso aleatorio A aparece n_A veces, luego en la referida muestra de N pruebas, la frecuencia absoluta del suceso A es n_A , mientras que la frecuencia relativa es $\frac{n_A}{N}$ (Ortiz, 2002).

En el estudio de las tablas de doble entrada, también es posible identificar diferentes tipos de frecuencias, ya que es un formato que resume información sobre dos variables estadísticas (X, con valores x_1, x_2, \dots, x_r e Y, con valores y_1, y_2, \dots, y_c), que tiene una forma como la representada en la Figura 1.5.4.1. Por ejemplo, las variables X: color de ojos (azules, castaños, grises) e Y color de pelo (claro y oscuro). En la tabla de doble entrada, se registra la distribución de frecuencias de distintos tipos de frecuencias absolutas (Gea, 2014; Moore, 2005):

- *Frecuencia doble o conjunta* (f_{ij}), que refiere al número de elementos que corresponden a la vez al valor x_i para la variable X y al valor y_j para la variable Y. Por ejemplo, número de sujetos de ojos azules y pelo oscuro.
- *Frecuencia marginal*, que pueden ser por filas, f_i . (en el ejemplo, número de personas con ojos azules) o por columnas f_j . (en el ejemplo, número de personas con pelo oscuro).
- *Frecuencia condicionada*: Cuando se pide el número de individuos fijando un valor para una de las variables, por ejemplo, número de sujetos de ojos azules si se sabe que el pelo es oscuro. Matemáticamente, la frecuencia absoluta condicional es equivalente a la doble, pero no se perciben de la misma forma, pues la lectura de frecuencias condicionales posee mayor dificultad (Cañadas, 2012).

	y_1	...	y_j	...	y_c	
x_1						$f_{1.}$
...						
x_i			f_{ij}			$f_{i.}$
...						
x_r						$f_{r.}$
	$f_{.1}$		$f_{.j}$		$f_{.c}$	N

Figura 1.5.4.1. Tabla de doble entrada

Además de las frecuencias absolutas, mencionadas anteriormente, se pueden deducir de la tabla diferentes tipos de frecuencias relativas como:

- Frecuencia relativa doble: $h_{ij} = \frac{f_{ij}}{N}$
- Frecuencia relativa condicional respecto a su columna: $h(y_j/X = x_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{h_{ij}}{h_{i.}}$

- Frecuencia relativa condicional respecto a su fila: $h(x_i/Y = y_j) = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}$

También es posible calcular frecuencias relativas marginales, y probabilidades. Se debe tener en cuenta, que estos diferentes tipos de frecuencias y probabilidades presentes en la tabla de doble entrada, hacen más compleja su interpretación por parte del estudiante (Cañadas, 2012).

Otros conceptos

Una vez identificados los conceptos básicos implicados en una tabla, cabe decir que se asocian muchos otros conceptos, atendiendo al uso que se haga de ella en la situación-problema planteada. Es así como en una tabla estadística, podemos hablar de medidas de tendencia central, medidas de posición o medidas de dispersión, etc.; mientras que en una tabla estadística bidimensional, además, es posible abordar los conceptos de asociación, covarianza, correlación, regresión, etc.

1.5.5. PROPIEDADES

Se refieren a características específicas de los conceptos o relaciones entre estos. Cada propiedad se asocia a un objeto matemático o la relación entre objetos, por lo que regula su uso y contribuye al crecimiento del significado del objeto en cuestión (Godino, 2003). Las principales propiedades se refieren a las relaciones entre tipos de frecuencias y dependen de si se trata de una tabla de distribución de frecuencias de una variable o una de doble entrada o contingencia.

Tipos de variable y escalas de medida

Como es posible observar distintas características para un mismo individuo, estas características pueden ser de diferente naturaleza, y por tanto ser medidas de diferente modo: *escala nominal*, que se refiere a la categorización de la variable en clases que simplemente pueden distinguirse entre sí por cualidades no medibles y por tanto, no es posible realizar operaciones aritméticas entre sus modalidades. Nos referimos en este caso a variables cualitativas (e.g. fruta favorita, nacionalidad, color de ojos, etc.). En algunos casos, las categorías de la variable cualitativa pueden ordenarse, por lo que su escala se denomina *ordinal* (e. g. el nivel educativo o la calificación cualitativa en una evaluación) y la variable se denomina ordinal. En caso de tratarse de una variable en la que se pueda operar con sus modalidades, podemos hablar de variables cuantitativas, bien discretas, según tome valores aislados (frecuentemente números naturales), o continuas, según tome cualquier valor de entre cualesquiera dos valores que se considere (Bologna, 2012). Así, es posible encontrar dos tipos de escala de medida ante este tipo de variables: *escala de intervalo* y *escala de razón*, con la única diferencia de que en la escala de razón la unidad de medida posee un cero absoluto (Batanero y Godino, 2001).

También en las tablas doble entrada se podría diferenciar entre *variable independiente* y *variable dependiente o respuesta*, cuando la segunda se trata de relacionar con la primera, en forma de función.

Tabla de distribución de frecuencias de una variable estadística

Sea una población estudiada en la que se observa la variable X , representada genéricamente según sus modalidades como x_i , donde x_i es un valor cualquiera que toma la variable, mientras que n_i es la frecuencia absoluta asociada al valor x_i . En esta representación se cumplen algunas propiedades en frecuencias de distribución (Batanero y Godino, 2001):

1. La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de observaciones (N), donde n_i representa a la frecuencia absoluta del valor x_i .

$$\sum_{i=1}^r n_i = N$$

2. La suma de todas las frecuencias relativas es igual a la unidad, donde la frecuencia relativa de x_i corresponde al cociente entre su frecuencia absoluta f_i y el número total de observaciones (N).

$$\sum_{i=1}^r f_i = 1$$

- 2.1. La frecuencia relativa de un suceso S ($fr(S)$) es un número comprendido entre 0 y 1, mientras que la frecuencia del suceso contrario de S es igual a 1 menos la frecuencia de S .

Si n es el número de veces que se presenta el suceso S en N pruebas, se cumple la condición: $0 \leq n_S \leq N$, de donde $0 \leq \frac{n_S}{N} \leq 1$, o sea $0 \leq fr(S) \leq 1$.

- 2.2. La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

- 2.3. La frecuencia de la unión de dos o más sucesos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias de dichos sucesos.

- 2.4. La frecuencia de una unión de dos sucesos compatibles es igual a la suma de las frecuencias de esos sucesos menos la frecuencia de la intersección de los mismos.

3. Existe una relación lineal entre las frecuencias absolutas y relativas, pues el cociente entre la frecuencia absoluta (n_i) y la frecuencia relativa ($f_i = \frac{n_i}{N}$), para cada modalidad de la variable x_i , es constante e igual a N :

$$\frac{n_i}{f_i} = k$$

4. Frecuencia acumulada: este tipo de frecuencia sólo es posible de definir para variables cualitativas ordinales (en las que se pueda establecer un orden entre las modalidades de la variable) y cuantitativas. Se denota por N_i a la frecuencia absoluta acumulada de la modalidad x_i y se verifica que:

$$N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

Si los datos de la variable están agrupados en intervalos de clase, la frecuencia acumulada (N_i), es el número de datos acumulado hasta el intervalo i , inclusive (Alvarado y Obagi, 2008).

- 4.1. La frecuencia absoluta acumulada asociada a la última modalidad de la variable

(ordenada en modo ascendente) es igual a N (total de las observaciones).

- 4.2. La frecuencia absoluta asociada a la modalidad x_i de la variable X corresponde a la diferencia entre la frecuencia absoluta acumulada de dicha modalidad (N_i) y la frecuencia absoluta acumulada de la modalidad inmediatamente anterior (N_{i-1}), habiendo sido ordenadas las modalidades de la variable en orden ascendente.

Tabla de variables estadísticas bidimensionales

Sea una población estudiada en la que se observan las variables X e Y, representados genéricamente sus valores mediante el par (x_i, y_j) , mientras que n_{ij} es su frecuencia absoluta conjunta (del valor i-ésimo de X con el j-ésimo de Y). Una manera de registrar estos resultados es a través de una tabla de doble entrada o contingencia (Figura 1.5.4.1), en la que se cumplen algunas propiedades entre las frecuencias representadas en la tabla, según la distribución conjunta (Ruiz, 2004):

1. La suma de las frecuencias absolutas conjuntas, extendida a todos los pares de valores de la variable (x_i, y_j) es igual al total de observaciones, donde n_{ij} representa la frecuencia absoluta del valor (x_i, y_j) :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij} = N$$

2. La suma de todas las frecuencias relativas conjuntas (f_{ij}) extendida a todos los pares de valores de la variable (x_i, y_j) es igual a la unidad, la frecuencia relativa conjunta del par (x_i, y_j) corresponde al cociente entre la frecuencia absoluta conjunta (n_{ij}) y el número total de observaciones (N):

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s f_{ij} = 1$$

En cuanto a las distribuciones marginales, respecto a la variable X o Y, para la frecuencia absoluta y relativa se cumplen las siguientes propiedades (similares en las distribuciones condicionadas respecto a cualquier valor en las variables X o Y):

1. La suma de las frecuencias absolutas marginales de la variable X o Y, es igual al número total de observaciones: N.
2. La suma de las frecuencias relativas de la variable marginal en X o Y, es igual a 1.

En cuanto a las distribuciones condicionadas, por ejemplo, de la variable X según el valor y_j en la variable Y, para la frecuencia absoluta y relativa se cumplen las siguientes propiedades:

3. La suma de las frecuencias absolutas condicionadas de la variable X/Y= y_j es igual al número total de observaciones en la modalidad y_j : $n_{.j}$.
4. En cada fila o columna, la suma de las frecuencias relativas condicionales es igual a la unidad.

En el estudio de la dependencia entre las variables X e Y, mediante el análisis de las frecuencias representadas en la tabla de doble entrada correspondiente, podemos establecer que son independientes cuando la frecuencia absoluta conjunta en cada valor

de la variable (n_{ij}) coincida con su frecuencia esperada en caso de independencia ($n_i \cdot n_j$). Así, las frecuencias condicionales de la variable Y en cualquier valor de la variable X por el que se condicione, son proporcionales. Es decir, las frecuencias relativas condicionales de los valores de la variable Y son iguales en cada valor de la variable X (Cañadas, 2012).

A continuación, se presenta un esquema resumido en la Tabla 1.5.5.1 con los conceptos, que implícita o explícitamente caracterizan a los tres tipos de tablas estadísticas, donde podemos observar la mayor complejidad de la tabla de distribución y de contingencia, respecto a la menor cantidad de conceptos que es posible de abordar por medio de la tabla de datos.

Tabla 1.5.5.1. Conceptos y propiedades ligados a los diferentes tipos de tablas estadísticas

Conceptos	Tabla de datos	Tabla de distribución de una variable			Tabla de contingencia	
		Ord.	Ac.	Agrup.	Ord.	Agrup.
Población, individuo, censo, muestra	x	x	x	x	x	x
Variable, valores	x	x	x	x	x	x
Rango, máximo, mínimo	x	x	x	x	x	x
Intervalos de clase, extremos, marca de clase				x		x
Frecuencias ordinarias		x	x	x	x	x
Frecuencia acumulada			x			
Frecuencias dobles					x	x
Frecuencias marginales y condicionadas					x	x
Probabilidades simples		x	x	x	x	x
Probabilidades compuestas y condicionales					x	x
Medidas de centralización, posición, dispersión		x	x	x	x	x
Covarianza, correlación					x	x
Propiedades						
Tipos de variable y escala de medida	x	x	x	x	x	x
Suma de frecuencias absolutas		x		x	x	x
Suma de frecuencias relativas		x		x	x	x
Proporcionalidad de frecuencias relativas y absolutas		x		x	x	x
Valor creciente de las frecuencias acumuladas, la última de las cuales es el tamaño muestral			x	x		
Relación entre frecuencias acumuladas y sus respectivas frecuencias ordinarias			x	x		
Variable dependiente e independiente					x	x
Asociación, independencia					x	x
Relación entre frecuencias condicionales, dobles y marginales					x	x
Frecuencias esperadas en caso de independencia					x	x

En relación a las propiedades para la tabla estadística, las principales se refieren a las relaciones entre tipos de frecuencia y dependen de si se trata de una tabla de distribución de frecuencias de una variable, o una de contingencia. Cabe destacar, que la tabla de contingencia abarca, prácticamente, la totalidad de propiedades, evidenciando de este modo su complejidad y avanzado nivel de comprensión que requiere el tratamiento de este tipo de representación tabular.

1.5.6. PROCEDIMIENTOS

Corresponde al despliegue de diferentes operaciones, algoritmos, estrategias, etc. que permiten la resolución de una situación-problema. En las tablas estadísticas interesa el desarrollo de procedimientos en torno a la lectura, construcción e interpretación (Estrella, 2014), los cuales son factibles de realizar en cualquier tipo de tabla. Cada una de estas acciones, requiere de capacidades y destrezas específicas.

Lectura de una tabla

El tipo de procedimiento referido a la lectura, descrito por Arteaga (2011) para el caso de un gráfico, puede ser trasladado a una tabla, puesto que es posible diferenciar los siguientes tipos de procedimientos (identificados en Arteaga, 2011): la lectura de un dato respecto de una modalidad o encabezado determinado (lo que corresponde a una lectura directa), o bien para un determinado dato en la tabla, la búsqueda de su correspondiente modalidad y referencia de fila/columna (lectura inversa de la tabla).

Friel et al. (2001) sugieren vincular la estructura de las tablas con la de los gráficos, y advierten de la importancia de las tablas como una herramienta de transición para organizar información que se representará de manera gráfica. Así, los autores proponen una clasificación de niveles de lectura para tablas y gráficos, que parte de la establecida previamente por Curcio (1989). En este sentido, se distinguen cuatro tipos de procedimientos, dentro de la propia lectura de la gráfica, que trasladamos a la tabla, los cuales son detallados en los siguientes capítulos.

Construcción de tablas

La construcción de tablas es un procedimiento con gran riqueza matemática (Duval, 2003; Martí, 2009), en que el estudiante debe desplegar una variedad de funciones cognitivas para desarrollar esta tarea. La construcción de una tabla estadística involucra un proceso de interpretación global de los datos, lo que requiere un análisis sobre la diversidad de la información que se requiere organizar, con el objeto de identificar, adecuadamente, la información que será expuesta en los márgenes o etiquetas (fila superior, inferior, primera columna de la izquierda) junto a los datos que se ubicarán en las celdas que componen el cuerpo de datos (tipo de número, redondeo de ser necesario). Para la construcción de una tabla de distribución, el estudiante necesita, en primera instancia, identificar las variables, es decir definir categorías para organizar los datos, distribuir los individuos según las categorías, verificando que no se repitan, además de revisar que todos pertenezcan a alguna categoría, cumpliendo de esta manera con las invariantes de exclusividad y exhaustividad (Piaget y Inhelder, 1983).

Leclère (2003) identifica diferentes acciones para la construcción de una tabla, en primer lugar, la recolección de los datos y el diseño, el cual es importante porque determinará la precisión y calidad de la tabla. En segundo paso, lo conforma la confección de la estructura tabular en donde se registrarán los datos obtenidos y la información que puede derivarse de ella (tipos de frecuencias), implica la elección de filas, columnas, orientación, etiquetas, modalidades de la o las variables, entre otros.

Se debe tener presente, que la tabla es un medio que facilita la entrega de cierta

información a un destinatario, quien deberá interpretar y realizar operaciones con la información expuesta.

Otros procedimientos

Finalmente, se destaca, aunque no son exclusivos de las tablas, las operaciones de recuentos de datos y cálculos de diferentes tipos de frecuencia. Igualmente se podría considerar el cálculo de estadísticos unidimensionales (como media o desviación típica) o bidimensionales (como covarianza o chi-cuadrado), aunque estos últimos no son considerados en los niveles educativos que aborda nuestro estudio.

1.5.7. ARGUMENTOS

En relación a las tablas estadística encontramos también elementos de argumentación, bien para justificar propiedades derivadas de la propia tabla (construcción y elementos de la misma) o bien usando la tabla como apoyo para la argumentación de otros elementos (conceptos, procedimientos, etc.). Estas argumentaciones albergan no sólo las demostraciones formales deductivas características de la matemática, sino cualquier enunciado utilizado para justificar (Godino y Recio, 2001). Por ejemplo, validar si una serie de afirmaciones emanadas desde una tabla son verdaderas o falsas; interpretar, en un determinado contexto, por qué interesa considerar una medida más representativa que otra, según la distribución expuesta en la tabla, a partir del estudio de las medidas de tendencia central; etc.

Los argumentos que son empleados en torno a la tabla, vienen determinados por los conceptos, procedimientos y propiedades utilizados para dar solución a la situación-problema planteada. Así, encontramos diversidad de modos de argumentar como son (Recio, 1999):

- *Ejemplos o contraejemplos.* Conciernen al empleo de ejemplos concretos para validar una determinada propiedad o procedimiento.
- *Uso de representaciones gráficas,* puesto que en ocasiones es útil representar gráficamente los datos de la tabla para argumentar la veracidad de un enunciado.
- *Argumentos verbales deductivos,* referidos a demostraciones deductivas, utilizando axiomas o teoremas que conforman dicha argumentación.
- *Argumento algebraico deductivo,* son aquellos que evidencian argumentos deductivos asociados a la tabla basados en lenguaje algebraico. Se trata de manipulaciones algebraicas utilizadas para argumentar una propiedad, el empleo de alguna fórmula, etc.

1.5.8. CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS

El marco teórico EOS aporta una herramienta para modelizar la actividad matemática, como es la configuración ontosemiótica (Ver Sección 1.4). Nos permite caracterizar los elementos de los que emerge el significado del objeto matemático tabla estadística (Godino, 2002) y es ampliamente utilizada en el análisis de textos en otros temas (Balcaza et al., 2017; Burgos et al., 2020; Font y Godino, 2006; Godino et al.,

2006). A continuación, presentamos las configuraciones ontosemióticas que ponen en relación los objetos matemáticos identificados en esta sección, en el análisis descriptivo de la práctica matemática en torno a la tabla estadística que venimos desarrollando.

Configuración: Registro y organización de información

Se refiere a la recolección de datos a partir de una consulta (encuesta o entrevista y acceso a bases de datos) o de una experiencia aleatoria un número determinado de veces. También se considera la posibilidad de recoger/extraer la información que se representa mediante texto, en lenguaje verbal o numérico, y organizarla en una tabla.

Prácticas y objetos intervinientes

Tiene una vinculación directa a la situación-problema SP1 de resumen y organización de información mediante una tabla de datos, así como con la situación-problema SP3.3, como comentamos anteriormente. En ambos casos, el lenguaje en la tabla, generalmente, refiere al verbal o numérico, al registrar la información recolectada.

Los conceptos que se promueven son los relativos a la variable estadística (tipo, valor o modalidad) y no emerge el concepto de distribución, pues solo se utiliza el registro de la información en la correspondencia de cada individuo con su valor medido en la variable o variables observadas. Por igual razón, las propiedades y argumentos relacionados a los conceptos y propiedades son escasos, al enmarcarse en el concepto de variable. Otros conceptos asociados al análisis de la información representada en la tabla de datos que se podrían considerar son el mínimo, máximo, así como considerar el orden en los datos y el rango de variación de la variable.

Los procedimientos y los argumentos asociados refieren, fundamentalmente, a la recogida de información, y la posterior construcción y lectura de la tabla de datos.

Procesos

La recogida y registro de información, generalizando la técnica para diferentes individuos, requiere del proceso de problematización en cuanto a identificar la variable de estudio en un contexto determinado, así como el de comunicación, al representar a cada individuo según su valor en la variable o variables que se estudian. El proceso de comunicación es fundamental en esta configuración, porque la disposición de los datos en la tabla (fila/columna) representa tanto a los individuos como a sus valores que toman en la variable. También las etiquetas de la tabla pueden representarse en lenguaje natural, símbolos o valores numéricos.

Se espera que emerja el proceso matemático de generalización, de segundo nivel en la dualidad particularización/generalización, a propósito del concepto de variable. Puesto que se puede considerar la función en que a cada individuo se asocia un valor de la variable X (denotada por x_i , para $i = 1, \dots, K$) donde el dominio de esta función es el conjunto de elementos de la población o muestra (con cardinal K) y su rango el conjunto de valores que toma la variable X . En este caso, la función no tiene una expresión algebraica (Pallauta et al., 2020). Por tanto, esta práctica incita el proceso de definición y enunciación de propiedades en torno a la variable representada en la tabla, y es de esperar

que el estudiante alcance una adecuada generalización, que le permita alcanzar una significación a dicha representación (dualidad expresión/contenido).

Configuración: Construcción de la distribución de una variable estadística

Corresponde a la representación de la distribución de frecuencias de una variable estadística mediante una tabla. El análisis semiótico descrito en esta sección nos lleva a diferenciar esta configuración en dos tipos, pues los objetos matemáticos implicados en la construcción de la distribución de una variable estadística difieren en complejidad, según se trate de una o dos dimensiones en la variable, como se describe a continuación.

Configuración: Construcción de la distribución de una variable estadística unidimensional

Prácticas y objetos intervinientes

La construcción de la tabla de distribución de una variable estadística unidimensional se asocia al campo de problemas SP2, e igualmente se relaciona con el campo de problemas SP3.2.

Implica identificar los conceptos de variable (su tipo y escala) y de frecuencia (absoluta, relativa, porcentual y sus respectivas acumuladas). Estos conceptos conllevan propiedades que se ponen de manifiesto en la representación de la tabla, tales como que las frecuencias relativas son funciones lineales de las frecuencias absolutas, entre otras. En ocasiones, es conveniente agrupar los valores de la variable en intervalos, cuando la variable es continua o toma un número grande de valores diferentes, luego hay que considerar los conceptos vinculados al uso de intervalos (amplitud, marca de clase o punto medio del intervalo, extremos, entre otros) y propiedades asociadas.

El lenguaje en la tabla, generalmente, refiere al verbal, numérico, y simbólico. Las propiedades y los argumentos asociados a dichas propiedades implican los conceptos de variable, frecuencia, y las relaciones entre dichos conceptos. Los procedimientos y los argumentos referidos a los mismos, son la clasificación de la información en modalidades o intervalos de clase de la variable, con la posterior construcción y lectura de la tabla.

Los argumentos implicados en esta configuración son referidos tanto a los conceptos como a los procedimientos y propiedades implicados en dichos procedimientos. Son argumentos mucho más sofisticados que los identificados en la configuración de registro y organización de información.

Procesos

En primer lugar, se pone de manifiesto el proceso de definición en cuanto a identificar la variable y sus modalidades en la situación-problema planteada. Este proceso implica la diferenciación del tipo de escala de la variable: nominal (cualitativa), ordinal o numérica (cuantitativa) para el registro de modalidades de la variable, así como el de clasificación de los valores de la variable.

Se espera que surja una problematización en la situación planteada, en cuanto a vincular la variable al contexto de los datos y, en muchos casos, este proceso viene asociado al de algoritmización, cuando interesa determinar la cantidad de intervalos, con

sus respectivos límites superiores e inferiores, amplitud de estos y las marcas de clase, si se trata de variables con datos agrupados en intervalos.

La definición de las frecuencias que se representen en la tabla es fundamental, puesto que el proceso de cálculo de cada una difiere. La enunciación de sus propiedades igualmente es necesaria, para establecer las relaciones entre ellas y representar los totales, si corresponde.

En esta configuración el concepto de variable se considera un objeto unitario, mientras que en la configuración de registro y organización de la información tenía la dualidad de sistémico. Por tanto, la generalización se pone en práctica cuando se ponen en función las propiedades que relacionan los conceptos de variable, sus modalidades y frecuencias asociadas, así como entre los tipos de frecuencias.

El proceso de representación es fundamental en esta configuración, dado que el lenguaje diagramático alcanza su plena entidad al encontrar en la tabla de distribución las frecuencias (ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales y sus respectivas acumuladas) en columnas (o filas) donde, generalmente, la primera columna (o fila) registra las modalidades de la variable (x_i , para $i = 1, \dots, k$), y en las siguientes columnas se representan sus correspondientes frecuencias. De este modo, el proceso de comunicación ocupa gran relevancia para interpretar el lenguaje diagramático en la información que representan las etiquetas y celdas de la tabla en el lenguaje verbal, simbólico y numérico.

Configuración: Construcción de la distribución de una variable estadística bidimensional

Prácticas y objetos intervinientes

La construcción de este tipo de distribución se asocia al campo de problemas SP4.1 e igualmente se relaciona con el campo de problemas SP3.2.

Los conceptos asociados son el de variable estadística unidimensional (sus tipos y escala), puesto que la tabla de distribución de una variable estadística bidimensional resume la información de dos variables estadísticas: X , con valores x_1, x_2, \dots, x_r e Y , con valores y_1, y_2, \dots, y_c . En ocasiones, conviene agrupar los valores de la variable en intervalos, cuando la variable es continua o toma un número grande de valores diferentes, luego hay que considerar los conceptos vinculados al uso de intervalos y propiedades asociadas. Todo esto implica que emerge el concepto de variable bidimensional junto a las propiedades asociadas al concepto y argumentos en torno al concepto y sus propiedades.

También se ven implicados los conceptos de frecuencia y distribución de frecuencias, puesto que en el cruce de las modalidades de ambas variables en la tabla encontramos las celdas en donde se representa la frecuencia conjunta (absoluta, relativa o porcentual) de la modalidad de la variable estadística bidimensional. De este modo, en la tabla se registran distintos tipos de distribuciones de frecuencias (Gea, 2014; Moore, 2005): *distribución de frecuencias dobles* (f_{ij}) que representa la frecuencia del valor (x_i, y_j) para el conjunto de valores que toma la variable bidimensional (X, Y); *distribución de frecuencias marginales*, que puede ser tanto por filas ($f_{i.}$) como por columnas ($f_{.j}$); así como la *distribución de frecuencias condicionales*, cuando se representa la distribución de frecuencias de una de las dos variables que conforman la variable estadística

bidimensional, fijando un valor concreto de la otra variable. Todo esto implica que emerjan los conceptos de frecuencia conjunta, marginal y condicionada, las propiedades asociadas a cada tipo de frecuencia y las relaciones entre ellas, junto a los argumentos asociados a dichos conceptos y propiedades asociadas a los mismos y sus relaciones.

El lenguaje en la tabla, generalmente, refiere al verbal, numérico, y simbólico. Y en cuanto a los procedimientos y los argumentos referidos a los mismos, son la clasificación de la información en modalidades o intervalos de clase de la variable, con la posterior construcción y lectura de la tabla.

Los argumentos implicados en esta configuración incluyen los indicados en la configuración de construcción de la distribución de una variable estadística unidimensional, añadiendo los referidos al concepto de variable estadística bidimensional y distribución asociada, y los procedimientos y propiedades implicadas en la representación de su distribución en la tabla de doble entrada o contingencia, que son mucho más sofisticados que los identificados en la citada configuración.

Procesos

Esta configuración incluye los procesos identificados en la configuración de la construcción de la distribución de una variable estadística unidimensional, y añade los específicos que refieren a la representación de la tabla de doble entrada o contingencia, puesto que implica el proceso de identificación de las dos variables que conforman la variable bidimensional y se desean representar en disposición rectangular, clasificando sus valores y, eventualmente, en forma intervalo de datos agrupados.

En esta configuración, el concepto de variable estadística unidimensional y distribución de frecuencias asociada se considera un objeto unitario, mientras que en la configuración de la construcción de la distribución de una variable estadística unidimensional tenía la dualidad de sistémico. Por tanto, la generalización se pone en práctica cuando se define el concepto de variable estadística bidimensional y se enuncian las propiedades asociadas a dicho concepto.

El proceso de representación de las modalidades de ambas variables en la tabla junto a las frecuencias conjuntas pone en valor el proceso de comunicación, puesto que el lenguaje diagramático es específico en este tipo de tabla estadística, ya que en la primera columna se representan las modalidades o valores de una de las variables, mientras que en la primera fila se indican las modalidades o valores de la segunda variable. El cuerpo de datos contiene las frecuencias conjuntas referidas a las categorías de cada fila y columna. Además, la lectura de las etiquetas y celdas de la tabla conlleva el proceso de comunicar un lenguaje verbal, simbólico o numérico concreto.

Configuración: Transnumeración gráfica y tabular

Corresponde a la actividad matemática implicada en el cambio de registro de representación de los datos estadísticos de una tabla a gráfico, o viceversa. En esta configuración se identifica solo uno de los tipos de transnumeración propuestos por Wild y Pfannkuch (1999), puesto que consideramos que los objetos y procesos matemáticos implicados en esta práctica matemática son específicos de este tipo de representaciones, lo que otorga entidad a la configuración en sí misma.

Prácticas y objetos intervinientes

La traducción entre representación tabular y gráfica se asocia al campo de problemas SP3.1 y conlleva una alta representatividad del objeto matemático del lenguaje tanto verbal, simbólico y numérico como diagramático, en cuanto a la estructura y convenios que definen a cada tipo de tabla y gráfico estadístico (barras, histograma, polígono de frecuencias, pictograma, etc.).

Los conceptos fundamentales en esta configuración son los de variable estadística (tipo y escala), frecuencia (absolutas, relativas o porcentuales y sus respectivas acumuladas), distribución de frecuencias, e intervalo y las propiedades asociadas a cada uno de dichos conceptos. Luego, cada representación gráfica, en particular, implicará movilizar un conjunto de conceptos y propiedades específicas de dicha representación.

Los procedimientos fundamentales son los de construir, leer e interpretar la tabla y gráfica estadística que se encuentren implicadas en el proceso de traducción, junto a las propiedades asociadas a dichos procedimientos.

En cuanto a los argumentos, se comparten los identificados en la configuración referida a la construcción de la distribución de una variable estadística unidimensional, y se añaden los asociados a la representación gráfica específica que interviene en el proceso de traducción.

Procesos

El proceso de comunicación y representación son claves en esta configuración, puesto que se trata de informar de la distribución de datos de una variable estadística desde otro registro de representación. Por tanto, se requiere de la definición de variable, frecuencia, distribución de frecuencias e intervalo, si fuera el caso, junto a la enunciación de propiedades y los procedimientos asociados a cada una de las representaciones, gráfica y tabular, implicadas en el proceso de traducción.

Configuración: Medidas estadísticas

Consiste en obtener información de la tabla estadística que resuma el conjunto de datos y conlleva, en muchos casos, el uso de fórmulas (media, desviación típica, correlación, etc.) pero, en otros casos, las medidas estadísticas se pueden obtener directamente desde la tabla (moda, máximo, etc.).

Se asocia al campo de problemas SP3.4 y SP4.2, y aunque entran en juego los objetos y procesos identificados en la configuración de construcción de la distribución de una variable estadística (unidimensional o bidimensional), conlleva una mayor complejidad en cuanto a los objetos que emergen de esta configuración, como se detallan a continuación:

- *Representante de la distribución de frecuencias de la variable estadística:* en el caso de la variable estadística unidimensional interesa poner en práctica procesos de definición y enunciación de propiedades vinculadas a las medidas de tendencia central para escoger la que mejor representante a la distribución de frecuencias, lo

que conlleva realizar cálculos con la información representada en la tabla, comunicar y argumentar la medida escogida; y en muchos casos, se añaden columnas (filas) para facilitar los cálculos de dichas medidas estadísticas. En el caso de la variable estadística bidimensional, interesa calcular su centro de gravedad (\bar{x}, \bar{y}) .

- En el *estudio de la probabilidad* simple, conjunta o compuesta y condicionada, a través de la tabla de doble entrada o contingencia, interesa dominar las propiedades que relacionan estos conceptos y la argumentación asociada. En esta configuración estos objetos son unitarios, mientras que eran objetos sistémicos en la configuración de la construcción de la distribución de una variable estadística unidimensional.
- *Dependencia entre variables estadísticas*: cuando se analiza la dependencia (aleatoria o funcional) entre variables estadísticas que conforman una variable estadística bidimensional se requiere dominar conceptos y propiedades específicas, así como procedimientos referidos a la tabla de doble entrada o contingencia para determinar su intensidad y sentido (fuerte, media o nula, directa o inversa), que lleva asociado el cálculo de la covarianza o coeficiente de correlación lineal de Pearson. Todo esto da muestra del sentido unitario de conceptos como variable estadística bidimensional y distribución de frecuencias asociada, que en el caso de la configuración de construcción de la distribución de una variable estadística bidimensional se configuraban como sistémicos. Otro ejemplo que evidencia la dualidad sistémico/unitario de los conceptos vinculados a la tabla de doble entrada o contingencia es la interpretación de la independencia entre variables estadísticas a través del estudio de la proporcionalidad entre las distribuciones condicionadas representadas en la tabla
- *Ajuste de la función de regresión* a la distribución de datos de la variable estadística bidimensional. Para escoger el modelo que mejor se ajuste a los datos de una distribución estadística primero se ha de establecer el análisis de la dependencia entre las variables y, de ser intensa, escoger la familia de funciones que mejor modele dicha dependencia, según diferentes procedimientos que conllevan la definición y enunciación de propiedades de las familias de funciones que se consideren y se requiere competencia en el cálculo y representación de la recta de regresión. Además, es importante el proceso de argumentación en este tipo de configuración, dado que la predicción siempre tiene asociado un margen de error y la argumentación es fundamental en este tipo de comunicación.

1.6. OBJETIVOS GENERALES DEL TRABAJO

Basados en el marco teórico y los antecedentes que se describirán en el Capítulo 2, el presente trabajo busca analizar las tablas estadísticas propuestas en los textos escolares chilenos de 5° hasta 8° Básico (10 a 13 años) y españoles de 5° y 6° de Educación Primaria y de 1° hasta 4° de Educación Secundaria Obligatoria (10 a 15 años), así como la comprensión que alcanzan los estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria.

Por tanto, la investigación consta de dos partes independientes, aunque la segunda, depende, en cierto modo de la primera. En primer lugar, se realiza un estudio de la forma

en que se presentan las tablas estadísticas en los textos chilenos, que el Ministerio de Educación entrega gratuitamente a los escolares, para tener un panorama de la enseñanza que reciben los estudiantes respecto a este objeto matemático, el cual es complementado con un análisis de una muestra de libros de texto españoles. En la segunda parte, se desarrolla un estudio de evaluación con estudiantes españoles, para ver hasta qué punto se alcanzan los objetivos educativos fijados para estos niveles por el currículo español (MECD, 2014; 2015). Por ello, nos planteamos tres objetivos:

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado del tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular en estadística, en una muestra de textos dirigidos a estudiantes chilenos y españoles de Educación Básica en edades similares.

Como consecuencia, se trata de caracterizar el significado institucional implementado en los textos, en torno a la enseñanza de las tablas estadísticas en los textos chilenos y españoles y comparar con el significado institucional pretendido en las orientaciones curriculares, que se ha descrito en este capítulo. Para cumplir este objetivo se lleva a cabo un análisis detallado de una muestra de textos chilenos en el Capítulo 3 y de otra muestra de libros de texto españoles en el Capítulo 4. Los resultados de este análisis servirán de base para determinar el contenido del cuestionario de evaluación, para adecuarlo a la enseñanza que se pretende reciban los estudiantes de la muestra.

Objetivo 2. Construir un instrumento válido y fiable para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas de los estudiantes chilenos de quinto a octavo Básico, y españoles de Educación Secundaria Obligatoria, y los conflictos semióticos asociados, con el fin de caracterizar el significado personal adquirido por los estudiantes en estos niveles educativos.

La construcción del cuestionario se basará en el análisis previo de los libros de texto descrito en los Capítulos 3 y 4, además del estudio de los antecedentes a este trabajo, los cuales han descrito dificultades de diferente tipo en el trabajo con las tablas estadísticas (descritas en el Capítulo 2). Además de ser necesario para realizar el estudio de evaluación que se describe en el Capítulo 6, el cuestionario será útil para otras investigaciones y para la evaluación de los estudiantes por los propios docentes. Se construirá siguiendo normas metodológicas rigurosas (Cohen et al., 2018), con el fin de que sus resultados puedan ser generalizables a otros estudiantes del mismo nivel educativo.

Objetivo 3. Aplicar el cuestionario construido a una muestra de estudiantes españoles de 1º y 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) para caracterizar el significado personal que alcanzan sobre las tablas estadísticas, evaluando su comprensión y sus conflictos semióticos.

Aunque al inicio de la elaboración de la tesis, la intención fue realizar igualmente una evaluación en una muestra de estudiantes chilenos, la limitación de movilidad impuesta por la pandemia, generada por el Covid-19, llevó a cambiar la población

objetivo del estudio, centrándonos en los estudiantes españoles. Esta decisión se tomó por estar la autora del trabajo residiendo en España durante la pandemia y el único acceso de toma de datos en este país, al haberse reanudado la docencia presencial o semipresencial en septiembre de 2020. No obstante, se pretende realizar la evaluación de los estudiantes chilenos en un futuro cercano, con posterioridad a la presentación de la tesis.

En la muestra de estudiantes españoles, y mediante un estudio de evaluación, trataremos de examinar si los objetivos planteados en las directrices curriculares y libros de texto son alcanzados por los escolares y describir sus principales logros, y dificultades, así como el cambio con la edad y curso escolar. Se tratará de describir tanto los resultados cuantitativos obtenidos (índice de dificultad de las tareas, diferencias por grupos, correlaciones entre respuestas), como cualitativos (conflictos semióticos y principales tipos de respuesta).

1.7. HIPÓTESIS INICIALES

Como se ha indicado, el interés por el tema de la investigación surge, porque la tabla estadística es un formato muy utilizado para presentar información estadística (Duval, 2003; Marti et al., 2011), la variedad de tipos de tablas (Lahanier-Reuter, 2003) y de objetos matemáticos relacionados con ellas, lo que, finalmente, implica una diversidad de procesos cognitivos para su comprensión.

Además, la tabla estadística es un tópico que se encuentra presente en los lineamientos curriculares chilenos y españoles a partir de los primeros niveles educativos (MECD, 2014; MINEDUC, 2018) y no se disponen de investigaciones comprehensivas con estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. Algunas hipótesis con las que partimos en esta investigación son las siguientes:

H1. El significado institucional implementado para las tablas estadísticas, en los libros de texto chilenos de Educación Básica y españoles de Educación Primaria y Secundaria analizados, muestra un buen ajuste con el significado institucional pretendido en las directrices curriculares de los respectivos países.

En particular, se espera encontrar todos los tipos de tablas estadísticas propuestos por las directrices curriculares, mediante una introducción progresiva; evidenciando una adecuada idoneidad epistémica. También se espera encontrar, valores adecuados de las variables consideradas en el estudio (tipo de tabla, nivel de lectura, actividad pedida al estudiante, contexto, complejidad semiótica), en base a investigaciones previas sobre gráficos estadísticos, en especial las de Díaz-Levicoy y colaboradores (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2014; Díaz-Levicoy et al., 2015), quienes encontraron un buen ajuste entre el significado pretendido e implementado, para los gráficos estadísticos en los libros de texto chilenos de primaria.

H2. Esperamos que los estudiantes presenten dificultades en los niveles avanzados de lectura de las tablas estadísticas.

A pesar de que los estudiantes puedan realizar una lectura literal de los datos, es posible que aparezcan dificultades y errores conforme avanzan en los siguientes niveles

de lectura hasta llegar a la lectura crítica de los datos. Esta hipótesis se basa en las dificultades detectadas por la literatura referente a los niveles de lectura en tablas estadísticas (Gabucio et al., 2010), e igualmente en los trabajos de Chick (2004), Estrella y Olfos (2015) y Pérez-Sedano (2015), así como en los mencionados en la hipótesis anterior sobre gráficos estadísticos.

H3. Siguiendo esta línea, también esperamos encontrar dificultades en la construcción de tablas, o en la traducción entre diversos tipos de tablas (e.g tabla de datos a frecuencias con intervalos) y de tabla a gráfico.

Igualmente, la investigación previa informa de la existencia de errores en la construcción de tablas (Álvarez et al., 2020), especialmente en tablas de doble entrada (Marti et al., 2011). Además, los objetos matemáticos ligados a diferentes tipos de tablas no son los mismos, por lo que, el dominio para comprender una tabla puede no ser suficiente para trabajar con la otra. En este estudio, se busca profundizar en los errores más frecuentes que se presenten en relación a los tipos de tablas propuestas en los libros de texto analizados en los Capítulos 3 y 4 y que se han descrito en trabajos previos (Marti et al., 2011; Pérez-Sedano, 2015).

H4. Esperamos encontrar un progreso con la edad tanto en la lectura, como en la construcción de las tablas.

Se tomarán estudiantes de dos cursos diferentes, con lo que cada grupo de edad tendrá más experiencia y enseñanza de las tablas que el anterior (Martí et al., 2010). Esta mejora con la edad, esperamos que sea estadísticamente significativa y se ha encontrado en investigaciones con estudiantes sobre otros temas de estadística, como el estudio con gráficos estadísticos realizado por Díaz-Levicoy (2018) dirigido a estudiantes chilenos de 11 y 12 años de edad.

1.8. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO Y CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS

El presente estudio se desarrolla bajo un enfoque de investigación mixto, con un gran componente cualitativo, debido al tipo de datos con que se trabaja y a los métodos de análisis empleados (Cohen et al., 2018). La investigación es exploratoria, porque, aunque tenemos antecedentes, son pocos con libros de texto chilenos o españoles de las etapas educativas elegidas o con estudiantes de las edades pretendidas en este estudio. Por otro lado, en los antecedentes no se consideran todas las tareas previstas y variables de análisis. Este estudio se organiza en etapas, cada una de las cuales conlleva diferente metodología:

Análisis de las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares y los libros de texto

Es una investigación básicamente cualitativa y descriptiva (Hernández et al., 2014). Puesto que la evaluación del estudiante se debe conectar con la enseñanza recibida, se analizará los documentos que establecen el currículo de Educación Básica en Chile, y

el currículo de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria en España, identificando las orientaciones y metodología sugerida sobre las tablas estadísticas. Respecto a los libros de textos, la muestra de textos chilenos incluirá los textos entregados por el Estado (MINEDUC, 2015; 2018) que atienden al marco curricular vigente, con la finalidad de poder contrastar la información presente en ellos en torno a las tablas estadísticas. La muestra de textos españoles se formará por editoriales de gran difusión y tradición en España, los que también se ajustan a los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015).

En cada una de las muestras de textos seleccionadas, por medio de un análisis de contenido (Neuendorf, 2016), se realizará lecturas para establecer los párrafos que constituirían la primera unidad de análisis (Mayring, 2020). A través de un proceso cíclico e inductivo se examinará, en el contenido de dichos párrafos, las variables de análisis para confeccionar un listado de categorías en cada variable, y describir con ejemplos cada una de las encontradas en los textos (Drisko y Maschi, 2016).

Para el análisis de las muestras de libros de texto chilenos y españoles se consideran diferentes variables, las cuales son descritas en detalle en los Capítulos 3 y 4, junto a los resultados encontrados.

Construcción de un cuestionario de evaluación

El resultado del análisis de los libros de texto, permitirá definir el contenido semántico del cuestionario que será objeto de evaluación (Martínez et al., 2014), y dividirlo en unidades que tengan en cuenta las principales variables consideradas en el estudio de los textos. Una vez fijada la definición semántica (unidades de contenido) del cuestionario, se iniciará una recopilación de posibles ítems, recogidos del análisis de los libros de texto y de investigaciones previas.

A continuación, se elaborará un banco de ítems, revisando la redacción y traduciendo o adaptando el ítem al contexto y la edad del niño cuando sea necesario (Wang y Osterlind, 2013). De este banco, se seleccionarán los ítems del cuestionario mediante juicio expertos. Para ello, se cuenta con la colaboración de investigadores en Educación Estadística a los que se enviará un cuestionario para que evalúen la calidad y adecuación de los ítems, y la correspondencia de cada uno con contenidos específicos del cuestionario (Shultz et al., 2020).

Recibidos los cuestionarios por parte de los expertos, se realizará un estudio de los mismos, eligiendo para cada unidad de contenido el ítem que reciba mejor valoración y reformulando el ítem, si es necesario, de acuerdo las sugerencias entregadas por los expertos.

Una vez preparado el cuestionario, se realizará una prueba piloto con una muestra reducida de estudiantes para determinar su legibilidad y el tiempo requerido en responderlo, así como sus características psicométricas básicas (índices de dificultad y discriminación; fiabilidad; validez).

Estudio de evaluación de la comprensión de los estudiantes

Con el cuestionario definitivo se realizará un estudio en una muestra de tamaño

moderado (149 estudiantes de 1º curso y 128 de 3º curso de ESO) de dos institutos españoles de Educación Secundaria en España. Se solicitará autorización a los directores de los centros y profesores de los estudiantes, teniendo siempre en cuenta los principios éticos (McArdle, 2018).

Recogidas las respuestas escritas, se codificarán, estableciendo categorías mediante análisis de contenido (Neuendorf, 2016). Se realizará un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas. En el análisis cuantitativo se incluye índices definitivos de dificultad y discriminación; fiabilidad del cuestionario; puntuación total; análisis factorial (para estudiar las principales dimensiones del cuestionario). También se utilizará, el análisis de varianza para estudiar si es significativa la diferencia de resultados por nivel escolar. En el análisis cualitativo, se identificarán las principales categorías de errores en la lectura y construcción de las tablas, los cuales se tratarán de explicar en términos de la noción de conflicto semiótico (Godino, 2003).

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES

2.1.	Introducción
2.2.	Elementos en la comprensión de tablas estadísticas
2.2.1.	Componentes de la tabla estadística
2.2.2.	Niveles de complejidad semiótica
2.3.	Lectura de tablas estadísticas
2.3.1.	Procesos cognitivos asociados a la lectura
2.3.2.	Niveles de lectura
2.3.3.	Lectura e interpretación de las tablas estadísticas por niños
2.3.4.	Lectura e interpretación de las tablas estadísticas por adolescentes y estudiantes adultos
2.3.5.	Lectura e interpretación de las tablas estadísticas por futuros profesores
2.4.	Construcción de tablas estadísticas
2.4.1.	Errores en la construcción de tablas estadísticas
2.4.2.	Construcción de tablas estadísticas por niños
2.4.3.	Construcción de tablas estadísticas por adolescentes y estudiantes
2.4.4.	Construcción de tablas estadísticas por profesores en formación y en activo
2.5.	Investigaciones sobre el análisis de tablas estadísticas en libros de texto

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un resumen de las investigaciones previas que han servido de base para la realización de este trabajo y permitirán discutir los resultados del mismo. Nos hemos basado en la síntesis de Sharma (2013) de las investigaciones que abordan las tablas y gráficos, así como en la búsqueda en Google Scholar y en revistas de investigación en educación matemática y estadística. Un resumen de esta síntesis se ha publicado en Pallauta, et al. (en prensa).

En la primera parte se analizan las investigaciones más relevantes que se ocupan de estudiar la estructura y niveles de complejidad de las tablas estadísticas. Sigue una sección dedicada a la lectura y comprensión de la información representada, comenzando por una síntesis de distintos modelos, sobre la actividad cognitiva implicada en la lectura e interpretación de las tablas. Dentro de la misma sección, se presentan las investigaciones realizadas con estudiantes de diferentes niveles educativos, cuyos resultados informan del nivel y el modo de comprensión de este objeto. La tercera parte, apunta a la construcción de las tablas estadísticas y posibles errores, así como las investigaciones realizadas sobre este punto con estudiantes.

El último grupo de investigaciones, está formado por trabajos que analizan las tablas estadísticas en libros de texto, lo que permite identificar variables que se utilizarán en el análisis descrito en los Capítulos 3 y 4 y comparar con sus resultados.

2.2. ELEMENTOS EN LA COMPRESIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS

En este punto se analiza la actividad requerida en la comprensión de las tablas estadísticas, que precisa de una serie de aspectos cognitivos y estructurales. A continuación, se define qué se entiende por una tabla estadística, junto con sus

componentes. Igualmente, se presenta un análisis del nivel de complejidad semiótica de la información representada. Todo esto, con el fin de poder conocer las demandas cognitivas que se deben poner en juego al estudiar las tablas estadísticas.

2.2.1. COMPONENTES DE LA TABLA ESTADÍSTICA

La utilización de la tabla permite exponer de forma ordenada la información por medio de la intersección de filas y columnas, distribuyéndolas visualmente, lo que la convierte en una disposición gráfica en la que se muestra información cualitativa y/o cuantitativa que posee un doble eje: horizontal y vertical (Gabucio et al., 2010). También se utiliza en otros temas matemáticos, como, por ejemplo, el estudio de las funciones, donde en uno de los ejes se representa los valores de la variable independiente y en el otro de la dependiente, que usualmente se deducen a partir de una expresión algebraica, o relación funcional (aunque no sea explícita). En este sentido, el formato tabular se ha convertido en un medio que permite conocer cómo los estudiantes, especialmente, a temprana edad, entienden y se apropian de temas como las relaciones aditivas (Brizuela y Lara-Roth, 2002).

En nuestro caso, nos interesamos únicamente por las tablas estadísticas, en las que, es posible encontrar una variedad, tanto en su estructura, como en el tipo de información representada. La tabla estadística tiene un rol importante en el estudio estadístico; en este sentido Estrella (2014) entiende una tabla estadística como:

[...] un arreglo rectangular con una estructura que comprende un conjunto de filas y columnas [...] permite presentar los datos correspondientes a una o más variables (características del fenómeno bajo estudio) en forma clasificada y resumida, para permitir la visualización del comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer (p.6).

En una tabla estadística, la información se encuentra organizada con el objeto de facilitar su interpretación, lo que requiere seguir filas y columnas, para determinar la posición de la celda con el dato de interés. Con ello, la estructura tabular, posee una serie de elementos comunes, a pesar de la variedad de tipos de tablas estadísticas descritas en el Capítulo 1. Estrella (2014) identifica sus elementos más usuales, algunos de los cuales coinciden con los de los gráficos estadísticos, lo que ha hecho que autores como Wainer (1992) analicen de manera conjunta su comprensión. Particularmente, Estrella (2014) señala los siguientes para las tablas:

- *Título*: este debe ser breve y conciso, idealmente debe describir las variables representadas, y si es posible el contexto, en cuanto al lugar y tiempo en que se realizó el estudio, o la recogida de la información.
- *Las etiquetas presentes en el margen lateral o primera columna*: muestran las diferentes modalidades que toma la variable, de acuerdo a su escala de clasificación. Cuando la tabla expone más de una variable, usualmente, en la primera columna se representa la variable que tenga mayor número de modalidades o categorías, y en el caso de estudios de asociación entre variables la variable que se conforma en condicionante.
- *Las etiquetas presentes en el encabezado superior*: es el sitio en que se presenta

el contenido de cada una de las columnas. Por ejemplo, el tipo de frecuencias, o las modalidades de una segunda variable (tablas de doble entrada). Por otro lado, en la última fila y/o columna se ubican los totales.

- Los tres elementos anteriores son comunes a los gráficos, como se indica, por ejemplo en Friel et al. (2001). Pero, mientras que el cuerpo del gráfico está formado por contenido visual, las tablas están formadas por *el cuerpo de datos*, que es el conjunto de celdas que se forman al interior, producto de la intersección de filas y columnas. Este contiene, generalmente, información numérica, la que es posible de ubicar por los subíndices de filas y columnas y puede ser de tipo diverso, como por ejemplo frecuencia absoluta o relativa, porcentaje e incluso en algunos casos puede contener más de un elemento en la misma celda.

Lahanier-Reuter (2003), interesada en profundizar en los distintos tipos de tablas que se utilizan en estadística, destaca que cada una de ellas tiene una estructura que las diferencia, por lo que es usual que los estudiantes presenten dificultades cuando trabajan con ellas; por ejemplo, es diferente la demanda cognitiva empleada al leer una tabla de frecuencias que en una tabla de datos. La autora identifica los siguientes componentes comunes de la tabla:

- *Márgenes*: Serían lo que antes hemos llamado encabezado superior y margen lateral, así como la fila y columna que incluyen resultados totales. Pueden variar en número y constitución.
- *Interior de la tabla*: tipo de información contenida en las celdas interiores de la tabla, la que puede corresponder a números naturales, números reales, lenguaje natural o verbal, o también símbolos para denotar la presencia o ausencia de una cierta característica.

Leclère (2003) coincide con los autores anteriores, en el sentido de que a pesar de que las tablas sean diferentes, poseen elementos en común en su presentación, y observa, por ejemplo, que el ancho de las columnas depende tanto del tamaño de los números como del tamaño de la descripción de los encabezados de la columna (márgenes); además, en la mayor parte de las tablas la primera columna ocupa una posición jerárquicamente marcada.

2.2.2. NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA

Como se ha señalado anteriormente, algunos modelos para la comprensión y lectura de gráficos también son factibles de utilizar para los análisis de tablas estadísticas. Uno de estos modelos es el propuesto por Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010) quienes sugieren que la construcción de gráficos es una actividad semiótica que varía de complejidad, de acuerdo a los objetos matemáticos que intervienen en la tarea. Igualmente una tabla es un objeto semiótico complejo, que requiere diferentes procesos interpretativos: del título, variables y valores representados, de cada elemento del cuerpo de la tabla en sí mismo y de la tabla en su totalidad.

Los autores, basados en principios del enfoque ontosemiótico, específicamente en la clasificación de tipos de objetos matemáticos y configuración de objetos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino et al., 2007; 2019), definen los niveles de complejidad en los gráficos, que podemos extender a las tablas estadísticas:

- *Nivel 1. Representar solo algunos datos aislados.* Se corresponde con la representación de datos de manera aislada de unas pocas variables; por ejemplo, un estudiante puede construir una tabla con sus datos, sin tener en cuenta los del resto de la clase. Es una actividad semiótica elemental, en la que no surge la idea de frecuencia o distribución.
- *Nivel 2. Representación de un conjunto de datos uno a uno,* en este nivel se representan todos los valores de la variable, pero no se muestra la frecuencia asociada a cada dato y, por tanto, no emerge el concepto de frecuencia o distribución. Sería el que corresponde al listado de datos.
- *Nivel 3. Representación de una distribución de frecuencias.* Junto a cada valor de la variable se representa su frecuencia, por lo que se considera la distribución de la variable. Este nivel posee un grado más alto de complejidad, dado que los datos son clasificados, y se determinan las frecuencias asociadas a cada modalidad de la variable. Sería, en nuestro caso, la tabla de distribución de una única variable.
- *Nivel 4. Representación de dos o más distribuciones.* Se trata del más alto nivel de complejidad semiótica establecido, en el que son representadas varias distribuciones de frecuencias de manera conjunta. Sería la tabla de distribución de dos o más variables.

El nivel de complejidad semiótica fue una de las variables analizadas por Pallauta (2018) en los libros de texto chilenos de Educación Básica. Basados en este estudio, y en el análisis presentado en el Capítulo 1, podríamos agregar subniveles de complejidad para el Nivel 3 y Nivel 4, de acuerdo a los objetos matemáticos que intervienen en las tablas, que no fueron considerados en el trabajo de Arteaga (2011), puesto que, se pueden incorporar diferentes objetos matemáticos en un mismo tipo de tabla. Ello hará variar cognitivamente la demanda de la tarea y, en consecuencia, la actividad semiótica tendrá un diferente nivel de complejidad (Batanero et al., 2010). Por lo tanto, las tablas no son solamente una representación de un concepto como la distribución de datos, sino, en términos de Font et al. (2007), la configuración de objetos que se relacionan e interactúan de manera dialéctica.

A continuación, se describen los niveles considerados y su aplicación en el caso de esta investigación, según la tipología de tablas encontradas en los documentos curriculares de Chile y España (MECD, 2014; 2015; MINEDUC, 2015; 2018), que se han descrito en el Capítulo 1 y los libros escolares analizados.

Nivel 1: Tabla de representación de datos individuales

Este tipo de tabla se hace corresponder con el nivel de complejidad 1 (CI), el más bajo descrito en Arteaga (2011). Se asocia con la representación de datos de manera aislada de una variable. No aparece en nuestro estudio, puesto que las tablas estadísticas, en su mayoría, no son referidas a datos aislados, ya que, en su conjunto, se refiere a

elementos o individuos que comparten información que describe a la variable que es registrada.

Nivel 2: Tabla de datos (o listado) de una o más variables estadísticas

Se utiliza, principalmente, para recoger datos de un estudio estadístico y se asocia con el nivel de complejidad semiótico de tipo 2 (C2), descrito por Arteaga (2011), porque en ella no se muestra la idea de frecuencia asociada a cada dato y, por consiguiente, no emerge el concepto de distribución. Giot y Quittre (2008) señalan que esta tabla se compone de diferentes listados, y su función consiste en facilitar la visualización y la vinculación de las variables representadas, por la propia disposición de las celdas de la tabla. También promueve una comparación sinóptica, y dependiendo de los listados que la conformen puede tener diferente nivel de dificultad.

Nivel 3: Tabla de distribución de una variable estadística

En esta categoría son consideradas las tablas que presentan la distribución de una variable estadística, por lo que sugerimos que estas tablas corresponden al nivel semiótico N3, según Arteaga (2011). Este nivel, además, se podría clasificar en tres subniveles, dependiendo de si se consideran las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase en la forma siguiente:

- *Nivel de complejidad C3.1:* Tablas de distribución de frecuencias ordinarias (absoluta, relativa o porcentual).
- *Nivel de complejidad C3.2:* Tablas de distribución que incluyen también frecuencias acumuladas (absoluta, relativa o porcentual). Su nivel de complejidad es mayor, porque involucra el manejo de desigualdades y, además, va implícita la idea de percentil o cuartil.
- *Nivel de complejidad C3.3:* Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalos, para cualquier tipo de frecuencia, ordinaria o acumulada. Se añade la idea de intervalo, sus extremos y marca de clase, así como los tipos de intervalo (cerrado, abierto o semiabierto).

Nivel 4: Tabla de doble entrada o de contingencia

Posee el mayor nivel de complejidad semiótica descrito por Arteaga (2011), pues permite relacionar la distribución de dos variables estadísticas unidimensionales (X e Y). El nivel de complejidad semiótico es alto, puesto que establecen muchas relaciones en la propia tabla, que es preciso diferenciar. Por una parte, en la tabla se distinguen tres tipos de frecuencias: absoluta conjunta (doble), absoluta marginal a la fila o a la columna, así como las derivadas de las mismas (relativa, porcentual, etc.). De la misma manera, es posible diferenciar tres tipos de distribuciones, considerando las modalidades en la tabla, como es la distribución conjunta o bidimensional de (X , Y), distribución marginal en X o en Y , así como las distribuciones condicionadas de X o Y en fila como en columna. Este tipo de tabla, a su vez, podría contener intervalos de clase, aunque no es habitual considerar frecuencias acumuladas. Por tanto, obedeciendo al criterio empleado para las tablas de distribución, el nivel de complejidad semiótico se podría clasificar en dos subniveles, según se consideren intervalos de clase o no:

- *Nivel de complejidad C4.1:* Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias (absolutas, relativas o porcentuales).
- *Nivel de complejidad C4.2:* Cuando se considera la agrupación de valores de alguna de las variables representadas en intervalo, en cualquier tipo de frecuencia.

2.3. LECTURA DE TABLAS ESTADÍSTICAS

La lectura de una tabla es esencial para la interpretación de la información expuesta en la misma, sin embargo, la investigación ha revelado que es una actividad semiótica compleja. Por este motivo, son variados los autores que ofrecen diversos modelos que podrían guiar este proceso, como se detalla a continuación.

2.3.1. PROCESOS COGNITIVOS ASOCIADOS A LA LECTURA

Duval (2003) identifica tres funciones que puede ejercer la lectura de las tablas:

- Una función de entrega de información rápida, ante una pregunta sencilla, por ejemplo, cuando se quieren leer los horarios de salida de un autobús;
- Una función de comparación sinóptica, por ejemplo, cuando se desea seguir el comportamiento de un determinado fenómeno;
- Una función de tratamiento de la información, por ejemplo, en el campo de la estadística.

Independiente de su función y el tipo de tabla, las tablas distribuyen visualmente los datos con el objeto de facilitar la información. El mismo autor agrega, que cada celda que compone el cuerpo de la tabla contine una unidad de información independiente de las otras celdas. Por ello, una de las mayores dificultades en su comprensión es interpretar las unidades de información en una representación, en la que funcionan variados significados (valores de la variable, frecuencias, totales), cada uno con sus propias reglas de interpretación.

Por ejemplo, al traducir un problema expresado de manera verbal a una tabla, las expresiones lingüísticas que describen las modalidades de las variables aparecerán en los márgenes de la tabla, mientras que cada uno de los valores numéricos se ubicarán en el cuerpo de la misma. Este hecho, generalmente no es tomado en cuenta, y los estudiantes fallan al leer el enunciado del problema, porque se enfocan en los números, obviando las modalidades que les dan a los números su sentido o magnitud. Esto los hace cometer errores respecto al significado de las operaciones que requieren realizar, o las relaciones que deben establecer para poder resolver un problema.

Cambios de representación

Desde este punto de vista, leer es un proceso que toma especial relevancia en la comprensión de las tablas, por lo mismo, es conveniente tener presente que existen diferencias, por ejemplo, en la traducción desde un lenguaje escrito a una tabla, y viceversa (Bossé et al., 2011). Janvier (1987), destaca los procedimientos cognitivos asociados a los cambios de representación, los cuales son detallados en la Figura 2.3.1.1. Figura 2.3.1.1 Procesos cognitivos implicados en el cambio de representación (Janvier 1987, p.53)

Hacia / Desde	Lenguaje escrito o verbal	Tabla	Gráfico	Lenguaje algebraico
Lenguaje escrito	Diversidad de descripciones de las relaciones entre categorías de la variable y valores.	Organización, clasificación y disposición espacial de relaciones entre categorías de la variable y valores.	Imagen visual entre categorías de la variable y valores.	Modelamiento de las relaciones cuando es posible.
Tabla	Lectura e interpretación de relaciones entre categorías de la variable y valores.	Modificación de relaciones o creación de nuevas tablas.	Traducción visual de las relaciones de valores de las variables a localizaciones en plano cartesiano o áreas del gráfico circular	Búsqueda de posible modelo, y ajustes del mismo a los datos.
Gráfico	Interpretación de datos, tendencias y relaciones gráficas.	Interpretación de relaciones y extracción de valores y categorías. Traducción al lenguaje tabular.	Modificación de relaciones o creación de nuevos gráficos.	Búsqueda de posible modelo, y ajustes del mismo a los datos.
Lenguaje algebraico	Lectura e interpretación de relaciones simbólicas.	Generación de relaciones entre valores y categorías de la variable (cálculos).	Representación de relaciones en forma gráfica.	Ajustes en las relaciones.

Tablas y procesos de transnumeración

En la lectura e interpretación de tablas intervienen procesos de transnumeración, descritos por Wild y Pfannkuch (1999), que se encuentra presente en todos los análisis estadísticos, y se genera cuando se cambia la forma de presentar los datos, con el objeto de obtener un nuevo significado. La transnumeración, es un proceso dinámico que implica el cambio de representaciones, a través del desarrollo de nuevas variables para ser representadas como una nueva entidad. Esta transformación promueve una comprensión profunda de los datos, por lo que se conforma en una componente esencial del razonamiento estadístico (Chick et al., 2005).

Este proceso está compuesto de tres etapas: recoger datos de situaciones reales, analizar y organizar datos, lo que involucra operar con ellos, y por último presentar estos datos a través de alguna representación. Chick (2004) agrega, que el éxito de la representación dependerá, en gran medida, del conocimiento de los tipos de representación y de las técnicas necesarias para ello. En este sentido, la autora, basada en el marco presentado por Wild y Pfannkuch (1999), propone un modelo compuesto por un conjunto de técnicas (Tabla 2.3.1.1) aplicadas a los datos, con el fin de mostrar y explicar las operaciones de transnumeración implicadas en el trabajo con las tablas estadísticas.

Cada una de las técnicas requiere un cambio de representación, que genera una nueva variable y una organización o representación diferente de los datos. Las técnicas de graficación y tabulación, alteran los datos iniciales, y usualmente son empleadas para mostrar resultados finales; sin embargo Chick (2004) señala que también, pueden surgir en el proceso de análisis de los datos.

Tabla 2.3.1.1. Marco de técnicas transnumerativas (Chick, 2004)

Técnica	Descripción
Ordenación	Los datos son ordenados de acuerdo a un criterio.
Agrupamiento	Los datos son agrupados de acuerdo a un criterio, por ejemplo, por intervalos de clase. Se genera una nueva variable derivada de la primera, lo que podría implicar un tipo de transnumeración.
Selección de subconjunto	Un subconjunto de los datos es seleccionado para un análisis particular, por ejemplo, sólo los hombres.
Cambio de tipo de variable	Una variable numérica se plantea en términos categóricos, o una categoría se plantea en términos numéricos u ordinales.
Cálculo de frecuencia	Se determinan las frecuencias de las categorías de una variable. Las frecuencias en una tabla pueden considerarse como una nueva variable (función de los valores de la original).
Cálculo de proporción o porcentaje	Las proporciones, o porcentajes se determinan en relación a un todo, esto crea una nueva variable.
Gráfica / tabulación	Algunas o todas las variables son representadas a través de un gráfico o una tabla.
Cálculo de medida de tendencia central	Determinar una medida de tendencia central de una variable puede crear una nueva variable.
Cálculo de medida de dispersión	Determinar medidas de dispersión de una variable numérica puede crear una nueva variable.
Otros cálculos	Determinar la posibilidad de realizar otros cálculos estadísticos con los datos.

2.3.2. NIVELES DE LECTURA

En los datos presentados en tablas o gráficos, la capacidad de leer resulta fundamental. Duval (2003) señala que una operación básica, en el proceso de una lectura simple, consiste en visualizar una tabla e identificar la celda que contiene la información buscada, sin embargo, este proceso solo se aplica para tablas cuya función es de direccionamiento, por ejemplo tablas de datos que contienen los horarios de entrada y salida de los trenes. El autor destaca que la dificultad en la lectura radica en que se deben tener en cuenta, al mismo tiempo: dos áreas de visualización, como los márgenes (fila y columna donde aparece la descripción), y por otro el cuerpo de datos; además, de tres orientaciones de visualización: horizontal o vertical, y en ocasiones también el interior de la tabla.

Para Duval (2003), conseguir una aprehensión global en el proceso de lectura de una tabla requiere, además, de una interpretación que no solo se reduzca a la identificación de la celda con la información buscada. Lahanier-Reuter (2006) refuerza esta idea, enfatizando en la importancia en la diferenciación del tipo de tabla, dado que existen representaciones tabulares que en apariencia son similares, pero cuya función y demanda cognitiva difiere, lo que repercutirá en la lectura que se realice de la misma.

Existe una variedad de estudios que han profundizado en la habilidad de interpretación de gráficos, pero algunas de estas propuestas pueden ser también aplicables para las tablas estadísticas. Así, Curcio (1989) establece tres niveles de lectura para gráficos y tablas. Luego, Shaughnessy et al. (1996) ampliaron con un cuarto nivel de lectura, que finalmente fue integrado por Friel et al. (2001). Por tanto, se pueden diferenciar cuatro tipos de niveles de lectura de una tabla como son:

- *Nivel 1. Leer los datos*, es una lectura literal de la información expuesta en un gráfico o tabla, corresponde al nivel más básico de competencia. Se refiere a cómo los estudiantes identifican variados aspectos de la tabla, con el objeto de poder responder a preguntas en que la información esté expuesta de manera explícita en la tabla. Sería, por ejemplo, la lectura del rótulo, o la lectura de una celda aislada de la tabla.
- *Nivel 2. Leer dentro de los datos*, corresponde a una lectura de información que implica realizar operaciones aritméticas o comparaciones con los datos de la tabla y requiere de encontrar relaciones entre los datos. Por ejemplo, cuando se pide obtener la moda de una variable o calcular el total de valores que corresponden a un rango de valores. Otro ejemplo es cuando el estudiante realiza comparaciones de datos entre diferentes países y, dentro de un país, para diferentes años.
- *Nivel 3. Leer más allá de los datos*, involucra una lectura de información que no viene directamente representada en la tabla. Para ello, mediante inferencias, o razonamientos sobre informaciones presentadas de manera implícita, se debe predecir, inferir, interpolar o extrapolar a partir de los datos presentes en la tabla. Por ejemplo, si la variable es numérica, extrapolar la frecuencia de un valor no representado. O en una tabla de doble entrada, determinar si existe asociación entre las variables representadas.
- *Nivel 4. Leer detrás de los datos*, es realizar una valoración crítica de las conclusiones, o de la recogida y tratamiento de la información expuesta a través de una tabla o gráfico. Requiere un conocimiento del contexto sobre los temas en que se situaron los datos representados, este hecho permite realizar inferencias con un mayor nivel de complejidad.

Basados en los niveles de lectura anteriormente descritos, Gabucio et al. (2010) proponen un conjunto de niveles interpretativos, dirigido al proceso de lectura de las tablas: Comprensión de la estructura tabular; Lectura directa de datos; Inferencia de datos; Interpretación global. Estos cuatro niveles, tratan de verificar si los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001) son aplicables en la interpretación de tablas. Para ello, se tomaron los primeros tres niveles de lectura como leer datos, leer entre los datos y leer más allá de los datos, que fueron renombrados como: lectura directa, inferencia de datos e interpretación global. La categoría comprensión de la estructura tabular, es un aporte teórico diferente a los niveles ofrecidos por Friel et al. (2001), puesto que complementaría el nivel leer los datos porque profundiza en una doble dimensión dentro del nivel más básico de lectura. Se refiere a aspectos básicos en la construcción de la tabla, como su doble eje horizontal-vertical, y los significados de los diferentes elementos que la conforman. Se distingue de la lectura directa de información, a pesar de que el sentido común indica que deberían estar ligadas, puesto que no debería ser posible leer datos de una tabla, sin comprender la construcción y organización de la misma.

En general, los resultados de este estudio evidencian que los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001), como “leer los datos”, “leer entre los datos” y “leer más allá de los datos” se pueden aplicar en la interpretación de las tablas. Además, sus distintos grados de dificultad se vieron reflejados en el estudio realizado, observando que los

participantes presentaron mayores dificultades en aspectos asociados a la estructura de la tabla, a diferencia de la lectura directa de datos, que les resultó más sencilla.

Por su parte, García-García et al. (2019) proponen un modelo jerárquico pensado para el análisis de la comprensión de las tablas estadísticas. Los autores vinculan modelos teóricos de lectura dirigidos a la interpretación de gráficos (Aoyama, 2007; Curcio, 1989; Friel et al., 2001), como se muestra en la siguiente Tabla 2.3.2.1.

Tabla 2.3.2.1. Jerarquía para el análisis de la comprensión de tablas estadísticas (García-García et al., 2019, p. 8)

Nivel de comprensión	Nivel de Curcio	Nivel de Aoyama	Descripción
Nivel 0. Perspectiva personal		Nivel 1. Idiosincrático	La respuesta se basa en perspectivas personales del estudiante.
Nivel 1. Lectura literal	Nivel 1. Leer los datos	Nivel 2. Lectura básica	La respuesta del estudiante presenta palabras referentes al título o a la(s) variable(s) de la tabla; o bien, frecuencias correspondientes a los valores de la(s) variable(s); sin realizar interpretaciones de la información.
Nivel 2. Comparativo	Nivel 2. Leer dentro de los datos		La respuesta del estudiante presenta comparaciones de datos por columnas, por filas, o bien, de ambas maneras.
Nivel 3. Predictivo	Nivel 3. Leer más allá de los datos		La respuesta del estudiante presenta predicciones de tendencias del comportamiento de los datos o de frecuencias correspondientes a los valores de la(s) variable(s) de la tabla.
Nivel 4. Integrativo	Nivel 4. Leer detrás de los datos	Nivel 3. Relacional/literal	La respuesta del estudiante presenta una valoración crítica de la información al integrar una conexión con el contexto, de manera:
		Nivel 4. Crítico	a) Racional/literal, al explicar significados contextuales literalmente en términos de los datos mostrados en la tabla, pero sin cuestionar la información o sugerir alguna interpretación alternativa.
		Nivel 5. Elaboración de hipótesis y modelos	b) Crítica, al evaluar la fiabilidad de la información y/o la forma en que se recolecta o presentan los datos.
			c) Hipotética, al aceptar o evaluar alguna información formando hipótesis explicativas.

Los niveles propuestos por Aoyama (2007) en la lectura de gráficos se establecen en cinco categorías, como se muestra en la Tabla 2.3.2.1, que corresponden al grado de complejidad del proceso cognitivo que establece el estudiante en su lectura:

- *Nivel 1. Idiosincrático*, no identifican valores o tendencias en las gráficas, presentando errores en la lectura de datos;
- *Nivel 2. Lectura básica*, leen valores y tendencias en los gráficos, sin embargo, no

- pueden explicar tendencias y contextos;
- *Nivel 3. Racionalidad/literal*, leen valores y tendencias, pueden explicar tendencias de acuerdo al contexto en que se inserta el gráfico, sin embargo, no pueden proponer una interpretación alternativa;
 - *Nivel 4. Crítico*, leen gráficos y comprenden las variables expuestas, pueden evaluar la veracidad del contexto en que se expone el gráfico, aplicando un sentido crítico;
 - *Nivel 5. Elaboración de hipótesis y modelos*, leen y evalúan la información expuesta en un gráfico, son capaces de plantear sus propias hipótesis o modelos explicativos.

Taxonomía de comprensión de tablas

Varios autores han profundizado en las competencias necesarias para tratar con datos, habilidad fundamental en la alfabetización estadística (Gal, 2002; Watson, 2013). Algunas se han basado en la taxonomía SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) propuesta por Biggs y Collis (1982), como un sistema que permite evaluar el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes, así como para establecer objetivos del currículo. Esta taxonomía surge a partir de las etapas del desarrollo cognitivo de Piaget, y se compone de cinco niveles de complejidad que parten de acciones concretas a la aplicación de conceptos abstractos, los cuales son: *preestructural*, *uniestructural*, *multiestructural*, *relacional* y *abstracción extendida* (Tabla 2.3.2.2).

Tabla 2.3.2.2 Descripción de los niveles de la taxonomía SOLO (Biggs y Collins, 1982, p. 24)

Niveles	Capacidad	Operaciones implicadas
Preestructural	Mínima: Tiene confusiones en sus respuestas.	Carencia de relaciones lógicas. Presenta confusiones: tautología, transducción, negación.
Uniestructural	Baja: Solo usa un dato relevante de la situación planteada.	Generaliza sus respuestas basado solo en un aspecto.
Multiestructural	Media: Utiliza dos o más datos de la situación planteada, y los analiza de manera aislada.	Puede generalizar de manera limitada, no interrelacionando la información.
Relacional	Alta: Manifiesta de manera integrada las relaciones entre los diferentes datos o conceptos utilizados.	Inducción: generaliza de acuerdo al contexto presentado.
Abstracción extendida	Emplea procesos de mayor nivel de abstracción que no solo se limitan a describir.	Deducción e inducción, puede generalizar a situaciones no experimentales.

Basados en dicha taxonomía, Kemp y Kissane (2010) proponen un marco dirigido a la planificación de la enseñanza de tablas y gráficos (Tabla 2.3.2.3), que los maestros pueden utilizar para desarrollar en sus estudiantes estrategias de interpretación de datos en forma tabular o gráfica. Ha sido implementado con éxito en diferentes niveles educativos. Para ello, es primordial el uso de datos reales, que sean de interés para el

alumno, adaptando el nivel de complejidad y el contenido de la tabla o gráfico de acuerdo al tema que se desee abordar.

Tabla 2.3.2.3 Marco para interpretar tablas y gráficos (Kemp y Kissane, 2010, p. 3)

Paso 1: Comenzando	Leer el título, los ejes, los encabezados, las leyendas, las notas al pie y la fuente de los datos para conocer su contexto y calidad. Tener en cuenta la información sobre las preguntas formuladas en las encuestas y sondeos, el tamaño de la muestra, procedimientos de muestreo y el error de muestreo.
Paso 2: ¿Qué significan los números?	Saber lo que representan los números (porcentajes, etc.). Buscar los valores más grandes y más pequeños en una o más categorías para obtener una impresión de los datos.
Paso 3: ¿Cómo difieren?	Mirar las diferencias en los valores de los datos en un solo conjunto de datos, una fila o columna o en parte de un gráfico. Esto puede implicar cambios a lo largo del tiempo, o una comparación dentro de una categoría tal como hombre y mujer a lo largo del tiempo.
Paso 4: ¿Dónde están las diferencias?	¿Cuáles son las relaciones en la tabla que conectan las variables? Usar la información desde el Paso 3 para ayudar a hacer comparaciones entre dos o más categorías o marcos temporales.
Paso 5: ¿Por qué cambian?	¿Por qué hay diferencias? Buscar razones para las relaciones que se han encontrado en los datos al considerar factores sociales, ambientales y económicos. Pensar en cambios repentinos o inesperados en términos de políticas de estado, nacionales e internacionales.

Gal y Trostianitser (2016) añaden un paso más centrado en el significado o los alcances reales de los datos al marco propuesto por Kemp y Kissane (2010). Esta propuesta surge de un estudio realizado con estudiantes universitarios, en que los autores detectan la necesidad de que los estudiantes puedan razonar también sobre los diferentes factores que pueden influir o alterar las tendencias observadas a partir de los datos, para comprender el significado real de los datos, e involucrarse en diferentes temáticas sociales que afectan al mundo actual.

2.3.3. LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR NIÑOS

Algunos estudios abordan la comprensión de las tablas y gráficos por niños en los primeros niveles educativos, ya que su estudio se encuentra presente, ya sea de manera implícita o explícita, en bases curriculares como los Principios y estándares para la matemática del NCTM (2014) o el Proyecto GAISE (Franklin et al., 2005).

En estas investigaciones cobra espacial relevancia el contexto de las tareas, que influye en la comprensión e interpretación de dichas representaciones. En este sentido, Pérez-Sedano (2015) presenta parte de una investigación centrada en la construcción e interpretación de una tabla de doble entrada, con 104 niños de una escuela pública de Barcelona: 36 alumnos de infantil (16 niñas y 20 niños; edad media: 4 años); 38 alumnos de 1º y 2º curso de Educación Primaria (19 niñas y 19 niños; edad media: 7 años); y 30 alumnos de 3º y 4º curso de Educación Primaria (16 niños y 14 niñas, edad media: 9 años). La tarea propuesta fue la interpretación individual de un calendario semanal con una estructura de doble entrada, empleando tres tipos de tarjetas: días de la semana, diferentes momentos del día (mañana, tarde y noche), y dibujos con actividades que desarrollan los

niños. Se propuso dos estructuras de calendario, por ejemplo, los días en horizontal y los momentos en vertical. En primera instancia los estudiantes debían ubicar una actividad, propuesta por la maestra, en un día y momento específico; mientras que la segunda tarea, consistía en identificar en qué día y momento ocurría una actividad señalada.

Respecto a la interpretación de la tabla, la totalidad de los niños de Educación Primaria lograron desarrollar con éxito la primera tarea de localización, que consistía en situar una actividad teniendo en cuenta el día y el momento, mientras que los niños de infantil acertaron en un menor porcentaje. La segunda tarea, que implicaba procesos de lectura, el porcentaje de logro fue incrementando conforme se avanza de nivel escolar, similar a lo ocurrido en la tarea anterior. Este estudio de la lectura y localización de los datos, resultó menos compleja que la construcción, puesto que solo los estudiantes de educación infantil manifestaron algunas dificultades.

En el contexto chileno Díaz-Levicoy et al. (2020), en una muestra de 79 estudiantes de 3° curso de Educación Primaria, analiza los dos primeros niveles de lectura de los propuestos por Friel et al. (2001), alcanzados en tablas de datos y de frecuencias simples, sus resultados mostraron que la mayoría de los niños alcanzan el nivel *lectura de los datos*, y muchos también el nivel *lectura entre los datos*. En dicho estudio no se consideró la capacidad de los estudiantes para responder a preguntas con un nivel superior de lectura.

Empleando la taxonomía SOLO propuesta Biggs y Collis (1982) (Ver Tabla 2.3.2.2), Sepúlveda et al. (2018) evaluaron la comprensión sobre tablas estadísticas de estudiantes chilenos de 3° y 6° curso de Educación Primaria. La muestra estaba compuesta de 233 estudiantes chilenos, 147 de 3° curso (8 años) y 86 de 6° curso (11 años), a quienes se les aplicó un cuestionario de cuatro preguntas, utilizadas en estudios previos (Díaz-Levicoy et al., 2016; 2019), que implicaban la interpretación de tablas estadísticas. El análisis de acuerdo al marco utilizado (taxonomía SOLO) permitió observar que el 62% se ubica en el *nivel uniestructural* (capacidad baja), el 21% clasifica en el *nivel multiestructural* (capacidad media), el 14,9% en el *nivel preestructural* (capacidad mínima o ausente), mientras que solo el 1,2% logra un *nivel relacional* (capacidad alta), no obteniendo respuestas de *nivel de abstracción*, que implica la generalización y aplicación de conceptos en diferentes situaciones. Basados en los resultados, los autores concluyen que los estudiantes de Educación Primaria se ubican en un nivel de aprendizaje *multiestructural*, caracterizado por la utilización de dos o más datos presentes en la situación planteada, los cuales son analizados de manera aislada.

Por otra parte, Guimarães et al. (2021) analizan la capacidad de interpretar tablas de datos y de doble entrada en 325 estudiantes brasileños de 1° a 5° curso de Educación Primaria, a quienes se les propuso 4 ítems que implicaban a) identificar la modalidad con menor frecuencia, b) identificar la frecuencia asociada a una determinada modalidad, c) identificar la modalidad asociada a una determinada frecuencia y d) tomar una decisión basada en los datos presentados en la tabla. Los resultados muestran que los estudiantes a partir de 1° curso interpretan tablas de datos y de doble entrada, además, se observó una mejora de resultados conforme se avanza de curso. En relación a las diferentes preguntas planteadas, se observó que en 4° curso hubo un ligero incremento de resultados apropiados comparado con 5° curso. La principal dificultad que se presentó fue una

carencia de capacidad para vincular los datos en la toma de decisiones, especialmente en los primeros cursos de Educación Primaria.

2.3.4. LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR ADOLESCENTES Y ESTUDIANTES ADULTOS

Un número mayor de trabajos se ha centrado en estudiantes mayores, tratando varias temáticas como la necesidad de desarrollar en los estudiantes competencias estadísticas o fomentar capacidades para la comprensión de los datos (Gal y Trostianitser, 2016), expuestos en diferentes formatos, entre ellos la tabla estadística.

Competencias de lectura

Sharma et al. (2011) investigan a dos grupos de estudiantes de 9º curso (13 a 14 años), a través de un cuestionario con 8 ítems, que buscaba explorar cómo usan la estadística para responder a situaciones de la vida cotidiana. En una de las tareas, los estudiantes debían comparar y explicar los cambios en las temperaturas de dos ciudades (Auckland y Wellington), expuestas en una tabla, mientras que, en otra pregunta, se les pedía cuestionar la información, pensando cómo y por qué se recopilaban los datos y el significado de estos, dentro de su contexto. Las respuestas de los estudiantes fueron clasificadas en cuatro categorías, dependiendo del nivel de razonamiento estadístico mostrado.

- En las *etapas 0-1*, los estudiantes pudieron extraer información puntual de la tabla, pero no se consideró el contexto, ni se vieron los datos como una distribución.
- En la *etapa 2*, las habilidades estadísticas son suficientes para resolver el problema, pero las explicaciones se centran en la visualización de los datos, o en cálculo de medidas de centralización. Por ejemplo, la temperatura media de Auckland es de 15,5, y de Wellington es de 12, pero en este tipo de respuestas no se integra la variabilidad, o el contexto. Por lo tanto, conocen la lectura de la tabla y las fórmulas, pero no se integran con una comprensión del contexto.
- En la *etapa 3*, los estudiantes comienzan a valorar el contexto, aunque todavía no están en condiciones de explicar o cuestionar los datos. En cuanto a las preguntas, los estudiantes presentan el tamaño de la muestra, la representatividad y nociones de aleatoriedad.
- En la *etapa 4*, los estudiantes muestran habilidades de pensamiento crítico asociadas con el muestreo, las medidas de centralización y la visualización de datos. Las habilidades estadísticas sofisticadas de orden superior están relacionadas con una integración del contexto y conocimientos de estadística.

Los resultados de esta investigación mostraron que los estudiantes se encontraban en diferentes etapas de alfabetización estadística, desde un razonamiento idiosincrásico no estadístico, hasta una alfabetización estadística crítica. Los primeros consiguieron avanzar de nivel con la ayuda de sus maestros a través del planteamiento de preguntas que les permitieron razonar y reelaborar argumentos y de esta manera progresar de nivel de alfabetización estadística.

Espinel y Antequera (2009) analizaron las producciones de 44 estudiantes de

Educación Secundaria (15 y 16 años) a quienes se les plantearon cuatro actividades (14 ítems) extraídas de pruebas PISA (MEC, 2005), las cuales involucraban tablas de doble entrada para leer, organizar datos y extraer información de ellas. Se evidenció que lograron leer y extraer información desde la tabla de doble entrada, aunque seguían procesos de razonamiento y heurísticas propias, como ensayo y error.

En la enseñanza universitaria, Karazsia (2013), en un estudio experimental desarrollado con 41 estudiantes de psicología, los cuales fueron asignados de forma aleatoria a dos grupos: 22 individuos estuvieron en el grupo experimental y 19 en el grupo control se observa que, los integrantes del grupo experimental realizaron actividades como la construcción de tablas estadísticas con datos recolectados por los propios estudiantes como: género, edad, estaturas. El grupo experimental mostró una mayor comprensión e interpretación de tablas estadísticas, en comparación al grupo control, en dos diferentes tipos de tareas, una de lectura de tabla de datos psicométricos y otra de lectura de una matriz de correlación, con un índice de respuestas correctas aproximadas de 76% frente al 55% y del 68% frente al 46% en los grupos experimental y control, y para cada tarea, respectivamente. Los autores sugieren que la creación de tablas, por parte de los propios estudiantes, podría contribuir a su correcta construcción e interpretación. A partir del trabajo anterior, Karazsia y Wong (2016) realizan un estudio longitudinal durante tres meses con 48 estudiantes universitarios, en su mayoría mujeres (65%), y edad promedio de 18,8 años. Se aplicó la misma estrategia del estudio anterior (Karazsia, 2013), obteniendo, una vez más, mejores resultados en los integrantes del grupo experimental.

Influencia del contexto

La literatura, como hemos señalado anteriormente, le asigna un rol relevante al contexto en que son planteadas las situaciones-problema. En este sentido, Estepa et al. (1999) analizaron cómo 213 estudiantes universitarios (17 y 18 años) comparan dos tablas de datos: la primera registraba las mediciones de presión arterial antes y después de un tratamiento médico; mientras que, la segunda tabla mostraba los niveles de azúcar de un grupo compuesto por 10 chicas y 10 chicos. Los autores clasificaron las respuestas empleadas por los estudiantes en tres categorías: respuestas correctas, parcialmente correctas, e incorrectas. Entre las estrategias que emplearon los universitarios para responder a las cuestiones planteadas, los autores identifican: comparar medias, comparar totales, y comparar ambas distribuciones. En esta investigación, se destaca la fuerza del contexto, en el sentido de ignorar la información representada en la tabla y responder anteponiendo argumentos basados en teorías o creencias, por ejemplo, en una tarea donde se estudia la enfermedad bronquial y el tabaquismo, algunos participantes no usan la información proporcionada de la tabla y responden basados en teorías respecto a la dependencia de la enfermedad al fumar.

Como parte de un estudio más amplio, Sharma (1997) propone dos tareas que involucran la comprensión de tablas y gráficos en 29 estudiantes de Educación Secundaria (14 a 16 años); de ellos se seleccionaron a 14, para una entrevista con la que realizar un análisis más profundo de la experiencia implementada. Una de las tareas planteadas presentaba una tabla con las temperaturas de dos ciudades; una primera pregunta apuntaba

a la lectura de tablas y la segunda a conocer si los participantes podían realizar predicciones, basadas en los datos mostrados. Los autores observaron que las respuestas de los estudiantes carecen de argumentos estadísticos y se justificaban en experiencias previas, lo que puede provocar la entrega de resultados sesgados.

Proponer al estudiante tareas que impliquen abordar diferentes disciplinas puede ser beneficioso. Así, Pagan y Magina (2011) en su investigación comparan dos grupos de 35 alumnos de 1º Grado de Preparatoria (15 años), que tuvieran conocimientos básicos de estadística. Estos se dividieron en la clase de Matemática (GM) y de Matemáticas aplicadas de forma interdisciplinar (GI). Los grupos recibieron instrucción diferenciada, la del grupo GM se centró en el aprendizaje de elementos estadísticos de manera tradicional, mientras que GI trabajó los mismos conceptos que GM, pero basados en la interdisciplinariedad.

El estudio tuvo tres etapas: en primer lugar, se aplicó un test diagnóstico compuesto de cuatro preguntas que abarcaban la construcción, lectura e interpretación de gráficos y tablas. El segundo momento, corresponde a la intervención de enseñanza, y la tercera etapa consistió en la aplicación de un post-test de características similares al test inicial, con el objetivo de evaluar el impacto de la intervención realizada en el aula. Ambos grupos mostraron tener un nivel de conocimiento similar en el pretest. Tras la intervención, en la traducción de una representación tabular a una gráfica, los estudiantes pertenecientes al grupo GI presentaron una diferencia estadísticamente significativa de su desempeño, en comparación a GM. Esta situación también se repitió en otra actividad, donde el proceso era inverso: a partir de un gráfico de barras dobles debían traducir a una representación tabular.

En la lectura de una tabla de datos, también GI logró mejores resultados. Las actividades propuestas implicaban una lectura de datos (identificación de máximo y mínimo) y lectura global (comparación y variación). Ambos grupos tuvieron las competencias necesarias para poder realizar interpolaciones en datos expuestos a través de una tabla. Un 73% logra leer los datos en tablas con éxito, mientras que la lectura de datos en gráficos lo consigue un 55%, mostrando que a los estudiantes les resultó más sencillo leer e interpretar datos en tablas. Los autores destacan tres beneficios de la enseñanza basada en la interdisciplinariedad. Una mejor motivación para el alumnado, dado que permite apreciar la utilidad de los conceptos en diferentes contextos; los estudiantes presentan mayor interés en aprender los conceptos estadísticos porque les permite resolver otras cuestiones; finalmente, los estudiantes toman conciencia de la importancia de una apropiada lectura de los datos expuestos en tablas y gráficos.

Prodromou (2015) analizó el razonamiento sobre la tabla de datos y datos en gran escala de 32 estudiantes de Educación Secundaria de 9º curso (15 años). Los alumnos participaron en un taller en el que se examinó el cambio demográfico de la Unión Europea y en su propio país (Chipre), y se abordaron temas como el cambio de la población, la migración, crecimiento de la población total, factores de cambio, entre otros; en este taller, los estudiantes tuvieron la oportunidad de trabajar con datos reales. A lo largo del estudio, los participantes fueron entrevistados para profundizar en sus respuestas, así como las dificultades que surgieron durante el proceso. En el análisis de la información se observó la presencia de los niveles de comprensión propuestos por Friel y

colaboradores (2001), descritos anteriormente (Ver Sección 2.3.2). La autora observa que el manejo de una gran cantidad de datos requiere de una comprensión de tablas y otras representaciones de datos estadísticos que aparecen de manera habitual en la vida cotidiana. También sugiere que la instrucción estadística a nivel escolar debería promover la comprensión e interpretación de datos a gran escala mostrados por medio de tablas y gráficas estadísticas.

En este sentido, González et al. (2021), basados en los niveles de lectura propuestos por Curcio (1989), observan en un grupo de 10 estudiantes chilenos de 2° curso de Educación Media (15 a 16 años) que estos no consideraban los datos presentados en tablas de distribución de frecuencias con datos agrupados, y sus respuestas se sostenían en opiniones personales, a diferencia de las tareas que requerían de niveles de lectura literal en las cuales obtuvieron buenos resultados. Esto evidencia la necesidad de que la enseñanza contemple tareas en que las justificaciones se enmarquen en la información planteada, especialmente en contextos de incertidumbre.

Gal y Trostianitser (2016) desarrollan otro estudio para explorar el razonamiento y motivación de 43 estudiantes (edad promedio: 22 años), en un curso de formación del sector servicios en el ámbito público o privado, al enfrentar situaciones que involucran estadística y provienen de un contexto social. A los participantes se les entregó una tabla que mostraba las proyecciones sobre tendencias demográficas entre ciertos grupos sociales (árabes y judíos) y de edad, acompañada de cinco preguntas. Además, los estudiantes tuvieron que calificar su interés por la tarea propuesta y la dificultad de la misma. Las preguntas planteadas se basan en el modelo propuesto por Kemp y Kissane (2010) (Ver Tabla 2.3.2.3). Las tres primeras preguntas implican la lectura de tendencias o cambios a lo largo del tiempo, mientras que las siguientes (preguntas 4 y 5) promueven una lectura crítica de la información y también requieren una comprensión profunda del contexto planteado y de sus implicancias en la sociedad. El análisis de las respuestas, mostró que en las tres preguntas iniciales, los estudiantes pueden leer e interpretar la información presentada en la tabla de varias maneras, ya que algunos se concentran en comparar dos grupos sociales diferentes de la misma edad, mientras otros se basan en la comparación de dos grupos del mismo origen social, pero de distinta edad.

En la cuestión 4, que pedía establecer posibles factores que explicaran los cambios observados en un intervalo de tiempo (2005 al 2030), los participantes identificaron 24 posibles factores, dando explicaciones amplias y variadas, como los avances en la medicina, incremento en la esperanza de vida, o disminución de la natalidad. En la cuestión 5, en que los participantes debían indicar posibles consecuencias de los cambios observados, se identificaron 27 factores, como el incremento de recursos para las personas de avanzada edad, o consecuencias del crecimiento de la población en demandas básicas. Los autores concluyen que la interpretación de tablas con datos multivariados en un contexto social es una tarea compleja, sin embargo, entrega beneficios para los alumnos.

Coincidiendo en la investigación descrita, Gal (1998) planteó la necesidad de profundizar en las justificaciones que entregan los estudiantes, con el objeto de evaluar su conocimiento del entorno y cómo este puede contribuir a asignar significado a las relaciones que es capaz de establecer entre los datos. Para ello, realiza una entrevista a 20 estudiantes de 9° grado (14 años) y 36 de 12° grado (17 años) de dos escuelas de Filadelfia,

entregando tablas con los datos de encuestas a niños, realizadas por una compañía de juguetes que pretendía comercializar un nuevo producto. El análisis de las justificaciones de los estudiantes mostró una variedad de opiniones, alguna de ellas basadas en un conocimiento limitado, incompleto o errado. En algunos casos, estos fundamentos obedecen a estrategias parcialmente correctas, o incorrectas para analizar los datos. Las dificultades en la interpretación mostrada por los estudiantes, según el autor, podrían radicar en dos aspectos, el primero relativo a sus conocimientos previos, y el segundo a que en la escuela están habituados a la resolución de problemas aplicando procedimientos algorítmicos, por lo que les resulta complejo seleccionar e interpretar datos en un contexto cotidiano.

Resolución de problemas que involucran tablas

Eshach y Schwartz (2002) desarrollan un estudio exploratorio, en el buscaban conocer el tipo de traducción que podían realizar 10 estudiantes de secundaria de datos multivariados entregados por medio de tablas. Un estudio preliminar, con los mismos alumnos, mostró que estos poseían conocimientos matemáticos necesarios para tratar con este tipo de problemas. Los estudiantes recibieron cinco problemas en un contexto de situaciones reales, en que la información se encontraba representada por medio de tablas. En cada situación, se les pidió a los estudiantes analizar los datos y posteriormente, desarrollar un informe, que fue complementado con entrevistas.

Para analizar los datos entregados, los participantes emplearon operaciones matemáticas, pero no lograron aplicar conocimientos estadísticos que les permitieran establecer conclusiones de manera eficiente. Los argumentos utilizados frecuentemente se basaron en la aplicación aislada de algunos estadísticos, y tampoco lograron captar la importancia de relacionar diferentes medidas estadísticas, por lo que sus conclusiones fueron limitadas. También fue posible evidenciar que sus soluciones se vieron influenciadas por el contexto, o sus experiencias. A pesar de que los estudiantes conocían la necesidad de agrupar y aislar algunas de las variables expuestas en la tabla, sus análisis de los datos fueron muy limitados y se basaron en la selección de un elemento específico de alguna variable, mostrando de este modo un procedimiento limitado para extraer conclusiones. Este estudio, revela dificultad para distinguir la información relevante e irrelevante, y que la habilidad de obtener información a partir de diferentes representaciones es fundamental para la resolución de problemas con datos multivariados.

Otras variables que afectan la lectura

Cook y Teo (2011) realizan un estudio para evaluar el tiempo de respuesta a preguntas que involucran representaciones gráficas y tabulares, con un grupo de 20 estudiantes, 10 de ellos universitarios en su finalización de la licenciatura en estadística y los restantes, alumnos de doctorado en estadística o profesores con intereses en investigación en el campo de la estadística. La muestra fue dividida en dos grupos, con el objeto de contrastar los resultados obtenidos entre los participantes con mayor o menor experiencia en investigación estadística.

Para la prueba fueron seleccionadas seis tablas, que representaban resultados de simulación en investigaciones previas, cada una de ellas acompañada de una

representación gráfica y cinco preguntas, algunas de ellas requerían la comparación de valores en varias dimensiones al mismo tiempo. Los resultados obtenidos evidenciaron que los estudiantes con menor conocimiento en investigación estadística requerían mayor tiempo para responder. La variabilidad observada, dentro de los grupos, fue baja y tampoco hubo disparidad entre la precisión de las respuestas derivadas de las tablas (80%) o las gráficas (78%) para los participantes más experimentados. La precisión con la que los estudiantes universitarios pudieron extraer información de un gráfico (82%) fue similar en ambos grupos, aunque los estudiantes universitarios fueron menos precisos al obtener información de las tablas (60%). En resumen, este estudio evidenció que muchas tablas, empleadas en la literatura estadística, carecen de cuidado en su presentación, lo que puede llevar a errores en el análisis de los datos.

2.3.5. LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR FUTUROS PROFESORES

Existe preocupación por las habilidades de lectura de representaciones estadísticas por parte de los futuros maestros, ya que estos requieren de competencias que les permitan interpretar adecuadamente la información expuesta en tablas, para la enseñanza o la toma de decisiones que deberán realizar en su labor profesional (Gea et al., 2020).

Grymuza y Rego (2016) analizan cómo los maestros diseñan e implementan la enseñanza de gráficos y tablas mediante entrevistas y observación de las clases de tres profesores en 5° de Educación Primaria. Previamente los maestros afirmaron que los contenidos que involucran tablas y gráficos son sencillos de enseñar y aprender, y también sostenían que su forma de enseñarlo era a partir de situaciones cotidianas, con datos entregados o recopilados por el propio estudiante, declaraciones que diferían, en algunos casos, con lo observado por los investigadores en el desarrollo de las clases de estos maestros.

Investigaciones con profesores en formación

Kemp (2003) organiza un taller con 151 futuros maestros de Educación Primaria y otras carreras afines para evaluar si podrían mejorar las respuestas de los participantes, en torno a tablas de datos. El estudio se dividió en tres etapas: para comenzar los participantes, debían interpretar de manera individual una tabla, posteriormente, se desarrolló un taller en que a los estudiantes se les presentó una serie de estrategias que pueden emplearse para leer e interpretar tablas basadas en la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982) (Ver Tabla 2.3.2.2), y en la tercera etapa se les volvió a administrar otra tarea similar a la inicial. Las respuestas junto a las entrevistas fueron analizadas y se pudo observar una mejora en los niveles de respuestas entregadas por los estudiantes en el post test. Igualmente, fueron positivas las opiniones vertidas por los participantes en las entrevistas. Este tipo de experiencias muestra los beneficios de implementar estrategias que permitan conseguir mejoras en la comprensión de la información cuantitativa, expuesta en tablas o gráficos.

Por su parte, Díaz-Levicoy et al. (2016) observan la capacidad de lectura de tablas estadísticas en 121 futuras maestras chilenas de educación infantil de dos universidades, utilizando un cuestionario diseñado para estudiantes de Educación Primaria con

adaptaciones. La evaluación de las respuestas contó con las siguientes categorías: a) *dominio*: respuestas que evidencian manejo sobre el nivel de lectura, incluye pequeñas imprecisiones; b) *no dominio*: respuesta incorrecta, no muestra dominar el nivel de lectura; c) *sin respuesta*: pregunta en blanco. También se emplearon los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001), observando que los estudiantes, se sitúan principalmente en los niveles de lectura *leer datos* y *leer dentro de los datos* (92,4% y 62,8% respectivamente), es decir los niveles más básicos, que están asociados a una lectura literal y con procedimientos matemáticos simples. Por otra parte, los niveles con mayor complejidad como *leer más allá de los datos* y *leer detrás de los datos*, son conseguidos por un porcentaje menor de estudiantes (34,7% y 50,4%).

Posterior a este estudio, Díaz-Levicoy et al. (2019) realizan una investigación de características similares donde se proponen dos preguntas que involucran la lectura de tablas a una muestra de 39 futuras maestras de infantil en Chile. En la primera pregunta, que implicaba la lectura de una tabla de frecuencias absolutas, y se enmarcaba en los primeros dos niveles propuestos por Friel et al. (2001), el 100% de los participantes logra *leer datos*, mientras que *leer dentro de los datos* lo consigue un 97,4%. En la segunda pregunta, se presentó una tabla con frecuencias relativas, las cuestiones implicaban hasta el nivel *leer más allá de los datos*. Como resultado se obtuvo que la mayor parte de las respuestas se concentran en el nivel *leer datos* (56,4%), siendo muy escasas las producciones basadas en los niveles *leer dentro de los datos* (5,1%) y *leer más allá de los datos* (5,1%). Se evidencia la necesidad de reforzar estas competencias en los futuros maestros, pues serán parte de las habilidades que deberán desarrollar con sus estudiantes.

Lectura en tablas de doble entrada

Los antecedentes de investigación específicamente orientados a evaluar el conocimiento del profesor de la tabla de doble entrada son escasos, y se encuentran dirigidos, principalmente, al análisis del cálculo de probabilidades (Gea et al., 2020).

García-García et al. (2019) analizan y comparan el nivel de comprensión de tablas estadísticas alcanzado por 35 estudiantes universitarios chilenos de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y Computación y 36 mexicanos de la carrera en Matemáticas, que debieron resolver una tarea que abordaba la lectura, interpretación y comparación de datos presentados en una tabla de doble entrada. El análisis de las respuestas entregadas por los estudiantes se basó en un modelo de lectura generado por los propios autores (Ver Tabla 2.3.2.1), en el cual unieron los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001) y Aoyama (2007). La mayor proporción de respuestas se clasifica en el nivel 2 (52,8% mexicanos y 42,9% chilenos) y en el nivel 4 (30,6% mexicanos y 31,4% chilenos), siendo destacada la proporción de estudiantes chilenos en el nivel 3 (5,6% mexicanos y 22,9% chilenos) y muy baja en el nivel 0 (11,1% mexicanos y 0% chilenos) y nivel 1 (0% mexicanos y 2,9% chilenos).

Al profundizar en los elementos característicos de las respuestas y que definen a cada uno de los niveles se pudo constatar, que los participantes alcanzaron mayoritariamente un nivel 1 en la lectura literal de las variables, frecuencias y título de la tabla en porcentaje similar (86,1% mexicanos y 85,7 chilenos), encontrando solo un 5,7% de estudiantes chilenos que alcanzan el nivel 1 sin interpretar el título de la tabla. Ambos

grupos lograron resultados similares en el nivel 2 de interpretación, pero cabe destacar que solo un 25% de los estudiantes mexicanos comparan datos tanto por filas como por columnas, mientras que ese porcentaje asciende al 62,9% en los estudiantes chilenos. En el nivel 3, los estudiantes chilenos (31,4%) tuvieron mejores resultados que los mexicanos (2,8%) en explicar tendencias de los datos, y un porcentaje limitado alcanza el nivel 4 al integrar el contexto de manera hipotética (30,6% mexicanos y 20% chilenos) cuando evalúan la información y conjeturan sobre el comportamiento de los datos.

En torno al estudio de la probabilidad, Estrada y Díaz (2006) realizan un estudio exploratorio, el cual profundiza en los conflictos semióticos manifestados por 65 futuros profesores de Educación Primaria al resolver problemas de probabilidad elementales. A los participantes se les aplicó un cuestionario con un problema sencillo, el cual fue utilizado previamente (Díaz y de la Fuente, 2005) con estudiantes de psicología. En la tarea se incluía el cálculo de una probabilidad simple, una compuesta y otra condicional, a partir de datos presentados a través de una tabla de doble entrada. El porcentaje total de respuestas correctas superó el 50%, alcanzando un 75% en el caso de la probabilidad simple. Entre las dificultades observadas, las autoras identificaron la confusión entre probabilidades simples, compuestas y condicionales, así como la confusión entre un suceso y su complementario, o suponer independencia en los datos.

2.4. CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS

A continuación se exponen las escasas investigaciones que exploran como los estudiantes construyen e interpretan tablas estadísticas (Pfannkuch y Rubick, 2002), organizadas por edades.

2.4.1. ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS

Conocer con antelación los diferentes errores en que pueden incurrir los estudiantes en su proceso de aprendizaje, proporciona una información valiosa referente a cómo se construye el conocimiento y ofrece a los profesores conocimiento de las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes.

Batanero (2000) advierte de dificultades y errores previsibles de los estudiantes al construir o interpretar tablas estadísticas, especialmente la construcción de tablas de distribución de frecuencias con datos agrupados en intervalos, dado que implica una reducción estadística, por la pérdida de los valores originales. Además, los estudiantes repetidamente ignoran tanto en la construcción, como en su uso, que para calcular estadísticos (e. g. la media, mediana), cada uno de los intervalos puede considerar la misma o distinta amplitud. Las dificultades en el estudio y construcción de tablas de doble entrada radican, principalmente, en la diversidad de frecuencias que es posible interpretar desde una misma celda (frecuencia doble, condicional a la fila o a la columna), así como al considerar los totales de fila o columna (frecuencias marginales), y las relaciones entre todas ellas (Batanero et al., 1994).

Del Puerto et al. (2007) analizan 519 exámenes realizados por estudiantes de ingeniería en una universidad argentina en el periodo 2001-2004, identificando los errores más recurrentes. En preguntas asociadas con la construcción, lectura e interpretación de

tablas de distribución con datos agrupados en intervalos, detectan los siguientes errores: Desconocimiento del cálculo de la frecuencia relativa; confusión de la frecuencia absoluta con la acumulada; error en la fórmula al calcular la media o la desviación típica; confusión de la desviación típica y la varianza y confusión de percentiles (por ejemplo: P_{20} con P_{80}).

Otros errores, en cuanto a la construcción de tablas de distribución con datos agrupados en intervalos, son mencionados por Castellanos (2013): Errores en títulos o etiquetas; confusión entre frecuencia y valor de la variable; dificultades al considerar intervalos de clase no solapados; errores al construir las marcas de clase; omisión del intervalo con frecuencia nula; y confusión entre frecuencia e intervalo.

En cuanto a la construcción de la tabla de doble entrada, Marti et al. (2011) indican que no es un proceso sencillo para el estudiante, debido a las diferentes interpretaciones que se pueden realizar de una misma celda. En su investigación, se observan diferentes complejidades para los estudiantes en su construcción como: (1) dificultad para cruzar gráficamente las dos variables, (2) dificultad para asociar dos variables pedidas, (3) dificultad para establecer el número de modalidades de las variables.

Gabucio et al. (2010) propone a 200 estudiantes (10 a 14 años) una tabla doble entrada, en la que los datos de una de las variables que la conforma, se encuentran agrupados en intervalos. Una de las tareas pedidas, consiste en que los estudiantes identifiquen elementos que componen la estructura de esta tabla, el nivel de acierto a esta tarea fue bastante bajo, lo que evidencia que los estudiantes carecen de conocimiento de cómo se construye una tabla, y por ende, del significado de los componentes que posee su estructura.

Álvarez et al. (2020) en su estudio con 65 estudiantes colombianos de Educación Secundaria (15 a 18 años) sobre la construcción de tablas, identifican diferentes errores que pueden presentar los estudiantes en la construcción de tablas de frecuencias con datos agrupados y no agrupados:

- Elegir de forma inadecuada la amplitud de los intervalos, estableciendo demasiados o muy pocos.
- Mezclar datos que no son comparables en una tabla de frecuencias, por ejemplo incorporar valores que la variable estadística no puede tomar.
- Invertir los elementos involucrados en el algoritmo para calcular la frecuencia relativa (numerador-denominador) simple o acumulada.
- Omitir valores de la variable estadística al construir tablas de frecuencia. En particular, omitir un intervalo por tener frecuencia nula en el caso de conjunto de datos agrupados (identificado también por Castellanos, 2013).
- Invertir los tipos de frecuencias en la construcción de la tabla, por ejemplo, ubicar las frecuencias relativas en la columna de las frecuencias absolutas.
- Invertir los valores de una variable con su respectiva frecuencia.
- Excluir o repetir datos en la construcción de tablas de frecuencia con datos agrupados.
- Calcular de manera incorrecta la frecuencia acumulada.
- Invertir las frecuencias de dos o más valores de la variable estadística.

2.4.2. CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR NIÑOS

Los niños, desde sus primeros años de escolaridad, comienzan a trabajar con las tablas, sin embargo, la mayor parte de las veces, las tablas ya vienen construidas, por lo que las tareas se limitan a la lectura e interpretación de la información expuesta en la misma (Martí, 2009). Los trabajos relacionados con este tema se exponen a continuación.

Evaluación de construcción de tablas

Con base en el marco propuesto por Chick (2004), Estrella y Olfos (2015) exploran el pensamiento transnumerativo de 80 niños de dos clases de 3° curso de Educación Primaria (7 a 9 años). Se implementó una tarea en que los niños debían realizar encuestas, clasificar y organizar los datos por medio de tablas y posteriormente presentarlos en gráficos de barra, con datos recogidos por los niños sobre la calidad de las meriendas que consumían en su colegio. Los participantes aplicaron de manera natural técnicas transnumerativas, logrando ser capaces de crear listas, seudotablas y tablas, aunque solo 5 estudiantes consiguieron producir una tabla de frecuencias. Los autores concluyen en la importancia de explicitar la enseñanza de las tablas de frecuencias, además de reconocer las técnicas transnumerativas que mostraron los estudiantes de manera espontánea.

Por otra parte, en Chile, Díaz-Levicoy et al. (2017) muestran los resultados obtenidos en la construcción de tablas estadísticas de 79 estudiantes de 3° curso de Educación Primaria, quienes debían responder a un cuestionario con dos ítems, el cual fue construido a partir de un análisis de los libros de texto de 1° y 2° de Educación Primaria. Los ítems involucraban la construcción de tablas, el primero consistía en completar una tabla de conteo a partir de un listado de datos sin agrupar, el segundo ítem consistía en llevar la información de un pictograma a una tabla. Los resultados mostraron que la construcción de la tabla, a partir de un listado de datos sin agrupar, fue más sencilla para el estudiante, a diferencia de la segunda en la que debían traducir desde una representación gráfica pictórica a una tabular, este hecho los autores lo atribuyen a que los estudiantes ignoraron el valor del icono. Con este estudio se reafirma la necesidad de reforzar la enseñanza, prestando mayor atención a los cambios entre una representación y otra.

Experiencias de enseñanza

Verbaere (2003) presenta una experiencia de construcción de tablas con alumnos de Educación Infantil en Francia. Los estudiantes partieron seleccionando una cantidad de juguetes (4 a 6 juguetes) que fueran de su agrado y les gustaría recibir en Navidad. Luego, en una tabla de doble entrada en la que se asocia cada niño con los juguetes seleccionados, se completaron las celdas con una cruz o no cruz, producto de la pregunta “¿Juan ha elegido el coche?”. A partir de esta actividad, cada alumno debió construir una lista ordenada, donde asociara cada juguete con la cantidad de preferencias. Esta actividad, se desarrolló en cuatro sesiones, y el rol del profesor fue primordial para poder llevar a cabo en conjunto los pasos necesarios para la construcción de una tabla para representar la información inicial. El autor considera que, a pesar de que este tipo de experiencias requiere de mucho tiempo, es necesario realizarlas, dado que permite

desarrollar a temprana edad, procesos de comprensión que no se limitan sólo a la extracción de la información, sino a la categorización y conceptualización.

En su estudio descrito anteriormente, Pérez-Sedano (2015) también evaluó la construcción de una tabla de doble entrada, con el mismo tema del calendario y 104 niños desde Educación Infantil a 4º curso de Educación Primaria. En infantil fue bajo el porcentaje de estudiantes que consiguió construir el calendario con una estructura de doble entrada, mejoró en 1º y 2º curso de Educación Primaria (2,8%, 26,3% y 40%, respectivamente), pero a pesar de ello, también fue bajo. La diferencia fue significativa al comparar el nivel de Educación Infantil con los de Educación Primaria, sin embargo, no lo fue al comparar ambos niveles de Educación Primaria. Los resultados mostraron una evolución conforme se avanza de nivel.

Giot y Quittre (2008), coinciden con los anteriores autores y manifiestan lo complejo que resultó para 17 niños de 8 a 10 años llevar a cabo la construcción de una tabla. A los niños, trabajando en grupos, se les pidió construir una tabla que permitiera la comparación respecto a la información de dos calles. Para ayudar en la construcción se les pidió definir qué entendían por tabla, en su mayoría las respuestas se centraban en la forma geométrica de la disposición tabular. De la observación del trabajo realizado por los estudiantes, fue posible detectar que la mayor cantidad de alumnos de 4º curso, a diferencia de 3º curso, emplean de manera espontánea una estructura de dos columnas para comparar las dos situaciones presentadas. Ante la pregunta ¿cómo organizarán su tabla? La mayor parte de los grupos de 3º curso mencionan el contenido que incluirán, pero no su organización. En las producciones de los participantes, fue posible evidenciar sus dificultades para planificar la estructura de una tabla, aún cuando saben lo que deben realizar, pero no lo consiguen de inmediato, ya que el ensayo y el error se convirtió en su principal estrategia.

Otra dificultad en el proceso de construcción, consistió en definir y utilizar los márgenes. Los estudiantes dudaban sobre la presencia y las características de las etiquetas que debían colocarse en la primera columna y fila superior. Tampoco el contenido de las celdas fue tarea sencilla, podría ser porque esta acción requiere seleccionar información específica de cada situación definida por la intersección de filas y columnas. En ocasiones, los estudiantes consideraron poner un título a la tabla, pero la mayoría de las veces esta instrucción es dada por el maestro. Los autores concluyen en la importancia de ofrecer a los estudiantes tareas que impliquen la construcción de tablas, dado que esto les ayudará a comprender el funcionamiento implícito de las tablas que utilizan la mayor parte del tiempo en diferentes contextos, no solo en la escuela.

Guimarães et al. (2021), en el cuestionario aplicado a 325 estudiantes brasileños de 1º a 5º curso de Educación Primaria (5 a 10 años) y descrito anteriormente, también se incorporó dos ítems sobre la construcción de tablas. En una tarea se pedía la traducción de tabla de datos a tabla de doble entrada, mientras que la otra implicaba la construcción de una tabla a partir de un listado de datos. El análisis de la tarea de traducción de tabla de datos a tabla de doble entrada, mostró que solo un estudiante de 4º curso consiguió construir la tabla de doble entrada y que la mayor parte de los participantes creó otras representaciones como listados o tablas de frecuencias con una variable. La segunda tarea de construir una tabla a partir de un listado de datos mostró mejores resultados,

especialmente en los estudiantes de 4° curso (66%) y 5° curso (72%) de Educación Primaria.

2.4.3. CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR ADOLESCENTES Y ESTUDIANTES ADULTOS

De acuerdo a Chick et al. (2005), en la construcción surgen variados conceptos estadísticos, como el de distribución. Es así, como algunos autores han enfocado su investigación a explorar la comprensión de las tablas de acuerdo a su tipología. En esta línea, Espinel y Antequera (2009) desarrollan un estudio con 72 estudiantes de Educación Secundaria (15 y 16 años), descrito anteriormente, a quienes se les presentaron cuatro problemas sobre tablas de doble entrada, emanados de la prueba PISA 2003. En relación a la construcción de tablas de doble entrada, mediante un análisis de las respuestas realizado a través del modelo de Rasch (Callingham y Bond, 2006), se evidenciaron dificultades en su construcción, en la que se debe tener en cuenta filas y columnas, con especial atención si interviene algún orden o prioridad para su adecuada elaboración.

Martí et al. (2010), desarrollaron una investigación con 153 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (11 a 15 años) de Barcelona. A los estudiantes se les propuso construir una tabla con datos agrupados en intervalos y un gráfico a partir de un listado de datos de un grupo de personas, el que incluía nombre, apellido, edad y estatura (cm.), teniendo en cuenta los chicos y chicas que miden menos de 130 cm, los que miden entre 130 y 149 cm, los que miden entre 150 y 169, y los que tienen una estatura superior a 169 cm. Los mejores resultados se consiguieron en 2° curso de Educación Secundaria (58%), mientras que el menor porcentaje se presentó en 5° de Educación Primaria (26%), encontrando que el éxito de la tarea no mejora conforme se avance de curso, pues los estudiantes de 6° de Educación Primaria obtienen mejor resultado (51%) que los de 1° curso de Educación Secundaria (33%). Además, se detecta un alto índice de estudiantes que construyen la tabla como listado de datos (42%, 31% en 5° y 6° de Educación Primaria y 47%, 25% en 1° y 2° de Educación Secundaria, respectivamente). Para profundizar en las dificultades en la construcción de la tabla, se entrevistó a 8 estudiantes, donde se pudo evidenciar que las principales dificultades consistieron en definir y diferenciar las variables, calcular las frecuencias, combinar las variables en forma cruzada y distribuir los datos de modo significativo en la tabla, puesto que la disposición en filas y columnas proviene de las categorías de cada variable. Adicionalmente, los autores también detectaron que ciertos estudiantes confunden la representación tabular y gráfica.

Por otra parte, Walichinski y Junior (2013) en Brasil, llevan a cabo una investigación con 22 estudiantes de 7° curso (12 años), para analizar si la implementación de una secuencia contextualizada puede contribuir con el aprendizaje de tablas y gráficos. El estudio se desarrolló en tres momentos: aplicación de un pre test; desarrollo de una secuencia didáctica con los estudiantes, y repetir la aplicación del test inicial, con el objeto de evaluar el impacto de la secuencia didáctica. En dos ítems del test, se hacía uso explícito de una tabla de doble entrada. En la tarea de traducir un gráfico de barras dobles a una tabla de doble entrada, solo un 27,3% lo realizó con éxito, y el resto respondió representando nuevamente gráficos de barras, o no contestaron. Solo un 9% logró representar una gráfica de barras apiladas a través de una tabla de doble entrada. Se

evidencia, la escasa capacidad de los estudiantes para convertir una representación tabular a una gráfica, donde cerca del 41% no respondió a la tarea y el 50% de aquellos que la afrontaron, no logró construir la representación. Los errores más frecuentes se referían al título, a la categoría de los ejes, o la fuente de los datos en las tablas y gráficos.

La implementación de la secuencia didáctica abarcó la recolección de datos por los propios estudiantes, los investigadores observaron que los estudiantes priorizaron la representación gráfica respecto a la tabular. Además, constataron las dificultades de construcción en ambas representaciones, lo que ya había sido alertado en el pre test. La intervención en el aula, que abordó la construcción de gráficos y tablas, fue considerada exitosa porque permitió revertir de manera positiva los resultados obtenidos en el pre test, lo cual fue evidenciado en el rendimiento de los alumnos en el test final, pues en las actividades expuestas anteriormente mostraron sobre un 73% de respuestas correctas.

Conti y Carvalho (2011), describen la implementación de un proyecto de investigación con 19 estudiantes de 7° curso de Educación Primaria para Jóvenes y Adultos (EJA). El tema elegido fue el embarazo y fue seleccionado por los propios estudiantes. Los participantes se dividieron en 6 grupos y se distribuyeron las diferentes temáticas derivadas del foco de investigación. Cada grupo debió proponer una pregunta asociada a su temática, para la elaboración de un cuestionario, el que fue aplicado a los estudiantes del establecimiento educativo. En total se recogieron 115 cuestionarios, cada grupo recibía la respuesta a la pregunta que ellos habían propuesto. Los participantes tuvieron que desarrollar formas de registro, además de implementar estrategias de recuento y verificación de los datos, habilidades fundamentales en la alfabetización estadística (Gal, 2002). Para apoyar este proceso, el investigador entregó algunas directrices para la construcción de tablas, partiendo de las producciones realizadas por los propios estudiantes. Esta acción promovió que los participantes, fueran superando las dificultades mostradas y realizaran ajustes o rehicieran las tablas que habían desarrollado en un principio.

2.4.4. CONSTRUCCIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN Y EN ACTIVO

Investigaciones con profesores en formación

El conocimiento de los futuros profesores en torno a conceptos básicos de estadística y la probabilidad, ha sido una preocupación constante para los investigadores. Al respecto, Gea et al. (2020) analizan las respuestas de 69 futuros maestros de Educación Primaria de una universidad española a una de las tareas propuestas que requería construir una tabla de doble entrada a partir de información verbal y numérica. El instrumento utilizado fue una adaptación de otro empleado en otra investigación (Cañadas, 2012), que buscaba profundizar en la asociación entre las variables estadísticas, realizada por estudiantes universitarios. En relación a la tarea de construcción de la tabla de doble entrada, se observó un buen desempeño, pues el 58% de los participantes llega a construir la tabla correctamente. Pero hubo muchos que no completan la construcción de la misma (31,9%), la mayoría por no añadir los totales.

Por otra parte, en las respuestas a las preguntas sobre la construcción entregada, fue posible apreciar dificultades en la obtención de diferentes tipos de frecuencias de la tabla,

en especial, si tienen necesidad de calcular porcentajes, manejar desigualdades o tener en cuenta el eje temporal invertido, factores que aumentaron la dificultad de la tarea. En estos casos se infiere una limitada capacidad en la lectura e interpretación de la tabla de doble entrada que los mismos estudiantes construyeron. Las autoras concluyen que los participantes no disponían de un significado adecuado de los distintos tipos de frecuencia que se pueden obtener a través de una tabla de doble entrada (condicional, marginada y compuesta), por lo que sería necesario extender la investigación para analizar en profundidad las dificultades observadas.

Investigaciones con profesores en activo

El conocimiento de los profesores en ejercicio en conceptos de la estadística y la probabilidad, también ha sido objeto de preocupación para investigadores. Al respecto, Sanoja y Ortiz (2013), exploran el conocimiento de 48 maestros de Venezuela, en torno a conceptos de la estadística y la probabilidad. La recogida de los datos se realizó en dos momentos; en primera instancia en un taller de discusión y reflexión en la que se realizaron algunas entrevistas; y en un segundo momento, se aplicó un cuestionario compuesto de situaciones similares a las empleadas tanto en los libros de texto de matemática desde 1° hasta 6° curso como en el manual del maestro, en lo referido al contenido del currículo.

Entre las debilidades detectadas, fue posible apreciar que los maestros tienen concepciones erradas del concepto de variable, así como en la representación de la información a través de gráficos de diferente tipo, también manifestaron dificultades en la interpretación y cálculo de medidas de tendencia central, como la media, mediana y moda. No obstante, manifestaron fortalezas en la construcción de tablas de frecuencia simples y de doble entrada. Particularmente, basados en las evidencias, es posible inferir que los maestros comprenden con cierto nivel de profundidad el proceso de construcción de tablas simples con frecuencias absolutas y relativas, así como las de doble entrada, dado que los procedimientos mostrados en su construcción eran correctos. Sin embargo, se presentaron dificultades en distinguir un dato de una variable, conceptos fundamentales en la distribución de columnas en la construcción de una representación tabular.

Otro estudio con 72 profesores de ciencias y matemáticas en ejercicio es realizado en Israel por Eilam et al. (2014). Para recoger la información, se diseñaron tres tareas, en que los participantes debían generar diferentes representaciones visuales para exponer los contextos planteados y elegir una única representación para exponer la información, por último, razonar y argumentar los motivos para tal decisión a través de una entrevista realizada por los investigadores. Los profesores mostraron una preferencia hacia las representaciones más sencillas como tablas y gráficos. El porcentaje de tablas utilizadas en cada momento fue un 33% cuando debían de representar visualmente la información de cada situación de diferentes maneras, un 30% cuando debían seleccionar solo una para exponer los datos de cada situación, mientras que un 28% a 38% cuando debían de argumentar su decisión referente a la mejor representación visual que expusiera los datos de alguno de los problemas planteados.

El análisis de las producciones, mostró que sus construcciones de tablas se

limitaron, principalmente, a realizar un cuadro para organizar los datos, y que hasta cierto punto permitía establecer comparaciones o visualizar tendencias. Muchas de las tablas generadas no respondían a los requerimientos de la tarea, puesto que solo se redujeron a la exposición de columnas con diferentes variables, en las que no se podía establecer alguna relación entre las ellas. Las respuestas a la tarea propuesta, mostraron la limitada capacidad de los profesores de generar representaciones tabulares eficaces que permitieran relacionar diferentes variables presentes en una situación, con el fin de analizar e interpretar de mejor manera la información.

2.5. INVESTIGACIONES SOBRE ANÁLISIS DE TABLAS ESTADÍSTICAS EN LIBROS DE TEXTO

En general la investigación en libros de texto sobre gráficos estadísticos, es mucho más abundante comparado con las tablas estadísticas. Al respecto, Arteaga (2011) analiza el tipo de gráfico, actividad pedida, nivel de lectura y nivel de complejidad semiótica en una serie completa de libros de texto españoles de Educación Primaria, encontrando que el gráfico de barras adquiere gran relevancia, con poco peso de otros gráficos concretados a nivel curricular, y que los niveles de lectura más frecuentes son los niveles intermedios. Se obtienen conclusiones similares, por ejemplo, en Díaz-Levicoy (2018) en libros de texto chilenos de Educación Primaria. En los siguientes apartados, se presentan estudios centrados en la exploración de las tablas estadísticas en colecciones de libros de texto de diferentes países.

Las tablas en libros de texto chilenos

Díaz-Levicoy et al. (2015) analizan las tablas estadísticas en cuatro libros de texto chilenos de 1° y 2° curso de Educación Primaria, dos de ellos editados por Santillana, y el resto por el MINEDUC. Para el análisis se consideraron cinco variables: tipo de tabla, actividad, nivel de lectura, contexto y tipo de variable. Como resultado, se obtuvo el predominio de las tablas de conteo (74%), seguida por las de frecuencias (19%); de manera particular, en los textos editados por Santillana las tablas de conteo alcanzan un mayor porcentaje (83%) respecto a los textos del MINEDUC (42%), donde se observó un reparto más equilibrado en cuanto a tareas con tablas de frecuencias (50%), y tablas de doble entrada (17%), que no son consideradas por la editorial Santillana.

La actividad se dirige a las tareas que deben realizar los estudiantes para poder responder, entre las que se mencionan: leer, ejemplificar, completar, calcular, traducir, formular preguntas, explicar y recoger datos. La actividad que aparece con mayor fuerza es calcular (41,4%), que consiste en realizar cálculos sencillos a partir de la información expuesta en la tabla, seguido de completar (36,2%), traducir (27,6%), ejemplificar (13,8%) y finalmente leer (13,8%).

En cuanto al nivel de lectura, se emplearon los propuestos por Curcio (1989) y Friel et al. (2001) para los gráficos y que fueron adaptados para el caso de las tablas: (1) leer datos, (2) leer dentro de los datos, (3) leer más allá de los datos, y (4) leer detrás de los datos. La mayoría de las actividades (55%) se posiciona en el leer dentro de los datos, que va asociado al desarrollo de cálculos o comparaciones, seguido por el leer los datos (45%). Así, también, se observan diferencias entre los textos de ambas editoriales, con

una mayor cantidad de actividades de lectura dentro de los datos en los textos del MINEDUC (75% de actividades para 2° curso).

Para la variable contexto, se basó en los descritos en PISA (OECD, 2019): (1) *personal* atribuidas al contexto propio del estudiante; (2) *profesional o laboral* centradas en las labores propias del trabajo; (3) *social* presentes en la comunidad local, nacional o mundial; y (4) *científico* referido a temas de la naturaleza, ciencia y tecnología. Los resultados mostraron que el contexto personal (69%) fue el que tuvo mayor presencia en los libros de texto, seguido del social (19%), científico (10,3%), y por último, con una presencia muy escasa el profesional (1,7%). Cabe destacar que la presencia del contexto científico fue nula en los libros distribuidos por el MINEDUC, situación similar ocurre para el contexto profesional en los textos de Santillana. Por último, para analizar la variable representada en la tabla se contemplaron las categorías: (1) cualitativa ordinal, (2) cualitativa nominal, (3) cuantitativa discreta, y (4) cuantitativa continua, encontrando que las tablas representaban en su mayoría variables de tipo cualitativa nominal (94%).

El anterior estudio, fue complementado por Díaz-Levicoy et al. (2017), quienes analizan las tareas que abordan tablas estadísticas en tres libros de texto chilenos de 3° curso de Educación Primaria. En este caso, se analizaron el tipo de tabla y las actividades, siendo la tabla de conteo la que apareció con mayor fuerza (38,9%), seguida de la tabla con frecuencias absolutas (32,2%), y luego las de datos (25,6%). En este nivel educativo, la tabla de doble entrada no tuvo presencia en los textos explorados, a diferencia de lo ocurrido en el estudio dirigido a 1° y 2° curso (Díaz-Levicoy et al., 2015). La actividad que tuvo mayor presencia en los textos fue traducir de tabla a gráfico (35,6%); le siguen calcular (34,4%), explicar (26,7%), leer (16,7%), y por último, ejemplificar (14,4%). Al comparar los resultados obtenidos en ambos textos, en los distribuidos por el MINEDUC la actividad con mayor presencia es calcular (40%), a diferencia de las dos editoriales restantes que priorizan actividades de traducción (Santillana: 50%; SM: 35,6%).

Posteriormente, también con libros escolares chilenos, Pallauta y Gea (2019) caracterizan la actividad matemática que se pide al estudiante sobre tablas estadísticas, así como el tipo de tabla estadística propuesta en dichas actividades. Los textos analizados se dirigen a los cursos finales de Educación Básica, que son distribuidos de foma gratuita por el Ministerio de Educación en Chile para la enseñanza de la matemática, tanto para estudiantes como docentes. La muestra está constituida por 12 textos escolares, dirigidos a estudiantes de 5° a 8° curso (10 a 13 años). Por cada nivel educativo se analizaron tres textos con distinta finalidad: el texto del estudiante, el cuaderno de ejercicios, que se enfoca más al trabajo autónomo del alumno y la guía didáctica para el docente, la cual orienta la gestión del profesor en el aula, planteando tareas complementarias a las propuestas en el texto del estudiante. El estudio fue de tipo cualitativo, como análisis metodológico se empleó un análisis de contenido, por medio de una revisión bibliográfica que permitió establecer categorías por tipos de tablas, identificando las siguientes: tablas de datos, tablas de frecuencias absolutas y relativas, y tablas de doble entrada. El tipo de tabla que apareció con mayor fuerza, fue el de tablas de frecuencias (67,7%), seguido de las tablas de datos (19,2%) y doble entrada (13,1%). A partir de 6° curso, comienzan a aparecer las tablas estadísticas que involucran otras frecuencias, además de las absolutas, de allí que en este nivel se aprecien en menor cantidad (15,9%).

En resumen, se identificó una abundancia de tablas de frecuencias que, en los niveles superiores de Educación Básica, se profundiza más en su estudio al incorporar más de un tipo de frecuencias como es las relativas y acumuladas. Estos tipos de tabla promueven la comprensión de diversos conceptos estadísticos, como la probabilidad o las medidas de posición, entre otros. La presencia de tablas de doble entrada, la cual posee mayor complejidad en comparación al resto de tablas, fue escasa, lo que se consideró preocupante, por tratarse de representaciones importantes en la comparación de distribuciones de variables unidimensionales que conforman una variable bidimensional.

Otra categoría abordada en este estudio, fueron los diferentes tipos de actividades propuestas en los textos, entre las que se encontraron: leer, completar tablas, construir tabla, calcular, traducir (gráfico a tabla, tabla a gráfico, lenguaje verbal a tabla), describir variable, inventar, recoger datos, y argumentar. Algunas de estas actividades, coinciden con investigaciones anteriores (Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017), sin embargo, su dificultad era diferente, dado que, en este caso, el estudio era dirigido a textos de cursos superiores. En esta variable, se observó que la mayoría de actividades correspondían a leer (28,3%), seguida de calcular (26,1%), argumentar (12,9%), y traducir (tabla a gráfico) (10,6%). También fue posible evidenciar la carencia de tareas de traducción de lenguaje verbal a tabla, en los niveles de 5° y 6° curso.

Las tablas en libros de texto brasileños

Guimarães et al. (2007) examinan las actividades que involucran gráficos y tablas en textos de matemática de 1° a 5° curso de Enseñanza Fundamental (7 a 11 años) en Brasil, aprobadas por el Programa Nacional de Evaluación del Libro Didáctico (PNLD) de 2004. Las variables estudiadas fueron: serie, colección, el tipo de representación utilizada, habilidades explotadas, tipo de análisis solicitado al alumno, tipo de datos, contextos y contenido matemático. En total se exploraron 2080 actividades, de ellas la mayoría correspondía a tablas. El 15% de las actividades con tablas pide determinar un valor máximo, un 9% un mínimo, 20% determinar la unión de dos datos, el 2% determinar media, y 15% solicitaba la modalidad de la variable conocida su frecuencia o viceversa. El 7% de las tareas pedían un análisis variacional de los datos, el 10% cuantificar esta variación, y un 2% solicitaba realizar extrapolación a partir de los datos expuestos. La mayoría de las colecciones de libros exponen tablas que representan variables nominales. Por otra parte, fueron pocas las actividades que involucraban la construcción de tablas (2,5%), mostrando una infravaloración a este tipo de tareas.

También con libros de texto brasileños, Bivar y Selva (2011) examinaron las actividades que involucran gráficos y tablas, en cinco colecciones de libros de texto de matemáticas, utilizados los primeros años de Educación Primaria. El análisis se enfocó a explorar las actividades que implicaban un cambio de representación, por ejemplo, de tabla a gráfico o viceversa, lenguaje natural a gráfico y lenguaje natural a tabla. En el caso de las tablas, encontraron actividades como la completación de datos, interpretar datos de una tabla, construcción de tablas y transformación de la tabla a gráfico y viceversa. Al igual que en el estudio de Guimarães et al. (2007), se observó una mayor cantidad de actividades basadas en tablas que en gráficos, mientras que el tipo de actividad asociada a tablas que predominó fue completar datos, seguidas de la interpretación. Actividades

como la construcción de gráficos y tablas fueron escasas o nulas, también se apreció una carencia de tareas que promuevan la traducción entre ambas representaciones.

Posteriormente, Amorim y Silva (2016) analizan la presencia de las tablas y su uso en cuatro libros de texto de matemática de 4° y 5° curso de Educación Primaria. Los libros seleccionados fueron elegidos al azar, y contaban con la aprobación del Programa Nacional de Evaluación del Libro Didáctico (PNLD) del 2016. Las categorías de análisis fueron el tipo de tabla: (1) *cuadro*, es un marco empleado para organizar información o valores aislados, se emplea para realizar operaciones; (2) *banco de datos*, corresponde al registro individual de datos, es un medio para la recopilación y registro de datos; y (3) *tabla*, la información contenida en filas y columnas tiene sentido, posee un título y su fuente, presenta resultados finales, es un medio que sistematiza la información, a través de las diferentes frecuencias. Otra variable, consistió en la actividad pedida a través de las tablas, como: interpretar, completar, construir y realizar operaciones. En el análisis fue posible detectar que los cuadros tuvieron una mayor presencia en los libros explorados, llama la atención que indistintamente se denomina tabla a cualquier disposición rectangular con filas y columnas, aunque sean cuadros o banco de datos. La actividad que apareció con mayor frecuencia fue completar tabla, también apareció una gran cantidad de actividades que utilizan las tablas para realizar operaciones aritméticas. Por otro lado, en los libros se detectó una carencia de actividades asociadas a la construcción, o de traducción de una representación tabular a un gráfico o viceversa.

Evangelista y Guimarães (2019), analizan las actividades que involucran tablas en las colecciones de libros de texto de la escuela primaria brasileña de 1° a 5° curso, recomendados por el programa nacional de libros de texto de 2016. En total se exploraron 863 actividades observando el tipo de tabla, encontrando que un 7,8% corresponden a cuadro, el 36,5% son bancos de datos y el 56% son tablas de distribución de frecuencias. En las colecciones de libros de texto, la gran mayoría de las representaciones tabulares, indistintamente, son llamadas tablas, mientras que en el análisis realizado por los autores, se observó otros tipos de representaciones (listado, cuadro, banco de datos). Esta situación ocurrió en todos los textos que atienden a diferentes niveles escolares. En cuanto a las actividades que implicaban tablas de distribución de frecuencias (56%), en 1° y 2° curso la actividad que apareció con mayor porcentaje fue completar, actividad que va decreciendo en los siguientes cursos, mientras que interpretar se incrementa conforme se avanza de curso. Las actividades que implican la construcción de tablas fueron escasas.

Curi y Nascimento (2016) revisaron dos libros de texto de 5° curso de Educación Primaria de diferente editorial, buscando observar cómo se presentaba cada tema, y si existían sugerencias dirigidas al docente para trabajar con los estudiantes. Ambos libros presentaban actividades con solucionario, además de comentarios para guiar el trabajo del profesor. El análisis mostró que en ambos libros aparecen tablas simples y de doble entrada, llamando la atención que se denomina instintamente tabla a cuadros, o listados de datos, se añade además que no existe ninguna explicación de estos conceptos ni para el estudiante ni en el manual del docente. Basados en los niveles de lectura propuestos por Curcio (1989), se pudo observar que prácticamente la totalidad de actividades con tablas, se enmarcan en el primer nivel de lectura, el que se dirige a la realización de una lectura literal de la información expuesta en una tabla. Se observó en los libros de texto, el hecho

de que tanto las tablas como los gráficos, la mayor parte de las veces, son un recurso para la enseñanza de contenidos específicos, es decir, las tablas y gráficos no son objetos de enseñanza.

Las tablas en libros de texto de otros países

En España, Gea (2014) analiza la enseñanza de la estadística bidimensional en 16 libros de texto de 1º curso de Bachillerato; ocho en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, y los restantes de la modalidad de Ciencia y Tecnología. Entre las variables exploradas se encuentra la representación de datos bidimensionales, en los que figura la representación tabular, donde fue posible de distinguir en: *tabla bidimensional simple* (listado de datos), *tabla bidimensional simple con frecuencias*, que es una extensión de la descrita anteriormente y en ella se añade una nueva columna/fila con la frecuencia que corresponde a cada par de valores (x_i, y_i) ; y *tabla de doble entrada*, que es la representación más usual en la organización de datos en un estudio bidimensional. La autora evidencia la poca presencia que tiene la tabla de doble entrada en el tema. En su estudio encuentra que las tareas se presentan, mayoritariamente, para resolverse con lápiz y papel, lo que quizás motiva que la tabla más utilizada en los textos sea el listado de datos, que suele venir acompañada de una columna donde se registra la frecuencia de los mismos, si es distinta de uno. Este enfoque tan limitado de la enseñanza de la tabla de doble entrada en el tema puede deberse a la necesidad de agilizar los cálculos, pues el tiempo disponible para impartir el programa es escaso, aunque, los listados de datos no llegan a representar explícitamente la distribución de la variable bidimensional, y tendrían menor complejidad semiótica (Arteaga, 2011) que la tabla bidimensional simple con frecuencias o de doble entrada.

García-García et al. (2019), analizan 12 libros de texto mexicanos de 1º a 6º curso de Educación Primaria de dos colecciones. El total de actividades estudiadas fueron 102, en ellas se examinaron variables similares a las consideradas por Díaz-Levicoy et al. (2017), como el tipo de tabla (tabla de conteo, tabla de frecuencia y tabla de doble entrada) mostrando sus resultados un predominio de tablas de datos, asociadas a un nivel de complejidad semiótico N2 según Arteaga (2011) en que no surge la idea de distribución. Las tablas de conteo y de doble entrada o contingencia aparecen de manera muy escasa. Otras variables abordadas en este estudio fueron el nivel de lectura (Friel et al., 2001), tipo de tarea y contexto. Los resultados muestran que el nivel de lectura que aparece con mayor fuerza es el de leer dentro de los datos, mientras que niveles superiores de lectura como leer más allá de los datos estuvieron ausentes en las tareas propuestas a los estudiantes, y leer detrás de los datos apareció muy poco. Respecto al tipo de tarea, la mayor parte de ellas consistían en calcular. En relación al tipo de contexto, de los propuestos por PISA, el que más predominó fue el de tipo personal.

Por otra parte, Arredondo et al. (2021) realizan un análisis comparativo de las tablas y gráficos estadísticos en 10 libros de texto de Educación Infantil (3 a 5 años) de Chile y España. El tipo de tabla lo relacionan con los niveles de complejidad semiótica propuestos por Pallauta y Arteaga (2021), los resultados muestran la presencia de tablas de distribución de frecuencias y de doble entrada, asociados a un nivel de complejidad N3.1 y N4.1 según Pallauta y Arteaga (2021), que solo se plantean en el contexto chileno.

Conclusión de presencia de las tablas en libros de texto

En las investigaciones presentadas podemos apreciar como factor común, la escasa presencia de actividades que impliquen la construcción de tablas, ya sea a través de datos dados, como recopilados por el propio estudiante. También son muy pocas las tareas que impliquen las traducciones de tabla a gráfica, o viceversa. En cuanto a los tipos de las tablas, hay varias clasificaciones con diferentes matices, que varían principalmente dependiendo del nivel educativo al que sea dirigido el estudio.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES CHILENOS

- 3.1. Introducción
- 3.2. El libro de texto como recurso didáctico
- 3.3. Objetivo del estudio
- 3.4. Hipótesis iniciales
- 3.5. Método
 - 3.5.1. Muestra de textos analizados
 - 3.5.2. Método de análisis
- 3.6. Resultados del análisis de la variedad de tablas y contextos
 - 3.6.1. Tipo de tabla y niveles de complejidad semiótica
 - 3.6.2. Contexto
- 3.7. Resultados del análisis semiótico de la tabla estadística en los textos
 - 3.7.1. Situaciones-problemas en torno a la tabla estadística
 - 3.7.2. Procedimientos con tablas estadísticas
 - 3.7.3. El lenguaje utilizado en las tablas
- 3.8. Propósito de la actividad
- 3.9. Nivel de lectura
- 3.10. Uso de la tecnología
- 3.11. Conflictos semióticos identificados
- 3.12. Significado institucional de referencia para el estudio de evaluación
- 3.13. Conclusiones del análisis de los libros de textos
 - 3.13.1. Conclusiones respecto a los objetivos
 - 3.13.2. Conclusiones respecto a las hipótesis
- 3.14. Idoneidad didáctica del tratamiento de las tablas en los textos analizados

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se describe el estudio realizado sobre la presentación de las tablas estadísticas en una muestra de libros de texto de matemáticas de 5° a 8° curso de Educación Básica en Chile (MINEDUC, 2015; 2018), para cumplir el primer objetivo de la presente investigación, descrito en el Capítulo 1. Esta investigación ha complementado la literatura investigativa, y se ha recogido en diferentes trabajos (Pallauta y Gea, 2019; Pallauta y Arteaga, 2021; Pallauta et al., 2020; 2021).

El análisis de libros de texto presentado en este capítulo, junto a la revisión curricular descrita en el Capítulo 1, permite evaluar el significado institucional implementado de la tabla estadística propuesto a los estudiantes de Educación Básica en Chile y será la base para fijar el significado de referencia para la construcción del cuestionario utilizado en el estudio de evaluación.

A continuación, se describen los objetivos, muestra y variables consideradas, así como la metodología y resultados del estudio de los textos analizados, finalizando con algunas conclusiones. Primeramente se realiza una reflexión sobre la importancia del libro de texto.

3.2. EL LIBRO DE TEXTO COMO RECURSO DIDÁCTICO

El estudio se justifica por la importancia del libro de texto como recurso educativo en el aula, que ha sido destacado por numerosos autores (Alkhateeb, 2019). Además, la

investigación en torno a este recurso se ha acrecentado en los últimos años (Fan et al., 2013) incorporando diferentes variables en su estudio. Stylianides (2009) señala su influencia en las oportunidades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, dado que los maestros se basan en ellos para tomar decisiones en cuanto a la enseñanza de diferentes contenidos matemáticos. En esta línea, los textos escolares pueden repercutir en cómo imparten la enseñanza los profesores, convirtiéndose en un puente entre el currículo pretendido y el implementado finalmente en el aula (Herbel, 2007). Alkhateeb (2019) refuerza esta idea, destacando que los maestros toman gran parte de sus decisiones respecto de su práctica, basados en lo propuesto en el libro de texto, convirtiéndose en un marco de referencia de gran relevancia tanto para el profesor como para el estudiante. Blanco y Belver (2016) describen al libro de texto como un material que ha trascendido en el tiempo, pese a algunas modificaciones, principalmente la componente tecnológica.

Para Ortiz (2002), el libro de texto es uno de los principales recursos para la mediación y coordinación entre el discurso, la práctica ideológica, política y los lineamientos curriculares que se implementan en las instituciones educativas. De acuerdo a esta visión, los textos escolares han sido elaborados desde una perspectiva social y también política que busca implementar visiones ideológicas en el colectivo (Valverde et al., 2002). El libro de texto se configura en una fuente rica de información, de allí la importancia de su análisis crítico pues permite, entre otros aspectos, detectar su ajuste con los lineamientos curriculares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad y adecuación a las necesidades de los estudiantes (Godino et al., 2006).

3.3. OBJETIVO DEL ESTUDIO

En el Capítulo 1 se ha descrito el interés por investigar sobre las tablas estadísticas, dada su importancia y la necesidad de prestar mayor atención a este tema, por lo que se analizará la presentación de la tabla estadística en textos escolares en Chile, para atender una parte del primer objetivo general de este trabajo, que es el siguiente:

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado del tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular en estadística, en una muestra de textos dirigidos a estudiantes chilenos y españoles de Educación Básica en edades similares.

Para cumplir este objetivo se tratará de caracterizar el significado institucional implementado en los textos de los cursos en los que se centra nuestra investigación, en torno a la enseñanza de las tablas estadísticas y comparar con el significado institucional pretendido en las orientaciones curriculares. Este análisis, junto con el curricular descrito en el Capítulo 1, también será la base para establecer el contenido del cuestionario de evaluación. Para alcanzar este propósito, planteamos los siguientes objetivos específicos:

O1.1. Determinar el significado institucional pretendido de las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares de Educación Básica en Chile, en los niveles

educativos donde se profundiza en su enseñanza, que son de 5° a 8° curso.

La importancia de este objetivo se deduce del papel dado a la diversidad de representaciones de los objetos matemáticos por Duval (2003). Para conseguir este objetivo, se revisaron las directrices curriculares del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2015; 2018), descritas en el Capítulo 1, que han sido comparadas con otras orientaciones curriculares (Franklin et al., 2005; NCTM, 2014). Llevar a cabo este objetivo permitió concretar las orientaciones curriculares sobre el tema, y establecer la importancia que estos documentos le asignan a la enseñanza de las tablas estadísticas para el estudiante. Además, este análisis, permitirá establecer si los contenidos de los textos escolares dirigidos a los cursos finales de Enseñanza Básica chilenos se ajustan a los lineamientos curriculares establecidos.

O1.2. Caracterizar el tipo de tabla, nivel de complejidad semiótica, y contextos presentados de acuerdo al nivel educativo en una muestra de textos dirigidos a los últimos cursos de Enseñanza Básica en Chile.

En el estudio curricular se observó una variedad de tipos de tablas estadísticas que se encuentran presentes de manera explícita en los lineamientos curriculares, por lo que el análisis de los textos entregará luces del cumplimiento respecto a lo plasmado en estas directrices en los textos escolares. Por otro lado, el análisis semiótico de los diferentes tipos de tablas, realizado en el Capítulo 1, indicó los diferentes objetos matemáticos relacionados con cada una, lo que permitió adaptar a las tablas estadísticas los niveles de complejidad semiótica propuestos por Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010). En consecuencia, es de interés analizar si los niveles crecientes de complejidad semiótica se van incorporando gradualmente a lo largo de los cursos escolares. Esta caracterización de las tablas estadística se complementa con la descripción de los contextos de aplicación propuestos por PISA (OECD, 2019).

O1.3. Caracterizar las situaciones-problemas propuestas al estudiante, procedimientos y lenguaje asociados, junto al uso de la tecnología y el propósito de la actividad matemática planteada en torno a la tabla estadística.

Se pretende caracterizar las situaciones-problema relacionadas con las tablas estadísticas, que son un elemento de gran importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático en el enfoque ontosemiótico (Godino, 2002). Se complementa el estudio, con la descripción de los procedimientos sugeridos para su resolución junto al lenguaje matemático empleado, se observará también si se propone la utilización de tecnología. Finalmente, se pretende analizar el uso de la tabla estadística (ejemplos, ejercicios resueltos o ejercicios propuestos), ya que la actividad matemática a realizar por el estudiante será mayor en los ejercicios propuestos. Todas estas variables, han sido abordadas en otras investigaciones con libros de texto (Gea, 2014; Ortiz, 2002) en las que se destacan como un factor importante para el aprendizaje de los estudiantes.

O1.4. Caracterizar los niveles de lectura propuestos en las actividades basadas en las tablas estadísticas.

En la investigación sobre gráficos estadísticos se proponen cuatro niveles de

dificultad en la lectura de los mismos (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), que pueden ser considerados para el análisis de la lectura de la tabla estadística. Las tablas, al igual que los gráficos, se conforman en objetos semióticos (Arteaga et al., 2011) en los que intervienen diferentes objetos matemáticos y procesos cognitivos en su lectura, por lo que resulta de importancia identificar los niveles de lectura requeridos en los textos escolares, para poder establecer si el trabajo propuesto es apropiado para el desarrollo cognitivo y nivel educativo de los estudiantes.

O1.5. Identificar los principales conflictos semióticos potenciales en el tema.

En el análisis realizado a los textos escolares, se presentan algunas asignaciones imprecisas de significado a determinados objetos matemáticos, que pudieran provocar un conflicto semiótico en el estudiante, por lo que resulta necesario detectarlas, pues si el profesor no está atento podrían provocar confusiones en el alumno. Este tipo de conflictos han aparecido en otras investigaciones sobre textos escolares, como la de Ortiz (2002) o Gea (2014).

3.4. HIPÓTESIS INICIALES

A pesar de que la tabla estadística es un tópico que se encuentra presente en las bases curriculares de diferentes países a partir de los primeros niveles educativos, como es el caso de Chile (MINEDUC, 2015; 2018), cuando partió este estudio, existían escasas investigaciones sobre libros de texto de Educación Primaria, por lo que nuestras hipótesis son de carácter exploratorio, emanadas principalmente de investigaciones de los gráficos en los libros de texto, y de escasos antecedentes del análisis de las tablas estadísticas en los libros de texto chilenos (Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017; Pallauta, 2018). Las hipótesis son las siguientes:

H1. Se espera que el significado institucional pretendido para las tablas estadísticas en las en las orientaciones curriculares de Educación Básica en Chile, específicamente de 5° a 8° curso, muestre una adecuada idoneidad cognitiva.

Las tablas aparecen de manera progresiva en los diferentes niveles educativos, y se espera que, conforme se avanza de nivel, se incremente la cantidad de objetos matemáticos presentes en los objetivos de aprendizaje que involucran tablas estadísticas. Así también, se espera que los estudiantes en cada curso tengan los conocimientos requeridos para el tipo de tabla propuesto.

H2. Se espera que el significado institucional implementado para las tablas estadísticas en los textos escolares chilenos de Educación Básica analizados, muestre un buen ajuste con el significado institucional pretendido en las directrices curriculares.

En particular, se espera encontrar todos los tipos de tablas estadísticas establecidos por las directrices curriculares, mediante una introducción progresiva; evidenciando una adecuada idoneidad epistémica. Igualmente se espera encontrar una variedad de actividades y contextos. Por otra parte, respecto a los niveles de complejidad semiótica,

descritos en el Capítulo 2, se espera que se avance en su desarrollo conforme se progresa en el curso escolar.

H3. Se prevé que las situaciones-problemas con mayor presencia en los textos escolares se centren en la realización de cálculos con la información proporcionada por las tablas, siendo escaso el uso de tecnología.

Se espera que los textos presenten una cantidad y variedad importante de actividades en torno a las tablas estadísticas, que en su mayoría serán ejercicios propuestos, a diferencia de ejercicios resueltos o ejemplos, debido a lo encontrado en el trabajo previo (Pallauta, 2018). El tipo de procedimiento que podría aparecer con mayor fuerza es el de calcular en torno a la tabla, es decir acciones con una mayor componente algorítmica.

H4. Los niveles de lectura descritos en los antecedentes son introducidos en los textos en forma gradual, con un predominio del nivel de lectura referido a leer dentro de los datos.

Esperamos que los textos escolares chilenos, presenten actividades que requieran de los diferentes niveles de lectura propuestos por (Friel et al., 2001), sin embargo, podría ocurrir que estas se centren, principalmente, en el nivel *leer dentro de los datos*, similar a lo obtenido por Díaz-Levicoy (2018) en su análisis de gráficos, siendo muy escasa la presencia de actividades que requieran de los niveles más sofisticados de lectura.

H5. Podrían presentarse algunos conflictos semióticos en los textos escolares, principalmente relacionados con definiciones de diferentes objetos matemáticos implicados en el estudio de la tabla estadística.

La presencia de conflictos semióticos potenciales respecto a otros contenidos matemáticos en los libros de texto ha sido detectada por diferentes autores (Gea, 2014; Mayén et al., 2009). En nuestro estudio esperamos encontrar sesgos en cuanto a la confusión entre variable y frecuencia, conflicto semiótico advertido por Arteaga (2011).

3.5. MÉTODO

El presente estudio se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, que provee de una comprensión en profundidad de los datos, además de una riqueza interpretativa (Hernández et al., 2014), en la que se estudia con detenimiento la naturaleza de las realidades analizadas, en nuestro caso el libro de texto (Cook y Reichardt, 2005), en lugar de utilizar una muestra más amplia.

Se trata de una investigación descriptiva, centrada en analizar y describir los textos que conforman la muestra, y que emplea el análisis de contenido (Neuendorf, 2016) siguiendo etapas sistemáticas (Mayring, 2020), las que son detalladas a continuación:

1. Selección de las unidades de análisis, que han sido todas las tablas estadísticas incluidas en los textos y todas las actividades propuestas en relación a dichas tablas, así como aquellas actividades en que se hiciera evidente la utilidad de organizar datos y construir una tabla estadística.

2. Decisión sobre las variables de análisis: Se han considerado el tipo de tabla y su nivel de complejidad semiótica; la actividad propuesta respecto a la tabla y la tipología de situaciones-problema en que se plantea, así como los procedimientos y uso de lenguaje implicados; el nivel de lectura requerido para desarrollar la actividad; si se plantea el uso de la tecnología; y el contexto de los datos.
3. Formar las categorías de análisis y codificación: Las categorías de cada variable se toman de investigaciones previas, depurándolas cuando es necesario; y la codificación de los datos se lleva a cabo de manera cíclica e inductiva (Bisquerra, 2014).
4. La fiabilidad de la codificación se asegura a través de continuas revisiones de los textos por mi parte, con la colaboración de los directores de este trabajo, así como la discusión de los casos discordantes junto a colaboradores expertos, hasta llegar a un acuerdo.
5. Elaboración de tablas de resultados con la distribución de frecuencias de las diferentes categorías de análisis en los textos escolares analizados.

La revisión bibliográfica descrita en el Capítulo 2, y el marco teórico aplicado en esta investigación, permiten definir las categorías de análisis y comprobar su validez.

3.5.1. MUESTRA DE TEXTOS ANALIZADOS

La muestra está constituida por 12 textos dirigidos a estudiantes de 5° a 8° curso de Educación Básica de Chile, que atienden al marco curricular vigente (MINEDUC, 2015; 2018). Por cada nivel educativo se analizan tres textos, que están dirigidos a la comunidad educativa con distinta finalidad: el texto del estudiante, que podemos considerar como libro de texto de aula, en el que se desarrolla la materia por cada unidad didáctica; el cuaderno de ejercicios, que complementa al anterior y se enfoca más al trabajo autónomo del estudiante; y la guía didáctica para el docente, que orienta la gestión del profesor en el aula.

Los textos analizados son distribuidos de manera gratuita por el Ministerio de Educación (MINEDUC) a todos los estudiantes y profesores pertenecientes a la educación pública y sistema particular subvencionado del país. También es posible acceder a ellos, en formato digital, a través de la página del MINEDUC (<http://www.textos Escolares.cl/>), pues son textos de uso público financiados por el propio Ministerio de Educación como material pedagógico, y fueron publicados por editoriales como Marshall Cavendish Education (5° curso), Santillana (6° curso) y SM (7° y 8° curso).

Dado que la muestra es intencional, motivada por los propósitos de la investigación (Corral et al., 2015), como es analizar detalladamente el tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema en los textos dirigidos a últimos cursos de Educación Básica, no se persigue generalizar los resultados obtenidos a otros textos. Sin embargo, es posible realizar una comparabilidad y traducibilidad (Bogdan y Biklen, 1998), ya que la terminología que utilizamos en la investigación se soporta en un marco teórico

normalizado, descrito con detalle en el Capítulo 1, así como la muestra de libros analizados, pudiendo así comparar los resultados con estudios relacionados. La Tabla 3.5.1.1 muestra los códigos asignados a los textos utilizados.

Tabla 3.5.1.1 Libros escolares chilenos utilizados en el estudio

Código	Referencia
S1	Kheong, F. H., Soon, G. K., y Ramakrishnan, C. (2017). <i>Texto del estudiante Matemática 5° básico</i> . Marshall Cavendish Education.
S2	Kheong, F. H., Soon, G. K., y Ramakrishnan, C. (2017). <i>Cuaderno de ejercicios Matemática 5° básico</i> . Marshall Cavendish Education.
S3	Kheong, F. H., Soon, G. K., y Ramakrishnan, C. (2017). <i>Guía didáctica del docente – Tomo 2 Matemática 5° básico</i> . Marshall Cavendish Education.
S4	Maldonado, L., y Castro, C. (2017). <i>Texto del estudiante Matemática 6° básico</i> . Grupo Santillana de ediciones.
S5	Castro, C. (2017). <i>Cuaderno de ejercicios Matemática 6° básico</i> . Grupo Santillana de ediciones.
S6	Juillet, I., y Martínez, M. (2017). <i>Guía didáctica del docente – Tomo 2 Matemática 6° básico</i> . Grupo Santillana de ediciones.
SM1	Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., y Rupin, P. (2016). <i>Texto del estudiante Matemática 7° básico</i> . Ediciones SM.
SM2	Santis, M. (2016). <i>Cuaderno de ejercicios Matemática 7° básico</i> . Ediciones SM.
SM3	Raydoret del Valle, J. (2016). <i>Guía didáctica del docente Matemática 7° básico</i> . Ediciones SM.
SM4	Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C., y Rupin, P. (2016). <i>Texto del estudiante Matemática 8° básico</i> . Ediciones SM.
SM5	Muñoz, V., y Chacón, A. (2016). <i>Cuaderno de ejercicios Matemática 8° básico</i> . Ediciones SM.
SM6	Muñoz, V., y Manosalva, C. (2016). <i>Guía didáctica del docente Matemática 8° básico</i> . Ediciones SM.

3.5.2. MÉTODO DE ANÁLISIS

Los capítulos analizados en la muestra de textos pertenecen al bloque de contenidos *Datos y Probabilidad* (5° y 6° Básico) y *Estadística y Probabilidad* (7° y 8° Básico). Se centró la atención, tanto en las tablas en sí mismas como en las situaciones-problema relacionadas, pues como indica Godino (2002), las situaciones-problema son las que promueven y contextualizan la actividad matemática. De este modo, los objetos matemáticos emergen de las prácticas, personales o institucionales, al resolver cualquier tarea, ejercicio o actividad (Godino et al., 2007; 2019).

El primer paso del análisis fue identificar en los textos escolares las situaciones-problema en donde se hace uso de la tabla estadística, bien como fin u objeto de estudio en sí misma, o como herramienta para responder a otras cuestiones. El método de investigación empleado es el análisis de contenido (Yaremko et al., 2013), puesto que permite profundizar en la naturaleza del discurso, a través de documentos escritos, notas de campo, entrevistas, entre otros. En este análisis, se siguió el método utilizado por Gea (2014) para analizar el contenido de correlación y regresión, en una muestra de textos de Bachillerato donde, elegidos los libros y el tema correspondiente, se realizan lecturas para establecer los párrafos que constituirían la primera unidad de análisis. A través de un proceso cíclico e inductivo, se examina en el contenido de dichos párrafos las variables

de análisis para confeccionar un listado de categorías en cada variable, y describir con ejemplos cada una de ellas. Finalizando con la elaboración de tablas para resumir los resultados y facilitar la obtención de conclusiones.

En la Tabla 3.5.2.1 se presenta un resumen con la distribución de actividades analizadas en cada uno de los textos escolares chilenos que componen la muestra. Se revisó un número importante de actividades (n=990), por lo que se trataría de una buena muestra, lo que en consecuencia permitiría establecer algunas conclusiones conforme a lo observado.

Tabla 3.5.2.1. Frecuencia (y porcentaje) de actividades analizadas según tipo de texto escolar

Tipo de texto escolar	5° EB n=139	6° EB n=115	7° EB n=418	8° EB n=318
Libro del estudiante	85(61,2)	53(46,1)	206(49,3)	140(44)
Cuaderno de ejercicios	36(25,9)	56(48,7)	159(38)	142(44,7)
Guía del docente	18(12,9)	6(5,2)	53(12,7)	36(11,3)

El 7° curso es el que muestra una mayor cantidad de actividades en torno a la tabla estadística, seguido de 8°, 5° y finalmente 6° curso; es decir, la mayor actividad se registra en los dos cursos superiores. Los textos que ofrecen una mayor cantidad de actividades son los libros del estudiante, es decir, en los que se presentan cada uno de los contenidos que se tratarán en la asignatura, mientras que las guías docentes son las que menos actividades complementarias ofrecen, debido a que su principal misión es entregar orientaciones al profesor, y se supone que este usa las del libro del estudiante.

En la siguiente sección, se describe cada una de las variables consideradas en este estudio, junto con el detalle de los resultados obtenidos en el análisis.

3.6. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA VARIEDAD DE TABLAS Y CONTEXTOS

A continuación, se presenta el análisis detallado del tipo de tabla junto con el nivel de complejidad semiótica asociado a la misma, además del contexto en que son planteadas las tareas en torno al estudio de las tablas estadísticas.

3.6.1. TIPO DE TABLA Y NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA

Se encontraron diferentes tipos de tablas estadísticas en los textos analizados, cuya complejidad se organiza, principalmente, según el nivel educativo. En los primeros cursos, la tabla estadística se suele presentar como un medio para organizar la información que se suministra en una situación-problema, sobre todo para registrar el recuento de elementos, y así resumir y comunicar información de la situación de estudio.

Posteriormente, obedeciendo a los lineamientos curriculares (MINEDUC, 2015; 2018), el lenguaje tabular se formaliza un poco más, y se utiliza para mostrar variables y frecuencias de sus categorías, sobre todo de variables cualitativas y cuantitativas de tipo discreto. A medida que se progresa en el nivel educativo, aparecen tablas estadísticas más complejas, que muestran diversos tipos de frecuencias, agrupación de la variable en intervalos de clase, así como tablas de doble entrada o contingencia.

Se puede hablar, en términos de Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010), del nivel de complejidad semiótica en los tipos de tablas presentes en los textos analizados. Como se indicó en el Capítulo 2, los autores definen cuatro niveles de complejidad en los gráficos, los cuales han sido adaptados a las tablas estadísticas y son descritos en dicho capítulo.

A continuación, se presentan los tipos de tablas estadísticas consideradas por Lahanier-Reuter (2003), descritas en el Capítulo 1, que se encuentran en los textos analizados, junto con los niveles de complejidad que les corresponden.

Tabla de datos

Se utiliza, especialmente, en los primeros niveles educativos y sirve para introducir al estudiante en la construcción, uso y lectura del lenguaje tabular. Este tipo de tabla se hace corresponder con el nivel C2 de complejidad semiótica, donde no se muestra la idea de frecuencia asociada a cada dato y, por tanto, no emerge el concepto de distribución. La función de esta tabla consiste en facilitar la visualización de los valores de las variables representadas, por la propia disposición de las celdas de la tabla.

La Figura 3.6.1.1 es un ejemplo de este tipo de tabla, y en ella se registra el peso de Pedro durante cinco meses de manera horizontal. Se pide decidir, justificadamente, el tipo de gráfico más apropiado para representar esta información.



Figura 3.6.1.1. Ejemplo de tabla de datos ([S1], p. 296)

Tabla de distribución de una variable

En esta categoría son consideradas las tablas que presentan la distribución de una variable estadística, mediante frecuencias absolutas, relativas o porcentuales. En investigaciones previas, este tipo de tablas se han diferenciado en dos tipos, según se incluya o no una columna (o fila) de registro de conteo, denominadas en este caso “tablas de conteo” (Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017). Como la presencia de tablas de conteo en los libros analizados es escasa, no se consideró esta diferenciación. Esta situación se podría deber a que fueron analizados textos de cursos medios y superiores en Educación Básica, mientras que las tablas de conteo se orientan fundamentalmente a los primeros cursos de Educación Básica.

Este tipo de tabla se hace corresponder con un nivel C3 de complejidad semiótica, porque se representa la distribución de frecuencias de una variable. Como se describe en el Capítulo 2, es posible completar la propuesta de Arteaga y colaboradores, clasificando este nivel de complejidad en tres subniveles:

C3.1. Tablas de frecuencias ordinarias: En este tipo se incluiría la distribución expresada únicamente en frecuencias absolutas, relativas o porcentuales. Por ejemplo, en la Figura 3.6.1.2 se expone una tabla de frecuencias, con los resultados obtenidos al lanzar 200 veces un dado cúbico. La tarea consiste en completar la tabla con las frecuencias

relativas asociadas a la variable, y posteriormente establecer el valor al que tienden dichas frecuencias, cuando se repite un número elevado de veces el mismo experimento.

1. La siguiente tabla muestra 200 lanzamientos de un dado. Completa la tabla y responde las preguntas.

Lanzamiento de un dado de seis caras						
Resultado						
Frecuencia absoluta	30	50	25	40	35	20
Frecuencia relativa						

Figura 3.6.1.2. Ejemplo de tabla de frecuencias ordinarias ([S5], p. 128)

C3.2. Tabla de frecuencias acumuladas: Su forma es similar a la tabla de frecuencias ordinarias, pero se incluyen frecuencias acumuladas absolutas, relativas o en porcentaje, cuyo tratamiento involucra el manejo de desigualdades. En los cursos superiores de Educación Básica (7° y 8°) es donde aparece una mayor cantidad de tablas de este tipo como la expuesta en la Figura 3.6.1.3

b. Los goles marcados por un equipo de fútbol en 20 partidos vienen dados por la siguiente tabla de frecuencias.

Cantidad de goles por partido		
Cantidad de goles	f	F
0	6	6
1	4	10
2	4	14
3	3	17
4	2	19
5	1	20

- ¿Qué gráfico sería adecuado para representar los datos?

Figura 3.6.1.3. Tabla de frecuencias acumuladas ([SM4], p. 317)

C3.3. Tabla de frecuencias agrupadas en intervalos: cualquiera de los casos anteriores, pero agrupando los valores de la variable en intervalos, implica el trabajo con intervalos de números reales y sus extremos, junto a valores aproximados. Por ejemplo, en la Figura 3.6.1.4 se pide determinar el intervalo donde se encuentra el percentil 23 y el 45, e interpretar dichos valores. El trabajo con tablas de agrupación de valores en intervalos es un primer paso en el estudio de variables aleatorias continuas; la interpretación de la frecuencia de un rango facilita esta comprensión, que se abordará en la distribución en intervalos de estas variables.

La tabla muestra la cantidad de gasolina que consume una flota de camiones diariamente.

Consumo de gasolina de la flota de camiones	
Gasolina (litros)	Cantidad de camiones
[10, 20[8
[20, 30[15
[30, 40[11
[40, 50[17
[50, 60]	25

- ¿En qué intervalo se encuentra el percentil 23? ¿Cómo puedes interpretar este valor?
- ¿En qué intervalo se ubica el percentil 45? ¿Qué significa este valor?

Figura 3.6.1.4. Ejemplo de tablas agrupadas en intervalos ([SM4], p. 330)

Tabla de contingencia

Este tipo de tabla posee un nivel C4 de complejidad semiótica, pues permite relacionar en una misma distribución bidimensional (X,Y) la distribución de dos variables estadísticas unidimensionales $(X$ e $Y)$ cuyas categorías se cruzan en las celdas del cuerpo de datos. Este nivel se podría clasificar en dos subniveles, según se consideren datos en intervalos de clase:

C4.1. Tabla de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales. En este sentido, la Figura 3.6.1.5 muestra una tabla de doble entrada 4×2 , que relaciona las variables: nivel educacional y género. En la tarea se debe verificar la veracidad de una afirmación basada en los datos expuestos en la tabla, para ello se debe emplear argumentos que permitan justificar la respuesta.

Nivel de estudios		
Nivel	Hombres	Mujeres
Básico	15	10
Medio	80	96
Universitario	75	79
Postgrado	15	12

- De las personas con estudios de nivel universitario, los hombres son más que las mujeres. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica.

Figura 3.6.1.5. Tabla de contingencia ([SM2], p. 129)

C4.2. Tabla de contingencia con agrupación de valores en intervalos. Este tipo de tabla considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia. En la Figura 3.6.1.6 el estudiante debe leer la tabla para luego, determinar si una serie de afirmaciones son verdaderas o falsas.

- 2 En un patio de comidas se encuesta a personas de diferentes grupos de edad para saber qué tipo de comida prefieren.

¿Cuál es tu tipo de comida favorita?				
Grupo de edad	Comida rápida	Italiana	Mexicana	China
Menores de 12 años	54	21	16	9
Entre 12 y 18 años	34	24	29	13
Mayor de 18 años	11	35	26	28

Escribe una **V** si la afirmación es verdadera o una **F** si es falsa. Justifica en cada caso.

- a. La comida menos preferida entre las personas menores de 12 años es la comida rápida.
- b. La mayoría de las personas mayores de 18 años prefiere la comida italiana. Habilidad

Figura 3.6.1.6. Tabla de contingencia ([S1], p. 283)

La Tabla 3.6.1.1 y la Figura 3.6.1.7 resumen los resultados del tipo de tabla estadística, según el curso escolar en que se presenta. Los resultados son mucho más precisos que si se hubiese considerado únicamente el nivel de complejidad semiótica, utilizado por Arteaga y colaboradores (2011) para caracterizar la complejidad de los gráficos estadísticos.

Tabla 3.6.1.1. Frecuencia (y porcentaje) del tipo de tabla y nivel de complejidad semiótica por nivel educativo

Tipo de tabla	Santillana		SM		Total
	5° EB	6° EB	7° EB	8° EB	
Tabla de datos (C2)	32 (23)	15 (13)	60 (14,4)	107 (33,6)	214 (21,5)
Tabla distri- Ordinaria (C3.1)	66 (47,5)	83 (72,2)	206 (49,3)	87 (27,4)	442 (44,6)
bución de Acumuladas (C3.2)			112 (26,8)	45 (14,2)	157 (15,9)
una variable Agrupadas (C3.3)				52 (16,4)	52 (5,3)
Tabla de Ordinaria (C4.1)	36 (25,9)	17 (14,8)	38 (9,1)	27 (8,5)	118 (11,9)
contingencia Agrupadas (C4.2)	5 (3,6)		2 (0,4)		7 (0,7)
Total	139	115	418	318	990

Se observa que, a modo general, predominan las tablas de distribución de una variable con un nivel de complejidad C3.1, especialmente en 6° curso, es decir, las que involucran las frecuencias absolutas y/o relativas, seguido de las tablas de datos con nivel C2, mientras que fueron prácticamente ausentes las tablas de contingencia con datos agrupados en intervalos correspondiente al nivel de complejidad semiótica C4.2.

También es posible apreciar, que no hay un grado consistente de incremento en el nivel de complejidad semiótica presente en los diferentes tipos de tablas a medida de que se progresa de curso. En 8° curso se puede observar que hay una presencia de la mayor parte de las categorías y subcategorías de complejidad semiótica, sin embargo, llama la atención la ausencia de C4.2, el que sí se presenta, aunque de manera muy escasa, en 5° y 7° curso. Las tablas de distribución de una variable, aparecen en todos los cursos, especialmente con un nivel C3.1. En 7° y 8° curso se da paso al nivel C3.2, aunque el nivel C3.3, el cual implica la agrupación de valores de la variable en intervalos solo se observa en el último curso de Educación Básica.

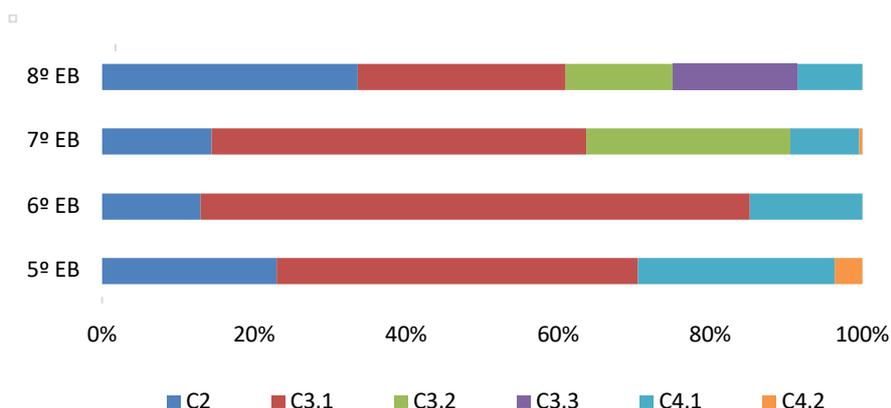


Figura 3.6.1.7. Porcentaje de tablas según su complejidad semiótica en cada curso escolar

Estos resultados son similares a lo evidenciado por Díaz-Levicoy y colaboradores (2015; 2017) en lo que se refiere a la complejidad creciente de las tablas al avanzar de curso, a pesar de que en sus estudios no aparecían las tablas de frecuencias diferentes a las absolutas, posiblemente por el nivel educativo al que se dirigían. En García-García et al. (2019) en su estudio sobre las tablas en libros de texto mexicanos dirigidos de 1° a 6° de Educación Primaria, se observó una mayor presencia de tablas de datos, seguidas por

las de frecuencia, aunque su análisis consideró los niveles de complejidad semiótica, no se profundiza en el tipo de frecuencia presentado en dichas tablas. Por tanto, este trabajo complementa y profundiza estos análisis, al considerar los subniveles de complejidad semiótica que se pueden presentar en las tablas estadísticas.

3.6.2. CONTEXTO

La contextualización del conocimiento matemático tiene un importante rol en la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado (Font, 2007). Esta idea ha tomado una gran relevancia y se manifiesta, por ejemplo, a partir de los estudios internacionales de evaluación PISA (OECD, 2019). En este estudio, también se incorpora esta variable, que ha sido tratada en investigaciones previas sobre libros de texto y de este tema en particular (Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017; García-García et al., 2019). Para el análisis, se observó la presencia de diferentes tipos de contexto basados en la caracterización del estudio PISA (OECD, 2019) el que considera cuatro categorías, a las cuales se añadió una nueva denominada “experimento aleatorio”, por su representatividad en los textos analizados. Se describen, a continuación, los tipos de contextos propuestos por los textos analizados.

Contexto personal

Son las actividades con un contexto asociado al quehacer diario de los estudiantes, de su familia, del grupo de la clase, etc. Por ejemplo, la comida preferida de un grupo de personas según la edad (Figura 3.6.1.6), o en el ámbito deportivo, la cantidad de goles anotados por un equipo de fútbol (Figura 3.6.1.3).

Contexto científico

Se relaciona con la comprensión de procesos tecnológicos, o su interpretación teórica. Por ejemplo, podemos encontrar contextos referidos al incremento de peso de un animal, la cantidad de mg. diarios de un fármaco; el alargamiento de una barra metálica y la temperatura a la que se expone, o como en la Figura 3.6.2.1 que presenta una tabla con el registro de la presión sistólica sanguínea marcada por un grupo de mujeres, antes de iniciar un tratamiento.

7 La tabla muestra los datos de la presión sistólica sanguínea medida a 100 mujeres antes de comenzar un tratamiento.

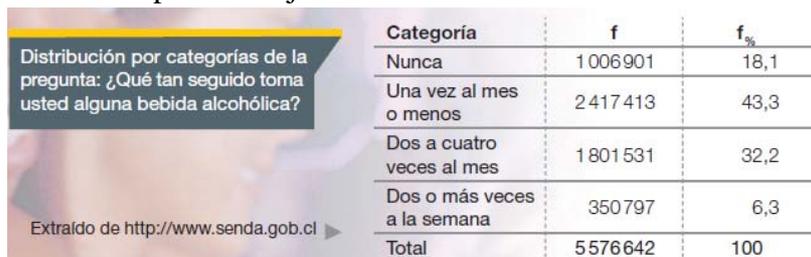
Presión sistólica sanguínea	
Presión (mm Hg)	Cantidad de mujeres
105	14
107	12
125	34
138	40

a. Determina el valor mínimo, los cuartiles y el valor máximo del conjunto de datos.

Figura 3.6.2.1. Ejemplo de actividad de contexto científico ([SM4], p. 331)

Contexto público

Se enmarca a la comunidad local, u otra más amplia, en la que el estudiante se percata de ciertos aspectos sociales de su entorno, también a los que tiene acceso a través de los diferentes medios de comunicación. Por ejemplo, la Figura 3.6.2.2 expone los resultados obtenidos en una encuesta realizada a jóvenes por el SENDA (Servicio Nacional para la Prevención y Rehabilitación del Consumo de Drogas y Alcohol) a la pregunta *¿Qué tan seguida toma usted alguna bebida alcohólica?* La información presentada es de carácter público, y busca sensibilizar a la sociedad sobre la cantidad de alcohol que consume la población joven de Chile.



Categoría	f	f _%
Nunca	1 006 901	18,1
Una vez al mes o menos	2 417 413	43,3
Dos a cuatro veces al mes	1 801 531	32,2
Dos o más veces a la semana	350 797	6,3
Total	5 576 642	100

Figura 3.6.2.2. Ejemplo de actividad de contexto público ([SM1], p. 303)

Contexto educativo

Son las actividades que el estudiante observa en el centro escolar, como las calificaciones obtenidas en una asignatura, o el nivel educativo de un grupo de personas (Figura 3.6.1.5).

Contexto ocupacional o laboral

Son las actividades que se llevan a cabo en un entorno laboral o profesional, en ámbitos como el comercio, construcción, arquitectura, entre otras. Por ejemplo, entre las acciones propias de profesionales de la salud, está el registro de la cantidad de atenciones a pacientes realizadas (Figura 3.6.2.3) en los cinco días de la semana (lunes a viernes).

1. Construye la tabla en cada situación.

- Un médico atendió a 20 pacientes el lunes, a 36 el martes, a 30 el miércoles, a 34 el jueves y a 28 el viernes.

Cantidad de atenciones médicas	
	f
Lunes	
	30

Figura 3.6.2.3. Ejemplo de actividad de contexto ocupacional o laboral ([SM2], p. 128)

Experimento aleatorio

Se incorporó esta categoría, considerada anteriormente por Pallauta (2018), puesto que fueron encontradas muchas actividades en que se propone como contexto, una experiencia aleatoria en que la tabla sirve como medio de registro de los resultados obtenidos. Como se explicó anteriormente, la tabla estadística es una potente herramienta

para desarrollar conceptos fundamentales como el de probabilidad, en su significado frecuencial (Ortiz, 2002).

Se observó una variedad de experimentos como lanzamientos de monedas, dados, chinchetas, extracciones de fichas numeradas o de colores desde una caja. Un ejemplo aparece en la Figura 3.6.1.2 donde se registran las frecuencias absolutas de las caras obtenidas al lanzar un dado cúbico convencional 200 veces.

Sin contexto

Esta última categoría se considera, al igual que Gea (2014), por la relevancia que posee plantear contextos significativos al estudiante en la enseñanza y aprendizaje de la estadística (Weiland, 2019). En la Figura 3.6.2.4, se presenta un ejemplo donde no se ofrece un contexto de la información expuesta, en que, a partir de un diagrama de caja y bigotes de dos muestras, se pide completar la tabla de datos con los cuartiles correspondientes de cada muestra (A y B).

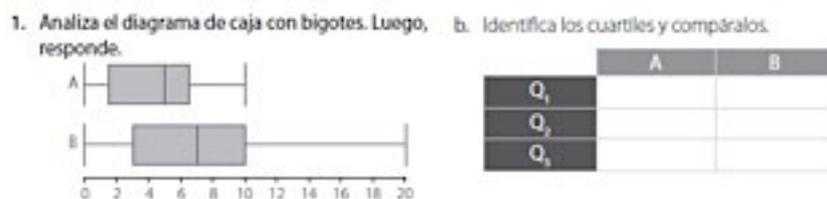


Figura 3.6.2.4. Ejemplo de actividad sin contexto ([SM5], p. 138)

La Tabla 3.6.2.1 y la Figura 3.6.2.5 resumen los resultados del análisis realizado respecto a los contextos propuestos, según curso escolar. Se puede observar, que el contexto con mayor presencia es el personal, seguido del ocupacional y experimento aleatorio. Además, se detectan escasas actividades sin contexto, las cuales aparecen a partir de 7° curso, contrario a lo ocurrido en la investigación de Gea (2014), quien obtuvo entre un 42% y un 66% en la modalidad Científico-Tecnológica y entre un 38% y un 65% en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (a excepción de dos textos de 16 analizados, con entre un 26% y un 23%); o la desarrollada por Sánchez Cobo (1999), quien obtuvo igualmente un alto índice de ejercicios descontextualizados (37,9%); mientras que en García-García et al. (2019) no aparecieron actividades sin contexto.

Tabla 3.6.2.1. Frecuencia (y porcentaje) de contextos por nivel educativo

Contexto	Santillana		SM		Total
	5° EB	6° EB	7° EB	8° EB	
Científico	2(1,4)		23(5,5)	53(16,7)	78(7,9)
Educativo	4(2,9)	13(11,3)	50(12)	33(10,4)	100(10,1)
Experimento aleatorio	16(11,5)	67(58,3)	62(14,8)	14(4,4)	159(16,1)
Ocupacional o laboral	10(7,2)	7(6,1)	69(16,5)	80(25,2)	166(16,8)
Personal	95(68,3)	19(16,5)	129(30,9)	70(22)	313(31,6)
Público	12(8,6)	9(7,8)	74(17,7)	53(16,7)	148(15)
Sin contexto			11(2,6)	15(4,7)	26(2,5)
Total	139	115	418	318	990

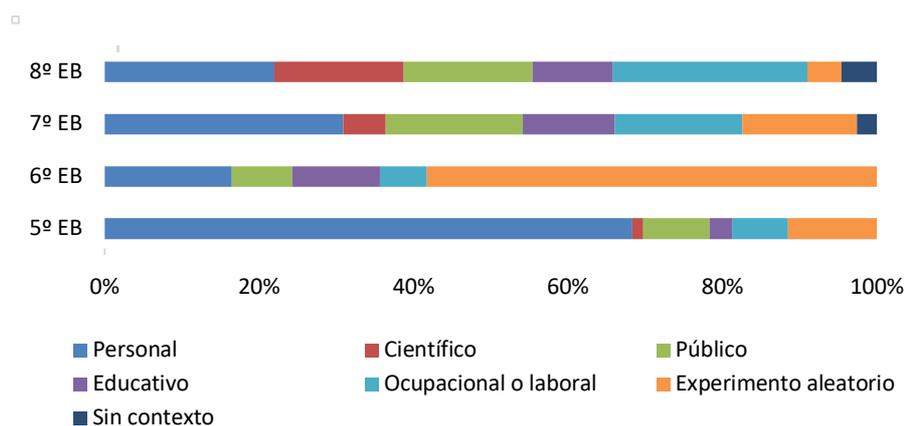


Figura 3.6.2.5. Porcentaje de tablas por contexto y nivel escolar

La diferencia podría explicarse porque las investigaciones de Gea (2014) y Sánchez Cobo (1999) exploran textos dirigidos a Bachillerato, a diferencia de García-García et al. (2019) quienes lo hacen de 1º a 6º curso de Educación Primaria, ya que en nuestra investigación aparecen las actividades sin contexto en los cursos finales de Educación Básica (7º y 8º curso). Aun así, es preocupante en cuanto al desarrollo del pensamiento estadístico puesto que, como expone Wild y Pfannkuch (1999), debe existir un equilibrio entre el contexto de una situación-problema y la estadística que se aplica para resolver dicha situación con el propósito de vincular los conceptos estadísticos con la realidad (Gattuso y Ottaviani, 2011).

La mayor diferencia es en 5º curso donde hay un gran predominio del contexto personal, mientras que, en 6º curso el de experimento aleatorio, debido a que en dicho nivel educativo se introduce el tema de probabilidad, para el cual se utilizan una gran cantidad de tablas estadísticas.

3.7. RESULTADOS DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA TABLA ESTADÍSTICA EN LOS TEXTOS

El análisis realizado a las bases curriculares chilenas (MINEDUC, 2015; 2018), complementado con directrices internacionales (Franklin et al., 2005; NCTM, 2014), además de la revisión de los antecedentes, y los textos escolares chilenos abordados, ha permitido clasificar teóricamente las principales situaciones-problemas en que se enmarca el estudio de la tabla estadística, en los niveles educativos estudiados. Producto de este trabajo, se ha distinguido cuatro grupos de tipos de situaciones-problemas, algunos de los cuales han sido subdivididos, y se detallan a continuación, junto a los resultados encontrados.

3.7.1. SITUACIONES-PROBLEMAS EN TORNO A LA TABLA ESTADÍSTICA

Las situaciones-problemas que se describen tienen como propósito, no sólo la interpretación o construcción de la tabla estadística, sino que también se conforman en un medio para el estudio de diferentes objetos matemáticos, como las medidas de centralización o posición, los que a continuación pasamos a detallar.

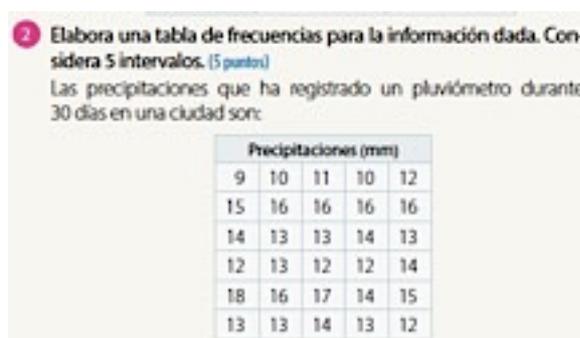
SP1. Registro y organización de los datos

La organización de la información es el primer paso en el estudio de los datos, y conlleva el registro de los mismos. Se produce cuando se recogen datos con algún propósito y es necesario organizarlos para interpretarlos. Estrella (2014) indica que se trata de una práctica muy antigua y se ha encontrado en diferentes civilizaciones. Este tipo de situación-problema se presenta al plantear un listado de datos, o cuando se pide construirlo a partir de la recogida de información, que se puede obtener por medio de distintas técnicas y, así, los datos pertenecer tanto a diferentes escalas de medida como a diferente tipo de variables estadísticas (Batanero y Godino, 2001).

SP2. Construcción de la distribución de una variable estadística

Surge de la necesidad de resumir un listado de datos, e implica la acción de organizar clases en dicho conjunto de datos. Generalmente, están asociados a una variable estadística unidimensional y se resumen por medio de una tabla en que se representan una o varios tipos de frecuencias (ordinarias o acumuladas).

En ocasiones, dependiendo de la extensión del listado de datos, es necesario distribuir las modalidades de la variable en intervalos de clase, como se aprecia en Figura 3.7.1.1, que es una actividad propuesta para estudiantes de 8º curso (13 años), en que a partir de un listado de datos deben construir una tabla con datos agrupados en cinco intervalos.



2. Elabora una tabla de frecuencias para la información dada. Considera 5 intervalos. (5 puntos)

Las precipitaciones que ha registrado un pluviómetro durante 30 días en una ciudad son:

Precipitaciones (mm)				
9	10	11	10	12
15	16	16	16	16
14	13	13	14	13
12	13	12	12	14
18	16	17	14	15
13	13	14	13	12

Figura 3.7.1.1. Tarea de construcción de tabla ([SM4], p. 312)

SP3. Traducción entre representaciones

Una parte importante de la comprensión estadística, implica la capacidad de traducir entre diferentes tipos de representaciones en las que intervienen procesos de transnumeración, descritos por Wild y Pfannkuch (1999). Esta actividad se encuentra presente en los análisis estadísticos, y se genera cuando se cambia la forma de presentar los datos, con el objeto de obtener un nuevo significado.

La transnumeración, es un proceso dinámico que implica el cambio de representaciones, por medio del surgimiento de nuevas variables que son representadas como una nueva entidad, o bien de la determinación de resúmenes estadísticos. Esta transformación promueve una comprensión profunda de los datos, por lo que se conforma en una componente esencial del razonamiento estadístico (Chick et al., 2005).

Este tipo de situación-problema lo dividimos en cuatro categorías, para diferenciar cada uno de los procesos de traducción vinculados a la tabla estadística.

SP3.1. Traducción de tabla a gráfico, o viceversa. Este proceso implica la

representación de la información expuesta en un gráfico de cualquier tipo (barras, circular, diagramas de cajas o tallo y hojas) en una tabla estadística, o el proceso inverso.

La Figura 3.6.2.4, es un ejemplo en que, a partir de un diagrama de cajas, el estudiante debe traducir esta información a una tabla de datos. Esta tarea requiere un conocimiento del gráfico que se trate, así como de la estructura de la tabla, e implica leer el gráfico para identificar los elementos de la tabla. Generalmente, se necesita algún cálculo de totales.

SP3.2. Traducción de tabla a tabla. En este tipo de traducción se pasa la información de una tabla a otro tipo de tabla. Por ejemplo, de una tabla de datos a una de frecuencias, o bien a partir de una tabla de distribución de frecuencias de una variable unidimensional o bidimensional a otra, por ejemplo, al incluir frecuencias en datos agrupados. En consecuencia, requiere de procesos de clasificación de datos, ordenación, agrupamiento y recuento. Como se muestra en la Figura 3.7.1.2 se debe pasar la información de una tabla de contingencia a una de datos, con el propósito de facilitar el cálculo de probabilidades asociadas a diferentes sucesos.

5. Resuelve los siguientes problemas.

- a. La tabla resume la edad y el sexo de las personas que trabajan en una oficina. Si se decide realizar el experimento aleatorio de "elegir al azar una persona de la oficina", ¿cuál sería el espacio muestral del experimento?

Personal de una oficina			
Sexo	Edad (años)		
	25 o menos	Entre 26 y 32	32 o más
Femenino	2	3	2
Masculino	1	4	5

- Para el experimento se definieron los siguientes sucesos:

Suceso A	Casos favorables
Elegir una mujer	
Elegir un hombre de menos de 26 años	
Elegir una persona entre 26 y 32 años	
Elegir un hombre de 32 años o más.	

Completa la tabla con los casos favorables a cada suceso.

Figura 3.7.1.2. Tarea de traducción de tabla a tabla ([SM2], p. 149)

SP3.3. Traducción de texto a tabla, o viceversa. Este tipo de traducción implica llevar la información suministrada de modo verbal a una tabla de frecuencias, con el propósito de facilitar cálculos y el análisis de los datos presentados a modo de texto, como por ejemplo en la Figura 3.7.1.3, que se presenta un párrafo, y se sugiere la estrategia de resolución de confeccionar una tabla para representar la información entregada verbalmente, para responder a las preguntas planteadas.

Estrategia: Hacer una tabla

Para resolver problemas que tienen varios datos, se puede organizar la información en una tabla con el propósito de facilitar los cálculos y el análisis de los resultados.

- c. Un instituto de recreación indagó sobre las edades de los niños que asisten a sus programas, y estableció que hay 20 niños de 5 años, 17 de 6, 13 de 8, 15 de 10 y 20 de 12 años. ¿De qué edad asisten la mayor cantidad de niños? ¿Qué porcentaje de niños asisten de 10 años de edad? ¿Qué porcentaje de niños que asisten tiene la mayor edad? ¿Cuántos niños asisten hasta los 10 años de edad?

Figura 3.7.1.3. Traducción de verbal a tabla ([SM2], p. 134)

SP3.4 Traducción de tabla a resumen estadístico, o viceversa, cuando se pide completar una tabla de datos, ya sea con información de algún estadístico en particular (media) o información que involucra la realización de cálculos con datos presentados en una tabla, así como solicitar calcular un resumen estadístico en particular. En este subtipo de situación-problema se consideran tareas como establecer el porcentaje correspondiente a una determinada modalidad de la variable, la probabilidad de algún suceso en un experimento aleatorio, calcular medidas de tendencia central, dispersión (rango), o de posición, como la mostrada en la Figura 3.6.1.4 en que se pide determinar percentiles.

SP4. Clasificación cruzada de dos variables

La tabla de contingencia permite organizar la distribución de frecuencias de una variable estadística bidimensional, mediante tantas filas y columnas como modalidades presenten las variables que la conforman. En cada cruce de modalidades de las respectivas variables, se representa la frecuencia conjunta (absoluta, relativa o porcentual) de un valor de cada variable. Así mismo, destacamos la importancia de la tabla de doble entrada en el estudio de la asociación entre variables estadísticas bidimensionales (Ver Figura 3.6.1.5). Al igual que Gea et al. (2013) este tipo de situación-problema se ha subclasificado en tres tipos:

SP4.1. Organización de la información de un conjunto de datos bivariados. Se conforma en un aspecto importante en el estudio de la probabilidad (Batanero et al., 2015), o posteriormente en temas como la correlación y regresión (Gea et al., 2013). Correspondería al ejemplo mostrado en la Figura 3.7.1.2, donde para responder a la tarea planteada se requiere completar la construcción de la tabla de datos agregando los totales a la tabla de contingencia para facilitar los cálculos pedidos.

SP4.2. Análisis de las variables que conforman la variable estadística bidimensional. Cuando se analiza la variable estadística bidimensional es necesario delimitar cada una de las variables que la constituyen, como, por ejemplo, la situación-problema que se muestra en la Figura 3.7.1.3, donde el estudiante posterior a describir las variables debe construir un gráfico apropiado para representar la información presentada en la tabla. En esta categoría, se considera el análisis descriptivo de cada variable, los pasos requeridos para completar una tabla de doble entrada conocidas las medias marginales, así como el análisis de la dependencia funcional o estadística de las variables, su intensidad y sentido (Gea, 2014).

Define la variable en estudio en cada tabla y representa en un gráfico adecuado de acuerdo al tipo de variable.

a. Tabla 1: Número de funciones realizadas por un grupo de teatro en Chile, Brasil y Argentina entre el 2010 y 2012.

	2010	2011	2012
Chile	5	7	3
Brasil	1	4	2
Argentina	10	8	7

Figura 3.7.1.3. Análisis de las variables en una tabla de contingencia ([SM1], p. 361)

SP4.3. Estudio de la asociación entre las variables que conforman la tabla. Este tipo de situación-problema persigue completar el análisis de la dependencia de las variables y, en el caso que existiera dependencia intensa, establecer un modelo de ajuste con fin predictivo (Gea, 2014). Dado el nivel educativo al que se dirige nuestro estudio, no fue posible encontrar ejemplos en los textos analizados.

En la Tabla 3.7.1.1 y Figura 3.7.1.4 se resume el análisis realizado a las situaciones-problemas por nivel educativo. Se observan escasas situaciones-problemas de tipo SP4, ligadas al estudio de la tabla de contingencia, específicamente percibimos la ausencia de SP4.3 centrada en el estudio de la regresión entre las variables expuestas en una tabla de contingencia, lo cual era esperable, dado que este contenido no se encuentra presente en las bases curriculares chilenas (MINEDUC, 2015; 2018) para los niveles educativos explorados.

Por otra parte, detectamos que SP3.4 es la situación-problema que aparece con mayor fuerza en todos los niveles educativos, asociada al cálculo a partir de una tabla estadística, le sigue SP2 centrada en la construcción de tablas de frecuencias de variable estadística unidimensional, aunque el peso preferente es en 6° y 7° curso.

Tabla 3.7.1.1. Frecuencia (y porcentaje) de las situaciones-problemas por nivel educativo

Situaciones- problemas	Santillana		SM		Total
	5° EB	6° EB	7° EB	8° EB	
SP1	20(14,4)	8(7)	39(9,3)	54(17)	121(12,2)
SP2	16(11,5)	35(30,4)	121(28,9)	56(17,6)	228(23)
SP3					
SP3.1	19(13,7)	25(21,6)	41(9,8)	68(21,4)	153(15,5)
SP3.2	4(2,9)		2(0,5)	1(0,3)	7(0,7)
SP3.3			12(2,9)	2(0,6)	14(1,4)
SP3.4	42(30,2)	41(35,6)	186(44,5)	124(39)	393(39,7)
SP4					
SP4.1	37(26,6)	5(4,5)	14(3,3)	13(4,1)	69(7)
SP4.2	1(0,7)	1(0,9)	3(0,7)		5(0,5)
Total	139	115	418	318	990

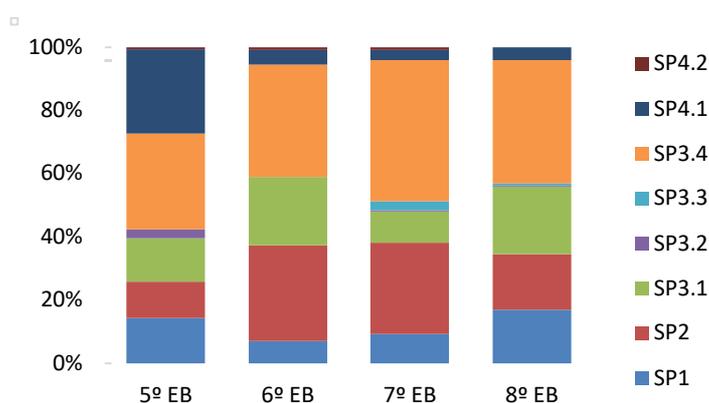


Figura 3.7.1.4. Situaciones-problemas en cada nivel escolar

En cuanto al tipo de traducción cabe destacar, también, la representatividad de la situación-problema SP3.1, la que se corresponde con pasar de un gráfico a una tabla, o viceversa, mientras que la que menos aparece es SP3.2 traducción de un tipo de tabla a

otra. Llama la atención, la nula presencia de SP3.3 en los niveles de 5° y 6° y la alta representatividad de SP4.1 en 5° curso, siendo muy escasa su presencia en el resto.

3.7.2. PROCEDIMIENTOS CON TABLAS ESTADÍSTICAS

Los procedimientos se refieren a los algoritmos o estrategias que se aplican en una tabla, y permiten operar con los datos para poder resolver una situación-problema. En este análisis fueron clasificados los diferentes tipos propuestos en los textos, los cuales son descritos a continuación, acompañados de algunos ejemplos.

P1. Leer una tabla

Consiste en extraer información desde una tabla estadística, bien se solicite de manera explícita o implícita en la situación-problema, que puede involucrar, en algunos casos, establecer relaciones numéricas entre los datos representados en la propia tabla, o cálculos estadísticos, tales como calcular los valores mínimos. Para la apropiada lectura de la tabla, el estudiante requiere conocer el tipo de tabla que se presenta (por ejemplo, si la tabla es de doble entrada, tabla de datos, etc.), y con ello diferenciar las variables de las frecuencias; además, es necesario entender los convenios de construcción de la tabla en cuestión como, identificar el título, su orientación (horizontal o vertical), etiquetas, entre otros. Un ejemplo de este tipo de actividad se muestra en la Figura 3.6.1.6, en la que se pide determinar si una serie de afirmaciones son verdaderas o falsas a partir de la información expuesta en una tabla. Más adelante se profundizará en los diferentes niveles de lectura implicados en las actividades propuestas.

P2. Completar una tabla

Este proceso se caracteriza por terminar una tabla incompleta, generalmente, incorporando los valores que toman las frecuencias, o información verbal suministrada en el enunciado de la situación-problema. Este procedimiento, suele venir asociado, la mayor parte de las veces, a responder a cuestiones en torno a su lectura. Un ejemplo se muestra en la Figura 3.6.1.2, en que el estudiante, en un contexto de experimento aleatorio, debe completar los valores de la frecuencia relativa de cada una de las modalidades de la variable.

P3. Construir la tabla

Consiste en representar un conjunto de datos desorganizados en una tabla de frecuencias, o de contingencia. Dichos datos pueden ser entregados a través de diferentes formatos, como gráfico, simbólico y verbal o tabular, y en otros casos recolectados por el propio estudiante. La actividad de la Figura 3.7.1.1 muestra el registro de mm caídos de precipitaciones durante 30 días, y el estudiante debe construir una tabla de frecuencias con datos agrupados en cinco intervalos. Para llevar a cabo la tarea se requiere conocer conceptos como: máximo, mínimo, extremo superior e inferior y marca de clase.

P4. Calcular estadísticos a partir de la tabla

En esta categoría se consideran los cálculos con datos proporcionados en una

tabla, tales como: calcular el porcentaje de una determinada modalidad de la variable, la probabilidad de algún suceso de un experimento aleatorio, medidas de tendencia central (media y mediana), dispersión (rango), o de posición (cuartiles, percentiles y deciles). Por ejemplo, en la Figura 3.6.2.1 conocida la presión sistólica sanguínea marcada por un grupo de mujeres antes de realizar actividad física, se pide identificar el mínimo, máximo, y calcular los cuartiles.

También se incluye en esta categoría las tareas que requieren ordenar los datos de acuerdo a algún criterio, como puede ser de menor a mayor frecuencia, o viceversa. A pesar de que en investigaciones previas (Estrella y Olfos, 2015) han considerado “ordenar” como categoría única, en este análisis es escaso este tipo de procedimiento y se ha presentado solo en 5° y 6° curso, alcanzando apenas dos actividades en total.

P5. Construir un gráfico

Corresponde al proceso de representar gráficamente la información entregada en una tabla estadística o viceversa. Un ejemplo sería, conocido los puntos anotados por un equipo en 8 juegos de básquetbol (Figura 3.7.2.1), representar esta información en un diagrama de tallo y hojas. En ocasiones, el propio estudiante debe decidir el tipo de gráfico más apropiado para representar la información expuesta en una tabla estadística.

La tabla muestra el puntaje que un equipo de un colegio anotó en ocho juegos de básquetbol en una temporada.

Puntaje anotado por un equipo de básquetbol								
Juego	1	2	3	4	5	6	7	8
Puntaje	50	62	60	68	60	72	56	76

a. Haz un diagrama de tallo y hojas para mostrar los datos.



Figura 3.7.2.1. Ejemplo de traducir de tabla a gráfico ([S2], p. 148)

P6. Describir variables

Es un tipo de procedimiento, en que el estudiante debe identificar y describir el tipo de variables correspondientes a la información expuesta en una tabla estadística, como en la Figura 3.7.1.3 en que se pide al estudiante identificar las variables unidimensionales representadas en la tabla de doble entrada. Este tipo de actividad se encontró en todos los textos analizados, pero tiene una mayor presencia en los cursos finales de Educación Básica (7° y 8°).

Este proceso de comunicación es importante en el estudio de la estadística, pues permite, establecer la factibilidad de calcular medidas de tendencia central, de posición, o también en el caso de las tablas de contingencia, en el análisis de la dependencia funcional, su intensidad y sentido (Gea, 2014).

P7. Inventar un problema o tabla

Implica la creación de un contexto, para que la información entregada, a través de una tabla, cobre sentido y coherencia. También se incluyó en esta categoría el inventar tablas que representen distribuciones de una variable conocido algunos estadísticos como de tendencia central, máximo, mínimo, o el rango (Figura 3.7.2.3).

10. Crea una tabla de frecuencia con un conjunto de 10 números que cumplan las siguientes condiciones:

- La media es 45, el valor mínimo es 10, el rango es 90 y la media debe ser mayor que la mediana.

Figura 3.7.2.3. Ejemplo de inventar ([SM1], p. 323)

P8. Recoger datos

Consiste en la recolección de datos por el propio estudiante, por ejemplo, averiguar la cantidad de mascotas de los compañeros de clase, sus deportes favoritos, o el medio de transporte que utilizan para llegar al colegio (Figura 3.7.2.4), así como el registro de valores obtenidos en la realización de experiencias aleatorias como lanzar un dado una cierta cantidad de veces. Esta acción, generalmente, es una etapa previa a la construcción de una tabla de frecuencias, pero requiere de acciones que la distinguen de la mera construcción de la tabla en la que los datos ya vienen dados. En este tipo de procedimiento, conforme aumenta el curso escolar, el estudiante debe plantearse la situación de estudio y elaborar preguntas pertinentes para responderla.

Paso 1 Junto con un compañero o una compañera pregunten a sus compañeros en qué medio de transporte llegan al colegio. Registren sus respuestas en la siguiente tabla de conteo.

¿Cómo llegas al colegio?	
Medio de transporte	Conteo
Caminando	
Transporte público	
Automóvil	
Bicicleta	

Paso 2 Cuenten las marcas del conteo y representen los datos en una tabla.

Figura 3.7.2.4. Ejemplo de recoger datos ([S1], p. 281)

P9. Argumentar

Se asocia a la acción de justificar decisiones, procedimientos, etc. en torno a la tabla estadística; por ejemplo, argumentar qué tipo de gráfico es más apropiado para representar la información expuesta en una tabla estadística (Figura 3.6.1.1). También, en contextos de experimentos aleatorios, se pide argumentar respecto a los datos representados en una tabla, como la relación entre las frecuencias relativas y la probabilidad de un suceso.

En la Tabla 3.7.2.1 y la Figura 3.7.2.5 se presenta el resumen con el tipo de procedimiento que debe realizar el estudiante, según nivel educativo. Se observa que la

mayoría de los procedimientos se corresponden a P4, que corresponde a cálculos a realizar con información que proporciona la tabla estadística, seguidamente viene P1, asociada a procedimientos de lectura, luego P5 enmarcada en procedimientos de construcción de gráficos.

Tabla 3.7.2.1. Frecuencia (y porcentaje) de los procedimientos por nivel educativo

Procedimientos	Santillana		SM		Total
	5° EB	6° EB	7° EB	8° EB	
P1. Leer tabla	50(36)	31(27)	79(18,9)	59(18,6)	219(22,1)
P2. Completar tabla	11(7,9)	5(4,3)	22(5,3)	6(1,9)	44(4,4)
P3. Construir tabla	15(10,8)	9(7,8)	64(15,3)	24(7,5)	112(11,3)
P4. Calcular	38(27,3)	31(27)	166(39,7)	124(39)	359(36,3)
P5. Construir gráfico	14(10,1)	24(20,9)	22(5,3)	55(17,3)	115(11,6)
P6. Describir variables	1(0,7)	1(0,9)	15(3,6)	5(1,6)	22(2,2)
P7. Inventar	2(1,4)	1(0,9)	5(1,2)	3(0,9)	11(1,1)
P8. Recoger datos	6(4,3)	6(5,2)	5(1,2)	3(0,9)	20(2)
P9. Justificar	2(1,4)	7(6,1)	40(9,6)	39(12,3)	88(8,9)
Total	139	115	418	318	990

Por curso se aprecia que en 7° y 8° lidera el procedimiento P4, mientras que en 5° y 6° curso los textos priorizan la lectura de la tabla con mayor fuerza, procedimientos ligados a la justificación (P9) se van incrementando de manera progresiva conforme se avanza de nivel educativo.

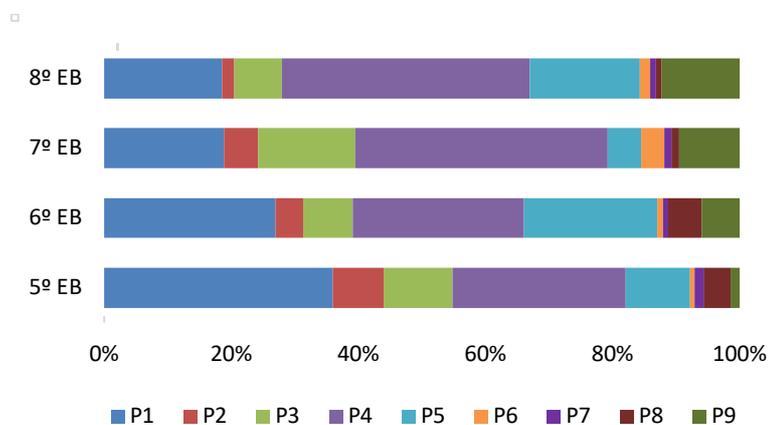


Figura 3.7.2.5. Procedimientos por nivel educativo

A diferencia de Bivar y Selva (2011) o Guimarães et al. (2007), se aprecia la demanda de bastantes procedimientos de construcción, especialmente de gráficos con la información proporcionada a través de una tabla estadística. Por otra parte, procedimientos como completar tabla (P2), en nuestro caso tienen un bajo porcentaje, contrario a lo encontrado en los textos brasileños de los citados estudios.

En general, los resultados son similares a los presentados por Díaz-Levicoy et al. (2015; 2017) y García-García et al. (2019), aunque dichos trabajos se dirigen a niveles inferiores. Al igual que en las citadas investigaciones, se observan escasos

procedimientos del tipo P6, P7 y P8 (inferior al 2%), este último enmarcado en la recolección de datos por parte del estudiante. Este hecho no concuerda con las diferentes recomendaciones curriculares (CCSSI, 2010; Franklin et al., 2005; NCTM, 2014), que destacan la importancia de la recolección y análisis de los datos para el desarrollo del razonamiento estadístico.

3.7.3. EL LENGUAJE UTILIZADO EN LAS TABLAS

Otro aspecto analizado es el uso del lenguaje matemático en las tablas estadísticas, el que fue clasificado en el Capítulo 1 en: simbólico, verbal, numérico y diagramático (este último referido a la propia tabla, que por tanto aparece en todas ellas y no se analiza en este capítulo). En el EOS (Godino et al., 2007; 2019), el lenguaje tiene un rol importante, puesto que es considerado un mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, gracias a su carácter representacional y operativo.

En esta línea, coincidimos con Schleppegrell (2007) en el sentido de que el empleo de una variedad de lenguajes por parte del estudiante, como el verbal, símbolos, expresiones algebraicas, representaciones gráficas y tablas, se conforma en uno de los principales desafíos en la enseñanza de la matemática.

En los textos escolares analizados, se identificaron variados lenguajes, el cual es aplicable a todos los tipos de tablas.

Lenguaje verbal

Este tipo de lenguaje está presente en todos los libros en el título de las tablas, modalidades de la variable (cuando es cualitativa), las etiquetas señalando el tipo de frecuencias (e.g. absolutas, relativas, porcentajes) o totales. También incluye palabras que hacen referencia a las magnitudes representadas (por ejemplo, precios, alturas, distancias, etc.). Un ejemplo de esto lo encontramos en la Figura 3.6.2.1, en que las etiquetas de la tabla se detallan por medio del lenguaje verbal, que, en los primeros niveles educativos, puede ayudar al estudiante a una mejor comprensión de la información expuesta en la tabla (Zahner y Aquino-Sterling, 2020). En el Capítulo 1, se expuso en la Tabla 1.5.3.1 la amplia variedad de expresiones y términos utilizados en los textos en las tablas estadísticas.

Lenguaje simbólico

Igualmente, en el Capítulo 1 en la Tabla 1.5.3.2 se referencia los variados símbolos utilizados en las tablas estadísticas, que ahora son detallados por curso escolar en la Tabla 3.7.3.1. La presencia de este tipo de lenguaje depende de varios factores, entre ellos del tipo de tabla o nivel educativo. Pueden aparecer símbolos matemáticos en las etiquetas de los márgenes, filas superiores, inferiores, primera columna y última columna. En estos espacios aparecen símbolos, por ejemplo: x_i (valor de una variable X); n_i (frecuencia absoluta); f_i (frecuencia relativa), y operaciones como \sum (sumatorio, con o sin subíndices).

Tabla 3.7.3.1. Tipos de símbolos y operaciones presentes en las tablas estadísticas

Notación	Concepto representado	Santillana		SM	
		5° EB	6° EB	7° EB	8° EB
=, %	Igualdad, porcentaje	x	x	x	x
[...], (...]	Intervalos				x
Σ	Sumatorio sin subíndices				
N, n	Número total de observaciones			x	
x_i ; n_i , f_i	Valor de la variable X; frecuencia absoluta y relativa			x	
\bar{x}	Media	x	x	x	
N_i ; F_i	Frecuencia absoluta y relativa acumulada			x	
M_e , M_o	Mediana y moda			x	
Q_n , P_n , D_n	Cuartiles, percentiles y deciles				x

En la Tabla 3.7.3.1 se puede apreciar los símbolos presentes en las tablas de los textos analizados. Se aprecia que los símbolos empleados en 5° y 6° curso son escasos y se centran, principalmente, en operadores (=, %) y el símbolo que representa a la media aritmética (\bar{x}). Conforme se avanza de curso van apareciendo nuevos símbolos en las situaciones-problema que implican tablas estadísticas, siendo los textos escolares de 7° curso los que presentan una mayor riqueza, esto no se replica en 8° curso a pesar de que aparecen símbolos no considerados en el curso anterior (7° curso), como el de intervalos; sin embargo, se dejan de utilizar los empleados para representar los diferentes tipos de frecuencias. Como señala Godino (2002), el lenguaje simbólico ocupa un lugar importante en la articulación de los diferentes componentes que intervienen en la resolución de una situación-problema; por lo tanto, se esperaría que este se vaya incrementando conforme se progresa de curso escolar, con la idea de robustecer el significado de la tabla estadística y su construcción (Planas et al., 2018).

Lenguaje numérico

En el cuerpo de datos aparecen diferentes tipos de números como enteros y racionales (decimales, fraccionarios, porcentajes), pues en ocasiones en la celda puede aparecer más de un tipo de número. En la tabla expuesta en la Figura 3.7.3.1 se puede apreciar en el cuerpo diferentes tipos de números, como enteros para la frecuencia absoluta (f), decimales para la frecuencia relativa (f_{rel}), y porcentajes en la frecuencia relativa porcentual ($f_{\%}$).

Paso 3 Calcula la frecuencia relativa y ordena los datos en la tabla:

Sexo	f	f_{rel}	$f_{\%}$
M	21	0,53	53%
H	19	0,47	47%

Figura 3.7.3.1. Lenguaje numérico en la tabla estadística [SM1], p. 294)

3.8. PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD

Este estudio se interesa, también, por la finalidad de la actividad que se plantea al estudiante en los textos escolares analizados. Siguiendo a Ortiz (2002), se diferencié entre ejemplos y ejercicios, considerando los ejercicios como un caso particular de una situación-problema. Gea (2014) aplica esta distinción en su investigación en libros de texto, basándose en la clasificación establecida por Ortiz (2002), considerando como ejemplo a las situaciones en que se muestra el significado de conceptos introducidos de manera teórica, mientras que los ejercicios se entienden como aquellas actividades que, resueltas o no, son presentadas al estudiante para conseguir, o reforzar, el aprendizaje de un objeto matemático. La distribución de este tipo de situaciones, por curso, son resumidas en la Tabla 3.8.1.

Tabla 3.8.1. Frecuencia (y porcentaje) de tipo de actividad según nivel educativo

Propósito de la actividad	Santillana		SM		Total
	5° EB	6° EB	7° EB	8° EB	
Ejemplo	2(1,4)	4(3,5)	18(4,3)	10(3,1)	34(3,4)
Ejercicio Propuesto	127 (91,3)	108(93,9)	388(92,8)	292(91,8)	915(92,4)
Resuelto	10 (7,2)	3(2,6)	12(10,4)	16(5)	41(4,1)
Total	139	115	418	318	990

Es posible observar la poca presencia de ejemplos o ejercicios resueltos en los textos analizados, alcanzando sólo un 7,5% del total, reflejando que, en la totalidad de los cursos, el tipo de actividad se concentra en ejercicios a resolver por el estudiante.

3.9. NIVEL DE LECTURA

En el análisis de las actividades es posible diferenciar el nivel de lectura pedido al estudiante, siguiendo la categorización establecida por Curcio (1989) y ampliada por Friel et al. (2001) sobre la lectura de gráficos estadísticos, independientemente de la actividad requerida (calcular, leer, argumentar, etc.). Siguiendo a estos autores se distinguen cuatro niveles de lectura, descritos en el Capítulo 1, los cuales son factibles de aplicar para el caso de las tablas (Castellaro y Roselli, 2020; Gabucio et al., 2010) y cuya presencia en nuestro estudio se describe a continuación.

N1. Leer los datos

Implica una lectura literal de la tabla, es decir, la lectura de los datos se ajusta a lo mostrado explícitamente en la tabla como leer una frecuencia para un valor determinado de la variable, o al contrario. Por ejemplo, en la Figura 3.8.1 el estudiante debe identificar las frecuencias relativas correspondientes a dos modalidades de la variable (verde y amarillo), responder a esta tarea requiere una lectura literal de la tabla. En este nivel de lectura no se precisa realizar operaciones o comparaciones entre valores.

Observa la siguiente tabla y luego realiza las actividades.

Color obtenido		
Resultado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Rojo	30	$\frac{30}{100}$
Verde	50	$\frac{50}{100}$
Amarillo	20	$\frac{20}{100}$
Total	100	1

a. ¿Cuál es la frecuencia relativa del evento correspondiente al color verde? ¿Y al amarillo?

Figura 3.9.1. Ejemplo de actividad Leer datos ([S4], p. 252)

N2. Leer dentro de los datos

Consiste en el uso de la información que se hace explícita en la tabla, para comparar datos presentados a través de ella, o aplicar cálculos sencillos para obtener información que no se encuentra, directamente, disponible en ella. Se requiere de este nivel, por ejemplo, para determinar la media de una distribución, pues es necesario realizar cálculos a través de las frecuencias de los valores que toma la variable.

La Figura 3.6.1.6, muestra una tabla que resume las preferencias de comida de un grupo de personas de diferente edad, la tarea solicita determinar la veracidad de una serie de afirmaciones. En algunos casos, para poder responder, el estudiante necesita dejar fija una determinada modalidad de la variable edad y comparar las frecuencias absolutas de las diferentes modalidades de la segunda variable, en este caso, comida favorita.

N3. Leer más allá de los datos

Implica una mayor capacidad de lectura de la tabla estadística, puesto que precisa poder inferir información que no es reflejada, ni es posible extraer de manera aritmética. Para alcanzar este nivel de lectura, es necesario integrar la información de la representación tabular en su contexto, para extrapolar o interpolar un valor no dado en la tabla. Un ejemplo sería, conocido los valores obtenidos en 5.000 extracciones, desde una caja con fichas numeradas del 1 al 10 (Figura 3.8.2), extrapolar esta información y razonar a qué valor deberían tender las frecuencias relativas, si se aumentase a 100.000 las extracciones.

7. Completa la tabla sabiendo que se realizaron 5000 extracciones de una ficha desde una urna con 10 fichas numeradas desde el 1 al 10.

5000 extracciones										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	490	513	501	491	508	506	493	498	502	498
f_{rel}										

b. Si se aumentan las extracciones a 100 000, ¿a qué valor debería tender cada probabilidad frecuencial? ¿Por qué?

Figura 3.9.2. Ejemplo de actividad Leer más allá de los datos ([SM1], p. 346)

N4. Leer detrás de los datos

Se corresponde con el mayor nivel de lectura de una tabla estadística, que involucra realizar una valoración crítica, alusiva al contenido de la tabla, las fuentes de las cuales se ha extraído la información de la misma, además de relacionar dicha información con el contexto en que es planteada.

A partir de la tabla responde las preguntas.

	Galletas tradicio- nales (100 g)	Galletas saladas (100 g)
Calorías	436 kcal	464 kcal
Hidratos de carbono	74 g	75,8 g
Grasas	14,5 g	13,1 g
Proteínas	7 g	10,8 g
Fibra	3 g	3 g

- ¿Cuál de las galletas escogerías y por qué?
- ¿Te sirve esta información? ¿Por qué?
- ¿Qué pasaría si desconocieras esta información o no supieras interpretarla?

Figura 3.9.3. Ejemplo de actividad Leer detrás de los datos ([SM3], p.140)

La presencia de este nivel de lectura en los textos analizados es simbólica, y no se asocia con el curso escolar, puesto que se encontraron solo tres tareas que requieren este nivel de lectura (Tabla 3.9.1), una de ellas dirigida a 7° curso (Figura 3.9.4), en la que se plantea decidir cuál de dos tipos de galletas (tradicionales y saladas) es conveniente elegir, conocida su composición. La siguiente pregunta, en la misma actividad, aborda el sentido crítico al consultar si la información es útil, en el cotidiano, además de las consecuencias de desconocer esta información, o carecer de herramientas para su interpretación.

La Tabla 3.9.1 y en la Figura 3.9.4 resumen los resultados obtenidos en el análisis, por curso escolar, sobre el nivel de lectura requerido por el estudiante en las tareas propuestas, donde podemos observar que los mayores niveles de lectura, como leer detrás de los datos (N3), junto con leer más allá de los datos (N4), tienen una presencia escasa respecto al total de tareas analizadas; mientras que la lectura literal de información, como leer dentro de los datos (N2) abarca la mayor parte del total de las tareas.

Tabla 3.9.1. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura por curso escolar

Niveles de lectura	Santillana		SM		Total
	5° EB	6° EB	7° EB	8° EB	
N1. Leer los datos	29(20,9)	21(18,3)	75(17,9)	67(21,1)	192(19,4)
N2. Leer dentro de los datos	106(76,3)	88(76,5)	322(77)	250(78,6)	766(77,4)
N3. Leer más allá de los datos	4(2,9)	6(5,2)	18(4,3)	1(0,3)	29(2,9)
N4. Leer detrás de los datos			3(0,7)		3(0,3)
Total	139	115	418	318	990

Se aprecia que solo en 7° curso se incorporan los cuatro niveles de lectura, aunque los más sofisticados aparecen de manera muy somera. A pesar de que, si bien los niveles leer más allá de los datos y leer detrás de los datos son más complejos, deben tener mayor presencia en los diferentes textos, dado que son habilidades necesarias para comprender, interpretar e inferir respecto a la información presentada. Estos resultados coinciden con García-García et al. (2019) en que la mayor parte de las actividades implicaban el nivel N2 de lectura, aunque en dicho estudio el nivel N3 no fue detectado, y N4 solo fue

detectado en los libros de texto de una editorial de las analizadas.

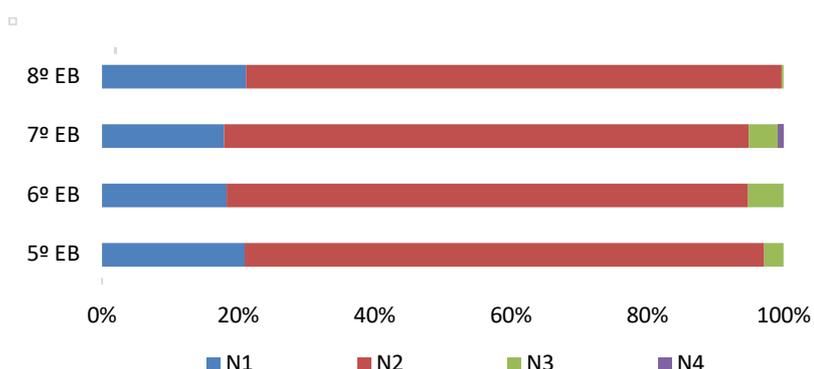


Figura 3.9.4. Niveles de lectura por curso escolar

3.10. USO DE LA TECNOLOGÍA

En la literatura de investigación, se ha destacado la importancia de proponer al estudiante situaciones que involucran el uso de recursos tecnológicos, para promover el aprendizaje de la estadística, entre ellos, la hoja de cálculo Excel, calculadoras, applets, software dinámicos y estadísticos. Hoy en día, existe una gran variedad de recursos tecnológicos, que pueden facilitar la realización de cálculos y gráficos (Pratt et al., 2011). Además, se han llevado a cabo estudios con el propósito de indagar el conocimiento que los profesores, de diferentes niveles educativos, poseen al respecto (Gea et al., 2018). Lee et al. (2014) manifiestan que el uso de software es una ventajosa herramienta en tareas de transnumeración, ya que potencia el análisis de los datos y responde a problemas que involucran el tránsito en diferentes tipos de representaciones.

La utilización de tecnología en la enseñanza de la matemática forma parte de las recomendaciones fundamentales en el currículo chileno, donde se manifiesta que “las bases de la asignatura promueven el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) fundamentalmente como un apoyo para la comprensión del conocimiento matemático, [...] para organizar la información y comunicar resultados” (MINEDUC, 2015, p. 95).

En este estudio, se analiza la presencia que la tecnología posee en la actividad matemática planteada al estudiante, a propósito del uso de la tabla estadística. Se observa, según la Tabla 3.10.1, una escasa presencia de la tecnología en los textos explorados. El 8º curso es el que muestra un mayor uso de tecnología, sin embargo, es reducido, pues solo alcanza un pequeño porcentaje del total de actividades.

Tabla 3.10.1. Frecuencia (y porcentaje) uso de tecnología por nivel educativo

Recurso tecnológico	Santillana		SM		Total
	5º EB	6º EB	7º EB	8º EB	
Excel	4(2,9)	2(1,7)	8(1,9)	4(1,3)	18(1,8)
GeoGebra				8(2,5)	8(0,8)
No se utiliza tecnología	135(97,1)	113(98,3)	410(98,1)	306(96,2)	964(97,4)
Total	139	115	418	318	990

Los resultados obtenidos son similares a los evidenciados por Gea (2014), sin embargo, es preocupante, porque la situación observada se desmarca de las recomendaciones realizadas por el currículo chileno (MINEDUC, 2015; 2018).

3.11. CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS

El análisis de los libros de texto se ha completado con una identificación de los conflictos semióticos potenciales. Dicho conflicto se caracteriza, según Godino (2002) por una “disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (Godino, 2002, p. 250).

Para terminar este análisis de los textos, se presentan algunos ejemplos de las asignaciones imprecisas de significado detectadas. Son funciones semióticas efectuadas por los autores de los libros, las que no se corresponden con lo esperado desde la perspectiva institucional, y podrían generar en el estudiante un conflicto semiótico.

Conflictos relacionados con diferentes objetos matemáticos

En la investigación realizada por Mayén et al. (2009), se identificaron conflictos semióticos que surgen en el estudio de la mediana con estudiantes de Bachillerato, entre ellas: confundir la frecuencia con el valor de la variable, o calcular la moda en lugar de la mediana. Estos hallazgos son confirmados por Carvalho et al. (2018) quienes analizan los conflictos semióticos manifestados en un grupo de 332 estudiantes (12 a 18 años). Sus resultados mostraron que 169 estudiantes manifestaron dificultades para determinar la mediana en los datos expuestos en la tabla, y sus respuestas fueron clasificadas en ocho categorías de conflictos semióticos. Los más comunes fueron ignorar la frecuencia de las modalidades de la variable (22%), dejar inconcluso el algoritmo para el cálculo de la mediana (18%), y confundir la mediana con otro estadístico (16%), principalmente la media.

Godino (2002) describe a la mediana, de manera funcional, como una función que asocia a una colección de datos el número real solución del sistema de inequaciones, $F(x) \leq 1/2$, $F(x) \geq 1/2$, donde F corresponde a la función de distribución de la variable estadística que describe los datos. Es decir, para determinar la mediana se requiere que los datos obedezcan a un orden, lo que no es posible establecer en la actividad mostrada en la Figura 3.11.1, pues la variable es cualitativa nominal. Sí sería posible determinar la moda en variables cualitativas.

b. Cada día del mes de abril, María registró si estaba despejado, nublado o lluvioso y resumió la información en una tabla.

Estado de los días mes de abril	
Días	Frecuencia
Nublados	15
Lluviosos	12
Despejados	3

• ¿Cuál fue la mediana del tiempo de los días de abril? ¿Coincide con la moda?

Re: _____

Figura 3.11.1. Ejemplo de conflicto semiótico ([SM2], p.140)

Otro ejemplo asociado a las medidas de posición se presenta en la Figura 3.11.2, donde se pide al estudiante determinar los cuartiles de una variable cualitativa nominal. Cabe recordar que los cuartiles Q_j , $j = 1, 2, 3$, son los valores que dividen una distribución ordenada en cuatro partes iguales, y su cálculo es similar a la mediana $Q_2 = M_e$, por lo que requiere un orden de los datos, lo cual no es posible de llevar a cabo en la actividad propuesta (Figura 3.11.2) por el tipo de variable involucrada. Adicionalmente, se revisó el solucionario del texto, y la respuesta encontrada se obtiene utilizando las frecuencias absolutas en lugar de la variable, lo que evidencia un conflicto semiótico al confundir la variable con la frecuencia absoluta, situación advertida previamente por Arteaga (2011).

2. Analiza la información de la tabla. Luego, responde.

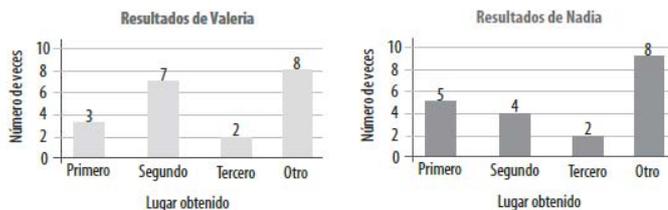
Deporte favorito de alumnos del 8.º básico	
Deporte	Cantidad de estudiantes
Fútbol	44
Voleibol	28
Tenis	15
Basquetbol	18
Natación	21

- Determina los siguientes valores
 $Q_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ $Q_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ $Q_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
- Dibuja la caja y los bigotes, según corresponda.
- Escribe 2 conclusiones:

Figura 3.11.2. Ejemplo de conflicto semiótico ([SM5], p.141)

Otra actividad propuesta que podría conducir a un conflicto semiótico en el estudiante se presenta en la Figura 3.11.3, en la cual se pide completar una tabla con las medidas de tendencia central de dos muestras representadas por medio de un gráfico de barras. Sin embargo, la variable es cualitativa ordinal, lo que impide establecer la media por el tipo de variable considerada, mientras que la moda o mediana sería el único estadístico factible de establecer. En la misma tarea, se observa que la última fila de la tabla se debe completar con las diferencias, lo que carece de sentido. A pesar de que el solucionario indica que solo es posible establecer la moda, plantear este tipo de actividades puede conducir a errores en el estudiante, si no son explicitados y abordados por el profesor, pudiendo generar conflictos semióticos que agudicen la confusión entre variable y frecuencia.

b. En los siguientes gráficos se representan las posiciones que obtuvieron dos atletas durante las mismas competencias en un año.



- Determina la diferencia entre los conjuntos de datos para cada medida de tendencia central y completa la tabla.

	Media	Moda	Mediana
Valeria			
Nadia			
Diferencia			

Figura 3.11.3. Ejemplo de conflicto semiótico ([SM2], p.142)

3.12. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

En los apartados anteriores se describió el estudio realizado sobre una muestra de 12 textos, desde 5° hasta 8° curso de Educación Básica de Chile. Por cada nivel educativo se analizaron tres textos: Libro del Estudiante, Cuaderno de ejercicios, y Guía didáctica del docente. Uno de los objetivos principales de este estudio era fijar el significado institucional de referencia que será la base de la construcción del instrumento de evaluación. Para describirlo, se tendrán en cuenta las categorías más frecuentes en las principales variables de este estudio, y otras menos frecuentes que también se consideran importantes para el aprendizaje de los estudiantes, según literatura previa.

La mayoría de las actividades analizadas, se basan en tablas del nivel C3 de complejidad semiótica (Tabla 3.12.1), alcanzando un importante porcentaje del total, y de ellas, el subnivel que aparece con mayor fuerza es C3.1 (44,6%) el que corresponde a tablas de distribución de una variable con frecuencias ordinarias (absolutas y/o relativas).

Tabla 3.12.1. Porcentaje de actividades según tipo de tabla

Tipo de tabla	Tipo de frecuencias			
	Valores	Absolutas, Relativas /probabilidades	Acumuladas	Agrupadas en intervalos
Datos (C2)	21,5			
Frecuencias (C3)		44,6	15,9	5,3
Contingencia (C4)		11,9		0,7

Las tablas de contingencia (nivel C4), son muy escasas y aparecen en un bajo porcentaje de las tareas propuestas al estudiante en los textos (12,6%). En consecuencia, en el cuestionario se tratarán, preferentemente, las tablas de frecuencia no acumuladas, teniendo en cuenta los diferentes tipos. Se añadirá alguna tabla de valores agrupados sólo para los estudiantes del curso superior, que ya han trabajado este tipo de tablas.

En relación al contexto (Tabla 3.12.2) se observa que prima el personal/educativo, lo que es adecuado, pues está asociado al cotidiano del estudiante. Se destaca, también, el contexto "experimento aleatorio" el cual alcanzó una alta presencia (16,1%) en los textos analizados, lo que justificó su incorporación como una nueva categoría, además de los ofrecidos por PISA (OECD, 2019). Se tratará, en el cuestionario, de usar los principales contextos, mostrados en la Tabla 3.12.2.

Tabla 3.12.2. Porcentajes de actividades según contexto

Contexto	Porcentaje
Científico	7,9
Experimento aleatorio	16,1
Laboral	16,8
Personal /educativo	41,7
Público	15

Los resultados obtenidos en el análisis de las situaciones-problemas develaron que SP3, situación-problema que abarca procesos de traducción, posee la mayor presencia

(57,3%), y el subtipo SP3.4 alcanzó un 39,7%, asociado a la traducción de una tabla a un estadístico, porcentaje o tipo de frecuencia, entre otros. Otra situación que aparece con fuerza es SP2, con un 23%, enmarcada en la construcción de tablas de distribución de frecuencias de una variable estadística unidimensional.

En los procedimientos asociados a cada una de las situaciones-problemas, el que tiene una mayor presencia es P4 (36,3%), un tipo de procedimiento que implica la realización de cálculos como determinar medidas de centralización, dispersión, entre otros, con la información que entrega la tabla; seguido por P1 (22,1%), el cual implica la lectura de datos a través de la representación tabular. También aparecieron procedimientos ligados a la traducción de gráfico a tabla o viceversa, tabla a tabla, lenguaje verbal a tabla, o viceversa, en un porcentaje destacado (17,2%). Como resumen, los principales tipos de procedimientos que se usarán en el cuestionario son mostrados en la Tabla 3.12.3. Se propondrá, principalmente, actividades de lectura y algunas de cálculo de diferentes tipos de frecuencia, de traducción, así como otras de completar o construir tablas, y de argumentación.

Tabla 3.12.3. Principales procedimientos considerados en los textos

Procedimientos	Porcentaje
Leer /interpretar	22,1
Construir o completar	10,1
Calcular	36,3
Traducir Gráfico a tabla o viceversa	14,9
Tabla a tabla	0,9
Verbal a tabla	1,4
Argumentar	8,9
Describir variables	2,2

El análisis del lenguaje mostró que el lenguaje simbólico empleado en los primeros cursos (5° y 6°) era escaso y se centraba en el uso de operadores, mientras que en los siguientes cursos este se incrementaba apareciendo símbolos para representar las diferentes frecuencias. En 8° curso aparecen símbolos para representar intervalos, pero, no aparecen los símbolos considerados en el curso anterior, por lo que no se aprecia en los textos la propuesta de un enriquecimiento gradual del lenguaje conforme se avanza de curso. En consecuencia, se tratará de usar los menos símbolos posibles en las tareas del cuestionario para facilitar la comprensión de la información expuesta en las tablas.

En este estudio también se aborda el nivel de lectura requerido por el estudiante en el desarrollo de las actividades, empleando los niveles de lectura establecidos por Friel et al. (2001). En este análisis, se detecta que la mayor parte de las actividades se enmarcan en el nivel "leer dentro de los datos" (77,4%), seguido de la lectura literal como es "leer los datos" (19,4%), de manera muy escasa le siguen los niveles más sofisticados de "leer más allá de los datos" (2,9%), junto con "leer detrás de los datos" (0,3%). Los dos primeros tipos serán los considerados con mayor prevalencia en el estudio, añadiendo alguna tarea aislada de nivel N3 o N4, poco frecuentes en los textos.

Así también, se aborda el análisis de las actividades que proponen el uso de tecnología, un recurso considerado por algunos autores como una herramienta útil para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos (Pratt et al., 2011). En este aspecto, se evidenció una carencia de propuestas de este tipo, lo que es una contradicción en relación a las recomendaciones emanadas en los lineamientos curriculares chilenos e internacionales. En todo caso, el cuestionario estará pensado para ser resuelto sin ayuda de la tecnología.

El conjunto de categorías de mayor frecuencia en cada una de las variables analizadas ayuda a fijar el significado implementado, que será de referencia en el estudio de evaluación, que consistirá en un conjunto mínimo de ítems que permita evaluar las siguientes competencias:

- Lectura de tablas y traducciones entre tablas y gráficos, o viceversa, o entre diferentes tipos de tablas;
- Construir o completar tablas, o las diferentes frecuencias de una tabla;
- Argumentar a partir de la información de una tabla.

Todo ello, en diferentes niveles de lectura y complejidad semiótica de la tabla, contextos variados y utilizando diferentes tipos de frecuencia.

3.13. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

En este capítulo se presentó en detalle el análisis de los 12 textos escolares chilenos que componen la muestra, dirigidos a los últimos cursos de Educación Básica. El objetivo fue estudiar la actividad matemática propuesta al estudiante en torno a las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular, y caracterizar el significado institucional pretendido en torno a las tareas propuestas en su enseñanza. El análisis realizado se basa en el marco teórico EOS, descrito en el Capítulo 1, que ha permitido abordar con precisión nuestro objetivo de investigación, como se expone a continuación.

3.13.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

El objetivo general de esta investigación es el siguiente:

Realizar un análisis detallado del tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular en estadística, en una muestra de textos dirigidos a estudiantes chilenos y españoles de Educación Básica en edades similares.

La primera parte de este objetivo se cumple, pues se ha analizado, en forma detallada, la variedad de tablas, contextos y situaciones-problema que implican el estudio de tablas estadísticas, específicamente en las unidades de Estadística y Probabilidad de 12 textos escolares chilenos dirigidos a estudiantes de 5° a 8° curso de Educación Básica. A continuación, se discute el logro de los diferentes objetivos específicos propuestos, para alcanzar este objetivo general en el trabajo.

01.1. Determinar el significado institucional pretendido de las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares de Educación Básica en Chile, en los niveles educativos donde se profundiza en su enseñanza, que son de 5° a 8° curso.

Este objetivo se abordó en el Capítulo 1. Los documentos analizados (Franklin et al., 2005; MINEDUC, 2015; 2018; NCTM, 2014) han permitido concretar las orientaciones curriculares sobre el tema, donde se destaca la importancia del diseño de investigaciones desde temprana edad, mediante datos reales que sean de interés al estudiante y se puedan recolectar del entorno. El rol de las representaciones tabular o gráfica en los diseños de investigación es un medio, potente, para extraer conclusiones argumentadas basadas en los datos. Se observa que la propuesta de trabajar bajo el diseño de investigaciones sólo se encuentra expresado, explícitamente, en los objetivos de aprendizaje de los primeros cursos de Enseñanza Básica en Chile, a partir de 5° curso se hace de manera implícita.

En los lineamientos curriculares chilenos, la tabla estadística cobra relevancia como un medio para representar la información recopilada, y como paso previo en la decisión del tipo de gráfico más apropiado para exponer dicha información. A medida que los estudiantes avanzan de nivel, deberían construir tanto tablas como gráficos, extraer información presente de forma explícita o implícita de dichas representaciones, y determinar estadísticos (medidas de centralización, posición y dispersión) e interpretarlos en su contexto.

También se destaca la recomendación explícita en cuanto al uso de tecnología en el proceso de enseñanza, como un medio que facilita la manipulación de gran cantidad de datos, y en consecuencia, extraer mejores conclusiones.

01.2. Caracterizar el tipo de tabla, nivel de complejidad semiótica, y contextos presentados de acuerdo al nivel educativo en una muestra de textos dirigidos a los últimos cursos de Enseñanza Básica en Chile.

En este capítulo se identificó y clasificó la variedad de tablas presentes en una muestra de textos dirigidos a últimos cursos de Educación Básica en Chile, predominando las tablas de distribución de frecuencias de una variable estadística con un nivel de complejidad semiótica C3. En los cursos superiores de Enseñanza Básica (7° y 8° curso), se incorporan más de un tipo de frecuencias como (relativas y acumuladas), así como la agrupación de valores en intervalos. Esta tendencia es similar en García-García et al. (2019) y Díaz-Levicoy et al. (2015; 2017), aunque en este último no aparecían las tablas de frecuencias diferentes a las absolutas, por los cursos a los cuales eran dirigidos los textos (1° a 3° curso de Educación Básica).

Se destaca la escasa presencia de tablas de contingencia en los textos analizados, a pesar de que investigaciones han alertado de la dificultad de su comprensión para los estudiantes (Espinell y Antequera, 2009; Walichinski y Junior, 2013).

El contexto que aparece con mayor fuerza es el de tipo personal, apropiado para el estudiante al enmarcar las actividades en su entorno cercano. Este resultado coincide con lo expuesto por García-García et al. (2019) y Díaz-Levicoy et al. (2015; 2017). También, en este análisis, se detecta la escasa presencia que poseen las tareas sin contexto, especialmente en los primeros cursos (5° y 6°), a diferencia de lo evidenciado por Sánchez

Cobo (1999) o Gea (2014) en libros de texto dirigidos a Bachillerato. Se destaca el contexto “experimento aleatorio”, su incorporación se justifica por la presencia de una gran cantidad de actividades enmarcadas en experiencias aleatorias, que no encajaban en la caracterización propuesta por PISA (OECD, 2019).

01.3. Caracterizar las situaciones-problemas propuestas al estudiante, procedimientos y lenguaje asociados, junto al uso de la tecnología y el propósito de la actividad matemática planteada en torno a la tabla estadística.

Los resultados mostraron que aparecen con gran fuerza las situaciones-problemas que implican procesos de traducción entre representaciones, liderando la de tabla a un estadístico, seguido de gráfica a tabla, o viceversa. En términos de Chick et al. (2005), este resultado sería considerado positivo, dado que la traducción se corresponde con un proceso de transnumeración, que es una componente importante en el razonamiento estadístico. La construcción de tablas de distribución de frecuencias de una variable estadística unidimensional, también tiene una alta presencia en los textos analizados, especialmente la que se realiza a partir de datos entregados o recolectados por el propio estudiante, como lo recomiendan los lineamientos curriculares (Franklin et al., 2005; MINEDUC, 2015; 2018; NCTM, 2014).

La mayoría de los procedimientos asociados a las situaciones-problemas son de cálculos para determinar estadísticos, frecuencias, porcentajes, entre otros. Seguidamente aparece P1, extracción de información que se encuentra en la tabla. Estos procedimientos que lideran en el análisis, son similares a los encontrados por García-García et al. (2019) y Díaz-Levicoy et al. (2015; 2017). Por otra parte, a diferencia de Guimarães et al. (2007) o Bivar y Selva (2011), fue encontrada una cantidad importante de procedimientos de traducción centradas en pasar de una tabla a un gráfico, siendo menos los procedimientos de traducción con otro tipo de representaciones, similares tendencias evidenció Sánchez Cobo (1999).

En relación al lenguaje, se observó que principalmente fue utilizado el verbal, con el propósito de facilitar la comprensión de conceptos (Planas et al., 2018), mientras que los símbolos utilizados, se centraban en operadores en los primeros cursos (5° y 6°) y símbolos para representar los tipos de frecuencias y medidas de tendencia central en los siguientes cursos, sin embargo, no se evidenció una tendencia de incremento del lenguaje simbólico conforme se avanzaba de curso.

Respecto a la finalidad de la actividad planteada al estudiante, se detecta una alta presencia de ejercicios propuestos, a diferencia de ejercicios resueltos o ejemplos, lo que repercute en la enseñanza de los conceptos (Ortiz, 2002). La carencia de ejercicios resueltos y ejemplos también se manifiesta en Gea (2014), sin embargo, en su estudio, si juntaba los ejemplos y ejercicios resueltos en una única categoría, superaban a los ejercicios propuestos. En nuestro estudio esto no ocurre, siendo muy escasa la frecuencia de este tipo de actividades.

También fue posible evidenciar que los textos carecen de propuestas que promuevan el aprendizaje con el uso de recursos tecnológicos, al igual que en Gea (2014). Se observaron textos con una nula propuesta de uso de tecnología, lo que se encuentra en oposición a lo sugerido en las bases curriculares chilenas (MINEDUC, 2015; 2018), el

NCTM (2014) y el proyecto GAISE (Franklin et al., 2005), en los cuales el uso de la tecnología ocupa un lugar central en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

O1.4. Caracterizar los niveles de lectura propuestos en las actividades basadas en las tablas estadísticas.

En el análisis realizado se encuentra una escasa presencia de tareas con tablas que involucran los niveles superiores de lectura como leer detrás de los datos y leer más allá de los datos. A pesar de que el tipo de procedimiento de argumentar (P9) se podría asociar a estos niveles de lectura, en la mayoría de los casos se refieren a actividades relativas a la justificación de una respuesta por medio de un cálculo, o la observación del tipo de variable representado en la tabla. En García-García et al. (2019) y Díaz-Levicoy et al. (2015), estos últimos niveles de lectura fueron escasos o nulos.

O1.5. Identificar los principales conflictos semióticos potenciales en el tema.

En la investigación se observaron conflictos semióticos potenciales relacionados con diferentes objetos matemáticos, principalmente en actividades que pedían determinar medidas de posición, como los cuartiles, o de centralización, a partir de la distribución de una variable nominal, lo cual carece de sentido, porque para determinar estadísticos, como por ejemplo las medidas de posición, es indispensable establecer un orden de los datos. Así, tampoco es posible calcular la media aritmética de los deportes favoritos de un grupo de jóvenes. Esta situación se profundizó revisando las respuestas expuestas en el solucionario a los textos analizados, las cuales, en algunos casos, develó una confusión entre variable y frecuencia, conflicto semiótico advertido por Arteaga (2011).

3.13.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS

Algunas hipótesis con las que parte esta investigación son las siguientes:

H1. Se espera que el significado institucional pretendido para las tablas estadísticas en las en las orientaciones curriculares de Educación Básica en Chile, específicamente de 5° a 8° curso, muestre una adecuada idoneidad cognitiva.

Se pudo apreciar que existe una variedad de tipos de tablas estadísticas en los lineamientos curriculares que son propuestas de manera progresiva, conforme se avanza de nivel escolar. Además, gradualmente se van incorporando diferentes objetos matemáticos que incrementan su complejidad semiótica. Podría ser apropiado incorporar con mayor fuerza el estudio de la tabla de contingencia, dado que es un objeto que se utiliza como medio en el estudio de diferentes temáticas que los estudiantes tratarán a futuro, como la correlación o la probabilidad condicionada.

H2. Se espera que el significado institucional implementado para las tablas estadísticas en los textos escolares chilenos de Educación Básica analizados, muestre un buen ajuste con el significado institucional pretendido en las directrices curriculares.

Los textos escolares chilenos muestran un buen ajuste con el significado institucional pretendido manifestado a través de los lineamientos curriculares, pues aparecen los diferentes tipos de tablas propuestas de manera gradual en los textos escolares. El tipo de tabla que aparece con mayor fuerza obedece al nivel de complejidad semiótica C3, y particularmente a C3.1, asociado a tablas de distribución de una variable con frecuencias ordinarias (absoluta y/o relativa).

H3. Se prevé que las situaciones-problemas con mayor presencia en los textos escolares se centren en la realización de cálculos con la información proporcionada por las tablas, siendo escaso el uso de tecnología.

En los textos escolares la situación-problema que aparece con mayor frecuencia corresponde a la traducción de tabla a estadístico, o viceversa, que implica la realización de cálculos con datos entregados a partir de una tabla como calcular medidas de centralización o dispersión, determinar probabilidades de determinados sucesos, establecer el porcentaje de alguna modalidad de la variable, entre otros.

Respecto al uso de tecnología, en las bases curriculares se propone una activa implementación de actividades con el empleo de variados softwares, pero esto no es recogido por los textos, dado que existe una carencia de este tipo de actividades. Con estos antecedentes, consideramos esta hipótesis cumplida, dado que ocurrieron los supuestos que habíamos fijado con antelación.

H4. Los niveles de lectura descritos en los antecedentes son introducidos en los textos en forma gradual, con un predominio del nivel de lectura referido a leer dentro de los datos.

Los niveles de lectura de las actividades presentadas en los textos escolares se centran en los más básicos, apareciendo con mayor frecuencia el nivel de leer dentro de los datos, seguido de leer los datos. Los siguientes niveles son escasamente tratados, y sería conveniente incluir actividades que aborden estos niveles más sofisticados, especialmente en 7° y 8° curso.

H5. Podrían presentarse algunos conflictos semióticos en los textos escolares, principalmente relacionados con definiciones de diferentes objetos matemáticos implicados en el estudio de la tabla estadística.

En el análisis se encontraron algunos conflictos semióticos potenciales, ligados a la confusión entre variable y frecuencia, manifestado en actividades que solicitaban determinar el rango de una variable de tipo nominal, también se observaron confusiones con conceptos matemáticos, por ejemplo, determinar medidas de posición también para variables de tipo cualitativa nominal. Esto coincide con lo señalado por algunas investigaciones (Batanero, 2000; Carvalho et al., 2018) respecto a la aplicación mecánica de algoritmos para determinar diferentes estadísticos, sin comprender su real significado.

3.14. IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL TRATAMIENTO DE LAS TABLAS EN LOS TEXTOS ANALIZADOS

Finalmente, se plantea valorar la idoneidad didáctica en cuanto al tratamiento que reciben las tablas estadísticas en los textos escolares chilenos, atendiendo a las recomendaciones realizadas al respecto por (Godino, 2013; Godino et al., 2007; 2019).

Las diferentes facetas que incorpora la idoneidad didáctica, detalladas en el Capítulo 1, se convierten en un medio que permite profundizar, en forma integral, en los diferentes factores que podrían incidir en el diseño, desarrollo y evaluación de las propuestas planteadas para el estudio de las tablas estadísticas en los textos escolares analizados y que se pasan a detallar a continuación.

Idoneidad epistémica

En los textos escolares se pudo apreciar que se consideraron todos los tipos de tablas estadísticas descritas en los lineamientos curriculares, con una progresión adecuada. En los primeros cursos (5° y 6°) aparecen tablas de datos, tablas de distribución de una variable con frecuencias absolutas, y en algunos casos tablas de contingencia o doble entrada, mientras que en los siguientes niveles se presentan estas mismas tablas, pero se incorporan otros objetos matemáticos como las frecuencias relativas y/o acumuladas, y la agrupación de valores en intervalos, tal como es señalado en el currículo chileno de matemáticas. Por tanto, aunque son indicativos de una alta idoneidad epistémica, consideramos mejorable prestar mayor atención a la tabla de doble entrada, dado que, si se introduce su lectura y construcción de forma progresiva con el nivel escolar, redundará en su estudio formal en cursos posteriores.

Por otra parte, destacamos que se ofrecen variedad de actividades ligadas a la tabla estadística con diferente propósito (ejemplo, ejercicio propuesto y ejercicio resuelto), aunque consideramos que son escasas las situaciones en donde se motiven procedimientos como describir variables en un estudio o inventar contextos y variables a propósito de los datos representados en una tabla, así como recoger datos por los propios estudiantes y que posteriormente los analicen.

En este sentido, destacan son las situaciones-problemas que implican procesos de traducción entre representaciones, principalmente las vinculadas a la transnumeración de tabla a estadístico, o viceversa, seguida de la construcción y consecuente lectura de la tabla de distribución de una variable estadística. Por tanto, en la misma línea de nuestro comentario previo, aunque estas situaciones-problema se consideran componentes importantes en el razonamiento estadístico, pensamos que es necesario incorporar menos actividades algorítmicas de cálculo y más actividades que promuevan procesos tales como la recogida de datos y análisis crítico de la información de una tabla que los estudiantes construyan por sí mismos, junto con reconocer el rol que ocupa el uso de la tecnología en este tipo de situaciones-problema, como proponen diversas recomendaciones curriculares (Franklin et al., 2005; NCTM, 2014).

Por último, en los textos se prioriza el lenguaje verbal, lo que es comprensible para 5° a 6° curso, mientras que en el siguiente curso (7°) se avanza en la incorporación del lenguaje simbólico para representar los diferentes tipos de frecuencias, sin embargo, este

no es sostenido en 8º curso, dado que no aparecen los símbolos empleados el año anterior, pero sí se observan otros ligados a la agrupación de valores en intervalos.

Idoneidad cognitiva

Valorar esta idoneidad en los libros de texto fue parte de los objetivos presentados en este capítulo. En esta línea, se evidencia que conforme se avanza de nivel se van incorporando distintos objetos matemáticos que incrementan la complejidad semiótica de las tablas, como las frecuencias (absolutas, relativas y acumuladas) y los valores agrupados en intervalos de clase.

La mayor parte de la lectura de las tablas abarca los primeros dos niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001) leer datos y leer detrás de los datos, mientras que los niveles más sofisticados de lectura son tratados de manera muy escasa y no evidencian ninguna tendencia de su presencia conforme se avanza de curso, lo que consideramos un aspecto a mejorar en la representatividad de tareas que plantean los textos analizados.

Idoneidad interaccional

El análisis de los textos escolares no permite valorar completamente esta faceta, dado que la interacción con el docente o entre el estudiantado dependerá de la organización del proceso de instrucción que finalmente se planifique, así es que, las tareas que se proponen en los textos pudieran plantarse realizar en grupo o de modo individual, que es un aspecto poco explicitado en los textos analizados. En cualquier caso, consideramos que la interacción entre estudiantes es mejorable, y podría aumentar la idoneidad interaccional en los textos si se incorporasen más situaciones-problema de recolección de datos, con el posterior análisis crítico de la información recogida en una acción comunicativa grupal de diálogo y discusión generalizada en el aula.

Por último, destacamos que el estudio autónomo del estudiante, en interacción consigo mismo mediante el uso del libro de texto, se encuentra bastante limitado puesto que se priorizan los ejercicios propuestos, ofreciendo escasos ejemplos para que el estudiante de forma autónoma pueda complementar la instrucción recibida en el aula.

Idoneidad mediacional

Esta faceta está ligada con el medio y recursos empleados en el proceso de instrucción. En este sentido, consideramos que se podrían introducir mejoras con la incorporación de la tecnología en el análisis de los datos. Esta sugerencia se presenta en diferentes lineamientos curriculares, pero no fue suficientemente recogida en los textos escolares analizados.

En cualquier caso, algunos componentes de esta faceta no pueden ser realmente evaluados, puesto que los textos no precisan información sobre el número de alumnado en la realización de las tareas y el tiempo dedicado a cada una de ellas, lo que será un aspecto a determinar por el docente en el proceso de instrucción implementado.

Idoneidad afectiva

Del análisis de los textos realizado podemos inferir que las tareas se centran en los intereses y necesidades de los estudiantes al enmarcarse en contextos personales o de

su entorno educativo, social y laboral, lo que permite asignarle un mayor sentido al aprendizaje de la estadística y valorar su utilidad en el día a día.

Otras componentes de esta faceta es difícil inferirlas desde el análisis realizado, puesto que la actitud del alumno o el análisis de sus emociones precisan de indicadores contextuales en el día a día de la implementación del proceso de enseñanza y aprendizaje del tema.

Idoneidad ecológica

Se puede considerar apropiada, dado que la lectura y comprensión de diferentes tipos de representación es un elemento importante para las personas en la sociedad actual, como recogen los lineamientos curriculares chilenos (MINEDUC, 2015; 2018) y otros documentos curriculares internacionales. La manera habitual en que tomamos decisiones es en base a información que estas representaciones exponen, por tanto, contar con conocimientos respecto a estos objetos matemáticos facilitará su cotidiano. De ahí que destacamos la variedad de situaciones-problema propuestas contextualizadas en el plano social y laboral, lo que permitirá al estudiante conectar la estadística a otras áreas de conocimiento y contribuir a su formación socio-profesional.

En definitiva, la idoneidad didáctica es adecuada aunque mejorable en muchos aspectos, como se ha ido indicando anteriormente, especialmente en lo que refiere a la propuesta de procedimientos menos algorítmicos y el uso de la tecnología. El análisis aportado entrega una visión positiva respecto al tratamiento de las tablas en los textos escolares, que ha sido una temática escasamente abordada, generalmente, porque este objeto se trata en conjunto con los gráficos. La literatura ha entregado luces respecto a que la comprensión de las tablas carece de ser un proceso sencillo para el estudiante, el que se incrementa conforme se incorporan diferentes objetos matemáticos en la actividad ligada a la tabla. Es importante profundizar en el estudio de las tablas, dado que son un medio frecuentemente utilizado, no solo en la matemática, para estudiar diferentes temas, de allí su relevancia.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES

- 4.1. Introducción
- 4.2. Objetivo del estudio
- 4.3. Hipótesis iniciales
- 4.4. Método
 - 4.4.1. Muestra de libros de texto analizados
 - 4.4.2. Método de análisis
- 4.5. Resultados del análisis de la variedad de tablas y contextos
 - 4.5.1. Tipo de tabla y niveles de complejidad semiótica
 - 4.5.2. Tipo de variable
 - 4.5.3. Contexto
- 4.6. Resultados del análisis semiótico de la tabla estadística en los textos
 - 4.6.1. Situaciones-problemas en torno a la tabla estadística
 - 4.6.2. El lenguaje utilizado en las tablas
 - 4.6.3. Procedimientos con tablas estadística
 - 4.6.4. Conceptos relacionados con las tablas estadísticas
 - 4.6.5. Propiedades utilizadas en la tabla estadística
 - 4.6.6. Argumentos utilizados con las tablas estadísticas
- 4.7. Propósito de la actividad
- 4.8. Nivel de lectura
- 4.9. Uso de la tecnología
- 4.10. Conflictos semióticos identificados
- 4.11. Significado institucional de referencia para el estudio de evaluación
- 4.12. Conclusiones del análisis de los libros de texto
 - 4.12.1. Conclusiones respecto a los objetivos
 - 4.12.2. Conclusiones respecto a las hipótesis
- 4.13. Idoneidad didáctica del tratamiento de las tablas en los textos analizados

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se describe el estudio realizado sobre la presentación de las tablas estadísticas en una muestra de libros de texto de matemáticas, dirigidos a estudiantes del último ciclo de Educación Primaria (5º y 6º curso) y Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España (MECD, 2014; 2015). El propósito es complementar el análisis descrito en el Capítulo 3, y comparar el trabajo con las tablas estadísticas en los libros de texto chilenos y españoles. Además, el estudio considera toda la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), en la cual se carece de investigaciones que aborden nuestro objeto de estudio, parte del cual ha sido recogido en variados trabajos (Pallauta et al., 2021).

El análisis presentado en este Capítulo, complementado con la revisión de los lineamientos curriculares españoles (Capítulo 1), permite evaluar el significado institucional implementado de la tabla estadística de los niveles citados, que junto al descrito en el Capítulo 3 es la base para establecer el significado institucional de referencia para el estudio de evaluación.

A continuación, se describen los objetivos, muestra y variables consideradas, así como la metodología del estudio de los textos analizados.

4.2. OBJETIVO DEL ESTUDIO

Este estudio se realiza para atender a la segunda parte del Objetivo 1, descrito en el Capítulo 1, el cual corresponde a un análisis similar al realizado en la muestra de libros escolares chilenos, y descrito en el Capítulo 3:

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado del tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular en estadística, en una muestra de textos dirigidos a estudiantes chilenos y españoles de Educación Básica de edades similares.

Para abordar este objetivo, se profundizará en diversos aspectos que componen el significado institucional implementado en los libros de texto españoles de la muestra. Los resultados de este estudio tendrán una doble finalidad: Por una parte, permitirán informar a la comunidad educativa e investigadora de los hallazgos en torno al significado institucional de la tabla estadística en España, y por otro, servirán para realizar un estudio comparativo entre Chile y España. Para conseguir este propósito, se plantean los siguientes objetivos específicos:

O1.1. Determinar el significado institucional pretendido de las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares de los últimos cursos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

Para conseguir este objetivo, se revisaron las directrices curriculares del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD, 2014; 2015), descritas en el Capítulo 1, lo que permitió concretar las orientaciones curriculares sobre la enseñanza y aprendizaje de la tabla estadística en los niveles en que se enmarca el estudio, estableciendo la importancia que se asigna a este contenido estadístico.

Con este análisis, se podrá establecer si los contenidos de los textos escolares dirigidos a los cursos finales de Educación Primaria y Educación Secundaria se ajustan al significado pretendido por los lineamientos curriculares establecidos.

O1.2. Caracterizar el tipo de tabla, su nivel de complejidad semiótica, tipo de variable y los contextos presentes de acuerdo al nivel educativo, en una muestra de libros de texto dirigidos a los últimos cursos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

En el estudio curricular descrito en el Capítulo 1 se observaron variados tipos de tablas estadísticas, para representar diferentes variables (cualitativa, cuantitativa o mixta), las cuales son descritas de manera explícita o implícita en los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015). En este sentido, el análisis de los libros de texto indicará si estos tipos de tabla son recogidos por los textos.

Cada uno de ellos será asociado a los niveles de complejidad semiótica propuestos inicialmente por Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010), y adaptados al caso particular de la representación tabular (Pallauta y Arteaga, 2021; Pallauta et al., 2020). En consecuencia, es de interés analizar si los niveles crecientes de complejidad semiótica son incorporados de manera progresiva a lo

largo de los cursos escolares. Esta caracterización de las tablas estadísticas se complementa con la descripción de los contextos de aplicación propuestos por PISA (OECD, 2019).

O1.3. Caracterizar el significado institucional implementado, uso de la tecnología y propósito de la tabla estadística en una muestra de libros de textos dirigidos a los cursos finales de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

Un análisis semiótico de las situaciones-problemas ligadas a la tabla desde el enfoque ontosemiótico, permitirá analizar de manera profunda los diferentes objetos matemáticos, como el lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, en los libros de texto de la muestra seleccionada. Este análisis será complementado con el estudio de otros elementos, como la incorporación del uso de la tecnología y el propósito de la actividad. Las variables señaladas, han sido consideradas en el análisis de libros de texto en otros temas de estadística (Gea, 2014; Ortiz, 2002).

O1.4. Caracterizar los niveles de lectura propuestos en las situaciones-problemas basadas en las tablas estadísticas.

Los gráficos junto a las tablas estadísticas son objetos semióticos complejos (Pallauta y Arteaga, 2021) y en su interpretación intervienen diferentes objetos matemáticos y procesos cognitivos. Al tener en cuenta esta complejidad, se utilizarán los niveles de lectura para gráficos estadísticos propuestos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), los cuales han sido utilizados en otros análisis sobre tablas estadísticas (García-García et al., 2019; Pallauta et al., 2021).

El estudio de esta variable es importante, pues permite evaluar si las tareas planteadas en los libros de texto, están acorde al desarrollo cognitivo y edad de los estudiantes, además de evidenciar cuáles son los niveles a los que se les asigna una mayor prioridad.

O1.5. Identificar los principales conflictos semióticos potenciales en el tema.

El análisis realizado a los textos escolares chilenos y descrito en el Capítulo 3, evidenció algunas imprecisiones de los autores de dichos textos en determinados objetos matemáticos ligados a las tablas estadísticas. Estudiar en los libros de texto españoles la presencia de estas asignaciones imprecisas de significado es importante, debido a que podrían, eventualmente, provocar un conflicto semiótico en el estudiante, por la importancia del libro de texto en el trabajo del aula (Herbel, 2007).

4.3. HIPÓTESIS INICIALES

La investigación en torno a las tablas estadísticas y su presencia en los libros de texto aún es escasa, por lo que las hipótesis tienen carácter exploratorio. Basados en algunos de los análisis realizados en libros de texto en el contexto latinoamericano como: Chile (Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017; Pallauta et al., 2020; Pallauta et al., 2021), México (García-García et al., 2019) y Brasil (Amorim y Silva, 2016) y, también, tomando en

cuenta los lineamientos curriculares españoles (MECD, 2014; 2015), e investigaciones españolas que han abordado tangencialmente la temática de las tablas estadísticas en textos escolares (Gea, 2014), las hipótesis con la que parte esta investigación son las siguientes:

H1. El significado institucional pretendido para las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares de 5° y 6° de Educación Primaria y Educación Secundaria en España muestra adecuada idoneidad cognitiva.

La enseñanza de las tablas estadísticas se contempla en el currículo español desde los primeros cursos de Educación Primaria y se espera que los objetos matemáticos vinculados a su aprendizaje se incluyan de manera progresiva atendiendo al nivel educativo. De esta manera, podemos esperar, que los estudiantes en últimos cursos de Educación Primaria y Educación Secundaria tengan los conocimientos requeridos para el tipo de tabla propuesto.

H2. El significado institucional implementado para las tablas estadísticas en los libros de texto españoles de 5° y 6° de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria que componen la muestra, presenta un buen ajuste con el significado institucional pretendido en los lineamientos curriculares.

Se espera encontrar los diferentes tipos de tablas descritos en los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015), introducidos de forma progresiva, conforme se avance de curso, y que tengan en cuenta los diversos objetos matemáticos requeridos en su comprensión, evidenciando de esta manera una adecuada idoneidad epistémica. Pues los diferentes tipos de tablas estadísticas, incorporan una variedad de objetos matemáticos que incrementan la dificultad de su comprensión para el estudiante y se espera se tengan en cuenta esta dificultad progresiva.

H3. Los libros de texto españoles presentan una cantidad y variedad importante de actividades ligadas a las tablas estadísticas. Se espera también una progresión con el curso escolar.

Se espera encontrar, al igual que Díaz-Levicoy (2018) en su estudio de gráficos estadísticos en libros de texto chilenos, un número y variedad importante de actividades relacionadas con las tablas estadísticas, que tengan en cuenta, tanto la construcción, lectura y cálculo a partir de las mismas. En el análisis de textos escolares chilenos (Pallauta et al., 2021) se encontró variedad y una cantidad importante de actividades en torno a la tabla estadística, cuya dificultad progresa con el curso escolar, por lo que se espera que esta tendencia se repita para el caso de los libros españoles, dado que se comparten algunos niveles educativos (5° y 6° Educación Primaria y 1° y 2° de Educación Secundaria).

H4. Los libros de texto españoles presentan un tratamiento de las tablas estadísticas diferenciado, dependiendo si se dirigen a la opcionalidad de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas o aplicadas.

Es de esperar que la enseñanza de las tablas estadísticas tenga un tratamiento diferente a partir de 3º de Educación Secundaria, dependiendo de la orientación de la asignatura de matemática. Esta hipótesis se recoge a partir de los lineamientos curriculares (MECD, 2015) los cuales explicitan esta diferencia y por los hallazgos realizados por Gea (2014) en su análisis de la correlación en libros de texto dirigidos a Bachillerato, donde se encontraron diferencias entre especialidades.

H5. Podrían presentarse algunos conflictos semióticos en los libros de texto, principalmente relacionados con definiciones de diferentes objetos matemáticos implicados en el estudio de la tabla estadística.

Al igual que en los textos escolares chilenos (Capítulo 3), se espera encontrar algunos conflictos semióticos potenciales, principalmente relacionados con los conceptos ligados a la tabla estadística, dado que de manera frecuente esta representación es empleada como un medio para la enseñanza de otros objetos matemáticos.

4.4. MÉTODO

Al igual que el presentado en el Capítulo 3, este estudio tiene un enfoque cualitativo (Hernández et al., 2014), pues proporciona conocimientos complementarios a los obtenidos mediante los métodos cuantitativos (Sampieri, 2018). Dado que la investigación es cualitativa, no se persigue generalizar los resultados obtenidos (Icart et al., 2012), sino describir, interpretar y comparar la información recolectada en este análisis con estudios similares.

Entre las variables de análisis que contempla el trabajo, se considera cada uno de los objetos primarios propuestos en el EOS (Godino et al., 2007; 2019), que son detallados y descritos en el análisis semiótico realizado al objeto tabla estadística en el Capítulo 1.

4.4.1. MUESTRA DE LIBROS DE TEXTO ANALIZADOS

Se optó por una muestra intencional (Corral et al., 2015), atendiendo a su uso dentro de la Comunidad Autónoma de Andalucía, editorial, y disponibilidad en el mercado. La muestra está constituida en total por 24 libros de texto, dirigidos a estudiantes de diferentes niveles educativos del sistema español. Los primeros 6 corresponden a los últimos cursos de Educación Primaria (5º y 6º curso), mientras que los restantes (18) abarcan desde 1º a 4º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, dichos textos atienden al marco curricular vigente (MECD, 2014; 2015).

En Educación Secundaria Obligatoria, para los primeros cursos (1º y 2º curso) se analizan tres textos de matemáticas por cada nivel educativo, mientras que para los siguientes niveles (3º y 4º curso) se revisan seis libros por cada curso, puesto que a partir de 3º curso el alumnado debe optar por matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, o bien matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. Dichos libros de texto fueron seleccionados porque son los más utilizados en la enseñanza pública dentro de la Comunidad Autónoma de Andalucía, además de pertenecer a editoriales de tradición y prestigio.

En la Tabla 4.4.1.1, se presentan los libros de texto que componen la muestra. A cada uno de ellos se les asigna un código, el cual será empleado a lo largo del Capítulo para referirse a este. Los códigos son designados de acuerdo al nivel que atienden, por ejemplo [P] para los textos dirigidos a Educación Primaria, [S] para 1º y 2º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, mientras que [AC] para 3ºESO y 4ºESO para matemáticas orientadas a la enseñanza académicas y [AP] para los mismos cursos señalados anteriormente, pero para las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas.

Tabla 4.4.1.1 Libros de texto utilizados en el análisis

Código	Referencia
P1	Ferrero, L., Gómez J., Martín P., y Quevedo, V. (2018). <i>Matemáticas 5</i> (Proyecto Pieza a Pieza). Anaya.
P2	Fuertes, M., Balaguer, M., y Montero, D. (2015). <i>Matemáticas 5</i> (Proyecto global interactivo). Edebé
P3	Medina, G., Garín, M., Hernández, C., Pérez, R., Macías, C., Peña, M.,...Navarro, A. (2014). <i>Matemáticas 5 Primaria Savia</i> . SM.
P4	Carvajal, A. Ferrero, L., Gómez, J., Martín, P., y de la Rosa, L. (2019). <i>Matemáticas 6</i> (Proyecto Pieza a Pieza). Anaya.
P5	Waters, D. (2016). <i>Matemáticas 6 (Proyecto global interactivo)</i> . Barcelona: Edebé.
P6	Garín, M., Vidal, J., Pérez, B., Nieto, M., Morales, F., González, Y.,...Moratalla, V. (2015). <i>Matemáticas 6 Primaria Savia</i> . SM.
S1	Colera, J., Gaztelu, I., y Colera R. (2016). <i>ESO 1 Matemáticas</i> (Proyecto Aprender es crecer en conexión). Anaya.
S2	Mejía D., Romero, R., y Ocaña, J. (2015). <i>ESO 1 Matemáticas</i> (Proyecto somoslink). Edelvives.
S3	Almodóvar, J., de la Prida, C., Gaztelu, A., González, A., Machín, P., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). <i>Matemáticas Serie Resuelve ESO 1</i> (Proyecto Saber Hacer). Santillana.
S4	Colera, J., Gaztelu, I., y Colera R. (2017). <i>ESO 2 Matemáticas</i> (Proyecto Aprender es crecer en conexión). Anaya.
S5	Romero, R., Ocaña, J., y Mejía D. (2016). <i>ESO 2 Matemáticas</i> (Proyecto somoslink). Edelvives.
S6	Almodóvar, J., Cuadrado A., Díaz, L., Dorce, C., Gámez, J., Marín, S.,...Sánchez, D. (2016). <i>Matemáticas Serie Resuelve ESO 2</i> (Proyecto Saber Hacer). Santillana.
AC1	Colera, J., Oliveira, M., Gaztelu, I., y Colera, R. (2015). <i>ESO 3 Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas</i> (Proyecto Aprender es crecer en conexión). Anaya.
AC2	Ocaña, J., Romero, R., y Mejía, D. (2015). <i>ESO 3 matemáticas académicas</i> (Proyecto somoslink). Edelvives.
AC3	de la Prida, C., Gaztelu, A., González, A., Machín, P., Pérez, C., y Sánchez, D. (2016). <i>Matemáticas Serie Resuelve ESO 3 Matemáticas Enseñanzas académicas</i> (Proyecto Saber Hacer). Santillana.
AC4	Colera, J., Oliveira, M., Gaztelu, I., y Colera, R. (2016). <i>ESO 4 Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas</i> (Proyecto Aprender es crecer en conexión). Anaya.
AC5	Mejía, D., Ocaña, J., y Romero, R. (2016). <i>ESO 4 matemáticas académicas</i> (Proyecto somoslink). Edelvives.
AC6	Gámez, J., Gaztelu, A., Loysele, F., Marín S., Pérez, C., y Sánchez, D. (2016). <i>Matemáticas Serie Resuelve ESO 4 Matemáticas Enseñanzas académicas</i> (Proyecto Saber Hacer). Santillana.
AP1	Colera, J., Oliveira, M., Gaztelu, I., y Colera, R. (2015). <i>ESO 3 Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas</i> (Proyecto Aprender es crecer en conexión). Anaya.
AP2	García, M., Municipio, J., Ortega, P., y Villaoslada, E.M. (2015). <i>ESO 3 matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas</i> (Proyecto somoslink). Edelvives.

- AP3 de la Prida, C., Gaztelu, A., González, A., Pérez, C., y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas Serie Soluciona ESO 3 Matemáticas Enseñanzas aplicadas* (Proyecto Saber Hacer). Santillana.
- AP4 Colera, J., Oliveira, M., Gaztelu, I., y Colera, R. (2016). *ESO 4 Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas* (Proyecto Aprender es crecer en conexión). Anaya.
- AP5 García, M. Municipio, J., y Ortega, P. (2016). *ESO 4 Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas* (Proyecto somoslink). Edelvives.
- AP6 Pérez, C., Sánchez, D., y Zapata, A. (2016). *Matemáticas Serie Soluciona ESO 4 Matemáticas Enseñanzas aplicadas* (Proyecto Saber Hacer). Santillana.

4.4.2. MÉTODO DE ANÁLISIS

En cada uno de los niveles educativos que componen la muestra de textos, se analizó el Bloque 5 de “Estadística y Probabilidad”, prestando atención a las situaciones-problema asociadas a las tablas estadísticas propuestas en dichos libros.

En primera instancia, se identificaron en dicho bloque las tablas estadísticas, junto a todas las actividades en donde se hiciera explícito o implícito el uso de la tabla estadística para responder a la situación-problema planteada. Así, las situaciones-problema podían ser empleadas para su estudio propiamente o como un medio para responder a alguna cuestión.

Como se señaló anteriormente, el método de investigación utilizado fue el análisis de contenido (Neuendorf, 2016), al igual que el estudio realizado en el Capítulo 3. Para ello se siguen las etapas descritas por Mayring (2020) en dicho capítulo, realizando de este modo un proceso cíclico e inductivo, que permitió revisar en los párrafos seleccionados las variables consideradas, seleccionar ejemplos de ellos, para acabar con la elaboración de tablas que resumen los resultados encontrados, facilitando de este modo la obtención de conclusiones.

El análisis mostró un número importante de actividades (n=2861) en las cuales se hace uso de tablas estadísticas, por lo que se considera que es una muestra adecuada, lo que favorece la obtención de conclusiones en base a estudios similares.

La Tabla 4.4.2.1 resume la distribución de actividades analizadas en cada uno de los libros de texto de Educación Primaria. En este nivel se revisaron 312 actividades en total, y se observa que en 6º curso hay una mayor cantidad de situaciones-problemas que involucran tablas estadísticas que en 5º curso. La editorial Anaya es la que presenta más actividades en 5º curso, mientras que en 6º curso lo hace Edebé.

Tabla 4.4.2.1. Frecuencia (y porcentaje) de actividades analizadas en Educación Primaria

Nivel educativo	Editorial			Total
	Anaya	Edebé	SM	
5º EP	38(46,3)	56(43,1)	45(45)	139(44,6)
6º EP	44(53,7)	74(56,9)	55(55)	173(55,4)
Total	82	130	100	312

En la Enseñanza Secundaria Obligatoria (Tabla 4.4.2.2), se aprecia un incremento progresivo de actividades, especialmente, en los últimos cursos de esta etapa educativa, posiblemente porque en estos cursos se analizaron 6 libros de texto por nivel educativo, pues, como se señaló anteriormente, los estudiantes a partir de 3º curso deben optar por

las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, o bien las matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas.

Tabla 4.4.2.2. Frecuencia (y porcentaje) de actividades analizadas en Educación Secundaria Obligatoria

Nivel educativo	Editorial			Total
	Anaya	Edelvives	Santillana	
1° ESO	107(12,4)	87(9,8)	71(8,9)	265(10,4)
2° ESO	112(13)	143(16)	86(10,8)	341(13,4)
3° ESO	256(29,7)	269(30,2)	356(44,8)	881(34,6)
4° ESO	387(44,9)	393(44,1)	282(35,5)	1062(41,7)
Total	862	892	795	2549

Los primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria (1° y 2° curso), presentan un número similar de actividades, en 1° curso Anaya ofrece una mayor frecuencia, mientras que en 2° curso lo hace Edelvives. En Educación Secundaria Obligatoria, al revisar por editorial, se aprecia que Edelvives presenta una mayor cantidad de tareas, seguido de Anaya y finalmente Santillana. Estos resultados son similares a los obtenidos en los textos escolares chilenos, y descritos en el Capítulo 3, en el sentido de que conforme se progresa de curso también se incrementa el número de situaciones-problema en torno al objeto de estudio.

Una diferencia con otras investigaciones en torno a la presencia de las tablas estadísticas en libros de texto de otros países (Díaz-Levicoy et al., 2015; 2017; García-García et al., 2019) es que la frecuencia de actividades encontradas era reducida o muy pequeña (Salcedo, 2020). Se puede señalar, entonces, que en este análisis se abarcó un número importante de situaciones-problemas, debido a factores como el tamaño de la muestra seleccionada, los cursos a los cuales se dirigen los textos, entre otros. Esto permitirá realizar un análisis detallado y profundo, y en consecuencia, obtener mejores conclusiones respecto al tratamiento del objeto de estudio.

En la siguiente sección, se presentan una descripción junto a los resultados obtenidos en cada una de las variables consideradas.

4.5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA VARIEDAD DE TABLAS Y CONTEXTOS

A continuación, se analizan los diferentes tipos de tabla, junto al nivel de complejidad semiótica asociado, el tipo de variable representada en la misma y el contexto en que se plantea su uso.

4.5.1. TIPO DE TABLA Y NIVELES DE COMPLEJIDAD SEMIÓTICA

Al igual que el análisis con textos escolares y detallado en el Capítulo 3, se tendrá en cuenta las tablas propuestas por Lahanier-Reuter (2003), las cuales se relacionarán con el nivel de complejidad semiótica propuesto por Pallauta et al. (2020), y Pallauta y Arteaga (2021), que amplían los propuestos para los gráficos estadísticos por Arteaga y colaboradores (Arteaga, 2011; Arteaga y Batanero, 2011; Batanero et al., 2010). A continuación, se presentan ejemplos de cada uno de estos tipos de tablas estadísticas.

Tabla de datos

Se debe recordar que en estas tablas los datos se presentan en forma listado, y corresponden al nivel C2 de complejidad semiótica de Arteaga (2011), debido a que no aparece la frecuencia asociada a cada dato y, por tanto, no emerge el concepto de distribución. Un ejemplo se presenta en la Figura 4.5.1.1 en que se registra el color de pelo y la altura (cm) de un grupo de chicos.

1. Vemos cómo es cada uno de los miembros del conjunto respecto a las características o variables que nos interesan. Por ejemplo:

Variables	Valores de la variable							
Color del pelo	Moreno	Rubio	Castaño	Rubio	Rubio	Rubio	Castaño	Rubio
Altura (cm)	145	142	156	131	145	138	141	150

Figura 4.5.1.1. Ejemplo de tabla de datos ([P2], p. 176)

Tabla de distribución de una variable

Como se indicó en los capítulos anteriores, este tipo de tablas representa la distribución de frecuencias de una variable, por lo que se puede asociar a un nivel C3 de complejidad semiótica (Arteaga, 2011). Al igual que en el Capítulo 3, se completa la propuesta de Arteaga (2011), clasificando este nivel de complejidad semiótica en tres subniveles:

- *C3.1. Tablas de frecuencias ordinarias:* Se incluiría en este tipo la distribución expresada únicamente en frecuencias absolutas, relativas o porcentaje. Por ejemplo, en la Figura 4.5.1.2, se utiliza la distribución de la preferencia de excursiones de un grupo de personas para explicar los conceptos de frecuencia absoluta y relativa; además, se traduce la información de la tabla a un gráfico de barras.

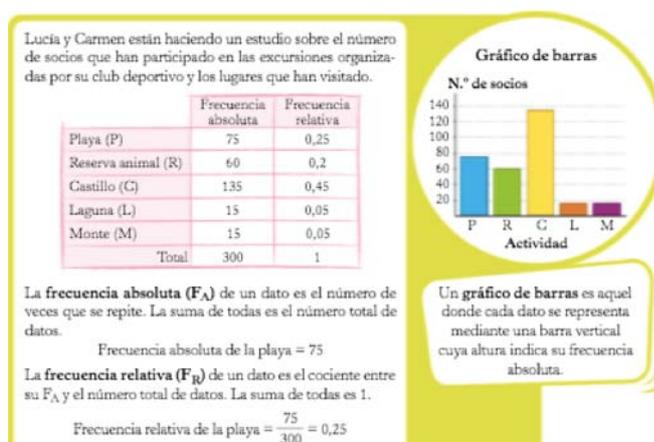


Figura 4.5.1.2. Ejemplo de tabla de frecuencias ordinarias ([P4], p. 206)

- *C3.2. Tabla de frecuencias acumuladas:* Se incluyen frecuencias acumuladas absolutas o relativas o en porcentaje, cuyo tratamiento involucra el manejo de desigualdades. En la Figura 4.5.1.3 se utiliza una tabla de este tipo para determinar

la moda, media y mediana. También se incluyó una columna para facilitar el cálculo de la media aritmética.

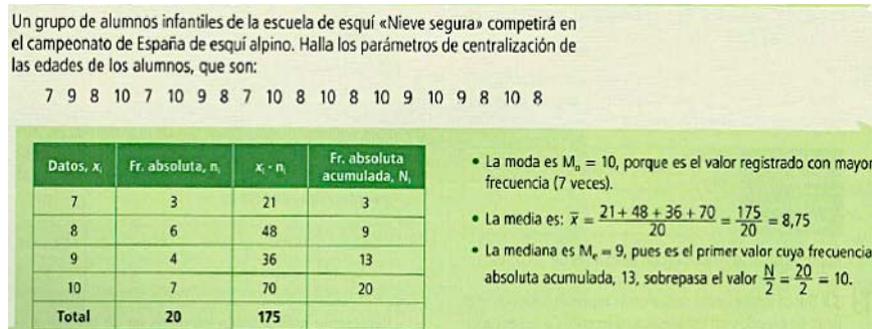


Figura 4.5.1.3. Tabla de frecuencias acumuladas ([S5], p. 194)

- *C3.3. Tabla de frecuencias agrupadas en intervalos:* Se incluye en este subnivel, las tablas de frecuencias simples o acumuladas, pero agrupando los valores de la variable en intervalos, lo que implica tratar con intervalos, sus extremos y valores aproximados, como en la Figura 4.5.1.4 la cual presenta un ejercicio resuelto, en donde a partir de la tabla de frecuencias agrupadas en intervalos se determina el intervalo modal y mediano, además de la media.



Figura 4.5.1.4. Ejemplo de tablas agrupadas en intervalos ([S5], p. 195)

Tabla de doble entrada o contingencia

Supone un nivel C4 de complejidad semiótica (Arteaga, 2011), pues permite estudiar la distribución de dos variables estadísticas unidimensionales (X e Y). En ellas se consideran frecuencias y distribuciones: absoluta o relativa conjunta (doble), absoluta o relativa marginal a la fila o a la columna, absoluta o relativa condicionada a la fila o a la columna (Batanero et al., 2015). Estas tablas, a su vez, podrían contener intervalos de clase, pero no es habitual considerar frecuencias acumuladas. Por tanto, se podría clasificar este nivel en dos subniveles:

- *C4.1. Tabla de doble entrada o contingencia de frecuencias ordinarias (absolutas o relativas).* En el ejemplo mostrado en la Figura 4.5.1.5 se relacionan las variables

grupo sanguíneo y el factor Rh, y se pide calcular, a partir de la tabla, probabilidades simples según las frecuencias relativas marginales a la fila o a la columna.

21. Se han hecho análisis de sangre 200 personas para determinar su grupo sanguíneo, así como el Rh. Los resultados se resumen en esta tabla:

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO O	TOTALES
RH+	74	12	6	70	162
RH-	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

- a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea O? ¿Y de que tenga Rh+?

Figura 4.5.1.5. Tabla de contingencia ([AP4], p. 208)

- C4.2. Tabla de doble entrada o contingencia con agrupación de valores en intervalos en una o ambas variables. Dicha agrupación aumenta la complejidad de la tabla, como se observa en la tarea mostrada en la Figura 4.5.1.6, en que se pide construir una pirámide de población con los datos entregados a través de la tabla.

GRUPO DE EDAD	N.º DE HOMBRES (MILLONES)	N.º DE MUJERES (MILLONES)
0-9	125	111
10-19	122	108
20-29	108	98
30-39	94	88
40-49	74	72
50-59	51	51
60-69	32	32
70-79	15	16
80-89	4	5
90-99	0,2	0,3

Figura 4.5.1.6. Tabla de contingencia con agrupación en intervalos ([AC1], p. 262)

La Tabla 4.5.1.1 y la Figura 4.5.1.7 resumen los resultados del análisis del tipo de tabla estadística, según el curso. Se observa, a nivel general, una alta presencia de las tablas de distribución de una variable (72,6%). En primer lugar aparecen las que presentan frecuencias ordinarias (absolutas, relativas y porcentuales) C3.1, seguido las que incorporan datos agrupados C3.3, tablas de datos C2 y las tablas de doble entrada o contingencia, con frecuencias ordinarias C4.1.

Tabla 4.5.1.1. Frecuencia (y porcentaje) del tipo de tabla y nivel de complejidad semiótica por nivel escolar

Tipo de tabla	Ed. Primaria		Ed. Secundaria				Total	
	5º EP	6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO		
Datos (C2)	26(18,7)	51(29,5)	20(7,5)	19(5,6)	66(7,5)	214(20,2)	396(13,8)	
Dist. una variable	Ord. (C3.1)	107(77)	110(63,6)	197(74,3)	183(53,7)	402(45,6)	328(30,9)	1327(46,4)
	Ac. (C3.2)			2(0,8)	28(8,2)	99(11,2)	55(5,2)	184(6,4)
	Agr. (C3.3)		4(2,3)	26(9,8)	32(9,4)	272(30,9)	232(21,8)	566(19,8)
Contingencia	Ord. (C4.1)	6(4,3)	8(4,6)	20(7,5)	79(23,2)	23(2,6)	228(21,5)	364(12,7)
	Agr. (C4.2)					19(2,2)	5(0,5)	24(0,8)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861	

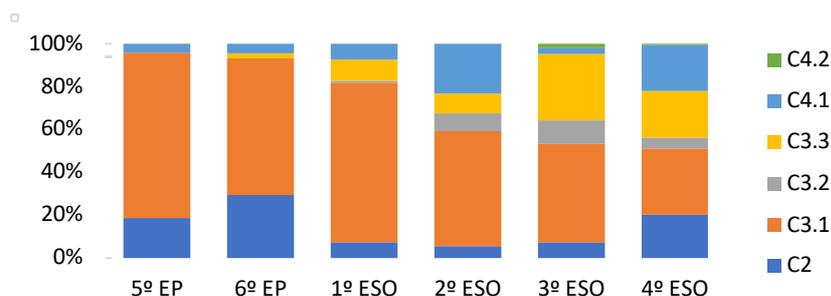


Figura 4.5.1.7. Porcentaje de tablas clasificadas por su complejidad semiótica en cada curso

Las tablas de complejidad C3.1 tienen alta presencia en la Enseñanza Primaria y en 1ºESO, pero disminuyen conforme se avanza de curso. Este hecho es coherente con los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015) dado que en estos niveles se proponen las tablas con frecuencias absolutas y relativas, y poco a poco se van incorporando nuevos objetos matemáticos que completan su estudio conforme se progresa en el curso. Por otra parte, hay un incremento a partir de 6º curso de las tablas de distribución de frecuencias con datos agrupados (C3.3), que alcanzan su mayor frecuencia en 3º de ESO. Los últimos cursos muestran todos los tipos de tablas, siendo algo más equilibrada su distribución en el último curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria. El nivel más alto de complejidad C4.2 es muy escaso en 3ºESO y prácticamente nulo en 4ºESO.

En Educación Secundaria Obligatoria los libros de texto recogen los lineamientos curriculares (MECD, 2015), dado que aparecen de manera progresiva los diferentes tipos de tablas estadísticas. Cabe destacar, por ejemplo, que la tabla de contingencia (C4.1) aparece en 4º curso de forma explícita en los contenidos a tratar en matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, y se constituye en una herramienta importante en el estudio de la probabilidad y la correlación, tanto en la matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas como aplicadas.

Distribución por editorial

En la Tabla 4.5.1.2 y Figura 4.5.1.8 se presenta un resumen del tipo de tabla asociado a su nivel de complejidad semiótica, por cada editorial que compone la muestra. En Educación Primaria, el tipo de tabla que aparece con mayor fuerza siguen siendo el de distribución de frecuencia de una variable con frecuencias ordinarias tipo C3.1, seguidas de las tablas de datos con una complejidad semiótica tipo C2.

Tabla 4.5.1.2. Frecuencia (y porcentaje) del tipo de tabla y nivel de complejidad semiótica por editorial

Tipo de tabla	5º y 6º Educación Primaria			Educación Secundaria			
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana	
Datos (C2)	15(18,3)	31(23,8)	31(31)	131(15,2)	116(13)	72(9,1)	
Dist. una variable	Ord. (C3.1)	66(80,5)	83(63,8)	68(68)	322(37,4)	386(43,3)	402(50,6)
	Acum.(C3.2)				44(5,1)	91(10,2)	49(6,2)
	Agr.(C3.3)	1(1,2)	3(2,3)		164(19)	167(18,7)	231(29,1)
Contingencia	Ord. (C4.1)		13(10)	1(1)	191(22,2)	127(14,2)	32(4)
	Agr. (C4.2)				10(1,2)	5(0,6)	9(1,1)
Total	82	130	100	862	892	795	

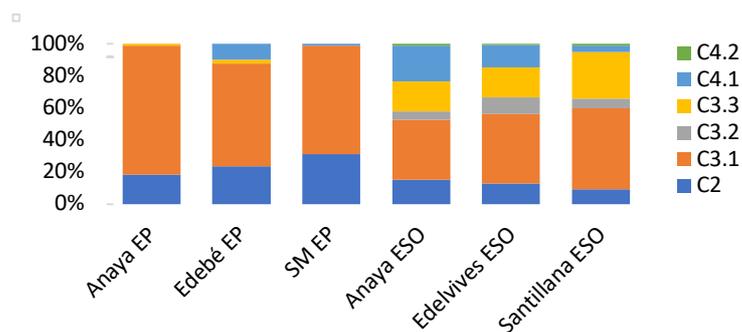


Figura 4.5.1.8. Porcentaje de tablas clasificadas por su complejidad semiótica según editorial

En Educación Secundaria Obligatoria, la presencia de las tablas de complejidad C3.1 disminuye respecto a Educación Primaria; sin embargo, conservan una alta frecuencia, siendo mayor en la editorial Santillana. En este nivel educativo las editoriales incorporan las tablas de distribución de una variable con datos agrupadas (C3.3), sobre todo en Santillana, junto con las tablas de contingencia con frecuencias ordinarias enmarcadas en un nivel C4.1 de complejidad semiótica, teniendo estas una mayor frecuencia en Anaya, seguido de Edelvives.

4.5.2. TIPO DE VARIABLE

Las tablas estadísticas son utilizadas para representar todo tipo de variables, que pueden tener diversa naturaleza, lo que implica que sean medidas de diferente manera (Bologna, 2012). Se distinguen dos tipos de variables, las cualitativas y cuantitativas, cada una de ellas se puede medir con diferente escala. Para las variables cualitativas se usa la escala nominal asociada a cualidades en las que no es posible realizar cálculos entre sus categorías, por ejemplo, color de pelo o la comida favorita. En las variables cuantitativas medidas a escala de intervalo o de razón, es posible realizar operaciones con sus categorías, y se identifican las variables cuantitativas discretas, que toman valores aislados (generalmente números enteros), y las continuas, que pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo fijado.

El tipo de variable representado en las tablas ha sido analizado en las construcciones de representaciones tabulares en futuros maestros (Fernandes et al., 2020), pero no en libros de texto; y de los descritos en el Capítulo 3 tampoco se consideró, porque el estudio del tipo de variable no se encontraba descrito explícitamente en los lineamientos curriculares chilenos (MINEDUC, 2015; 2018), a diferencia del currículo español (MECD, 2014; 2015).

En este análisis se considera el tipo de variable representado en la tabla, distinguiendo si se trata de una variable cualitativa, cuantitativa discreta o continua y mixta (cualitativa y cuantitativa). En el ejemplo de la Figura 4.5.1.5 se muestran dos variables cualitativas (grupo sanguíneo y factor Rh) en escala nominal, pero no se diferencia para este tipo de variable si se trata de una escala nominal u ordinal pues no aparece esta distinción en los contenidos explicitados en los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015).

La Figura 4.5.1.3 muestra una tabla de distribución de frecuencias con la variable edad, en años, que es cuantitativa discreta. Un ejemplo de variable cuantitativa continua

se presenta en la Figura 4.5.2.1, que representa el peso registrado de las mochilas de un grupo de estudiantes; como esta variable (kg.) puede tomar valores diversos se agrupa en intervalos.

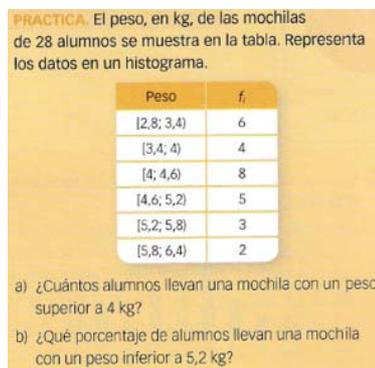


Figura 4.5.2.1. Tabla con variable cuantitativa continua ([AC3], p. 270)

En el análisis también aparecen tablas que representaban más de un tipo de variable, denominadas mixta, como por ejemplo, en la Figura 4.5.1.1 que aparece una tabla de datos que registra el color de pelo (cualitativa) y la estatura en cm. (cuantitativa) de un grupo de chicos.

La Tabla 4.5.2.1 y la Figura 4.5.2.2 presentan los resultados obtenidos en el análisis del tipo de variable representada por nivel educativo. La variable que se representa más comunmente es la de tipo cuantitativa discreta, seguida de la cualitativa y le sigue la cuantitativa continua, para terminar con las mixtas. En 5° curso, las variables cuantitativas continuas se encuentran ausentes, y comienzan a aparecer a partir de 6° curso. A nivel general, las tablas que representan variables mixtas (cualitativa y cuantitativa) son escasas y no muestran un incremento conforme se progresa de curso.

Tabla 4.5.2.1. Frecuencia (y porcentaje) de tipo de variable según nivel educativo

Tipo de variable	Educación Primaria		Educación Secundaria				Total	
	5° EP	6° EP	1° ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO		
Cualitativa	74(53,2)	58(33,5)	83(31,3)	119(34,9)	127(14,3)	208(19,6)	669(23,4)	
Cuant.	Discreta	60(43,2)	100(57,8)	145(54,7)	149(43,7)	557(63,2)	645(60,7)	1656(57,9)
	Continua		13(7,5)	29(10,9)	48(14,1)	160(18,2)	173(16,3)	423(14,8)
Mixta	5(3,6)	2(1,2)	8(3)	25(7,3)	37(4,2)	36(3,4)	113(3,9)	
Total	139	173	265	341	881	1062	2861	

Las tablas que representan una variable mixta aparecen de manera similar en los diferentes cursos de Educación Secundaria Obligatoria, siendo más frecuentes en 2° curso. La variable cuantitativa continua, se incrementa algo más en Educación Secundaria Obligatoria, sobre todo en 3° curso, seguido de 4° curso, lo que se enmarca en los lineamientos curriculares (MECD, 2015), pues estos indican su estudio a partir de 3°ESO para las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas y aplicadas.

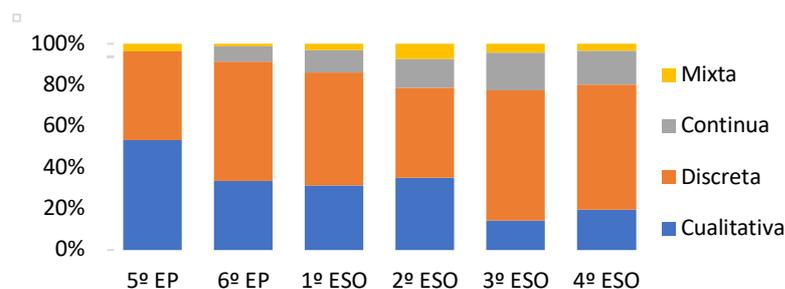


Figura 4.5.2.2. Porcentaje de tipo de variable por nivel educativo

Distribución por editorial

El análisis sobre el tipo de variable representado en las tablas estadísticas, en las diferentes editoriales, se resume en la Tabla 4.5.2.2 y Figura 4.5.2.3. Se observa que, en 5º y 6º curso, Anaya es la editorial que más considera las variables cuantitativas discretas, seguida de Edebé y SM, mientras que las variables de tipo cualitativo aparecen con mayor frecuencia en SM y Edebé. Las variables cuantitativas continuas solo son incorporadas en las editoriales SM y en un menor porcentaje por Edebé. Las tablas que representan tanto variables cualitativas como cuantitativas (mixtas) en Educación Primaria son consideradas en un porcentaje menor, solo por las editoriales SM y Edebé.

Tabla 4.5.2.2. Frecuencia (y porcentaje) del tipo de variable por editorial

Tipo de variable	5º y 6º Educación Primaria			Educación Secundaria			
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana	
Cualitativa	32(39)	48(36,9)	52(52)	241(28)	180(20,2)	116(14,6)	
Cuantitativa	Discreta	50(61)	77(59,2)	33(33)	420(48,7)	563(63,1)	513(64,5)
	Continua		2(1,5)	11(11)	153(17,7)	130(14,6)	127(16)
Mixta		3(2,3)	4(4)	48(5,6)	19(2,1)	39(4,9)	
Total	82	130	100	862	892	795	

En la Educación Secundaria Obligatoria se trabaja principalmente con variables cuantitativas en las tres editoriales analizadas, especialmente la de tipo discreta, apareciendo con mayor frecuencia en Santillana y Edelvives. La variable cualitativa decae en los libros de Educación Secundaria, algo esperable por los diferentes contenidos que se tratan en este nivel educativo.

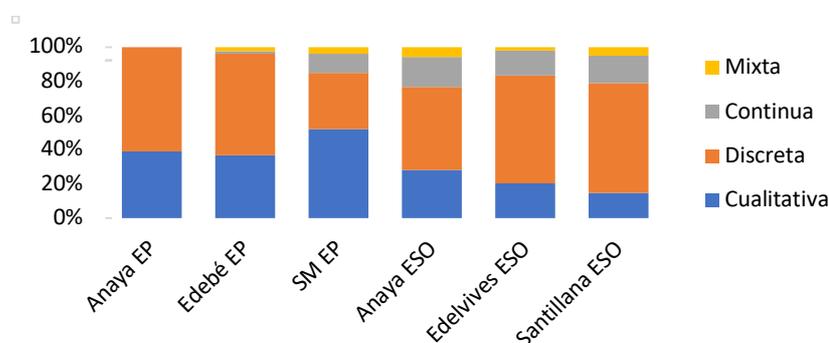


Figura 4.5.2.3. Porcentaje de tipo de variable por editorial

En resumen, la distribución del tipo de variable en las editoriales Edelvives y Santillana es similar en representatividad, aunque se diferencian un tanto de Anaya, debido a que esta última solo considera dos tipos de variable: cualitativa y cuantitativa discreta, aunque incorpora una mayor cantidad de tablas con variables cuantitativas discretas que las anteriores.

4.5.3. CONTEXTO

Al igual que el Capítulo 3, se analizó el contexto de las actividades, por su influencia en la comprensión de un problema y la elección de un método para su solución (Wijaya et al., 2014), y la relevancia de proponer a los estudiantes tareas matemáticas que reflejen la realidad (van Den Heuvel-Panhuizen, 2005).

Se ha considerado, de manera similar al Capítulo 3 y en otras investigaciones previas (Díaz-Levicoy et al., 2015; García-García et al., 2019; Gea et al., 2013), los contextos propuestos en los estudios internacionales de evaluación PISA (OECD, 2019). A continuación se describen las categorías consideradas.

Contexto personal

Son actividades que describen situaciones de la vida familiar o personal de los estudiantes. Un ejemplo se muestra en la Figura 4.5.3.1, que es una tabla de datos con las diferentes actividades y el tiempo (horas) que dedica diariamente una niña; otros ejemplos serían la comida preferida de un grupo de niños, o la cantidad de puntos conseguidos en un juego.

5 Observa la distribución de las horas del día en las actividades de Lucía.

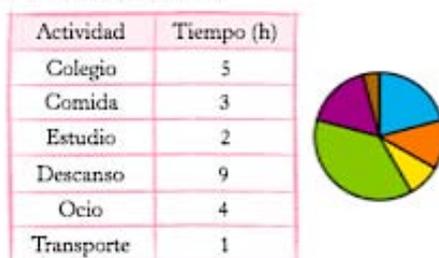


Figura 4.5.3.1. Ejemplo de actividad de contexto personal ([P4], p. 216)

Contexto científico

Los datos describen actividades científicas, como medir, pesar, realizar encuestas o procesos tecnológicos como diseño, manufactura o telecomunicación. Así, en la Figura 4.5.1.5 se presenta una tabla de contingencia en que se relaciona el grupo sanguíneo y el factor Rh de un grupo de personas.

Contexto público

Son datos de situaciones que ocurren en una comunidad mayor que la familia, por ejemplo, la ciudad, provincia o país e incluso en otros países. También se incluyen datos tomados de la prensa y otros medios de comunicación. Un ejemplo, sería el mostrado en la Figura 4.5.1.6, en la que se presenta la distribución por edad de la población en la India.

Contexto educativo

Este tipo de contexto fue considerado por Gea (2014) en su análisis de la correlación en los libros de texto de Bachillerato. Se trata de actividades que el estudiante observa en el centro escolar, como el número de niñas por aula en un colegio, el número de profesores, o resultados de exámenes y tareas. La Figura 4.5.3.2 presenta una tabla con el registro de calificaciones obtenidas por un grupo de estudiantes de 4ºESO.

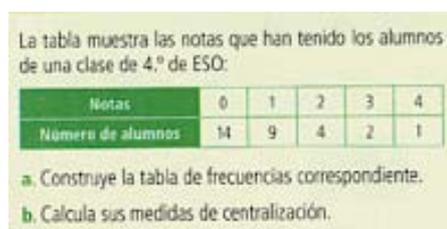


Figura 4.5.3.2. Ejemplo de actividad de contexto educativo ([AP5], p.162)

Contexto ocupacional o laboral

Se describe el mundo del trabajo, por ejemplo, comercio, producción, exportación, etc. Por ejemplo, la Figura 4.5.3.3 muestra el número de artículos vendidos en una tienda de tecnología, donde la información es representada en formato tabular y gráfico (gráfico de barras).

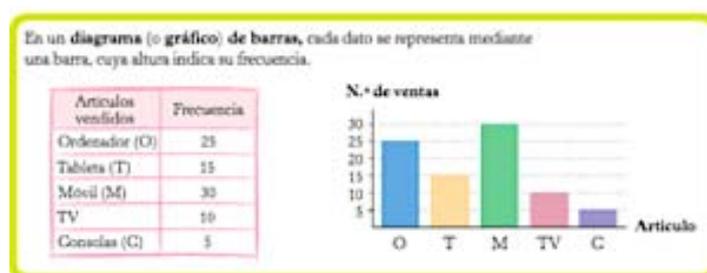


Figura 4.5.3.3. Ejemplo de actividad de contexto ocupacional o laboral ([P1], p. 59)

Experimento aleatorio

Como en el Capítulo 3, se considera esta categoría, analizada por Pallauta et al. (2021), puesto que se encontraron muchas actividades basadas en datos de experimentos aleatorios. Un ejemplo se muestra en la Figura 4.5.3.4 en que, a partir de los resultados obtenidos al lanzar 100 veces un dado cúbico, se define un suceso y el estudiante debe determinar su frecuencia absoluta y relativa a partir de la información proporcionada por la tabla.

Los resultados de lanzar 100 veces un dado son:

Dado	Frecuencia absoluta, n_i
1	18
2	24
3	7
4	16
5	15
6	20

Si consideramos el suceso $A = \{\text{obtener un 2}\}$:

- ¿Cuál es su frecuencia absoluta?
- ¿Y la frecuencia relativa?

Figura 4.5.3.4. Ejemplo de actividad de contexto experimento aleatorio ([S5], p. 211)

Sin contexto

Al igual que Gea et al. (2013), se considera esta última categoría, puesto que un aprendizaje producido mediante tareas en contexto promovería mejores opciones de comprensión de conceptos a largo plazo (van Den Heuvel-Panhuizen, 2005). Un ejemplo sin contexto se presenta en la Figura 4.5.3.5, que es una actividad para estudiantes de 3°ESO, que persigue poner en práctica el cálculo de las medidas de centralización.

PRACTICA. Calcula las medidas de centralización.

a)

x_i	4	5	7	9	10
f_i	2	6	3	4	2

Figura 4.5.3.5. Ejemplo de actividad sin contexto ([AC3], p. 272)

La Tabla 4.5.3.1 y Figura 4.5.3.6 resumen los resultados del análisis de los contextos propuestos. Se observa que el contexto con mayor presencia es el de tipo personal, seguido del público y sin contexto. Los contextos que menos aparecen son el educativo, seguido del científico, para terminar con el laboral u ocupacional. Al igual que otros análisis de libros de texto (Díaz-Levicoy et al., 2018; García-García et al., 2019) y el realizado con textos escolares chilenos descrito en el Capítulo 3, el contexto que aparece con mayor frecuencia es el personal; esto puede ocurrir debido a la importancia que se otorga en los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015) el plantear al estudiante actividades que sean propias de su entorno cercano.

Tabla 4.5.3.1. Frecuencia (y porcentaje) de contextos por nivel educativo

Contexto	Ed. Primaria		Ed. Secundaria				Total
	5° EP	6° EP	1° ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO	
Científico	19(13,7)	39(22,5)	7(2,6)	27(7,9)	55(6,2)	96(9)	243(8,5)
Educativo	14(10,1)	13(7,5)	18(6,8)	43(12,6)	85(9,6)	129(12,1)	302(10,6)
Exp.aleatorio	8(5,8)	26(15)	26(9,8)	43(12,6)	84(9,5)	118(11,1)	305(10,7)
Laboral	6(4,3)	8(4,6)	11(4,2)	41(12)	72(8,2)	57(5,4)	195(6,8)
Personal	83(59,7)	85(49,1)	135(50,9)	100(29,3)	253(28,7)	185(17,4)	841(29,4)
Público	9(6,5)	2(1,2)	38(14,3)	57(16,7)	191(21,7)	240(22,6)	537(18,8)
Sin contexto			30(11,3)	30(8,8)	141(16)	237(22,3)	438(15,3)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861

Se resalta la ausencia de actividades sin contexto en 5° y 6° curso, en la que destacan el contexto personal, seguido del científico y educativo; también tiene una presencia destacada el contexto experimento aleatorio, especialmente en 6° curso, aunque su representatividad es menor que en el estudio de los textos chilenos para dicho nivel educativo. El contexto público aparece escasamente en 5° curso, mientras que su presencia en 6° curso es prácticamente nula. Los resultados son similares a los obtenidos en el estudio de los textos chilenos (Capítulo 3).

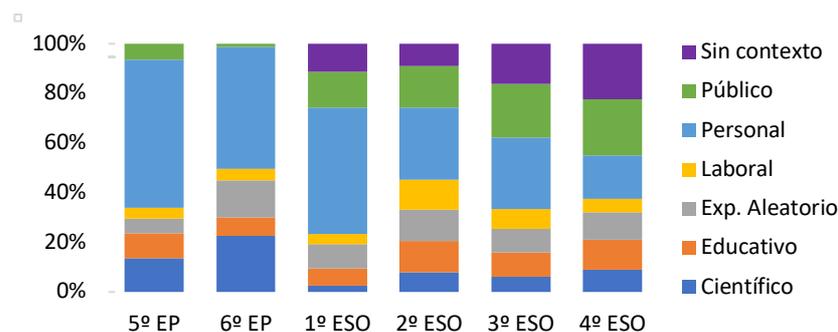


Figura 4.5.3.6. Porcentaje de tipos de contexto por nivel escolar

En Educación Secundaria Obligatoria, el contexto personal va decreciendo conforme se avanza de nivel educativo, mientras que el contexto público y actividades sin contexto aumentan en cada curso. El contexto científico aparece en todos los cursos, y en 1ºESO tiene una menor frecuencia. También las actividades enmarcadas en el contexto experimento aleatorio tienen una frecuencia similar en los curso de Educación Secundaria.

La presencia de actividades descontextualizadas se incrementa de manera progresiva en Educación Secundaria Obligatoria, lo que podría ser una tendencia a destacar, ya que en otros estudios dirigidos a libros de texto (Gea, 2014; Sánchez Cobo, 1999) se detectó una alta presencia de tareas sin contexto. Otra posible razón es que los estudiantes van alcanzando cierto grado de abstracción y conocimiento de definiciones y propiedades que les permiten aplicarlas en diversas situaciones-problemas (Gea, 2014).

Distribución por editorial

En la Tabla 4.5.3.2 y Figura 4.5.3.7 se revisan los tipos de contexto por editorial. Se constata que en 5º y 6º curso el contexto laboral no es considerado por las editoriales Edebé y SM, mientras que experimento aleatorio no se contempla en Anaya; sin embargo, esta es la única editorial que incluye el contexto laboral. En este nivel educativo, las tres editoriales asignan un número importante de actividades enmarcadas en un contexto personal, superando en Anaya y Edebé la mitad del total de tareas. Ello es debido a la importancia que se le otorga en los lineamientos curriculares (NCTM, 2014) de plantear al estudiante actividades propias de su vida cotidiana. El contexto científico en Educación Primaria aparece con mayor frecuencia en la editorial SM.

Tabla 4.5.3.2. Frecuencia (y porcentaje) de contextos por editorial

Contexto	5º y 6º Educación Primaria			Educación Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
Científico	7(8,5)	21(16,2)	30(30)	69(8)	92(10,3)	24(3)
Educativo	12(14,6)	7(5,4)	8(8)	156(18,1)	74(8,3)	45(5,7)
Exp. aleatorio		20(15,4)	14(14)	92(10,7)	139(15,6)	40(5)
Laboral	14(17,1)			30(3,5)	68(7,6)	83(10,4)
Personal	47(57,3)	74(56,9)	47(47)	287(33,3)	169(18,9)	217(27,3)
Público	2(2,4)	8(6,2)	1(1)	152(17,6)	205(23)	169(21,3)
Sin contexto				76(8,8)	145(16,3)	217(27,3)
Total	82	130	100	862	892	795

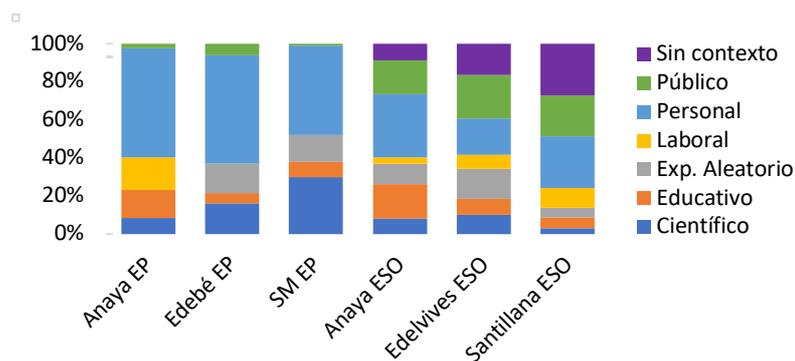


Figura 4.5.3.7. Porcentaje de tipos de contexto por editorial

En Educación Secundaria Obligatoria, las editoriales presentan actividades enmarcadas en los diferentes tipos de contextos. En este nivel educativo, Anaya recoge con mayor fuerza el contexto personal, seguido del educativo y el público. En Edelvives el contexto que más se repite es el de tipo público, seguido del personal. En Santillana, aparecen con mayor frecuencia actividades sin contexto y de tipo personal. Hay una proporción importante de actividades enmarcadas en experimentos aleatorios, apareciendo con más frecuencia en Edelvives y menor frecuencia en Santillana.

4.6. ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA TABLA ESTADÍSTICA EN LOS TEXTOS

De forma similar al Capítulo 1 y 3, se realiza un análisis semiótico de la tabla estadística a partir del estudio de los libros de texto españoles y los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015). A continuación, se presentan los resultados de cada objeto primario considerado en el EOS (Godino et al., 2007; 2019), se incluyen algunos ejemplos para facilitar la comprensión de las diferentes variables analizadas.

4.6.1. SITUACIONES-PROBLEMAS EN TORNO A LA TABLA ESTADÍSTICA

Como se expuso anteriormente, en el EOS se concede un papel primordial a la situación-problema, ya que a partir de las prácticas realizadas en su resolución surge el significado del objeto matemático (Godino et al., 2007; 2019). De ahí el interés de clasificar las situaciones-problemas asociadas a un cierto objeto matemático.

El análisis de las bases curriculares españolas (MECD, 2014; 2015), complementado con recomendaciones internacionales (Franklin et al., 2005; NCTM, 2014) y la revisión de antecedentes, ha permitido clasificar, teóricamente, las principales situaciones-problemas en que se enmarca el estudio de la tabla estadística en los niveles educativos abordados, que se describen a continuación. Se usarán las categorías descritas, con más detalle, en el Capítulo 3.

SP1. Registro y organización de los datos

Es el primer paso en un estudio estadístico, cuando se recogen datos con el propósito de posteriormente analizarlos e interpretarlos. En los textos analizados se ha encontrado este tipo de situación, como el ejemplo mostrado en la Figura 4.6.1.1 dirigido a 5º curso de Educación Primaria, donde se pide elegir una temática de la vida cotidiana

y recoger datos, para luego representarlos a través del formato tabular y gráfico, dicha información suele tener diferentes escalas de medida y tipos de variables estadísticas.

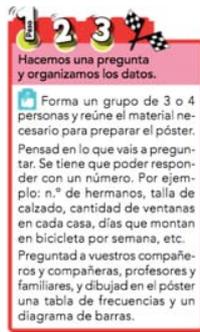


Figura 4.6.1.1. Registro de datos ([P1], p. 59)

SP2. Construcción de la distribución de una variable estadística

Este tipo de situación-problema surge de la necesidad de estudiar, en un conjunto de datos, los valores más o menos frecuentes de una variable estadística, organizarlos en clases, y resumir el proceso de conteo de frecuencias en cada clase mediante una tabla de distribución de frecuencias (absoluta, relativa o porcentual) de la variable. Esta estructura servirá para observar las categorías y moda de la variable o calcular medidas de tendencia central, posición y dispersión. Dependiendo del número de valores diferentes de la variable conviene, a veces, agruparlos en intervalos. Un ejemplo se presenta en la Figura 4.6.1.2 dirigida a 2ºESO en que, para facilitar el proceso se entregan los intervalos y se recuerda el concepto de marca de clase, posteriormente, se pide llevar esta información a un histograma.

Los miembros de la sección de infantiles de un club de atletismo han anotado sus pesos en un cuaderno:

48, 52, 36, 53, 44	39, 40, 53, 55, 47
54, 49, 57, 44, 54	41, 54, 48, 48, 52
51, 47, 58, 53, 50	46, 45, 38, 39, 49

a) Confecciona una tabla de frecuencias en la que los datos se repartan en los siguientes intervalos:
35,5 - 42,5; 42,5 - 49,5; 49,5 - 56,5; 56,5 - 63,5

Recuerda que la marca de clase de cada intervalo es su valor central, es decir, la suma de sus extremos dividida entre dos.

b) Representa los resultados en un histograma.

Figura 4.6.1.2. Construcción de una distribución de una variable unidimensional ([S4], p. 287)

SP3. Traducción entre representaciones

Esta transformación, que como se indicó en el Capítulo 3 es un ejemplo de transnumeración (Chick et al., 2005), se conforma en una componente esencial del razonamiento estadístico. Para promover este proceso, los textos proponen actividades de este tipo, que pueden clasificarse de la siguiente forma:

- *SP3.1. Traducción de tabla a gráfico o viceversa.* Cuando se pide pasar la representación de la información expuesta en un gráfico a una tabla estadística, o realizar el proceso inverso. Ejemplos de este tipo de situación-problema se encuentran en la Figura 4.5.1.2 en que los datos de una tabla que representa una variable cualitativa son llevados un diagrama de barras. En la Figura 4.5.3.1, a partir de la información entregada en una tabla se construye un gráfico de sectores.

- *SP3.2. Traducción de tabla a tabla.* Si se precisa pasar la información de una tabla a otro tipo de tabla diferente, por ejemplo, de una tabla de frecuencias con valores individuales de la variable a otra con valores agrupados en intervalos. En consecuencia, requiere de procesos de clasificación de datos, ordenar, agrupar y recuento. La Figura 4.6.1.3 muestra el proceso de traducción de una tabla de datos, donde se registra el valor obtenido en diez lanzamientos de un dado, a una tabla de distribución de frecuencias absolutas.

Los cuatro jugadores de una partida de parchís están lanzando el dado buscando obtener un cinco para poder sacar ficha. En los primeros diez lanzamientos realizados entre todos han obtenido los siguientes resultados:

Experimento	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Número obtenido	6	4	5	4	3	1	3	5	2	4

Nº obtenido	Frecuencia absoluta, n.
1	1
2	1
3	2
4	2
5	2
6	1

Figura 4.6.1.3. Traducción de tabla a tabla ([S5], p. 210)

- *SP3.3. Traducción de texto a tabla, o viceversa.* Esta traducción implica interpretar la información entregada a través de un enunciado, registrándola en una tabla, para luego responder a otras cuestiones. Por ejemplo, en la Figura 4.6.1.4 se presenta un relato que el estudiante debe llevar a una tabla de contingencia, para ello debe identificar las variables (sexo y deporte) y luego realizar algunos cálculos para poder completar la tabla.

En un campamento con 100 chicos y chicas, se les da la opción de piragüismo o equitación: 29 chicos y la tercera parte de las chicas han elegido **cayac**, y 34 chicas **prefieren montar a caballo**. Representa los datos en una tabla y halla la **proporción de chicas que hay entre los que eligieron cayac**.

Figura 4.6.1.4. Traducción de lenguaje verbal a tabla ([S4], p. 291)

- *SP3.4 Traducir de tabla a resumen estadístico, o viceversa.* En estos casos, a partir de la información expuesta en una tabla se debe determinar alguna medida de centralización, posición o dispersión que requiere, generalmente, el empleo de alguna fórmula. Para facilitar su cálculo, usualmente, se añaden columnas a la tabla (Erickson et al., 2019). Ejemplos de este tipo de situación-problema se presentan en la Figura 4.5.3.2 en que, a partir de los datos presentados en una tabla de frecuencias absolutas, se pide determinar las medidas de centralización, al igual que en la Figura 4.5.1.4. En este último caso, la variable se presenta en datos agrupados en intervalos, por lo que se solicita determinar el intervalo modal y mediano.

SP4. Clasificación cruzada de dos variables

La tabla de doble entrada o contingencia representa la distribución de frecuencias de una variable estadística bidimensional mediante celdas, en disposición rectangular, con tantas filas y columnas como valores tomen las variables que la conforman en el conjunto de datos. De acuerdo a Cañadas (2012), esta representación es compleja, debido a las diferentes frecuencias que se pueden observar en una misma celda, según se fije el interés en los totales de fila, de columna o el total de datos en el estudio.

Este campo de problemas, centrado en el tratamiento de datos bivariadas, se subdivide en tres tipos, según se pida organizar la información o bien se pida analizar la asociación entre las variables representadas en la tabla desde un punto de vista descriptivo o predictivo (Ver Capítulo 1). En nuestro estudio no hemos hecho distinción en el tipo de análisis que se pide al estudiante de la asociación y, por tanto, distinguimos dos subtipos, como explicamos a continuación:

- *SP4.1. Organización de la información de un conjunto de datos bivariados.* Se utiliza en el análisis inicial del estudio de la asociación entre variables (Gea, 2014), formando la tabla, a partir de un listado de datos bivariados. La Figura 4.6.1.5 muestra una situación planteada para 4ºESO, la cual consiste en construir una tabla de doble entrada en que se relacionen las notas de matemáticas e inglés obtenidas por los estudiantes de una clase.

Las notas en Matemáticas e Inglés de 42 alumnos de 4.º de ESO son:
(3, 3), (3, 3), (4, 5), (4, 8), (4, 8), (5, 3), (5, 3), (5, 5), (5, 8), (5, 8), (6, 6),
(6, 6), (5, 3), (6, 6), (6, 7), (5, 3), (5, 5), (5, 5), (5, 5), (5, 5), (5, 8), (5, 8),
(6, 7), (6, 7), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (7, 7), (7, 7), (8, 8), (8, 8), (8, 9), (5, 3),
(8, 8), (4, 5), (4, 5), (4, 5), (3, 5), (3, 5), (2, 4), (3, 5), (2, 4)
Representa esta información en una tabla bidimensional simple. A partir de ella construye una tabla de doble entrada y las tablas de distribución marginal de cada variable.

Figura 4.6.1.5. Construcción de la tabla de distribución de una variable estadística bidimensional ([AP4], p. 167)

- *SP4.2. Estudio de la asociación entre las variables.* La tabla de distribución de la variable estadística bidimensional sirve para facilitar cálculos que informen de la asociación de las variables (si son cualitativas) y en caso de ser numéricas calcular la covarianza y correlación. En general, las situaciones que planteaban analizar la asociación entre las variables pedían, también, obtener el modelo predictivo de mejor ajuste mediante el cálculo de la recta de regresión de Y sobre X, o de X sobre Y. Llevar a cabo esta tarea implica aplicar una variedad de conceptos previos, como las medias y desviación de cada una de las variables unidimensionales. En la Figura 4.6.1.6 se presenta un ejemplo en que, a partir de la información presentada en la tabla de datos, se debe calcular el coeficiente de correlación y la recta de regresión de Y sobre X.

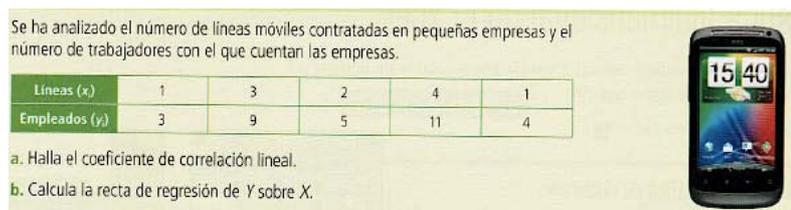


Figura 4.6.1.6. Estudio de la asociación entre las variables ([AC5], p. 281)

En la Tabla 4.6.1.1 y la Figura 4.6.1.7 se resume el análisis realizado a las situaciones-problemas por nivel educativo. La situación-problema que aparece con mayor frecuencia es la SP3.4 ligada a la traducción de tabla a un resumen estadístico, lo que implica la gran importancia dada a estos cálculos en los textos.

Tabla 4.6.1.1. Frecuencia (y porcentaje) de las situaciones-problemas por nivel educativo

Situación problema	Educación Primaria		Educación Secundaria				Total
	5° EP	6° EP	1° ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO	
SP1	16(11,5)	23(13,3)	8(3)	6(1,8)	13(1,5)	31(2,9)	97(3,4)
SP2	41(29,5)	49(28,3)	95(35,8)	89(26,1)	272(30,9)	142(13,4)	688(24)
SP3 SP3.1	35(25,2)	34(19,7)	45(17)	57(16,7)	138(15,7)	209(19,7)	518(18,1)
SP3.2	4(2,9)	4(2,3)	2(0,8)	9(2,6)	7(0,8)	37(3,5)	63(2,2)
SP3.3	4(2,9)	3(1,7)	3(1,1)	2(0,6)	5(0,6)	11(1)	28(1)
SP3.4	36(25,9)	55(31,8)	111(41,9)	148(43,4)	444(50,4)	542(51)	1336(46,7)
SP4 SP4.1	3(2,2)	5(2,9)	1(0,4)	30(8,8)	2(0,2)	49(4,6)	90(3,1)
SP4.2						41(3,9)	41(1,4)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861

Le sigue de SP2, que implica la construcción de una tabla de distribución de una variable, para reforzar el aprendizaje de los diferentes tipos de frecuencia, y luego SP3.1 correspondiente a la traducción de tabla a gráfico, y viceversa.

Estos resultados, son similares a los observados en el análisis realizado a los textos escolares chilenos, descrito en el Capítulo 3, aunque cabe precisar que se han realizado algunas modificaciones a las categorías, en concreto las que enmarcan el trabajo con las tablas de doble entrada en el análisis de la dependencia entre las variables que conforman la variable bidimensional, siguiendo los lineamientos curriculares y la ampliación de cursos en este estudio, lo que refiere exclusivamente a la categoría SP4.2, que es más completa en el análisis en los textos escolares españoles que en los chilenos. En cualquier caso, las situaciones-problemas SP4.2 ligadas al estudio de la asociación de variables que conforman una distribución bidimensional son escasas y aparecen solo en 4°ESO, lo cual era esperable pues esta temática es tratada a partir de este curso, de acuerdo a los lineamientos curriculares (MECD, 2015).

En 5° y 6° curso, la situación-problema que aparece con mayor frecuencia es SP3.4, con mayor porcentaje en 6° curso, junto a SP2 que se presenta de manera similar en ambos cursos. Le sigue SP3.1 correspondiente a un tipo de traducción que implica pasar de una tabla a un gráfico, o viceversa.

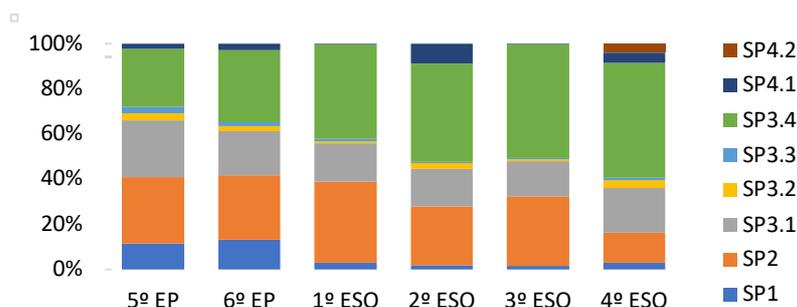


Figura 4.6.1.7. Porcentaje de tipos de situaciones-problemas en cada nivel escolar

En Educación Secundaria Obligatoria SP3.4, relacionada con la obtención de estadísticos a partir de una tabla, aparece con gran peso en todos los cursos. La categoría SP2, ligada a la construcción de la tabla de distribución de una variable estadística disminuye en 4ºESO, mientras que el tratamiento de la tabla de doble entrada o contingencia es muy limitado: su construcción destaca solo en 2ºESO y 4ºESO, en una escasa frecuencia, mientras que el análisis de la dependencia, como se comentó anteriormente, solo se contempla en 4ºESO. Destacamos este resultado porque los lineamientos curriculares (MECD, 2015) contemplan su estudio, especialmente en 4ºESO como herramienta para el tratamiento de la probabilidad y la introducción al análisis de la correlación, por lo que consideramos que la situación-problema de la construcción de este tipo de tabla está desatendida.

Distribución por editorial

Para complementar el análisis, la Tabla 4.6.1.2 y la Figura 4.6.1.8 resumen la presencia de las situaciones-problemas por editorial. En 5º y 6º curso, como señalamos anteriormente, las editoriales no presentan situaciones-problemas SP4.2, ligadas al análisis de la asociación entre variables. En Anaya la actividad más frecuente es SP2 (construcción de tablas de distribución de una variable), y no se contemplan situaciones-problemas SP3.2 que corresponde a un tipo de traducción que lleva la información de un tipo de tabla a otra, ni tampoco SP4.1. Edebé y SM incorporan prácticamente la totalidad de las categorías, priorizando situaciones del tipo SP3.4 traducción de tabla a estadístico, mientras que SP3.3 traducción de texto a tabla, o viceversa, apenas aparece en las editoriales.

Situación problema	5º y 6º Educación Primaria			Educación Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
SP1	8(9,8)	17(13,1)	14(14)	18(2,1)	26(2,9)	14(1,8)
SP2	38(46,3)	26(20)	26(26)	139(16,1)	240(26,9)	219(27,5)
SP3 SP3.1	16(19,5)	27(20,8)	26(26)	151(17,5)	140(15,7)	158(19,9)
SP3.2		4(3,1)	4(4)	9(1)	41(4,6)	5(0,6)
SP3.3	1(1,2)	5(3,8)	1(1)	6(0,7)	3(0,3)	12(1,5)
SP3.4	19(23,2)	44(33,8)	28(28)	492(57,1)	369(41,4)	384(48,3)
SP4 SP4.1		7(5,4)	1(1)	47(5,4)	34(3,8)	1(0,1)
SP4.2					39(4,4)	2(0,3)
Total	82	130	100	862	892	795

Las editoriales de Educación Secundaria Obligatoria abarcan todas las categorías de situaciones-problemas identificadas previamente, excepto Anaya que no contempla situaciones-problema SP4.2. En las tres es frecuente SP3.4, situación-problema que implica la obtención de un estadístico a partir de la información entregada en una tabla, sobre todo en Anaya, seguida de Santillana y Edelvives.

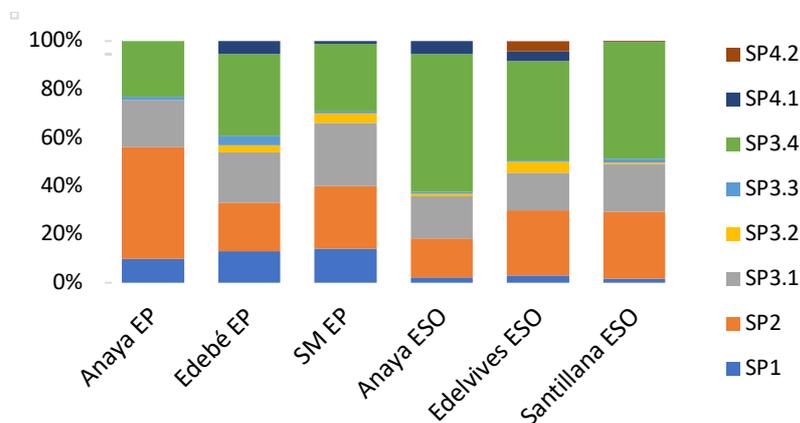


Figura 4.6.1.8. Porcentaje de tipo de situaciones-problemas por editorial

Como comentamos anteriormente, la situación-problema SP4.2 de análisis de la asociación entre las variables que conforman una distribución bidimensional apenas se incluye en las editoriales, el caso más destacado es Anaya, mientras que Edelvives la recoge con un mayor porcentaje. La traducción de lenguaje verbal a tabla o viceversa (SP3.3) es muy poco abordada en los textos de Educación Secundaria Obligatoria, al igual que SP3.2, de traducción de tabla a tabla, aunque en Edelvives aparece un poco más; en su mayoría, son actividades en las que se pide pasar de una tabla de doble entrada a una de distribución de frecuencias marginales.

4.6.2. EL LENGUAJE UTILIZADO EN LAS TABLAS

En el Capítulo 3 se destacó la importancia del lenguaje en el enfoque ontosemiótico, de hecho Font et al. (2007) diferencian entre objetos matemáticos ostensivos y no ostensivos, los cuales son representados mediante el lenguaje matemático. Por ello se requiere asistir a la necesidad de implementar un lenguaje disciplinario que permita proveer de mejores herramientas para la resolución de problemas (Zahner y Aquino-Sterling, 2020).

En el estudio de las tablas estadísticas, se han encontrado diferentes tipos de lenguaje manifestado a través de símbolos, términos verbales, diagramas, elementos que tienen un importante rol en la construcción de nuevos conceptos matemáticos (Planas et al., 2018). En este análisis se ha clasificado el lenguaje en: simbólico, verbal, numérico y diagramático (este último en la misma tabla).

Lenguaje verbal

Se encuentra presente en el título de las tablas, etiquetas de las modalidades y la variable, magnitudes estudiadas y tipos de frecuencia. Por ejemplo, en la Figura 4.5.3.3

las categorías de la variable corresponden a objetos disponibles en una tienda y la columna de la frecuencia absoluta se etiqueta mediante lenguaje verbal.

La finalidad de este lenguaje es ayudar al estudiante, especialmente de los primeros niveles educativos, a comprender mejor la información expuesta en la tabla, pues es necesario realizar un puente entre el lenguaje verbal y el específico de la disciplina con el propósito de que los estudiantes puedan resolver diferentes tareas (Zahner y Aquino-Sterling, 2020).

Lenguaje numérico

En las celdas de la tabla estadística se ubican los datos que pueden ser de tipo diverso. Incluyen números enteros y/o racionales (decimales, fraccionarios o porcentajes); incluso, en ocasiones, la celda puede contener más de un tipo de número. En la Figura 4.6.2.1 las celdas interiores presentan diferentes tipos de números: enteros para la frecuencia absoluta (en el ejemplo: f_i), fracciones y decimales para la frecuencia relativa (en el ejemplo: $f_{relativa}$), y porcentajes en la frecuencia relativa porcentual (en el ejemplo, números naturales identificados por la etiqueta simbólica: %).

x_i	f_i	$f_{relativa}$	%
0	2	$2/20 = 0,10$	10
1	5	$5/20 = 0,25$	25
2	3	$3/20 = 0,15$	15
3	6	$6/20 = 0,30$	30
4	3	$3/20 = 0,15$	15
5	1	$1/20 = 0,05$	5
TOTAL	20	1,00	100

Figura 4.6.2.1. Lenguaje numérico en la tabla estadística [AC1], p. 257)

Lenguaje simbólico

El lenguaje simbólico en el estudio de las tablas depende del tipo de tabla y nivel educativo al que se dirige el libro de texto, pues en los primeros cursos se tiende a usar el lenguaje verbal, para pasar progresivamente a los símbolos. Un ejemplo se presenta en la Figura 4.6.2.2 donde, en la tabla de datos, se representa la media y desviación típica de cada una de las muestras a través de sus símbolos (\bar{x} , σ). También en el ejemplo de la Figura 4.6.2.1 se utiliza el símbolo de porcentaje (%) para etiquetar la columna de la frecuencia porcentual de la variable en la tabla.

Se ha medido el nivel de colesterol en cuatro grupos de personas sometidas a diferentes dietas. Las medias y las desviaciones típicas son las de la tabla:

DIETA	A	B	C	D
\bar{x}	211,4	188,6	209,2	188,6
σ	37,5	52,6	56,3	43,1

Figura 4.6.2.2. Lenguaje numérico en la tabla estadística [AC4], p. 212)

La Tabla 4.6.2.1 presenta los símbolos encontrados en las tablas estadísticas analizadas, o en las tareas que se proponen respecto a las mismas, en la cual se observa mayor diversidad que lo encontrado en el Capítulo 3 con los textos escolares chilenos.

Tabla 4.6.2.1. Tipos de símbolos y operaciones ligadas a las tablas estadísticas por nivel educativo

Notación	Concepto	Ed. Primaria		Ed. Secundaria			
		5° EP	6°EP	1°ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO
=, %	Igualdad, porcentaje	x	x	x	x	x	x
[...], (...]	Intervalos		x	x	x	x	x
\sum_n	Sumatorio sin subíndices			x		x	x
$\sum_{i=1}^n$	Sumatorio con subíndice					x	x
N, n	Número total de observaciones			x	x	x	x
x_i ; n_i , f_i	Valor de la variable X; frecuencia absoluta y relativa		x	x	x	x	x
\bar{x}	Media de la variable X			x	x	x	x
N_i ; F_i	Frecuencia absoluta y relativa acumulada			x	x	x	x
M_e ; M_o	Mediana y moda			x	x	x	x
Q_i ; P_i ; D_i	Cuartiles, percentiles y deciles				x	x	x
R_i	Rango				x	x	x
D_m	Desviación media			x	x	x	
CV	Coefficiente de variación					x	x
σ_x ; s_x ; σ_x^2 ; S_x^2	Desviación típica, varianza de X				x	x	x
σ_{xy} s_{xy} ; r r_{xy}	Covarianza y coeficiente de correlación lineal de X e Y						x
P(x)	Probabilidad de un suceso x			x	x	x	x
<, >; ≤,	Menor, mayor que, menor o igual que	x	x	x	x	x	x

Podemos apreciar que el lenguaje simbólico se va incrementando conforme se progresa de curso. En 5° y 6° curso los símbolos son escasos, a partir de 6° curso además de los operadores relacionales (igualdad y desigualdad) y porcentaje, aparecen los símbolos que representan las frecuencias absolutas y relativas (f_A , f_r).

En Educación Secundaria Obligatoria, se observa un incremento progresivo de símbolos en los cursos, lo que va asociado a los diferentes conceptos que se trabajan por medio de la tabla estadística, por ejemplo, a partir de 3°ESO aparece el símbolo de sumatoria con subíndices, mientras que en 4°ESO se presentan los símbolos de la covarianza y coeficiente de correlación, siendo el curso que presenta una mayor variedad de símbolos.

El ampliar el uso de símbolos conforme se progresa de curso, es un aspecto positivo, porque como señala Godino (2002), el lenguaje simbólico tiene un rol importante en la articulación de los diferentes componentes que intervienen en la resolución de una situación-problema. También tiene un papel fundamental en la comunicación tanto de los procedimientos desarrollados como de la resolución de una tarea (Zahner y Aquino-Sterling, 2020).

Análisis por editorial

Al analizar los símbolos presentados por las distintas editoriales que componen nuestra muestra (Tabla 4.6.2.2). Es posible apreciar que en 5° y 6° curso los símbolos son escasos, siendo Anaya la que presenta una mayor variedad, pues además de los operadores relacionales se incluyen símbolos para la frecuencia absoluta y relativa. Por otra parte, SM solo incorpora símbolos relacionales, mientras que Edebé, es la única editorial en la cual aparecen símbolos asociados a valores de una variable en intervalos de clase.

Tabla 4.6.2.2. Tipos de símbolos y operaciones ligadas a las tablas estadísticas por editorial

Notación	Concepto	Educación Primaria			Educación Secundaria		
		Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
=, %	Igualdad, porcentaje	x	x	x	x	x	x
[...),(...]	Intervalos		x		x	x	x
\sum	Sumatorio sin subíndices				x	x	x
$\sum_{i=1}^n$	Sumatorio con subíndice					x	x
N, n	Número total de observaciones				x	x	x
x_i ; n_i , f_i	Valor de la variable X; frecuencia absoluta y relativa	x			x	x	x
\bar{x}	Media de la variable X				x	x	x
N_i ; F_i	Frecuencia absoluta y relativa acumulada				x	x	x
M_e ; M_o	Mediana y moda				x	x	x
Q_i ; P_i ; D_i	Cuartiles, percentiles y deciles				x	x	x
R_i	Rango				x	x	x
D_m	Desviación media					x	x
CV	Coefficiente de variación				x	x	x
σ_x ; s_x ; σ_x^2 ; S_x^2	Desviación típica, varianza de X				x	x	x
σ_{xy} s_{xy} ; r r_{xy}	Covarianza y coeficiente de correlación lineal de X e Y				x	x	
P(x)	Probabilidad de un suceso x				x	x	x
<, >; ≤, ≥	Menor, mayor que, menor o igual	x		x	x	x	x

En Educación Secundaria Obligatoria, la presencia de los diferentes símbolos ligados a las tablas estadísticas es similar en las editoriales. Algunas diferencias son que el uso del símbolo de sumatoria con subíndices no es considerado por Anaya, que también hace poco uso de paréntesis para los valores agrupados en intervalos, símbolos para la covarianza y coeficiente de correlación no están propuestos por la editorial Santillana.

4.6.3. PROCEDIMIENTOS CON TABLAS ESTADÍSTICAS

Otro punto abordado son los procedimientos, que constituyen un componente destacado de la competencia matemática (Rittle-Johnson y Star, 2007). Los

procedimientos están ligados a los conocimientos, y ambos son relevantes en el desarrollo de la competencia matemática (Star, 2005). Los estudiantes deben desarrollarlos para resolver las tareas, y pueden ser algorítmicos (reglas prácticas) o heurísticos; estos últimos implican la decisión del procedimiento más idóneo para resolver un problema (Star, 2005). En el análisis, se clasificaron los diferentes tipos de procedimientos propuestos en los textos en torno a la tabla estadística, los cuales son descritos y detallados a continuación.

P1. Leer una tabla

Cuando se obtiene información a partir de la misma, incluyendo la lectura de datos aislados, tendencias, interpolación o extrapolación. Esta actividad precisa reconocer el tipo de tabla, identificar las variables junto a sus modalidades o valores, interpretar el título y etiquetas, así como el contexto.

Se consideró en esta categoría el procedimiento identificado por Pallauta et al. (2021) referido a la descripción de variables, que requiere la lectura de la tabla para identificar y describir el tipo de variable representada.

P2. Completar una tabla

Radica en terminar una tabla en la que faltan algunos valores o frecuencias a partir de otros datos y aplicando propiedades que el estudiante conoce. Este procedimiento suele venir asociado, la mayor parte de las veces, con responder a cuestiones de lectura.

También se considera en este tipo de procedimiento, el completar valores posibles de la variable, conocida alguna medida de centralización, especialmente la media o alguna información respecto a la probabilidad de un suceso, por ejemplo, en la Figura 4.6.3.1 se pide completar la probabilidad de los sucesos salir 4 y 5 en un dado trucado.

En un dado trucado, la probabilidad de cada una de las 6 caras es:

Cara	1	2	3	4	5	6
P	0,1	0,1	0,1	a	b	0,1

a) Si $P(4) = 2 \cdot P(5)$, ¿cuánto valen a y b?

Figura 4.6.3.1. Procedimiento completar tabla ([AC6], p. 290)

P3. Construir la tabla

Cuando se solicita elaborar una tabla, generalmente a partir de un conjunto de datos dados en el enunciado, que pueden darse a través de diferentes formatos, como gráfico, verbal o tabular (por ejemplo, obtener la tabla de distribución de una variable unidimensional asociada a una distribución bidimensional); en otros casos, los datos serán recolectados por el propio estudiante.

Este tipo de actividad, implica un trabajo previo de clasificación de los datos y obtención de frecuencias, así como conocer conceptos como: máximo, mínimo, extremo superior e inferior y marca de clase, como se observa en la Figura 4.6.1.5 donde sería necesario aplicar este procedimiento para formar la distribución de frecuencias.

P4. Calcular estadísticos a partir de la tabla

Cuando la actividad desarrollada a partir de la tabla es el cálculo de porcentajes de una modalidad de la variable, la probabilidad de algún suceso de un experimento aleatorio, medidas de tendencia central, dispersión, o de posición. También se considera en esta categoría estadísticos asociados al análisis de la correlación como la covarianza, coeficiente de correlación o la recta de regresión como en la Figura 4.6.1.6.

P5. Construir un gráfico a partir de la tabla

Este procedimiento se asocia con la situación-problema de traducción entre representaciones, y se trata de representar gráficamente la información entregada en una tabla estadística. Por ejemplo, en la Figura 4.6.3.2, se presenta una tabla de datos en la que se relaciona la altura de un padre con su hijo, dicha información es representada en un diagrama de dispersión o nube de puntos con la finalidad de estudiar la relación entre las variables representadas. En ocasiones, es el propio estudiante quien debe decidir el tipo de gráfico más adecuado para representar la información expuesta en una tabla estadística.

Ejemplo 1. En un estudio referente a la altura de los miembros de una serie de familias se ha medido la altura de un hijo y la de su padre y se han obtenido los datos adjuntos. El diagrama de dispersión correspondiente a estos datos es (Fig. 4.6.3.2):

Altura del padre	1,75	1,80	1,75	1,85	1,80	1,90	1,82	1,72	1,78	1,80
Altura del hijo	1,82	1,85	1,80	1,90	1,86	1,93	1,85	1,80	1,85	1,88

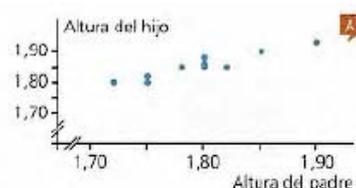


Figura 4.6.3.2. Procedimiento construir un gráfico a partir de una tabla ([AC5], p. 272)

P6. Inventar un problema o tabla

Requiere de la creación de un contexto, para que la información dada en el enunciado de la situación-problema cobre sentido y coherencia. Puede consistir en pensar una variable que corresponda a una cierta tabla de distribución, que el estudiante puede imaginar analizando el tipo de datos; por ejemplo, si se trata de una variable con valores enteros y pequeños, podría tratarse del número de hijos en una familia.

También se puede considerar en esta categoría, el inventar tablas que representen distribuciones de una variable conocido algunos estadísticos (medidas de tendencia central) o algún tipo de frecuencia, como el ejemplo de la Figura 4.6.3.3 en que se pide confeccionar una tabla que se ajuste a la información entregada.

Construye la tabla de valores de un conjunto de 20 datos cuya variable toma, únicamente, tres valores, sabiendo que: $h_2 = \frac{2}{5}$ y que el tercer valor de la variable aparece la mitad de las veces.

Figura 4.6.3.3. Procedimiento inventar una tabla ([AC3], p. 282)

P7. Recoger datos

Consiste en la recogida de datos a partir de medida, encuesta u observación por el estudiante. Se incluye el registro de valores obtenidos en la realización de experiencias aleatorias como lanzar un dado, monedas o chinchetas en una determinada cantidad de

veces. Conforme se avanza de curso, el estudiante debe plantearse la situación de estudio y elaborar preguntas pertinentes para responder ante dicha situación planteada.

P8. Justificar

Es un procedimiento requerido para explicar acciones o procedimientos; por ejemplo, el empleo de determinados estadísticos. En la Figura 4.6.3.4 se pide decidir cuál es la muestra más homogénea, para ello requiere calcular y analizar algunas medidas de dispersión que le permitan responder a la tarea. En experimentos aleatorios, se incluye en esta categoría la argumentación de la estimación de la probabilidad a partir de las frecuencias relativas en experiencias repetidas.

Se quiere comparar la duración de dos marcas de bombillas, X e Y. Con este fin, se eligen dos muestras de 9 unidades y se obtienen las siguientes duraciones (en días):

X	258	298	315	305	300	299	317	320	325
Y	315	300	299	310	290	297	277	315	317

¿Cuál de las dos marcas es más homogénea? Comprueba tu razonamiento a través de dos parámetros de dispersión.

Figura 4.6.3.4. Procedimiento justificar ([AP5], p. 176)

La Tabla 4.6.3.1 y la Figura 4.6.3.5 resumen la distribución de tipos de procedimientos en los diferentes niveles educativos. Como resultado general, el procedimiento P4, ligado al cálculo de algún estadístico a partir de una tabla, tiene una gran presencia, seguido de P5 construcción de un gráfico y P3 construcción de una tabla.

En 5° y 6° curso se aprecia la ausencia del procedimiento P6, el cual consiste en inventar un contexto o tabla. Los procedimientos en estos cursos se concentran en P4, seguido de P1, procedimiento que implica leer la tabla, y los relativos a la construcción de gráficos (P5) o tablas (P3). Estos fueron también los procedimientos más frecuentes en el estudio de textos chilenos (Capítulo 3).

Tabla 4.6.3.1. Frecuencia (y porcentaje) de los procedimientos por nivel educativo

Procedimiento	Ed. Primaria		Ed. Secundaria				Total
	5° EP	6° EP	1° ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO	
P1. Leer	30(21,6)	34(19,7)	16(6)	46(13,5)	73(8,3)	53(5)	252(8,8)
P2. Completar	13(9,4)	6(3,5)	10(3,8)	31(9,1)	67(7,6)	49(4,6)	176(6,2)
P3. Construir tabla	20(14,4)	29(16,8)	64(24,2)	56(16,4)	133(15,1)	138(13)	440(15,4)
P4. Calcular	36(25,9)	54(31,2)	110(41,5)	143(41,9)	440(49,9)	567(53,4)	1350(47,2)
P5. Construir gráfico	27(19,4)	25(14,5)	42(15,8)	50(14,7)	117(13,3)	199(18,7)	460(16,1)
P6. Inventar			2(0,8)		3(0,3)	5(0,5)	10(0,3)
P7. Recoger datos	5(3,6)	7(4)	8(3)	3(0,9)	6(0,7)	2(0,2)	31(1,1)
P8. Justificar	8(5,8)	18(10,4)	13(4,9)	12(3,5)	42(4,8)	49(4,6)	142(5)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861

En Educación Secundaria Obligatoria también aparece con mayor fuerza el procedimiento P4, principalmente en 4ºESO, mientras que P3 ligado a la construcción de una tabla (unidimensional o bidimensional) va decreciendo conforme se avanza de curso.

Otro procedimiento que decrece en los cursos de ESO es P7, relacionado con la recolección de datos, lo que puede ser debido a que se priorizan procedimientos ligados al cálculo o análisis de la información. En este nivel educativo, el procedimiento P2 (completar tabla) no muestra una tendencia clara, su mayor frecuencia se presenta en 2ºESO y 3ºESO. Por otra parte, la lectura de la tabla (P1) alcanza menos protagonismo que en Educación Primaria, sin una tendencia clara y con mayor frecuencia en 2ºESO.

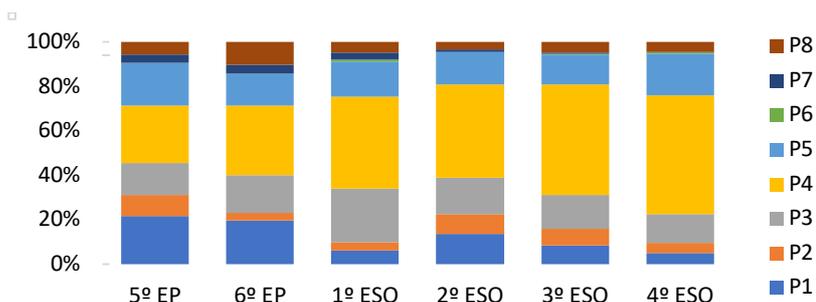


Figura 4.6.3.5. Porcentaje de los diferentes procedimientos por nivel educativo

Distribución por editorial

También se analiza la presencia de cada uno de los procedimientos, identificados previamente, por editorial, en la Tabla 4.6.3.2 y Figura 4.6.3.6.

Tabla 4.6.3.2. Frecuencia (y porcentaje) de procedimientos por editorial

Procedimiento	5º y 6º Educación Primaria			Educación Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
P1. Leer	27(32,9)	14(10,8)	23(23)	57(6,6)	104(11,7)	27(3,4)
P2. Completar	5(6,1)	8(6,2)	6(6)	57(6,6)	49(5,5)	51(6,4)
P3. Construir tabla	12(14,6)	20(15,4)	17(17)	75(8,7)	171(19,2)	145(18,2)
P4. Calcular	19(23,2)	45(34,6)	26(26)	492(57,1)	388(43,5)	380(47,8)
P5. Construir gráfico	11(13,4)	22(16,9)	19(19)	147(17,1)	130(14,6)	131(16,5)
P6. Inventar				6(0,7)	1(0,1)	3(0,4)
P7. Recoger datos	1(1,2)	7(5,4)	4(4)	6(0,7)	8(0,9)	5(0,6)
P8. Justificar	7(8,5)	14(10,8)	5(5)	22(2,6)	41(4,6)	53(6,7)
Total	82	130	100	862	892	795

En Educación Primaria, se observa que los procedimientos se distribuyen de manera similar en las tres editoriales. Anaya prioriza procedimientos de lectura (P1), mientras que Edebé y SM concentran la mayoría de sus tareas en procedimientos de cálculo P4. El procedimiento de construir una tabla (P3) tiene una representatividad similar en las editoriales dirigidas a Educación Primaria, y en ninguna aparece P6, procedimiento que implica inventar una tabla o problema. También, P7 es escasamente abordado, en general, pero en Anaya se presenta en un menor porcentaje.

En Educación Secundaria Obligatoria, las editoriales recogen en sus tareas todos los procedimientos identificados previamente. El procedimiento P4 es el que aparece con mayor fuerza, sobre todo en Anaya, seguido de Santillana y Edelvives. Otros procedimientos como P6 (inventar problema o tabla) o P7 (recoger datos) son escasos, posiblemente porque se priorizan tareas de cálculo para tratar otros conceptos. P3 (construcción de una tabla) aparece más o menos de forma similar en Edelvives y Santillana, aunque en menor frecuencia en Anaya. El procedimiento ligado a la justificación de alguna decisión o alguna acción para resolver una situación-problema (P8), aparece muy poco, y en Santillana aparece algo más.

Los resultados obtenidos sobre los procedimientos son similares a los obtenidos en el análisis de textos escolares chilenos, descrito en el Capítulo 3; y aunque en este caso fue ampliada la muestra a cursos más avanzados en educación básica, se sigue una tendencia parecida.

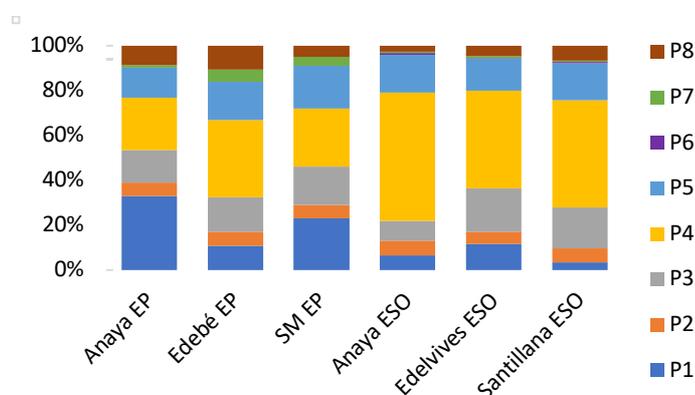


Figura 4.6.3.6. Porcentaje de procedimientos por editorial

En relación a otras investigaciones previas, podemos decir que los resultados informan de una buena cantidad de procedimientos ligados a la construcción tanto de gráficos como de tablas, y este hecho difiere de los resultados encontrados en libros de texto brasileños (Bivar y Selva, 2011; Guimarães et al., 2007). De manera contraria, procedimientos como completar tabla (P2) son escasos a diferencia de lo ocurrido en el contexto brasileño, aunque con dichos textos existen algunas similitudes en Educación Primaria, específicamente, con el procedimiento de lectura (P1), semejante a lo descrito (Evangelista y Guimarães, 2019).

Por otra parte, se coincide con Díaz-Levicoy et al. (2015; 2017) y García-García et al. (2019) en que el procedimiento que más se repite es calcular (P4), aunque estos trabajos analizaron libros de texto de cursos diferentes y de otros países sudamericanos (Chile y México, respectivamente), sin embargo, hay diferencias en procedimientos como completar tabla (P2) o aquellos ligados a la construcción de tablas y gráficas (P3 y P5, respectivamente) que en el contexto español tienen un mayor presencia.

Cálculo de estadísticos

Como se pudo observar, P4 es el procedimiento más frecuente, que consiste en el cálculo de un estadístico con la información proporcionada por la tabla y asociado a las

situaciones-problemas SP3.4 y S4.2. Por ello, se analiza la distribución de los diferentes objetos matemáticos que se piden determinar en los niveles educativos que componen la muestra. En la Tabla 4.6.3.3 se presenta el resumen de los resultados del análisis realizado, donde podemos observar que, conforme se avanza de curso, se incrementa el número de estadísticos para calcular, siendo 4ºESO el que presenta una mayor variedad. Las medidas de tendencia central son las más solicitadas, seguido del cálculo de probabilidad de algún tipo (simple, compuesta, frecuencial o condicionada) y las medidas de dispersión.

Tabla 4.6.3.3. Frecuencia (y porcentaje) de tipo de estadísticos para calcular por nivel educativo

Tipo de estadístico		Ed. Primaria		Ed. Secundaria			Total
		5º y 6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	
Central	Media	29(32,2)	24(21,8)	32(22,4)	94(21,4)	65(11,5)	244(18,1)
	Mediana	3(3,3)	17(15,5)	22(15,4)	37(8,4)	25(4,4)	104(7,7)
	Moda	29(32,2)	25(22,7)	13(9,1)	40(9,1)	24(4,2)	131(9,7)
Disp.	Rango	11(12,2)	12(10,9)	8(5,6)	15(3,4)	11(1,9)	57(4,2)
	Des. media		9(8,2)	12(8,4)	10(2,3)	10(1,8)	41(3)
	Varianza			4(2,8)	24(5,5)	23(4,1)	51(3,8)
	Desv. típica			4(2,8)	71(16,1)	53(9,3)	128(9,5)
Posic.	Coef. de variación				42(9,5)	37(6,5)	79(5,9)
	Cuartiles			1(0,7)	17(3,9)	38(6,7)	56(4,1)
	Percentiles					34(6)	34(2,5)
Correl.	Covarianza					14(2,5)	14(1)
	Coef. correlación					15(2,6)	15(1,1)
	Recta de regresión					4(0,7)	4(0,3)
Probab.	simple o compuesta				34(7,7)	116(20,5)	187(13,9)
	frecuencial	13(14,4)	13(11,8)	11(7,7)			
	condicionada			13(9,1)	19(4,3)	32(5,6)	64(4,7)
Otros	Porcentaje	5(5,6)	5(4,5)	23(16,1)	31(7)	11(1,9)	75(5,6)
	Int. Curva Gauss				1(0,2)	1(0,2)	2(0,1)
Total		90	110	143	440	567	1350

En 5º y 6º curso se trabaja, especialmente, con el cálculo de las medidas de tendencia central como la media y la moda. También se pide al estudiante determinar el rango y probabilidades simples.

En 1ºESO y 2ºESO aparecen con mayor frecuencia los cálculos para determinar las medidas de tendencia central, especialmente se observa que en estos niveles es cuando se introduce este concepto. A partir de 2º curso aparecen nuevos conceptos asociados a la dispersión, como la varianza y la desviación típica, junto con los cuartiles.

A partir de 3ºESO se aprecia una gran variedad de objetos que se piden calcular, como el coeficiente de variación, y se hace más énfasis en el cálculo de la media y la desviación típica. En 4ºESO se cubre la totalidad de conceptos identificados, y se profundiza en el estudio de la dispersión, junto con las medidas de posición. Además, comienza a aparecer el estudio de la correlación y la probabilidad condicionada, aunque

algunos textos ya incorporan este tema en cursos anteriores, a pesar de que en el currículo español (MECD, 2015) se propone a partir de 4ºESO.

Construcción de gráficos estadísticos

El segundo procedimiento en orden de frecuencia es P5, el cual implica la construcción de un gráfico estadístico con la información proporcionada por una tabla. También en este caso, se analiza la frecuencia de la variedad de gráficos que se piden construir, como se muestra en la Tabla 4.6.3.4.

Tabla 4.6.3.4. Frecuencia (y porcentaje) del tipo de gráfico por nivel educativo

Gráfico estadístico	Ed. Primaria		Ed. Secundaria			Total
	5º y 6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	
Barras y/o polígono de frecuencias	19(36,5)	16(38,1)	22(44)	29(24,8)	28(14,1)	114(24,7)
Diagrama de caja			1(2)	21(17,9)	16(8)	38(8,3)
Diagrama de dispersión					105(52,8)	105(22,8)
Histograma y/o polígono de frecuencias	6(11,5)	5(11,9)	7(14)	34(29,1)	21(10,6)	73(15,9)
Pictograma	1(1,9)	1(2,4)	4(8)	2(1,7)		8(1,7)
Pirámide de población				2(1,7)		2(0,4)
Polígono de frecuencias	7(13,5)		3(6)			10(2,2)
Polígono de frecuencias acumuladas				1(0,9)	11(5,5)	12(2,6)
Sectores	19(36,5)	20(47,6)	13(26)	28(23,9)	18(9)	98(21,3)
Total	52	42	50	117	199	460

En general, el gráfico de barras es el que más se pide representar con los datos de la tabla, en algunos casos se le incorpora el polígono de frecuencias. Le sigue el diagrama de dispersión o nube de puntos, aunque se concentra la totalidad de este tipo de procedimientos en 4ºESO y diagrama de sectores, con menor representatividad en 4ºESO. Conforme se progresa de curso, van cambiando los tipos de gráficos solicitados, debido a que apoyan el estudio de diversos conceptos estadísticos que se van introduciendo en dichos cursos, lo que se ajusta a los lineamientos curriculares (MECD, 2015). Por ejemplo, el pictograma está presente desde Educación Primaria hasta 3ºESO, o el diagrama de dispersión solo es considerado en el 4ºESO para el estudio de la correlación.

Los gráficos más solicitados en 5º y 6º curso son el de barras y sectores, seguido del lineal o polígono de frecuencias. Los tipos de gráficos en 1ºESO y 2ºESO son similares a los de Educación Primaria, exceptuando el gráfico de cajas que se incorpora a partir de 2º ESO, siendo su presencia más fuerte en 3º ESO, de acuerdo a los lineamientos curriculares en Educación Secundaria (MECD, 2015).

4.6.4. CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS TABLAS ESTADÍSTICAS

La resolución de una situación-problema implica poner en juego una serie de conceptos y propiedades, que forman parte del conocimiento conceptual y requieren la comprensión de los principios de una disciplina y sus interrelaciones (Rittle-Johnson et al., 2001). Ello implica la importancia de analizar los conceptos y propiedades que

explícita o implícitamente se presentan en cada tema, para diferentes niveles educativos (Gómez et al., 2014).

En la Tabla 4.6.4.1 se presentan los diferentes conceptos, ligados a las tablas estadísticas, recogidos del currículo español (MECD, 2014; 2015) y en los textos que componen la muestra. Se observa que en 5º y 6º curso se presentan pocos conceptos ligados a las tablas, como algunos tipos de frecuencias (absolutas y relativas), medidas de tendencia central (media y moda) y probabilidades simples. Solo algunas editoriales inician el estudio de la representación de datos agrupados en la tabla a partir de 6º en Educación Primaria, y en 1ºESO se profundiza en este tipo de representación de un nivel avanzado de complejidad semiótica (C3.3).

Tabla 4.6.4.1. Conceptos ligados a las tablas estadísticas por nivel educativo

Conceptos	Ed. Primaria		Ed. Secundaria			
	5º EP	6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
Censo, muestra		x	x	x	x	x
Clasificación, orden	x	x	x	x	x	x
Correlación						x
Covarianza						x
Coefficiente de correlación lineal						x
Frecuencias absolutas	x	x	x	x	x	x
Frecuencias relativas	x	x	x	x	x	x
Frecuencias acumuladas			x	x	x	x
Frecuencias dobles						x
Frecuencias marginales y condicionadas						x
Intervalos de clase, Extremos, Marca de clase		x	x	x	x	x
Máximo, Mínimo	x	x	x	x	x	x
Medidas de dispersión: Rango		x	x	x	x	x
Desv. media				x	x	x
Varianza				x	x	x
Desv. típica				x	x	x
Coef. variación					x	x
Medidas de tendencia central: Media, Mediana y Moda	x	x	x	x	x	x
Medidas de posición: Cuartiles, Percentiles, Deciles					x	x
Población, Individuo			x	x	x	x
Recta de regresión						x
Variable, valores	x	x	x	x	x	x
Variable estadística bidimensional						x
Probabilidades simples	x	x	x	x	x	x
Probabilidades compuestas y condicionales						x

En Educación Secundaria se van incorporando las frecuencias acumuladas, que se conforman en un medio para establecer la mediana. En 2ºESO aparecen las medidas de dispersión, mientras que en 3ºESO se incorporan las medidas de posición, principalmente, los cuartiles, hasta avanzar a 4º curso donde ya se estudia la asociación entre las variables

que componen una distribución bidimensional y aparecen objetos como la correlación, covarianza o coeficiente de regresión.

Al igual que el análisis realizado a los textos escolares chilenos (Capítulo 3), se observa que la mayor cantidad de conceptos se concentran en cursos superiores de Educación Básica, pues la incorporación de conceptos se realiza de manera progresiva.

Análisis por editorial

En la Tabla 4.6.4.2 se muestra la presencia de los conceptos en las diferentes editoriales. En 5° y 6° curso, algunas editoriales van más allá de lo establecido en los lineamientos curriculares (MECD, 2014). Por ejemplo, Edebé incorpora el concepto de muestra, al igual que los intervalos de clase, junto con Anaya. Por otra parte, SM aborda la mediana en el estudio de las medidas de centralización.

Tabla 4.6.4.2. Conceptos ligados a las tablas estadísticas por editorial

Conceptos	5° y 6° Ed. Primaria			Ed. Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
Censo, muestra		x		x	x	x
Clasificación, orden	x	x	x	x	x	x
Correlación				x	x	x
Covarianza					x	
Coef. de correlación lineal				x	x	
Frecuencias absolutas	x	x	x	x	x	x
Frecuencias relativas	x	x	x	x	x	x
Frecuencias acumuladas				x	x	x
Frecuencias dobles				x	x	x
Frecuencias marginales y condicionadas				x	x	x
Intervalos de clase, Extremos, Marca de clase	x	x		x	x	x
Máximo, Mínimo	x	x	x	x	x	x
Medidas de dispersión:						
Rango	x	x	x	x	x	x
Desv. media				x	x	x
Varianza				x	x	x
Desv. típica				x	x	x
Coef. variación				x	x	x
Medidas de tendencia central:						
Media	x	x	x	x	x	x
Moda	x	x	x	x	x	x
Mediana			x	x	x	x
Medidas de posición:						
Cuartiles, Percentiles, Deciles				x	x	x
Población, Individuo				x	x	
Recta de regresión				x	x	
Variable, valores	x	x	x	x	x	x
Variable estadística bidimensional				x	x	
Probabilidades simples	x	x	x	x	x	x
Probabilidades compuestas y condicionales				x	x	x

Las editoriales en Educación Secundaria Obligatoria incorporan una gran variedad de conceptos, que son definidos, generalmente, al inicio del tema. Las principales diferencias, se encuentran en el estudio de la correlación, pues Anaya y Santillana no definen el concepto de covarianza. En este sentido, Santillana tampoco incluye los conceptos de coeficiente de correlación lineal, recta de regresión y variable estadística bidimensional. A diferencia de Anaya y Edelvives las cuales profundizan en el estudio de la correlación; Santillana se centra en el análisis de diagramas de dispersión determinando la existencia de correlación que puede ser positiva, negativa o no existir, ajustándose de este modo al currículo (MECD, 2015).

4.6.5. PROPIEDADES UTILIZADAS EN LAS TABLAS ESTADÍSTICAS

Las propiedades identificadas en las tablas de los textos analizados describen características específicas de los conceptos, como la diferencia entre variable dependiente e independiente o entre las posibles escalas de medidas y tipos de variable. Otras propiedades (como que la suma de frecuencias absolutas es el tamaño de la población o muestra) describen relaciones entre conceptos. El conocimiento de propiedades por parte del estudiante contribuye al enriquecimiento del significado personal que construye sobre cada objeto matemático (Godino, 2017). De acuerdo a la Tabla 4.6.5.1 se sugiere un crecimiento del significado de las tablas para el estudiante de manera progresiva, según las propiedades incluidas en cada curso y que han sido recogidas del currículo (MECD, 2014; 2015).

Tabla 4.6.5.1. Propiedades ligadas a las tablas estadísticas por nivel educativo

Propiedades	Ed. Primaria		Ed. Secundaria			
	5º EP	6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
Tipos de variable y escala de medida	x	x	x	x	x	x
Suma de frecuencias absolutas y tamaño de población o muestra	x	x	x	x	x	x
Suma de frecuencias relativas	x	x	x	x	x	x
Proporcionalidad de frecuencias relativas y absolutas			x	x	x	x
Valor creciente de las frecuencias acumuladas, la última de las cuales es el tamaño muestral					x	x
Relación entre frecuencias acumuladas y no acumuladas					x	x
Variable dependiente e independiente						x
Relación entre frecuencias relativas condicionales, dobles y marginales						x
Frecuencia doble-frecuencia marginal						x

Se puede observar, que las principales propiedades identificadas describen relaciones entre tipos de frecuencias, como frecuencia absoluta o relativa, o frecuencias acumuladas y no acumuladas. Al igual que los conceptos, la mayor parte de las propiedades se concentran en 4ºESO, evidenciando de este modo el incremento de la complejidad y nivel de comprensión que requiere el tratamiento de este tipo de representación en dicho curso.

Análisis por editorial

Se analizó la presencia de cada una de las propiedades en los libros de texto, según la editorial. En la Tabla 4.6.5.2 se presentan los resultados, donde observamos que en Educación Primaria, las propiedades ligadas al estudio de la tabla estadística son escasas, todas tienen la misma representatividad en las editoriales de los textos analizados, y se relacionan con el tipo de variable, junto con las frecuencias absolutas y relativas.

Las editoriales dirigidas a la Educación Secundaria Obligatoria muestran una mayor cantidad de propiedades, pero se identifica mayor disparidad entre editoriales en cuanto al tratamiento de las tablas de contingencia o de doble entrada, donde Santillana, a diferencia de Edelvives, y Anaya, no presenta de manera formal el tratamiento con tablas de este tipo, ligadas al estudio de la estadística bidimensional. De igual modo, Santillana dedica poca atención a formalizar el tratamiento de la probabilidad compuesta y condicionada a diferencia de Anaya o Edelvives, siendo esta última la más completa de todas en el tratamiento de propiedades.

Tabla 4.6.5.2. Propiedades ligadas a las tablas estadísticas por editorial

Propiedades	5° y 6° Ed. Primaria			Ed. Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
Tipos de variable y escala de medida	x	x	x	x	x	x
Suma de frecuencias absolutas y tamaño de población o muestra	x	x	x	x	x	x
Suma de frecuencias relativas	x	x	x	x	x	x
Proporcionalidad de frecuencias relativas y absolutas				x	x	x
Valor creciente de las frecuencias acumuladas, la última de las cuales es el tamaño muestral				x	x	x
Relación entre frecuencias acumuladas y no acumuladas				x	x	x
Variable dependiente e independiente				x	x	
Relación entre frecuencias relativas condicionales, dobles y marginales					x	
Frecuencia doble-frecuencia marginal				x	x	

4.6.6. ARGUMENTOS UTILIZADOS CON LAS TABLAS ESTADÍSTICAS

El desarrollo de la actividad matemática requiere movilizar procesos como explorar, conjeturar y justificar. En dicha práctica, cobra gran relevancia la argumentación, entendida como deducciones que permiten asegurar la veracidad de una afirmación (Jeannotte y Kieran, 2017). Sin embargo, en ocasiones el argumento utilizado puede estar errado y, por tanto, no ser válido para asegurar la veracidad de una determinada afirmación (Meyer y Schnell, 2020).

En la escuela, se emplean diferentes tipos de argumentos, en ocasiones poco formales, pero igual de relevantes, esperándose que conforme el estudiante progresa de

curso tenga mejores herramientas, que le permita desarrollar justificaciones más elaboradas y con un mayor grado de abstracción (Kempen y Biehler, 2015).

En los lineamientos curriculares internacionales (NCTM, 2014), se destaca el papel de la reflexión y conexión entre los contenidos de aprendizaje para el desarrollo de la capacidad de argumentación en el estudiante, durante los diferentes ciclos que componen la escolaridad. En España, el currículum de Enseñanza Secundaria, plantea también la necesidad de desarrollar habilidades en torno a la argumentación (MECD, 2015), para tener una mejor comprensión de los procesos matemáticos y que esto revierta en el estudio de otras disciplinas.

En el enfoque ontosemiótico, se consideran diversos tipos de argumentos, incluidos los empírico-inductivos y deductivos, reconociendo que en el aula se manifiestan otros modos de justificación más informales, que también se deben considerar en la instrucción (Godino y Recio, 2001). En su trabajo, Godino y Recio (2001) consideran la descripción de ejemplos, aclaraciones, o demostraciones formales, que pueden utilizarse para explicar la solución de un problema, o para introducir conceptos o justificar propiedades.

En los textos analizados, en relación a las tablas estadísticas, los argumentos se asocian a la justificación de propiedades, la construcción de un determinado tipo de tabla, o establecer la veracidad de afirmaciones sobre su contenido, y se presentan los siguientes tipos:

- *Ejemplos o contraejemplos*, utilizados para validar una determinada propiedad o procedimiento o bien pedidos para comprobar la comprensión del estudiante de un cierto objeto matemático ligado a la tabla.
- *Justificación a partir de representaciones gráficas*, cuando se representan gráficamente los datos de una tabla para argumentar de esta manera un enunciado. En la tarea de la Figura 4.6.6.1 se pide traducir de tabla a un diagrama de dispersión para determinar la dependencia de dos variables estadísticas.

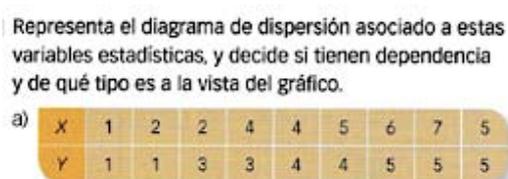


Figura 4.6.6.1. Justificación a partir de representación gráfica ([AC6], p. 256)

- *Argumentos verbales informales* cuando usando el lenguaje verbal coloquial se justifica una propiedad o la solución de un problema.
- *Argumentos verbales deductivos*, que se asocian a demostraciones deductivas, en los que se utilizan propiedades que se encadenan para formar dicha argumentación.
- *Argumento algebraico deductivo*, justificaciones basadas en lenguaje algebraico asociado a la tabla. Se trata de manipulaciones algebraicas utilizadas para argumentar una propiedad o aclarar el empleo de alguna fórmula. Por ejemplo, en la Figura 4.6.6.2 a partir de una tabla de frecuencias absolutas, se generaliza la fórmula para el cálculo de la media.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
x_1	f_1	$f_1 x_1$
x_2	f_2	$f_2 x_2$
...
x_n	f_n	$f_n x_n$
	Σf_i	$\Sigma f_i x_i$

En una distribución dada por su tabla de frecuencias, para hallar la **media** añade a la tabla la columna $f_i \cdot x_i$ y se procede así:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

donde $\sum f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n$ es la suma de todos los valores; y $\sum f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ es el número de individuos.

Figura 4.6.6.2. Ejemplo de argumento algebraico deductivo ([AC1], p. 270)

En la Tabla 4.6.6.1 se presentan los diferentes tipos de argumentos detectados por curso, donde podemos observar que desde el 5º curso de Educación Primaria se utilizan ejemplos y contraejemplos o gráficos como base en la justificación, así como razonamientos verbales informales. En Educación Secundaria Obligatoria comienzan a aparecer una mayor variedad de tipos de argumentos, mientras que en 3º curso se incluyen algo más de justificaciones que implican argumentos algebraicos deductivos.

Tabla 4.6.6.1. Tipos de argumentos ligadas a las tablas estadísticas por nivel educativo

Tipo de argumento	Ed. Primaria		Ed. Secundaria			
	5º EP	6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
Ejemplos y contraejemplos	x	x	x	x	x	x
Uso de gráficos o tablas	x	x	x	x	x	x
Argumentos verbales informales	x	x	x	x	x	x
Argumentos verbales deductivos				x	x	x
Argumento algebraico deductivo					x	x

Análisis por editorial

Al realizar el análisis de tipos de argumentos por editorial, se puede observar en la Tabla 4.6.6.2, que las editoriales dirigidas a la Educación Secundaria Obligatoria incorporan diferentes tipos de argumentos. Sin embargo, cabe decir que el argumento verbal deductivo aparece de manera muy escasa y aunque los textos como Edelvives o Anaya promueven en los últimos cursos, principalmente, el tipo de argumento empleando un lenguaje algebraico en las justificaciones, en Santillana se presenta mayormente el empleo de argumentos verbales deductivos.

Tabla 4.6.6.2. Tipos de argumentos ligadas a las tablas estadísticas por editorial

Tipo de argumento	5º y 6º Ed. Primaria			Ed. Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
Ejemplos y contraejemplos	x	x	x	x	x	x
Uso de gráficos o tablas	x	x	x	x	x	x
Argumentos verbales informales	x	x	x	x	x	x
Argumentos verbales deductivos				x	x	x
Argumentos algebraico deductivo				x	x	x

4.7. PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD

Como en el Capítulo 3, y siguiendo a Gea (2014) y Ortiz (2002), se analiza el propósito de las actividades planteadas, diferenciando entre ejemplos, ejercicios propuestos y resueltos. En la Tabla 4.7.1 y Figura 4.7.1 se puede observar la poca

presencia de ejemplos o ejercicios resueltos, alcanzando bajo porcentaje del total, reflejando que, en la totalidad de los cursos, el tipo de actividad se concentra en ejercicios a resolver por el estudiante.

Tabla 4.7.1. Frecuencia (y porcentaje) de tipo de actividad según nivel educativo

Tipo de actividad	Ed. Primaria		Ed. Secundaria				Total
	5° EP	6° EP	1° ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO	
Ejemplo	8(5,8)	19(11)	25(9,4)	17(5)	92(10,4)	127(12)	288(10,1)
Ej. Propuesto	124(89,2)	147(85)	216(81,5)	266(78)	705(80)	755(71,1)	2213(77,4)
Resuelto	7(5)	7(4)	24(9,1)	58(17)	84(9,5)	180(16,9)	360(12,6)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861

En los cursos de Educación Primaria, la mayor parte de las actividades son ejercicios propuestos, teniendo la mayor frecuencia en 5° curso, mientras que en 6° curso decae un poco dando un poco más de espacio a ejemplos y ejercicios resueltos. En Educación Secundaria Obligatoria, el 4° curso muestra un menor número de ejercicios propuestos y en 2° curso, los ejemplos son especialmente escasos.

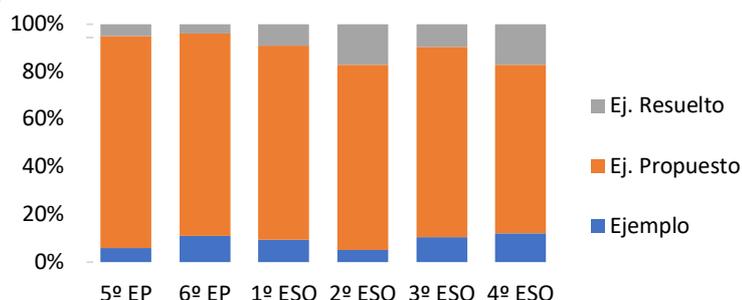


Figura 4.7.1. Porcentaje de propósito de la actividad por nivel educativo

Distribución por editorial

El análisis también profundizó en los diferentes propósitos de la actividad por editorial (Tabla 4.7.2 y Figura 4.7.2). Las editoriales priorizan la propuesta de ejercicios en lugar de ejemplos o ejercicios resueltos, los cuales puedan guiar u orientar al estudiante en su aprendizaje, como el ejemplo de la Figura 4.6.6.2, en que se generaliza la forma de establecer la media de los datos presentados en una tabla con frecuencias absolutas.

Tabla 4.7.2. Frecuencia (y porcentaje) de tipo de actividad por editorial

Tipo de actividad	5° y 6° Educación Primaria			Educación Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
Ejemplo	8(9,8)	10(7,7)	9(9)	73(8,5)	72(8,1)	116(14,6)
Ej. Propuesto	65(79,3)	117(90)	89(89)	612(71)	689(77,2)	641(80,6)
Resuelto	9(11)	3(2,3)	2(2)	177(20,5)	131(14,7)	38(4,8)
Total	82	130	100	862	892	795

En 5° y 6° de Educación Primaria, Edebé presenta un alto porcentaje de ejercicios propuestos, similar a SM. Los ejercicios resueltos aparecen escasamente, y Anaya muestra algo más, mientras que en Edebé y SM tienen una presencia muy baja.

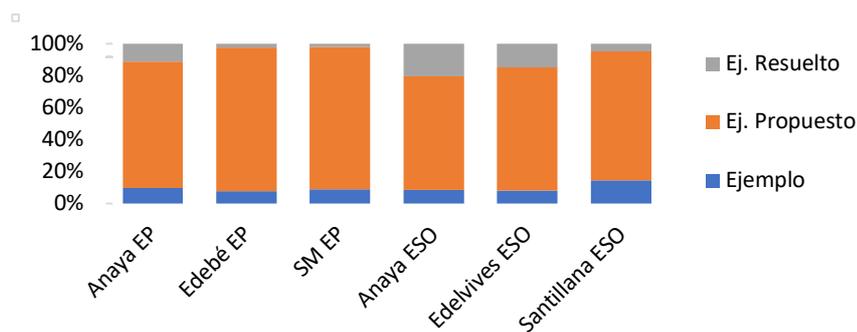


Figura 4.7.2. Porcentaje de propósito de la actividad por editorial

Las tres editoriales dirigidas a la Educación Secundaria Obligatoria, presentan una gran cantidad de ejercicios propuestos. En este nivel, Anaya propone más ejercicios resueltos, mientras que Santillana muestra una mayor cantidad de ejemplos, los cuales siempre ayudan a orientar al estudiante en su aprendizaje.

Los resultados obtenidos son similares a los descritos en el Capítulo 3, en el análisis de textos escolares chilenos. En el contexto español, el estudio de la correlación en libros de texto españoles realizado por Gea (2014), también mostró la alta presencia de ejercicios propuestos, sin embargo, si se unificaba los ejemplos con los ejercicios resueltos, se equilibraba la cantidad de ejercicios propuestos.

4.8. NIVEL DE LECTURA

Al igual que en el Capítulo 3, se utilizará la jerarquía sobre la lectura de gráficos estadísticos establecida por Curcio (1989), ampliada por Shaughnessy et al. (1996) con un cuarto nivel, que finalmente fue integrado por Friel et al. (2001) (Ver Capítulo 2). A continuación se recuerdan brevemente los niveles, y se presentan los resultados.

L1. Leer los datos

En este nivel la pregunta únicamente implica una lectura literal de la información que es explícita en la tabla. Al igual que Díaz-Levicoy (2018), se incluye en este nivel la traducción de gráfico a tabla o viceversa, cuando se precisa llevar la información de un formato a otro y no se requiere la realización de cálculos. Por ejemplo, en la Figura 4.8.1, a partir de la información representada en la tabla, se pide construir un gráfico de barras que represente la distribución de la variable cualitativa tipo de mascota.

Estas son las mascotas de un vecindario:

Mascotas	Perro	Gato	Pájaro	Roedor
f_i	24	15	4	8

Representa estos datos en un diagrama de barras.

Figura 4.8.1. Ejemplo de actividad de nivel L1([S3], p. 283)

L2. Leer dentro de los datos

En este nivel, la pregunta no solo implica la lectura literal, sino que también se precisa comparar datos representados en la tabla, o aplicar cálculos. Un ejemplo se

presenta en la Figura 4.5.2.1, en el cual se precisa comparar los valores en datos agrupados de la variable para responder a la pregunta.

L3. Leer más allá de los datos

Se pide inferir información no representada y que no es posible extraer de manera aritmética. Un ejemplo sería interpolar o extrapolar un valor en una serie de datos ordenados a lo largo del tiempo, como en la Figura 4.8.2, donde el estudiante debe predecir la temperatura esperada de un día que no está registrada en la tabla.

Para realizar unos estudios sobre energía solar, se ha medido cada uno de los días de una semana la temperatura máxima y el número de horas de sol, obteniéndose los siguientes resultados:

S: N.º DE HORAS DE SOL	T: TEMPERATURA (°C)
7	12
10	14
0	7
6	10
11	15
12	20
11	18

b) Si el lunes siguiente a la medición hubo 9 horas de sol, ¿qué temperatura máxima cabe esperar que hiciera? ¿Qué fiabilidad tiene tu predicción?

Figura 4.8.2. Ejemplo de actividad de nivel L3 ([AC3], p. 297)

L4. Leer detrás de los datos

Implica no sólo la lectura del gráfico o tabla, sino ser capaz de realizar una valoración crítica de su contenido, de las fuentes de las que se ha extraído la información, o de la veracidad de las afirmaciones realizadas sobre su contenido. En la Figura 4.8.3 se pide, basado en la información entregada en la tabla, decidir si la moneda está trucada, para ello se debe observar de manera crítica los resultados obtenidos en las diferentes centenas de lanzamientos.

Se lanza una moneda al aire en secuencias de 100 y se anota el resultado en la siguiente tabla:

	100	200	300	400	500
Cara	41	78	118	161	200
Cruz	59	122	182	239	300

b. ¿Está la moneda trucada?

Figura 4.8.3. Ejemplo de actividad de nivel L4 ([AP5], p. 185)

La Tabla 4.8.1 y Figura 4.8.4 resumen los resultados obtenidos respecto al nivel de lectura presentado en las tareas en los diferentes cursos analizados. Los mayores niveles superiores de lectura, como L3 *leer detrás de los datos* y L4 *leer más allá de los datos*, tienen una baja frecuencia. Los primeros niveles de lectura son los que aparecen con mayor fuerza como L2 *leer dentro de los datos*, seguido de L1 *leer los datos*.

Tabla 4.8.1. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura por nivel educativo

Nivel de lectura	Ed. Primaria		Ed. Secundaria				Total
	5º EP	6º EP	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	
L1. Leer los datos	53(38,1)	32(18,5)	48(18,1)	72(21,1)	124(14,1)	257(24,2)	586(20,5)
L2. Leer dentro de los datos	84(60,4)	133(76,9)	215(81,1)	264(77,4)	749(85)	787(74,1)	2232(78)
L3. Leer más allá de los datos	1(0,8)	4(2,3)	1(0,4)		3(0,3)	5(0,5)	14(0,5)
L4. Leer detrás de los datos	1(0,8)	4(2,3)	1(0,4)	5(1,5)	5(0,6)	13(1,2)	29(1)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861

En Educación Primaria aparece con gran fuerza L2, específicamente en 6º curso que se presentan en un porcentaje más elevado; tareas enmarcadas en los niveles más sofisticados de lectura como L3 y L4 son muy escasas.

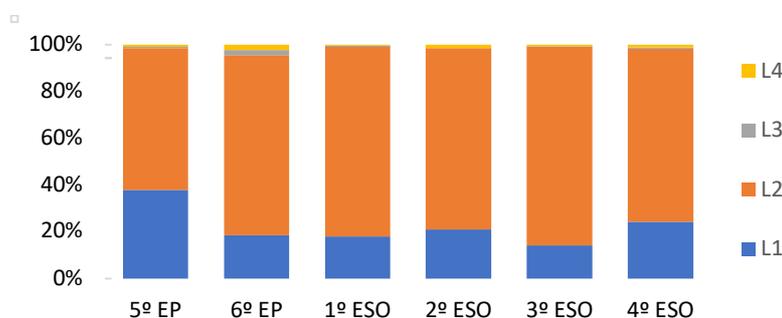


Figura 4.8.4. Porcentaje de nivel de lectura por nivel educativo

En Educación Secundaria Obligatoria, se mantiene o incluso se supera la tendencia en los niveles más básicos de lectura de la tabla estadística, como es el caso de 3ºESO, mientras que 4ºESO presenta una mayor cantidad de tareas que requieren L3 *leer más allá de los datos*, y particularmente, el mayor porcentaje de L4 *leer detrás de los datos* se da en 2º curso. Aunque en ambos niveles superiores el porcentaje en ambos cursos es bastante escaso.

Distribución por editorial

En el análisis realizado de los niveles de lectura por editorial, se observa en la Tabla 4.8.2 y Figura 4.8.5 que las editoriales Anaya y SM no presentan tareas que requieran *leer más allá de los datos* (L3), a diferencia de Edebé, que muestra todos los niveles de lectura en sus tareas, aunque los niveles de lectura más sofisticados L3 y L4 tienen una presencia muy baja.

En Educación Secundaria Obligatoria, los libros de textos de las tres editoriales analizadas presentan en sus actividades los cuatro niveles de lectura, sin embargo, se concentran en los dos niveles básicos de lectura L1 y L2. Edelvives muestra algo más de actividades que alcanzan los niveles de lectura L3 y L4, pero de forma muy escasa. Las editoriales restantes se centran en actividades que alcanzan los primeros niveles de lectura, principalmente L2, que en Santillana alcanza un mayor porcentaje.

Tabla 4.8.2. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura por editorial

Nivel de lectura	5° y 6° Educación Primaria			Educación Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
L1. Leer los datos	32(39)	26(20)	27(27)	175(20,3)	205(23)	121(15,2)
L2. Leer dentro de los datos	49(59,8)	96(73,9)	72(72)	684(79,4)	663(74,3)	668(84)
L3. Leer más allá de los datos		5(3,8)		2(0,2)	6(0,7)	1(0,1)
L4. Leer detrás de los datos	1(1,2)	3(2,3)	1(1)	1(0,1)	18(2)	5(0,6)
Total	82	130	100	862	892	795

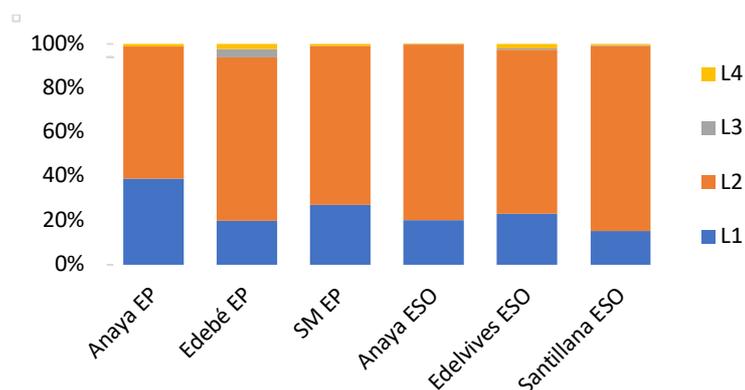


Figura 4.8.5. Porcentaje de nivel de lectura por editorial

Estos resultados son similares a los obtenidos por García-García et al. (2019), pues la mayor parte de las actividades dirigidas de 1° a 6° curso de México, se centraban en leer dentro de los datos (L2). Los niveles más sofisticados como leer más allá de los datos (L3) y leer detrás de los datos (L4) estaban ausentes en algunas editoriales, aunque este estudio mostró un mayor porcentaje de actividades enmarcadas en L4, en una de las colecciones analizadas, a diferencia de este estudio en el cual aparecen muy escasamente.

4.9. USO DE LA TECNOLOGÍA

Al igual que en el Capítulo 3, se analiza el uso de herramientas tecnológicas, cuya importancia es corroborado por Lee et al. (2014), quienes sugieren que el uso de software facilita tareas de transnumeración, pues potencia habilidades centradas, especialmente, en la interpretación de la información. El empleo de tecnologías por parte de los estudiantes se encuentra presente en los lineamientos curriculares españoles durante la Educación Primaria y Secundaria (MECD, 2014; 2015). Específicamente, para el aprendizaje de tópicos asociados a la estadística y la probabilidad, a partir de 1°ESO se propone el uso de tecnologías “para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada” (MECD, 2015, p. 473). Los resultados del análisis del uso de la tecnología obtenidos son resumidos en la Tabla 4.9.1.

También se distinguió los recursos tecnológicos propuestos por los libros de texto, de acuerdo a la editorial a la cual pertenecen. En la Tabla 4.9.2 se observa la presencia de uso de diferentes recursos en los textos analizados. En muchos casos, los textos ofrecen actividades de profundización, o recursos interactivos en sus sitios web.

Tabla 4.9.1. Frecuencia (y porcentaje) uso de tecnología por nivel educativo

	5° EP	6° EP	1° ESO	2° ESO	3° ESO	4° ESO	Total
Utiliza Excel			4(1,5)	3(0,9)	27(3,1)	17(1,6)	51(1,8)
Calculadora					30(3,4)	24(2,3)	54(1,9)
Ninguna	139(100)	173(100)	261(98,5)	338(99,1)	824(93,5)	1021(96,1)	2756(96,3)
Total	139	173	265	341	881	1062	2861

Se observa que actividades asociadas a las tablas estadísticas y que impliquen el uso de tecnología son muy escasas, y en Educación Primaria nulas. La propuesta de actividades con Excel aparece en todos los cursos de Educación Secundaria, seguido de la calculadora que se comienza a sugerir a partir de 3°ESO, que es el nivel donde hay un mayor número de actividades que impliquen el uso de estos recursos tecnológicos.

Análisis por editorial

Tabla 4.9.2. Tipos de recursos tecnológicos propuestos en los libros de texto

Recurso	Educación Primaria			Educación Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
Excel					x	
Calculadora	x			x		x
Geogebra				x		
Recursos interactivos	x		x	x		

En Educación Primaria, SM y Anaya proponen actividades interactivas a través de su sitio web, principalmente Anaya, a pesar de no ofrecer actividades con uso de tecnología. En particular, Anaya indica las bondades del uso de la calculadora para los cálculos de la frecuencia relativa, como se puede observar en la Figura 4.9.1.

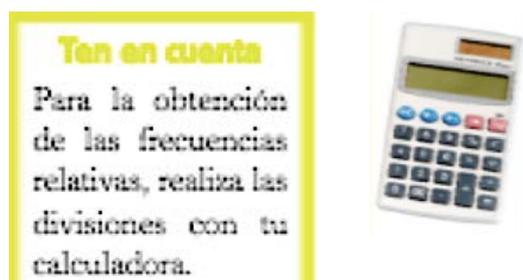


Figura 4.9.1. Propuesta de profundización con recursos interactivos ([P1], p. 58)

En Educación Secundaria Obligatoria, solo Anaya ofrece recursos interactivos de diferente tipo en el libro de texto, por ejemplo, en la Figura 4.9.2 se presenta un link que sugiere acceder a la página web de la editorial y practicar el cálculo de percentiles de datos agrupados, por medio del uso de Geogebra.

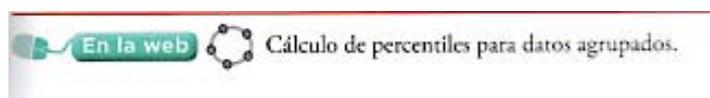


Figura 4.9.2. Propuesta de profundización con recursos interactivos ([AC4], p. 201)

Este trabajo no contempló el análisis de las actividades propuestas en los recursos interactivos, pues el objeto de estudio es el libro de texto y las tareas que este contempla. A nivel general, se aprecia una escasa incorporación de tareas que incorporen el uso de herramientas tecnológicas, como simuladores o apps que promuevan un entorno más cercano para el estudiante en su aprendizaje, sin tener en cuenta el acontecer cotidiano en que el uso de la tecnología tiene un rol fundamental (Braga y Belver, 2016).

4.10. CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS

Como se ha señalado, el trabajo con la tabla estadística implica poner en juego diferentes objetos matemáticos, de lo que se puede producir la existencia de conflictos semióticos (Godino, 2002; Godino et al., 2007; 2019). Dichos conflictos se podrían transmitir a los estudiantes o causar dificultades en su aprendizaje si el docente no está atento. Al igual que los textos escolares chilenos, el análisis realizado a los libros de texto españoles, ha puesto en evidencia algunos conflictos semióticos potenciales, los cuales son reflejados de forma explícita o implícita, y se describen a continuación.

Conflictos semióticos potenciales relacionados con el lenguaje

Se han identificado algunas imprecisiones ligadas al lenguaje, que podrían provocar un conflicto por parte de los estudiantes en cuanto a la manera en que se perciben los conceptos que representan.

Lenguaje simbólico impreciso. Al igual que Gea (2014), se han detectado imprecisiones ligadas al lenguaje empleado en las tablas estadísticas. Por ejemplo, en la Figura 4.10.1 se muestra el procedimiento para construir un gráfico de sectores, a partir de una tabla de datos. Para facilitar los cálculos se añade otra tabla en que se incluyen varias columnas, la última de las cuales muestra la forma de obtener la amplitud de cada sector. En las columnas segunda y tercera se usa el símbolo de frecuencia absoluta (f_i) y relativa (h_i), para designar cantidades que no son tales, sino toneladas (t) y proporción de las mismas respecto al total en el periodo analizado. Así es que, se deja a cargo del estudiante relacionar la simbología empleada en una y otra tabla en la situación-problema.

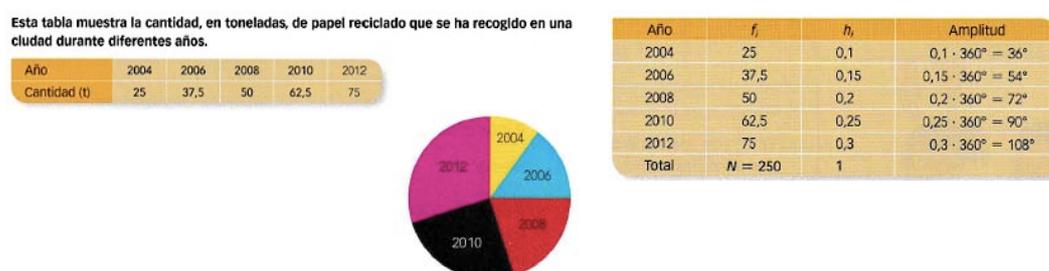


Figura 4.10.1. Imprecisión de lenguaje ([S3], p. 173)

Terminología en las etiquetas de las tablas. Se han identificado otros conflictos ligados al lenguaje verbal empleado para identificar los datos presentados en las columnas de la tabla. Por ejemplo, en la tabla presentada en la Figura 4.10.2 se cambia la palabra recuento por porcentaje, y es un conflicto explícito que luego podría desembocar en que el estudiante confunda la frecuencia absoluta y porcentual.

Alberto ha anotado en un cuaderno las preferencias de los alumnos del instituto en relación al tipo de transporte utilizado para asistir a clase:

Tipo de transporte	Porcentaje
Autobús	
Metro	
Taxi	
Bicicleta	
Ciclomotor	
Andando	

- a) Completa la tabla de frecuencias absolutas.
 b) ¿Puedes hacer la tabla de frecuencias relativas?

Figura 4.10.2. Etiquetas de la tabla ([AC3], p. 173)

Otros conflictos similares, se producen en la descripción de la variable señalada en la situación-problema, que no es coherente con los datos representados, como ocurre en la Figura 4.10.3, pues los datos no pueden corresponder a la altura de estudiantes. Estas inconsistencias podrían llevar a los estudiantes a resolver situaciones de manera algorítmica, no prestando suficiente atención al contexto de los datos y el significado de los estadísticos calculados en relación a la situación presentada (Wild y Pfannkuch, 1999).

Halla las medidas estadísticas correspondientes al estudio de la altura (en cm) de 24 estudiantes.

Datos x_i	0	1	2	3	4
Frecuencia absoluta f_i	2	5	8	6	3

Figura 4.10.3. Etiquetas de la tabla ([S6], p. 283)

Conflictos semióticos potenciales conceptuales

Se han detectado también los siguientes conflictos semióticos potenciales relacionados con los conceptos.

Cálculo de estadísticos inapropiados para el tipo de variable representada en la tabla. En algunas situaciones-problemas en que se solicita, o se presenta el cálculo de valores que requieren utilizar alguna fórmula (Erickson et al., 2019), dichos cálculos no son factibles de realizarse por tratarse de variables cualitativas. Por ejemplo, en la tabla presentada en la Figura 4.10.4 cuya variable representada es de tipo cualitativa.

- 3 Observa esta tabla de frecuencias de las mascotas favoritas de los alumnos de un colegio.

mascotas	votos
gato	170
perro	350
hámster	120
canario	5
tortuga	30

¿Qué animales han recibido un número de votos por debajo de la media?

Figura 4.10.4. Cálculo de media ([P3], p. 117)

Conflictos semióticos potenciales relacionados con las proposiciones

Los libros de texto en algunas oportunidades señalan propiedades que no tienen ciertos conceptos, o en otras ocasiones se realizan generalizaciones muy amplias que podrían incidir en una confusión en la apropiación de ciertos conceptos por parte de los estudiantes.

Frecuencias acumuladas. Algunos textos descartan el uso de frecuencias acumuladas para variables con escala ordinal, en las cuales se puede establecer un orden de las categorías de la variable (Batanero y Godino, 2001). Por ejemplo, la variable meses del año, pues se pueden ordenar los meses de Enero a Diciembre.

Variables cualitativas. En algunos libros de texto, para facilitar el proceso de construcción de una tabla de una variable cualitativa, se indica además que sus categorías se deben ordenar alfabéticamente. Esta condición es innecesaria.

Conflictos semióticos potenciales procedimentales

En cuanto a los procedimientos que involucran el uso de tablas estadísticas, se encontraron algunas descripciones confusas o que requieren de una mayor precisión, como se describe a continuación

Descripción confusa de construcción de tablas con datos agrupados en intervalos. Al respecto, se ha detectado que en el caso de la construcción de tablas con datos agrupados en intervalos, en algunos textos no se explicita cómo se obtuvo el número de intervalos, o la amplitud de estos, simplemente se pasa del listado de datos a la tabla. Esta situación podría provocar que el estudiante interprete que dichos intervalos no obedecen a algún criterio o regla, sino que fueron establecidos de manera arbitraria.

En otras actividades, se ha detectado que se propone un listado de datos y a partir de ellos construir una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos. Para facilitar el proceso se indican los intervalos de una manera difícil de interpretar, como se puede observar en la Figura 4.10.5, pues en los valores dados no se señala claramente si se refieren a los extremos de los intervalos.

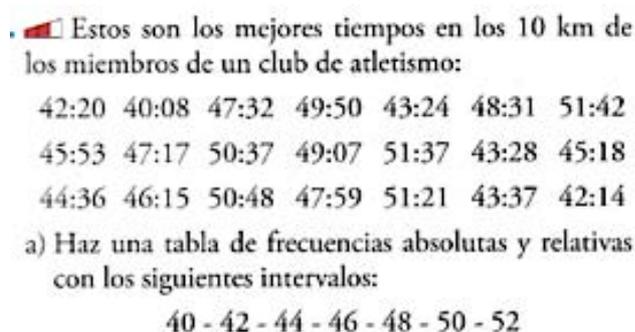


Figura 4.10.5. Construcción de tabla con datos agrupados en intervalos ([AC1], p. 262)

Gráficos inadecuados para el tipo de variable representado en la tabla. Es usual que los libros de texto promuevan la traducción de tabla a gráfico o viceversa, pero en ocasiones el gráfico solicitado no se ajusta a la variable representada en la tabla estadística. Por ejemplo, en la Figura 4.10.6 se presenta la distribución de una variable cualitativa, y a partir de ella se pide construir un polígono de frecuencias, reservado a

variables cuantitativas (Arteaga, 2011), y que usualmente se obtiene a partir de un diagrama de barras o histograma. Este conflicto potencial es explícito, y podría hacer suponer al estudiante que el polígono de frecuencias se puede obtener para cualquier tipo de variable representada.

En la siguiente tabla se ha recogido información sobre el color de los ojos de los alumnos de 4.º de ESO de cierto centro:

Color de ojos	N.º alumnos
Azules	20
Marrones	40
Verdes	18
Negros	12

a. Representa los datos en una gráfica adecuada y construye su polígono de frecuencias.

Figura 4.10.6. Construcción de polígono de frecuencias ([AP5], p. 173)

Síntesis de conflictos semióticos observados

En la Tabla 4.10.1 se presenta un resumen con los diferentes conflictos semióticos potenciales encontrados en los libros de texto, según editorial. Se observa que, en general, son escasos y en la mayoría de los casos se relacionan con objetos matemáticos ligados a la tabla estadística cuando esta es propuesta para el estudio de otros temas, como las medidas de dispersión o los gráficos estadísticos. En este sentido, se aprecia que el conflicto semiótico relacionado con los conceptos, como el cálculo de estadísticos inapropiados para variables cualitativas, se presenta tanto en una editorial de Educación Primaria (SM) como Educación Secundaria (Anaya), mientras que en el conflicto ligado a los procedimientos, en que se solicita gráficos inadecuados para la variable representada en la tabla, aparece en Educación Secundaria Obligatoria en dos editoriales (Anaya y Edelvives).

Tabla 4.10.1. Tipos de conflictos semióticos presentados en los libros de texto, según editorial

Conflictos	5º y 6º Ed. Primaria			Ed. Secundaria		
	Anaya	Edebé	SM	Anaya	Edelvives	Santillana
<i>Relacionados con el lenguaje</i>						
Lenguaje simbólico impreciso						x
Terminología en etiquetas de las tablas						x
<i>Conceptuales</i>						
Cálculo de estadísticos inapropiados para el tipo de variable			x	x		
<i>Relacionados con las proposiciones</i>						
Frecuencias acumuladas						x
Variables cualitativas					x	
<i>Procedimentales</i>						
Descripción confusa de construcción de tablas con datos agrupados en intervalos				x		
Gráficos inadecuados para el tipo de variable representada en la tabla				x	x	

Se aprecian en Educación Primaria pocos conflictos semióticos ligados al estudio de la tabla estadística, mientras que en Educación Secundaria aparecen algunos más. En este nivel educativo destacan en número de conflictos potenciales las editoriales Anaya y Santillana. En Santillana se encontraron, principalmente, conflictos potenciales ligados al lenguaje en la tabla, seguido del uso de proposiciones. En Anaya, los conflictos potenciales se enmarcan en el uso de procedimientos, seguido de conflictos conceptuales en el cálculo de estadísticos inapropiados; mientras que Edelvives solo presenta dos conflictos semióticos potenciales, uno relacionados con las proposiciones y otro enmarcado en los procedimientos.

4.11. SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

Una vez analizada la muestra de libros de texto españoles, que contempló los cursos finales de Educación Primaria (5° y 6° curso) y todos los niveles de Educación Secundaria Obligatoria, de manera similar al análisis realizado de los textos escolares chilenos y descrito en el Capítulo 3, es posible identificar el significado de referencia. Dicho análisis permite establecer el contenido semántico que será considerado en la construcción del cuestionario de evaluación, que incorporará las principales variables analizadas, junto a las categorías que presentaron mayor frecuencia. También se podría considerar otras que a pesar de ser menos frecuentes, son relevantes en el aprendizaje de los estudiantes.

El análisis de contenido realizado a los textos escolares permitió caracterizar el tipo de tabla junto a su nivel de complejidad semiótica, que será considerada en la construcción del instrumento de evaluación. Un resumen de esta variable se presenta en la Tabla 4.11.1, siendo las más frecuentes las tablas de distribución de una variable con frecuencias ordinarias de complejidad C3.1, seguida de las tablas de distribución de una variable con datos agrupados en intervalos C3.3. Las tablas de doble entrada o contingencia de complejidad semiótica C4 son muy escasas, y de este tipo la que más se presenta es la de complejidad C4.1 con frecuencias ordinarias.

Tabla 4.11.1. Porcentaje de actividades según tipo de tabla

Tipo de tabla	Tipo de frecuencias			
	Valores	Absolutas, Relativas /probabilidades	Acumuladas	Agrupadas en intervalos
Datos (C2)	13,8			
Frecuencias (C3)		46,4	6,4	19,8
Contingencia (C4)		12,7		0,8

Estos resultados son similares a los obtenidos en el análisis de los textos escolares chilenos (Capítulo 3). En el caso chileno la tabla de distribución de una variable con frecuencias ordinarias es la que más aparece y en un porcentaje muy similar (44,6%) al caso español. Algo muy parecido ocurre con la tabla de doble entrada, la cual se presenta menos (11,9%) y también en proporción semejante que en los textos españoles. Las principales diferencias se observan en las tablas de datos de complejidad semiótica C2 que aparecen con mayor frecuencia en los textos chilenos (21,5%) que en los españoles

(13,8%), mientras que las tablas de una variable con frecuencias acumuladas se presentan con mayor porcentaje en el contexto chileno (15,9%) que en el español. En las tablas con datos agrupados en intervalos la situación cambia, pues en los libros de texto español tienen una presencia mucho mayor que en los chilenos (5,3%).

De acuerdo a estos resultados se tratará, preferentemente, las tablas de distribución de una variable con frecuencias ordinarias (absolutas, relativas o porcentual). También se considerará algún ítem que presente una tabla de contingencia. Se añadirá alguna tabla con frecuencias acumuladas y con valores agrupados sólo para los estudiantes del curso superior, que ya han estudiado este tipo de tablas.

Otra variable considerada en este estudio corresponde al contexto de los propuestos por PISA (OECD, 2019). En la Tabla 4.11.2 se observa que el contexto que aparece con mayor fuerza en las actividades corresponde al tipo personal o educativo, seguido del público, y experimento aleatorio. La distribución de tipos de contexto es muy similar en los textos escolares chilenos, la única diferencia radica en el contexto laboral u ocupacional, la cual aparece en un mayor porcentaje en los textos chilenos (16,8%) que en los españoles. De acuerdo a estos resultados se tratará de usar los principales contextos en los ítems que compongan el cuestionario de evaluación.

Tabla 4.11.2. Porcentajes de actividades según contexto

Contexto	Porcentaje
Experimento aleatorio	10,7
Personal /educativo	40,0
Público	18,8
Laboral	6,8
Científico	8,5

En relación al análisis de las situaciones-problemas ligadas a las tablas estadísticas (Tabla 4.11.3), se observó que, al igual que los textos chilenos, SP3.4 que implica la traducción de tabla a algún estadístico, o viceversa, aparece con mayor frecuencia. En este sentido, la tabla es una herramienta que se utiliza para el estudio de otros objetos matemáticos como las medidas de centralización, posición o dispersión. Le siguen SP2, ligado a la construcción de tablas de distribución de una variable y SP3.1, respecto al proceso de traducción de gráfico a tabla, o viceversa. Aunque los porcentajes difieren, la tendencia es muy similar a las situaciones-problemas detectadas en el estudio de los textos escolares chilenos (Capítulo 3).

Las diferentes situaciones-problemas están ligadas a procedimientos, que se muestran en la Tabla 4.11.4, donde se puede observar que P4 tiene la mayor presencia, el cual implica el cálculo de un determinado estadístico; le sigue P5, relacionado con construir un gráfico a partir de la información entregada en una tabla o viceversa, y luego P3, correspondiente a construir una tabla. Los resultados obtenidos en el estudio de esta variable en los libros de texto españoles, son semejantes o poseen una tendencia similar a los detectados en los chilenos. La principal diferencia se aprecia en P1, procedimiento que implica la lectura o interpretación de la información de la tabla, pues en el contexto español su porcentaje es más bajo comparado con el contexto chileno (22,1%).

Tabla 4.11.3. Porcentajes de situaciones-problemas

Situación-problema	Porcentaje
SP1. Recoger y organizar datos	3,4
SP2. Distribución de una variable unidimensional	24,0
SP3. Traducir	
SP3.1. Tabla a gráfico, o viceversa	18,1
SP3.2. Tabla a tabla	2,2
SP3.3. Texto a tabla, o viceversa	1,0
SP3.4. Tabla a estadístico, o viceversa	46,7
SP4. Variable bidimensional	
Distribución de una variable bidimensional	3,1
Estudio de asociación	1,4

Tabla 4.11.4. Porcentaje de procedimientos considerados en los textos

Procedimientos	%
P1. Leer /interpretar	8,8
P2. Completar	6,2
P3. Construir tabla	15,4
P4. Calcular estadístico	47,2
P5. Construir gráfico	16,1
P6. Inventar	0,3
P7. Recoger datos	1,1
P8. Justificar	5,0

En el análisis desarrollado se incorporó también el nivel de lectura requerido para responder a la tarea por parte del estudiante, utilizando los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001), y que han sido empleados en otros estudios de tablas estadísticas en libros de texto (Díaz-Levicoy et al., 2015; García-García et al., 2019). La mayor parte de las actividades analizadas en los libros de texto españoles corresponde al nivel leer dentro de los datos (78%), le sigue la lectura literal leer los datos (20,5%), mientras que los niveles más sofisticados de lectura como leer más allá de los datos (0,5%) o leer detrás de los datos (1%) aparecen de manera muy escasa. En el contexto chileno, los textos escolares mostraron una tendencia muy similar en el análisis de esta variable.

De manera similar a lo realizado en el Capítulo 3, en esta muestra de libros de texto españoles se aborda el uso de tecnología propuesto en torno a las tablas estadísticas. Los resultados, similar a lo evidenciado a los textos chilenos, muestran escasas actividades propuestas con uso de tecnología, las cuales radican principalmente en el empleo de Excel, Geogebra y la calculadora. Pese a esto, se debe destacar que las editoriales ofrecen plataformas digitales con actividades de refuerzo por medio de un ambiente interactivo, pero que en este estudio no fueron objetivo de análisis, porque el foco se centró en el libro de texto que utiliza el estudiante en el aula. Además, cabe señalar, que el cuestionario está pensado para ser resuelto con papel y lápiz de manera presencial, por lo que esta variable, en este caso, no será considerada.

Las diferentes categorías con mayor presencia de las variables consideradas en el análisis de los libros de texto tanto chilenos como españoles, permiten identificar el significado de referencia para el estudio de evaluación, para el cual se considera una cantidad mínima de ítems que permita evaluar competencias como:

- La lectura de las tablas, junto a la traducción de tablas a gráficos o viceversa, de lenguaje verbal a tabla, o de tabla a tabla.
- La construcción o completación de tablas de diverso tipo que incorporen variados tipos de frecuencias (absolutas, relativas, porcentuales o acumuladas), o datos agrupados en intervalos.
- Justificar decisiones o afirmaciones a partir de la información entregada en la tabla.

Los ítems serán variados, y considerarán diferentes niveles de lectura, así como la complejidad semiótica de la tabla, así también se propondrán diversos contextos, diferenciando los ítems para estudiantes de menor y mayor edad considerando los objetos matemáticos que han tratado en sus respectivos cursos.

4.12. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

En el presente Capítulo se presentó un análisis en profundidad del tratamiento de la tabla estadística en una muestra de libros de texto españoles que se sustenta en elementos del EOS, especialmente lo referido al análisis semiótico del objeto tabla estadística (Godino et al., 2006). A continuación, se detalla el alcance de los objetivos planteados, en que el marco teórico otorgó no solo las herramientas teóricas, sino también la metodología para el análisis que permite abordar dichos objetivos.

4.12.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

El objetivo general de este estudio es:

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado del tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular en estadística, en una muestra de textos dirigidos a estudiantes chilenos y españoles de Educación Básica de edades similares.

Para abordar la segunda parte de este objetivo se ha llevado a cabo un análisis detallado de cada una de las actividades planteadas en los libros de texto españoles, en que se haga uso de la tabla estadística, bien para su estudio en sí mismo o como un medio para la enseñanza de otros contenidos específicos. En los 18 textos españoles que componen la muestra se han revisado un gran número de tareas ubicadas en los temas de estadística y probabilidad, por lo que consideramos que este objetivo se ha cumplido.

A continuación, se presentan los diferentes objetivos específicos emanados del principal junto a la discusión sobre su logro.

O1.1. Determinar el significado institucional pretendido de las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares de los últimos cursos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

Este objetivo se abordó en el Capítulo 1, donde se revisaron las directrices curriculares del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte tanto en Educación Primaria como Educación Secundaria (MECD, 2014; 2015) y este análisis fue completado con el

de otros documentos curriculares relevantes en el panorama internacional (Franklin et al., 2005; NCTM, 2014).

En cuanto a las orientaciones para Educación Primaria se observa la relevancia de la tabla estadística para el registro y organización de datos, pues se indican criterios de evaluación y estándares específicos para evaluar su aprendizaje. Las indicaciones para esta etapa refieren a la identificación de variables y clasificación de datos en el entorno del estudiante, mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas que posteriormente se utilicen para el cálculo de medidas de centralización y dispersión como la media, la moda y el rango, poniendo en valor el desarrollo de argumentos que den muestra del análisis crítico de los resultados obtenidos.

En los primeros cursos de Educación Secundaria se repasa y profundiza en los contenidos trabajados en Educación Primaria, en particular, se avanza en el estudio de la tabla de distribución de una variable estadística al introducir el trabajo con la frecuencia acumulada en el cálculo de la mediana. También se progresa en el estudio de este tipo de tabla mediante datos agrupados en intervalos, con objeto de calcular el intervalo modal y mediano. Además, se hace hincapié en el uso de la tecnología en el trabajo con datos estadísticos para su organización, representación y posteriores cálculos que se precisen.

En los cursos finales de la Educación Secundaria (3ºESO y 4ºESO) el estudiante puede escoger un itinerario orientado a la aplicación práctica de las matemáticas o bien uno más enfocado en su estudio formal. En cualquier caso, en ambas opciones se ofrece una enseñanza de la tabla estadística similar, cobrando gran relevancia el estudio de los estadísticos de posición en 3ºESO, a partir de las tablas de distribución de frecuencias acumuladas en variables unidimensionales. En 4ºESO la importancia recae en el estudio de la tabla de doble entrada o contingencia con un énfasis en el cálculo de la probabilidad condicionada.

En definitiva, en ambas etapas educativas se propone trabajar la tabla estadística desde un enfoque práctico, donde el estudiante haga uso de la tecnología para evaluar sus propias hipótesis mediante datos que él mismo recoja, aunque el uso de la tecnología en el tema se hace mucho más explícito en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria que en la de Educación Primaria.

01.2. Caracterizar el tipo de tabla, su nivel de complejidad semiótica, tipo de variable y los contextos presentes de acuerdo al nivel educativo, en una muestra de libros de texto dirigidos a los últimos cursos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

En el presente capítulo se identificó el tipo de tabla, su nivel de complejidad semiótica junto al tipo de variable representada, además del contexto, observando que la mayor parte de las tablas representaban una variable cuantitativa de tipo discreta. Las tablas más utilizadas en los libros de textos corresponden a las de distribución de una variable de complejidad semiótica C3, con especial interés en las que representan frecuencias ordinarias de complejidad semiótica C3.1, seguidas de las que presentan la variable con datos agrupados, del tipo C3.3.

La incorporación de los diferentes tipos de tablas se presenta de manera progresiva conforme se avanza de curso. En este sentido, 4ºESO es donde aparecen todos los tipos

de tablas identificados, siendo además el curso que muestra un mayor el porcentaje de tablas de contingencia, de complejidad C4.1, principalmente, para el estudio de la correlación y la probabilidad condicionada.

El contexto más utilizado para plantear las tareas con tablas estadísticas corresponde al personal, seguido del público. A diferencia de los textos escolares chilenos se observa que las tablas de datos se presentan en menor porcentaje y que la tabla de doble entrada o de contingencia posee una mayor presencia en los libros de texto españoles. Existe coincidencia en cuanto a que el tipo de contexto personal es el más empleado tanto en los libros chilenos como españoles, pero en el caso chileno le sigue el ocupacional.

O1.3. Caracterizar el significado institucional implementado, uso de la tecnología y propósito de la tabla estadística en una muestra de libros de textos dirigidos a los cursos finales de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

El análisis semiótico realizado ha permitido identificar la presencia de los diferentes objetos matemáticos ligados a la tabla estadística. Las situaciones-problemas que se presentan con mayor fuerza es la traducción de tabla a algún tipo de estadístico, o viceversa, seguido de la construcción de tablas de distribución de una variable. En esta línea los procedimientos que más se repiten es calcular estadísticos (medidas de centralización, posición, dispersión), seguido de la construcción de un gráfico a partir de la información presentada en una tabla.

El lenguaje simbólico se va incorporando de manera progresiva en los diferentes niveles educativos y se encuentra ligado a los conceptos que se van tratando en cada curso, mientras que las propiedades se relacionan a estos de forma estrecha. Los argumentos que aparecen con mayor frecuencia son los referidos a las justificaciones a través de ejemplos o contraejemplos, el uso de determinados tipos de gráficos o tablas, o argumentos verbales informales, mientras que de manera gradual en Educación Secundaria Obligatoria van apareciendo justificaciones verbales deductivas, y en los cursos finales de la ESO algunas argumentaciones algebraico deductivas.

Otras variables que complementan este análisis fue el uso de tecnología, el cual es muy escaso, mientras que en el propósito de la actividad aparecen, principalmente, ejercicios propuestos para el estudiante, siendo muy limitados los ejercicios resueltos o los ejemplos.

O1.4. Caracterizar los niveles de lectura propuestos en las situaciones-problemas basadas en las tablas estadísticas.

El análisis realizado del nivel de lectura requerido, de los propuestos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), en las situaciones-problemas en torno a las tablas estadísticas presentadas en los libros de texto español mostró, al igual que los textos escolares chilenos, una escasa presencia de los niveles más sofisticados de lectura como leer más allá de los datos y leer detrás de los datos, pues la mayor parte de las actividades se centra en leer dentro de los datos. Tampoco se observó una introducción gradual de los diferentes niveles de lectura conforme se avanza de curso.

O1.5. Identificar los principales conflictos semióticos potenciales en el tema.

Aunque son escasos los conflictos semióticos potenciales detectados en los libros de texto españoles analizados, al igual que en los textos chilenos (Capítulo 3), se pudo apreciar que la mayor parte de ellos están relacionados con conceptos y propiedades matemáticas ligadas a la tabla. Entre los cuales se encuentran impresiones sobre conceptos como frecuencias acumuladas, variables cualitativas, y otras como pedir el cálculo de determinados estadísticos no adecuados para variables cualitativas, evidenciando de esta manera un conflicto semiótico potencial en el uso de dichos textos al inducir la confusión de la variable con la frecuencia y que ha sido detectado en otros estudios (Arteaga, 2011).

4.12.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS

Las hipótesis iniciales planteadas para el presente estudio son las siguientes:

H1. El significado institucional pretendido para las tablas estadísticas en las orientaciones curriculares de 5° y 6° de Educación Primaria y Educación Secundaria en España muestra adecuada idoneidad cognitiva.

El análisis curricular mostró la variedad de tipos de tablas estadísticas que se proponen en los lineamientos curriculares desde Educación Primaria hasta Educación Secundaria Obligatoria (MECD, 2014; 2015), con una progresiva incorporación de objetos matemáticos vinculados a su aprendizaje conforme se avanza de nivel escolar. Así es que, se contempla el estudio de las tablas de distribución de una variable unidimensional con frecuencias absolutas y relativas desde Educación Primaria, se progresa en su estudio en la Educación Secundaria, al completar la tabla con la distribución de frecuencias acumuladas, y se finaliza en la Educación Secundaria con el estudio de la tabla de doble entrada tanto en la introducción al análisis de la correlación como al cálculo de la probabilidad condicionada.

H2. El significado institucional implementado para las tablas estadísticas en los libros de texto españoles de 5° y 6° de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria que componen la muestra, presenta un buen ajuste con el significado institucional pretendido en los lineamientos curriculares.

El análisis de la muestra de libros de texto mostró una variedad de tipos de tablas ajustadas a los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015), que van apareciendo de manera gradual conforme se avanza de curso, con diferente nivel de complejidad semiótica, evidenciando de esta manera una adecuada idoneidad epistémica. Sin embargo, la tabla de doble entrada o contingencia podría tener una presencia más significativa y sostenida en los diferentes niveles educativos. En general, el uso que se plantea de la tecnología es muy escaso en todos los textos analizados, siendo más destacado en la Educación Secundaria que en la Educación Primaria, lo que va en contra de los principios que enmarcan los lineamientos curriculares para ambas etapas educativas (MECD, 2014; 2015).

H3. Los libros de texto españoles presentan una cantidad y variedad importante de actividades ligadas a las tablas estadísticas. Se espera también una progresión con el curso escolar.

En los libros de texto españoles analizados se encontró una cantidad considerable de actividades ligadas a la tabla estadística, lo que coincide con el estudio realizado por Díaz-Levicoy (2018) en gráficos estadísticos, y pese a que su objeto de análisis es diferente, tanto las tablas como los gráficos estadísticos, habitualmente, se tratan de manera conjunta en los lineamientos curriculares al igual que en los libros de texto.

H4. Los libros de texto españoles presentan un tratamiento de las tablas estadísticas diferenciado, dependiendo si se dirigen a la opcionalidad de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas o aplicadas.

En los libros de 3°ESO y 4°ESO se observa un tratamiento diferenciado, respecto al uso y profundización de temas ligados a las tablas estadísticas, lo que se manifiesta también en que las editoriales que abordan las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas son más completas en cuanto a contenidos y muestran un mayor número de actividades planteadas en que se hace uso de la tabla estadística, a diferencia de los textos dirigidos a las enseñanzas aplicadas.

H5. Podrían presentarse algunos conflictos semióticos en los libros de texto, principalmente relacionados con definiciones de diferentes objetos matemáticos implicados en el estudio de la tabla estadística.

Se han encontrado escasos conflictos semióticos potenciales, que, principalmente, están ligados a conceptos relacionados con la tabla estadística, como pedir determinados estadísticos, o procedimientos, como representar tipos de gráficos inadecuados para variables cualitativas. También fue posible observar el uso de lenguaje confuso que podrían generar, eventualmente, conflictos semióticos en los estudiantes.

4.13. IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL TRATAMIENTO DE LAS TABLAS EN LOS TEXTOS ANALIZADOS

En esta sección se valora el proceso de instrucción planificado en torno a la tabla estadística planteado por los libros de texto españoles, utilizando elementos de la idoneidad didáctica, pues permite valorar diferentes facetas que componen dicho proceso de instrucción, con la idea de identificar posibles debilidades y proponer algunos ajustes para mejorar los aprendizajes de los estudiantes en torno al tema abordado (Godino, 2013; Godino et al., 2019). A continuación se describen las diferentes valoraciones de las facetas que componen la idoneidad didáctica.

Idoneidad epistémica

En el análisis de los libros de texto españoles se pudo observar una idoneidad epistémica similar o levemente mejor a la encontrada en el análisis de los textos chilenos (Capítulo 3), pues la variedad de tipos de tablas estadísticas que se presentan se ajusta a los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015) y es más equilibrada, porque se proponen menos tablas de datos y más de doble entrada o contingencia. Aunque en este

último caso cabe decir, que la diferencia con los textos chilenos no es representativa por varias razones, la principal, porque la muestra de textos españoles abarca un rango de edad mayor y en 4ºESO sí se hace explícito el estudio de la tabla de doble entrada o contingencia. En cualquier caso, coincidimos en incrementar las tareas en que se implique su lectura y construcción de forma progresiva en los niveles previos a 4ºESO, porque redundará en su estudio en dicho nivel escolar.

Se plantean actividades con diferente propósito, como sucede en el análisis de textos chilenos, y destacan, como sucedía en aquel análisis, las situaciones-problemas de traducción entre representación tabular y resumen estadístico, o viceversa, seguida de la construcción de la tabla de distribución de una variable estadística. Por tanto, coincidimos en la necesidad de incorporar actividades que promuevan la recogida de datos y análisis crítico de la información de la tabla, dado que los procedimientos se centran fundamentalmente en calcular (medidas de centralización, posición, dispersión), seguido de la construcción de un gráfico a partir de la información presentada en una tabla.

Por último, el lenguaje simbólico se incorpora progresivamente conforme avanza el nivel escolar, de manera paralela a los conceptos que se van tratando en cada curso, situación que no se reflejaba en los textos chilenos analizados. Además, se plantea variedad de situaciones de argumentación y, de manera gradual en Educación Secundaria Obligatoria, van apareciendo justificaciones verbales deductivas, solo en los cursos finales algunas son algebraico deductivas.

Idoneidad cognitiva

Se evidencia que se van incorporando gradualmente objetos matemáticos en el estudio de la tabla estadística, como las frecuencias (absolutas, relativas y acumuladas) y los valores agrupados en intervalos de clase, por lo que consideramos una alta idoneidad cognitiva en los textos analizados, como sucedía en los textos chilenos, puesto que los contenidos pretendidos se pueden alcanzar conforme se avanza de nivel educativo.

En cualquier caso, sugerimos mejoras en cuanto a diversificar más las tareas en cuanto a los niveles de lectura propuestos por Friel et al. (2001), ya que principalmente abordan los primeros niveles, mientras que los más sofisticados de lectura entre los datos o más allá de los datos son tratados de manera muy escasa.

Idoneidad interaccional

Como explicamos en el Capítulo 3, el análisis de los textos escolares no permite concretar completamente la valoración de esta faceta, dado que el proceso de instrucción que finalmente se planifique el docente informará del agrupamiento de los estudiantes en la realización de las tareas y las normas establecidas para el aprendizaje colaborativo y cooperativo. En cualquier caso, como indicamos para los textos chilenos, la interacción entre estudiantes es mejorable y podría aumentar si se incorporasen más situaciones-problema de recogida de datos y desarrollo de proyectos, que potencien y promuevan el análisis crítico de la información recogida. Como hicimos también en la valoración de esta faceta en el caso de los textos chilenos, el estudio autónomo del estudiante, se podría mejorar con la incorporación de un mayor número de ejemplos y ejercicios resueltos que orienten y promuevan el aprendizaje del estudiante.

Idoneidad mediacional

La idoneidad mediacional se relaciona con el medio y los recursos utilizados en el proceso de instrucción. Como comentamos en el caso de los textos chilenos, algunos componentes de esta faceta no podrán ser evaluados, puesto que los textos no informan del número de alumnado en la realización de las tareas y el tiempo dedicado a cada una de ellas, y este es un aspecto que gestionará el docente en la interacción en el aula. En todo caso, como sugerimos en el contexto chileno, consideramos que se ha de implementar de manera más completa las propuestas con uso de tecnología.

Idoneidad afectiva

Las componentes de esta faceta vinculadas a la actitud y emociones del estudiante requieren mayor información para ser evaluadas y es complicado inferirlas desde el análisis realizado. Tan solo planteamos, como hicimos en el análisis de textos chilenos, que se logra alcanzar los intereses y necesidades de los estudiantes, puesto que se plantean tareas contextualizadas en su entorno personal seguido del público, promoviendo de esta manera un aprendizaje que pueda perdurar en el tiempo al asignarle sentido al aprendizaje de la estadística y valorar su utilidad en su entorno más inmediato.

Idoneidad ecológica

Esta faceta se valora de manera positiva, considerando que la muestra de libros de texto analizados mostró un número importante de actividades contextualizadas sobre variedad de tablas estadísticas, fomentando de esta manera una interpretación y comprensión de este tipo de representación, la cual cobra gran relevancia en el contexto actual que vivimos, generado por la pandemia del COVID-19, en que el ciudadano constantemente recibe información y datos sobre su evolución, lo que finalmente desemboca en la toma de decisiones basadas en la información recibida.

En definitiva, consieramos que la idoneidad didáctica en los textos analizados, en general, es adecuada aunque mejorable, según los aspectos que se ha ido indicando en cada una de ellas, siendo conscientes que algunas de las facetas no han podido ser evaluadas completamente. En particular, hacemos hincapié en la importancia de incluir más tareas referidas a la recogida de datos haciendo uso de la tecnología.

CAPÍTULO 5

CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

- 5.1. Introducción
- 5.2. Objetivo del estudio
- 5.3. Construcción del cuestionario
 - 5.3.1. Variables consideradas y especificación del contenido
 - 5.3.2. Construcción de un banco de ítems
 - 5.3.3. Juicio de expertos y aproximación a la validez
 - 5.3.4. Muestra de expertos
 - 5.3.5. Resultados de la valoración de los expertos
- 5.4. Ítems que componen el cuestionario
- 5.5. Síntesis. Significado evaluado por el cuestionario

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el proceso de construcción del cuestionario de evaluación de la comprensión de las tablas estadísticas dirigido a estudiantes de 1°ESO y 3°ESO. Dada la escasez de antecedentes de investigación referidos a este objeto matemático, se optó por construir un cuestionario que incorporara las principales variables observadas en el análisis de los textos escolares, descrito en los Capítulos 3 y 4, con el fin de obtener un instrumento que tenga en cuenta el contenido de estos textos, al evaluar el conocimiento sobre este tema.

Para el diseño del instrumento, se han tomado en cuenta de forma rigurosa y sistemática normas metodológicas (Cohen et al., 2018), con la finalidad de recoger información acerca de los significados personales de un grupo de estudiantes sobre las tablas estadísticas. En las siguientes secciones se describe el proceso seguido en la construcción del cuestionario, que es producto del análisis exhaustivo realizado a las investigaciones previas consultadas, lineamientos curriculares, libros de texto, así como del marco teórico.

5.2. OBJETIVO DEL ESTUDIO

En los Capítulos 3 y 4 se caracterizó el significado institucional implementado en torno a la enseñanza de las tablas estadísticas, contrastándolo con el significado institucional pretendido en las orientaciones curriculares presentadas en el Capítulo 1. Los resultados de estos análisis fueron la base para plantear el siguiente objetivo general:

Objetivo 2. Construir un instrumento válido y fiable para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas de los estudiantes chilenos de quinto a octavo Básico, y españoles de Educación Secundaria Obligatoria y los conflictos semióticos asociados, con el fin de caracterizar el significado personal adquirido por los estudiantes en estos niveles educativos.

La importancia de este objetivo obedece a la inexistencia de instrumentos dirigidos a los niveles educativos de este interés, que tengan en cuenta las diferentes

variables identificadas de los análisis realizados en los capítulos anteriores. Dado el vacío señalado, el cuestionario que se confeccione será un aporte beneficioso al campo de la investigación, pues podría ser aplicado en un futuro, en otras muestras de estudiantes con similares características (e.g. nivel educativo, edad). También para los profesores es de interés, porque podrán conocer las dificultades de sus estudiantes respecto al tema. Para conseguir nuestro objetivo, se plantean dos objetivos específicos:

O2.1. Construir un cuestionario que permita acceder a los conocimientos de los estudiantes de 1º y 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria, en que se contemplen las principales variables que intervienen en la interpretación de las tablas estadísticas.

El cuestionario es necesario para realizar el estudio de evaluación. Se propondrán diferentes ítems, algunos tomados de investigaciones previas, mientras que otros surgirán del análisis de libros de texto. En algunos casos, los ítems serán adaptados de acuerdo a las diferentes variables identificadas con antelación, o a las necesidades, como por ejemplo el idioma. Para la construcción del instrumento, se tomarán en cuenta las normas psicométricas establecidas (American Educational Research Association et al., 2014; Kline, 2013). En este proceso, también se consideran las particularidades de la muestra a la cual se dirige el estudio.

O2.2. Realizar un estudio semiótico del cuestionario.

Para el estudio se tratará de obtener una muestra de estudiantes españoles de los cursos mencionados, de tamaño suficiente, que pertenezcan a diferentes tipos de colegios.

5.3. CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

El proceso de construcción seguirá la metodología propuesta por Haladyna (2004), con el objeto de conseguir un instrumento válido y fiable. Se ha optado por un cuestionario, ya que se conforma en un instrumento de medición que permitirá observar algunas variables que intervienen en el conocimiento que los estudiantes poseen respecto al tema de interés. Cuando la recopilación de los datos se realiza de manera válida y fiable, es posible inferir los conocimientos de los estudiantes a través de las respuestas a las preguntas planteadas en el cuestionario, las cuales sí son observables (Godino, 1996). Se optó por ítems de respuesta abierta, porque permiten acceder a información que no es posible de recoger a través de otros medios, como la simple observación o la encuesta (Barbero et al., 2015).

La construcción del cuestionario partió seleccionando algunos ítems de investigaciones previas (Batanero, 2001; Díaz-Levicoy, 2018; Gabucio et al., 2010; Sharma, 2013), así como de actividades propuestas en las orientaciones curriculares y del análisis de libros de texto, descrito en los Capítulos 3 y 4. Luego de un proceso de depuración de los ítems, se obtuvo un cuestionario que atendiera a las características de los estudiantes, y que permitiera inferir sus conocimientos (Reckase, 2009) a partir de las puntuaciones conseguidas en sus respuestas, lo que permite posicionar la variable observada dentro de un marco global.

La delimitación del cuestionario es posible de realizar a través de dos niveles:

semántico o sintáctico. A nivel semántico, el constructo es determinado por la especificación de la relación de los comportamientos observables entre el constructo y la conducta, mientras que a nivel sintáctico o relacional, a partir de la definición de cómo el constructo se relaciona con otros dentro de una misma teoría (Batanero y Díaz, 2005).

La operacionalización del constructo en este caso, se realiza a partir de una definición semántica de la variable objeto de medición seleccionando indicadores susceptibles de ser evaluados, tal como señalan Martínez et al. (2014).

5.3.1. VARIABLES CONSIDERADAS Y ESPECIFICACIÓN DEL CONTENIDO

Como punto de partida, se consideraron las variables que serían incorporadas en el cuestionario, que surgieron como producto de la definición semántica del constructo (Kerlinger y Lee, 2002). El análisis de contenido realizado a los libros de texto (Capítulos 3 y 4) permitió establecer el significado institucional pretendido del estudio, otorgando de esta forma una mayor objetividad a las variables consideradas. También se recogieron los errores y dificultades señalados en los antecedentes sobre estudios de tablas estadísticas (Capítulo 2).

Los elementos descritos junto con la revisión de bases curriculares (MECD, 2014; 2015; MINEDUC, 2015; 2018; NCTM, 2014), fueron la base para la identificación de las variables de interés. Por tanto, se conforman en un conglomerado, que permite evaluar si los estudiantes consiguen resolver con éxito las situaciones-problemas planteadas por los libros de texto, e identificar las dificultades que puedan manifestar. En el instrumento, se consideraron las siguientes variables:

1. *Tipo de tabla y nivel de complejidad semiótico*: Se han considerado los diferentes tipos de tablas, entre los propuestos por Lahanier-Reuter (2003) y descritos en las bases curriculares de Chile y ESO en España, los cuales fueron encontrados en el análisis de libros de texto (Capítulos 3 y 4). Por otra parte, se ha cruzado el tipo de tabla con la de complejidad semiótica, adaptadas por Pallauta et al. (2020) para el análisis de tablas estadísticas, obteniendo las categorías que se detallan a continuación.
 - *Tabla de datos*, que corresponde al nivel C2 de complejidad semiótica descrito por Arteaga (2011).
 - *Tabla de distribución de una variable*, de Nivel C3 de complejidad semiótica. Este nivel fue dividido en tres subniveles, dependiendo de si se consideran las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase.
 - *Nivel de complejidad C3.1*: Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
 - *Nivel de complejidad C3.2*: Tablas de distribución de frecuencias, que incluyen también frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentuales).
 - *Nivel de complejidad C3.3*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia, tanto ordinaria como acumulada.
 - *Tabla de doble entrada o de contingencia* de Nivel C4 de complejidad semiótica. Estas tablas, a su vez, se podrían clasificar en dos subniveles, según se consideren

intervalos de clase o no:

- *Nivel de complejidad C4.1*: Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
 - *Nivel de complejidad C.2*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia.
2. *Niveles de lectura*. El estudio de los textos escolares detectó la presencia de los cuatro niveles de lectura, descritos para los gráficos estadísticos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), requeridos para responder a situaciones-problemas que involucran tablas estadísticas. Es de interés identificar los niveles que los estudiantes son capaces de alcanzar, dado que dichos niveles poseen una jerarquía en que se incrementa progresivamente su dificultad. Se consideraron los siguientes:
- *L1: Leer los datos*, se corresponde a la lectura directa de un dato expuesto en la tabla.
 - *L2: Leer dentro de los datos*, se requieren cálculos o comparaciones de los datos de la tabla, por ejemplo, hallar la moda.
 - *L3: Leer más allá de los datos*, precisa de interpolación o extrapolación a valores que no están en la tabla.
 - *L4: Leer detrás de los datos*, es una valoración crítica de los datos, cómo son recogidos o afirmaciones hechas a partir de los datos.
3. *Procedimiento pedido*. Se incorporan los procedimientos con mayor presencia en el análisis de los textos escolares chilenos y españoles:
- El procedimiento *traducir o construir*, consiste en la confección de una tabla estadística, los datos se pueden proporcionar a través de un listado, un gráfico que puede ser de distinto tipo, o también de forma verbal.
 - El procedimiento *completar tabla*, caracterizado por tablas incompletas que se deben terminar, generalmente, registrando los valores que toman las frecuencias. Se ha complementado con el planteamiento de cuestiones que se deben responder en torno a la lectura de la tabla.
 - Se ha propuesto *argumentar*, que se asocia a la acción de justificar decisiones, procedimientos, etc. en torno a la información presentada en la tabla estadística.

Para comenzar, los diferentes tipos de tablas se cruzaron con los variados objetos matemáticos que se pueden presentar en ellas (tipos de frecuencias y/o la agrupación de valores en intervalos). La Tabla 5.3.1.1 muestra el detalle de este cruce de variables, donde es posible observar que la frecuencia absoluta se presenta en la mayor parte de los ítems. Los ítems que incorporan la frecuencia acumulada y valores en intervalos son menos, porque implican un mayor grado de dificultad y solo están considerados en las bases curriculares españolas a partir de 2ºESO.

Tabla 5.3.1.1. Distribución de ítems por tipo de tabla y tipo de frecuencias

Tipo de tabla	Valores o absolutas	Tipo de frecuencias		
		Relativas /probabilidades	Acumuladas	Intervalos
Listado datos	Ítem 1 y 7	Ítem 1		
Frecuencias	Ítem 2 y 3	Ítem 5	Ítem 4	Ítem 8
Contingencia	Ítem 6			Ítem 9

Por otra parte, también se incorporó en los ítems los niveles de lectura de Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), cruzado con el tipo de procedimiento pedido. El cruce de estas variables es detallado en la Tabla 5.3.1.2, donde cabe señalar, que la actividad leer o interpretar consiste en un tipo de tarea en que de manera explícita se solicita extraer información desde una tabla estadística. A pesar de ello, se sabe que actividades de traducción o construcción, argumentar o completar, requieren, por supuesto, la lectura de datos o información.

Tabla 5.3.1.2. Distribución de ítems por tipo de procedimiento y nivel de lectura

Procedimiento	Nivel de lectura			
	L1	L2	L3	L4
Leer /interpretar	Ítem 2	Ítem 2		Ítem 8
Traducir Verbal a tabla		Ítem 9		
/construir Listado a tabla		Ítem 1		
Gráfico a tabla		Ítems 3 y 6		Ítem 3
Argumentar		Ítem 3	Ítems 5	Ítem 7
Completar frecuencias		Ítem 4		

5.3.2. CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE ÍTEMS

Definido el número de ítems y la estructura del cuestionario, se procedió a confeccionar un banco de ítems, recopilando posibles actividades factibles de emplear. Un banco de ítems es un conjunto de tareas que miden igual rasgo o habilidad, con el objeto de seleccionar entre ellos el que se ajuste de mejor manera para medir determinado constructo (Barbero et al., 2015).

Su confección fue producto de la revisión de los antecedentes (Capítulo 2), seleccionando algunos ítems de interés propuestos en estas investigaciones, las cuales coincidían con la población contemplada en este trabajo. Se optó por cuestiones de respuesta abierta, que permiten acceder a información como el nivel de lectura alcanzado por el estudiante, además de evidenciar dificultades y posibles errores. También se incorporaron ítems tomados de los textos escolares, que en algunos casos fueron ajustados de acuerdo a intereses del estudio. La selección de los ítems siguió los criterios de calidad propuestos por Wang y Osterlind (2013), como:

- Coherencia entre los ítems que permitan medir el mismo constructo. El análisis a priori de cada ítem junto con el juicio de experto permite conseguir la validez del instrumento. Cabe destacar, que dicho criterio es posible de llevarse a cabo examinando el contenido del instrumento, la relación entre sus criterios y su idoneidad.

- Procurar evitar el empleo de ítems demasiados difíciles o fáciles para no incidir en el error de las medida de puntuación del test, o que estos sean los suficientemente pequeños para acreditar su utilización (Wilson y Gochyyev, 2013).
- Asegurar la solidez entre el formato de los ítems y los objetivos del instrumento.
- Cuidar la redacción de cada ítem para que resulte lo más clara posible, adaptando el test tanto en idioma como al vocabulario empleado por la población a la que está dirigida. También se debe asegurar la claridad y facilidad de las instrucciones, debido a que en la etapa de administración del instrumento, el investigador tiene escasa interacción con el estudiante.

Uno de los requisitos planteados fue la factibilidad de responder al cuestionario durante el tiempo que dura una clase, pues se aplicaría de forma grupal, es decir a todos los estudiantes que asistieran a clases el día que se administraría el instrumento, con el propósito de facilitar la recogida de los datos, evitando así agotar a los participantes. En primera instancia se ajusta el número de ítems que serían necesarios para tener en cuenta todas las variables, antes detalladas, junto con el cruce de las mismas.

Se estimó que el número de ítems era conveniente que fuese reducido, dado que se proponían ítems de respuesta abierta, que implican un mayor tiempo para elaborar su respuesta (Osterlind y Merz, 1994). Se recogieron también sugerencias (American Educational Research Association et al., 2014) como cuidar el orden de la presentación de los ítems, es decir, separar la descripción de la situación, luego presentar la tabla (si correspondía), y finalmente la pregunta.

Se redactaron propuestas de ítems que permitieran evaluar las diferentes variables consideradas en el estudio, detalladas en las Tablas 5.3.1.1 y 5.3.1.2. Posterior a esto, se compararon estos ítems con las tablas de especificaciones del contenido para asegurar la correcta combinación de variables. En algunos casos fue necesario realizar adaptaciones para conseguir ítems que obedecieran a las condiciones establecidas.

Por ejemplo, en la Figura 5.3.2.1, se expone uno de los posibles ítems seleccionado, donde se propone traducir la información expuesta en un diagrama de barras a una tabla de frecuencias absolutas.

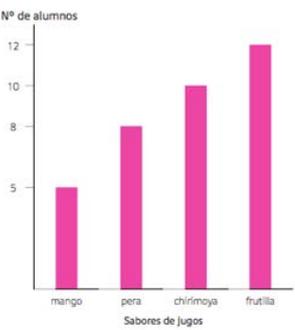
<p>Respecto a la información presentada en el siguiente gráfico de barra simple, relativa a la cantidad de alumnos de un curso que beben jugos de mango, pera, chirimoya y frutilla en un 5° básico:</p>  <p>a completan en la tabla siguiente la información:</p> <table border="1" data-bbox="654 1668 885 1803"> <thead> <tr> <th>Sabores</th> <th>Nº de alumnos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Chirimoya</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Frutilla</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Pera</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>b responden las siguientes preguntas:</p> <ul style="list-style-type: none"> > ¿Cuántos alumnos del curso son encuestados? > ¿Cuántos alumnos consumen más jugo de frutilla que jugo de chirimoya? > ¿Qué debería pasar en la cantidad de alumnos que consumen jugos de mango y chirimoya para que consuman igual cantidad de jugos de pera y frutilla? <p>MINEDUC (2013a, p. 148)</p>	Sabores	Nº de alumnos	Chirimoya		Frutilla	5	Pera		<p>Tabla de frecuencias absolutas</p> <p>Nivel de complejidad: C3.1.</p> <p>Actividad: Traducir de gráfico a tabla.</p> <p>Nivel de lectura: L1 y L2</p>
Sabores	Nº de alumnos								
Chirimoya									
Frutilla	5								
Pera									

Figura 5.3.2.1. Ejemplo de posible ítem para el cuestionario

Por tratarse de una tabla de una variable unidimensional con frecuencias absolutas, le correspondería un nivel de complejidad semiótico C3.1. Para completar la tabla se requiere un nivel de lectura L1 (*leer los datos*) correspondiente a una lectura literal de la información, sin embargo las preguntas planteadas a continuación, requieren un nivel de lectura L2 (*leer dentro de los datos*) para responderlas. Este sistema fue empleado para analizar los demás ítems que podrían formar parte del instrumento, consiguiendo un número considerable de posibles ítems.

Una vez elaborado el banco inicial de ítems, este fue nuevamente analizado, recibiendo ajustes y modificaciones lo que permitió mejoras en cuanto a la redacción, buscando además que los contextos planteados en las situaciones fueran variados y cercanos para los estudiantes. Se procuró que las imágenes de tablas estadísticas fuesen nítidas y factibles de imprimir con claridad en el cuestionario.

5.3.3. JUICIO DE EXPERTOS Y APROXIMACIÓN A LA VALIDEZ

Una vez acabada la construcción del banco de ítems, se abordó el estudio de la validez del contenido del instrumento a través de juicio de expertos (Martínez et al., 2014). El juicio de expertos consiste en una opinión fundamentada de personas con cierta trayectoria en el tema de estudio, reconocidos por sus pares del área investigativa y que están en la posición de aportar juicios y valoraciones (Ding y Hershberger, 2002).

Cuando los expertos realizan evaluaciones, sus respuestas son agrupadas para desembocar en una sola medida (Utkin, 2006), lo que permite, además de validar el contenido del cuestionario, robustecer el diseño del instrumento (Hernández et al., 2014). En este caso, se ha valorado la idoneidad de un conjunto de ítems basados en las especificaciones detalladas en las Tablas 5.3.1.1 y 5.3.1.2. Además, se pretende recoger las sugerencias de mejoras que podrían entregar los expertos en relación a los ítems propuestos. Cabe señalar, que el cuestionario está compuesto de nueve ítems en los que se mide las combinaciones de variables fijadas inicialmente, y que fueron seleccionados para cada ítem tres posibles actividades del banco de preguntas, para que los expertos colaborasen en decidir el más apropiado.

El principal objetivo del juicio de expertos es iniciar el proceso de recogida de indicios de validez del cuestionario. De acuerdo a Batanero y Díaz (2005), se entiende la validez como un concepto unitario, siendo la validez de contenido una forma de recoger información sobre la validez (Martínez et al., 2014). Asimismo, se entiende la validez en relación al uso que se dará al cuestionario y la interpretación de sus resultados.

La validez de contenido indica que el instrumento recoge una muestra representativa de los contenidos que se pretenden evaluar. Para conseguirla, se hizo una planificación cuidadosa de los ítems que se incluirán en el cuestionario, y se ha descrito con detalle la manera en que estos ítems contribuyen a la medida del constructo subyacente. También se ha usado una metodología pertinente para asegurar que los ítems corresponden a las especificaciones del cuestionario, mediante juicio de expertos, que asociaron los ítems con objetivos, resumiendo la información numéricamente. Dicha información se presenta a continuación.

5.3.4. MUESTRA DE EXPERTOS

La selección de las personas que conformarán el grupo de expertos es una etapa importante en el proceso de validación de contenido de un instrumento (Shultz et al., 2020). Al igual que Batanero y Díaz (2005), se entiende que el experto es definido de acuerdo al propósito del instrumento, y que el conjunto de expertos seleccionados deben representar una diversidad de competencias y criterios para asegurar adecuadamente la validación (Cruz y Martínez, 2012).

En la selección se priorizaron a investigadores con amplia experiencia, avalada por publicaciones en revistas internacionales y permanente participación en eventos relevantes de Educación Matemática, y específicamente en Didáctica de la Estadística. También, en la mayoría de los casos, cuenta que los expertos desarrollaron sus tesis en esta área, y posteriormente se conformaron en una contribución a la investigación en forma de artículos. Estas razones, permiten asegurar la idoneidad y experticia de los participantes (Juarez-Hernández y Tobon, 2018; Summers et al., 2004), por lo que sus valoraciones serán de gran aporte en la representatividad y claridad de los ítems propuestos (Reguant-Álvarez y Torrado-Fonseca, 2016).

En relación a la cantidad ideal de expertos, existen variadas posturas (Shultz et al., 2020), lo usual es seleccionar de 3 a 20 personas que cumplan con criterios basados en el número de publicaciones o experiencia (McGarland et al., 2003). En este caso se consideraron los siguientes:

- Experiencia y reconocido prestigio en la línea de investigación de Educación Estadística (estudios previos, dirección de tesis o proyectos de investigación, publicaciones).
- Reputación dentro del ámbito académico, dada por el número de citas a sus trabajos.
- Disponibilidad para participar y conocimiento de la lengua castellana en la que está redactado el cuestionario.

Cabe señalar, que la invitación a participar en la valoración del cuestionario, se extendió a 12 expertos, de los cuales 11 aceptaron, lo que es adecuado, dado que a partir de 10 participantes se puede obtener una estimación confiable de la validez del contenido de un instrumento (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008).

La Tabla 5.3.4.1 presenta un resumen del perfil académico de los investigadores que participaron en la evaluación del cuestionario. La muestra de expertos cuenta con especialistas de Argentina, Chile, España, México y Portugal, con grado de doctor, experiencia en la formación de maestros y docencia variada en distintos niveles educativos.

Para asegurar la imparcialidad (Shultz et al., 2020) de las valoraciones, se optó por el esquema “panel ciego”. De esta manera, cada participante desconocía la identidad de los demás expertos, y en ningún caso tuvieron algún tipo de contacto físico (Wang y Osterlind, 2013) a propósito de la valoración encomendada.

Tabla 5.3.4.1. Expertos participantes en la valoración del contenido

Nº	Formación y Experiencia
1	Doctor en Matemáticas. Catedrático de Didáctica de las Matemáticas. Amplia trayectoria en la investigación sobre Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Educación Infantil, Primaria y Formación inicial del profesorado. España
2	Doctora en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Profesora Titular en el área de Didáctica de la Matemática. Amplia trayectoria investigadora sobre temas en Didáctica de la Estadística y actitudes hacia la Estadística. España.
3	Doctora en Ciencias de la Educación. Sus líneas de investigación son la Didáctica de la Probabilidad y la Estadística, además de la formación del profesorado de Educación Primaria. Chile.
4	Doctor en Didáctica de la Matemática. Investiga en Didáctica de la Probabilidad y la Estadística. Chile.
5	Doctor en Ciencias de la Educación. Investiga en Didáctica de la Probabilidad y la Estadística. Chile.
6	Doctor en Ciencias. Investiga sobre la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y TIC en la Enseñanza de la Matemática. México.
7	Doctor en Matemáticas. Catedrático de Didáctica de la Matemática. Investiga sobre Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. España.
8	Doctor en Educación. Profesor asociado en un Instituto de Educación. Su trabajo se centra en Educación Matemática, Didáctica y Educación Superior. Portugal.
9	Doctor en Didáctica de la Matemática. Investiga sobre didáctica de la Estadística y la Probabilidad. España.
10	Doctora en Pedagogía. Preside una organización ligada a la Investigación en Educación Estadística en América Latina. Argentina.
11	Doctor en Didáctica. Investiga en diferentes temáticas en torno a la Educación Matemática. España.

Para llevar a cabo la evaluación mediante juicio de expertos, se preparó un cuestionario que debía ser completado con la opinión de cada uno de los participantes. La primera página del cuestionario (Figura 5.3.4.1), presentaba una carta con la exposición de los objetivos del estudio, así como del instrumento, además de unas notas destacando la importancia de su participación y colaboración en esta instancia de la investigación, lo que de antemano se agradecía.

En las siguientes páginas, se entregaron instrucciones sobre la manera en que debía ser completado, y las preguntas que se requerían responder. Para ello, se exponían las Tablas 5.3.1.1 y 5.3.1.2 que detallan las variables consideradas en el diseño del instrumento, además del criterio adoptado para seleccionar los nueve ítems. Las tablas facilitaban a los expertos la comparación de cada ítem planteado con sus respectivas especificaciones, ayudando de esta manera a la elección de los ítems más adecuados, de acuerdo a su criterio.

También en esta página (ver Figura 5.3.4.1) se señala con precisión lo que se les solicitaba:

- Valorar cada uno de los enunciados propuestos, para cada contenido, según su opinión.
- Sugerir mejoras en la redacción de los ítems.

Estimado(a) Profesor(a)

El cuestionario adjunto es parte de una investigación sobre la comprensión de las tablas estadísticas por parte de estudiantes de Educación Básica.

Los resultados de su colaboración serán usados en una de las fases de la construcción de un instrumento de evaluación, más concretamente para la revisión, a partir del juicio de expertos, de aspectos metodológicos relacionados con el enunciado de los ítems que serán considerados en el instrumento para el estudio piloto.

Dicho instrumento piloto constará de 9 ítems, que tratarán de evaluar la comprensión que tienen estos alumnos de las tablas estadísticas, tema que han tratado durante sus años de escolaridad. Los ítems fueron seleccionados, y en algunos casos adaptados, a partir de un análisis de libros de texto (10 a 13 años) y de la revisión de investigaciones previas.

Solicitamos de su colaboración para participar en esta investigación como experto(a) en Educación Estadística, debido a su amplia experiencia en investigaciones que ha desarrollado en esta área.

Le agradeceríamos mucho su cooperación, que consideramos muy valiosa para conseguir unos mejores resultados en nuestro trabajo. Estamos dispuestos a proporcionar información complementaria sobre nuestra investigación y atender a sus preguntas e inquietudes sobre la misma.

Atentamente,

Figura 5.3.4.1. Presentación de cuestionario a expertos

En las siguientes páginas, por cada ítem se presentan tres posibilidades las cuales se enmarcan en la combinación de variables (tipo de tabla y frecuencia; nivel de lectura y actividad). Como es posible de observar en la Figura 5.3.4.2, también se anexó una tabla para la valoración de los ítems por parte de los expertos, donde se optó por aplicar un sistema de calificación en una escala de 1 al 5, estilo Likert, tomando en cuenta la frecuencia con los siguientes extremos:

- 1: Nada relevante para el propósito del ítem.
- 5: Muy relevante para el propósito del ítem.

La construcción de la escala requiere tomar en cuenta diferentes recomendaciones en torno a las propiedades psicométricas (Furr, 2011). En este caso se decidió emplear una escala de cinco puntos, dado que los estudios recomiendan utilizar entre un mínimo de 5 y un máximo de 8 intervalos. En este sentido, Hernández-Baeza et al. (2000) consideran que de 4 a 6 categorías permiten una adecuada precisión de las estimaciones de los parámetros de los ítems.

Cabe destacar, que existen preguntas dentro del mismo ítem que están destinadas solo a estudiantes de 3°ESO por su mayor dificultad. Esto se advirtió a los expertos para que lo tuviesen en cuenta al momento de valorar. Al finalizar la tabla en que el experto entrega la evaluación de cada posible ítem (Ver Figura 5.3.4.2), se incluye un espacio para comentarios que puedan contribuir a mejorar la calidad de los ítems propuestos.

Cuestionario para expertos

Las tablas siguientes muestran el diseño previsto del cuestionario, donde variamos por una parte el tipo de tabla y tipo de frecuencias representado, y por otro la actividad junto al nivel de lectura requerido (Friel et al., 2001) (ver Tablas 5.3.1.1 y 5.3.1.2).

Solicitamos su ayuda para elegir y mejorar los 9 ítems que formarán el cuestionario. Cada uno de estos ítems, corresponden a un contenido, fijado en las dos tablas anteriores. A continuación, en cada contenido se proponen tres posibles ítems para seleccionar uno. Requerimos su colaboración para:

- Valorar cada uno de los enunciados propuestos, para cada contenido, según su opinión.
- Sugerir mejoras en la redacción de los ítems.

Ítem 1: Traducir un listado de datos a tabla con frecuencias absolutas y relativas. Nivel de lectura L2 (Solo para 3º curso)**

Ítem 1.1. Fuente: Libro del estudiante 8º curso de Educación Básica, SM, p. 312
Elabora una tabla de frecuencias para la información dada. Considera 4 intervalos. Las precipitaciones que ha registrado un pluviómetro durante 20 días son:

Precipitaciones (mm)				
9	10	11	10	12
15	16	16	16	16
14	13	13	14	13
12	13	12	12	14

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa **
Total		

Ítem 1.2. Fuente: Libro del estudiante 5º curso de Educación Básica, Santillana, p.277
Claudia observó los siguientes insectos en su jardín.

hormiga- mariposa- abeja- abeja- hormiga- hormiga- mosquito- mosquito- abeja- mosquito- mariposa- hormiga- hormiga-mosquito-hormiga- hormiga

Completa la tabla con los datos registrados por Claudia

Insecto	Cantidad	Frecuencia relativa **
Total		

Ítem 1.3. Fuente: Libro del estudiante 5º curso de Educación Básica, Santillana, p. 312
En una caja se introducen las tarjetas numeradas con 2, 5, 6, 8 y 9. Se extrae al azar una, se registra su número y se devuelve a la caja. Los resultados obtenidos en cada extracción son los siguientes:

2 – 5 – 5 – 8 – 9 – 2 – 2 – 6 – 2 – 6 – 9 – 6 – 2 – 9 – 2 – 5 – 2 – 6 – 8 – 5 – 5 – 2

Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa**
Total		

Marque para cada ítem una puntuación:	1: Nada	2	3	4	5: Mucho
El ítem 1.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 1.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 1.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Figura 5.3.4.2. Cuestionario para expertos

5.3.5. RESULTADOS DE LA VALORACIÓN DE LOS EXPERTOS

En esta sección, se presentan los resultados de las puntuaciones asignadas por parte de los expertos a cada uno de los posibles ítems que componen el cuestionario. El análisis de estas evaluaciones permitirá seleccionar los ítems que formarán parte del cuestionario. Se recogieron los cuestionarios con las evaluaciones de los 11 expertos, y con estos datos se realizó un análisis descriptivo de los 27 ítems, para lo cual se examinaron la media, mediana y desviación típica.

En la Tabla 5.3.5.1 se presentan los resultados obtenidos, así como la frecuencia de expertos que han calificado cada una de las valoraciones de 1 a 5. Se puede apreciar que las puntuaciones fueron, en general, altas. Prácticamente la totalidad de los ítems, exceptuando de uno, la mediana es 4 o superior, mientras que la media es cercana o supera a 4. Cabe destacar que, en todos los grupos de tres ítems con igual contenido, al menos uno reúne las condiciones señaladas anteriormente.

Tabla 5.3.5.1. Frecuencia de puntuación (1-5) por los expertos a cada ítem

Ítem	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
1.1			2	4	5	4,3	4	0,79
1.2				4	7	4,6	5	0,51
1.3	1	1	1	5	3	3,7	4	1,27
2.1		1	1	3	6	4,3	5	1,01
2.2		1	1	6	3	4	4	0,89
2.3		2	2	3	4	3,8	4	1,17
3.1		1	2	2	6	4,2	5	1,08
3.2			2	5	4	4,2	4	0,75
3.3	1		2	5	3	3,8	4	1,17
4.1			1	6	4	4,3	4	0,65
4.2			2	3	6	4,4	5	0,81
4.3	1	1	4	3	2	3,4	3	1,21
5.1		1		6	4	4,2	4	0,87
5.2	1	1		2	7	4,2	5	1,40
5.3		2		4	5	4,1	4	1,14
6.1			1	3	7	4,6	5	0,69
6.2				4	7	4,6	5	0,51
6.3				4	7	4,6	5	0,51
7.1				3	8	4,7	5	0,47
7.2				5	6	4,6	5	0,52
7.3			2	4	5	4,3	4	0,79
8.1			1	5	5	4,4	4	0,67
8.2				6	5	4,5	4	0,52
8.3				3	8	4,7	5	0,47
9.1		1		1	9	4,6	5	0,92
9.2				8	3	4,3	4	0,47
9.3			1	7	3	4,2	4	0,60

Con esta información, se realiza un análisis en detalle de cada grupo de ítems que obedecían a igual contenido para seleccionar el mejor evaluado, de acuerdo al criterio de los expertos. Este estudio se llevó a cabo a través de las puntuaciones obtenidas, complementadas por los comentarios y aportes entregados por los miembros del panel. Todo este proceso, para establecer las preguntas idóneas que conformarán el cuestionario.

Ítem 1: Traducir un listado de datos a tabla con frecuencias absolutas y relativas

En la Tabla 5.3.5.2, se presentan las evaluaciones entregadas por el panel de expertos a este ítem. Se debe recordar que los tres se enmarcan en igual contenido, con un nivel de lectura L2 y de complejidad semiótica C3.1. Cabe recordar, que una de las columnas de las tablas (calcular frecuencia relativa) propuesta en el ítem estaba destinada exclusivamente para estudiantes de 3°ESO (Ver Figura 5.3.4.2), porque son contenidos que se profundizan en 2°ESO.

Tabla 5.3.5.2. Resultados de la valoración de expertos ítem 1

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 1.1			2	4	5	4,3	4	0,79
Ítem 1.2				4	7	4,6	5	0,51
Ítem 1.3	1	1	1	5	3	3,7	4	1,27

Las valoraciones entregadas por los expertos son diversas, y en su mayoría altas. El ítem 1.2 obtuvo una mejor valoración, y que busca representar un listado de datos de una variable cualitativa por medio de una tabla de frecuencias absolutas y relativas (sólo para 3°ESO). La desviación típica es pequeña, mostrando cierta homogeneidad de criterio, además, la mediana y moda son superiores a las de los otros ítems, todos estos elementos llevaron a decidir por este ítem.

Los comentarios de los expertos destacan que el ítem 1.2 es más simple, especialmente, pensando en los estudiantes de 1° curso. Además, consideran valioso que los datos correspondan a una variable cualitativa porque no es habitual en este tipo de tareas considerar este tipo de variable. Algunos de los comentarios realizados por los expertos fueron los siguientes:

El objetivo es claro, obtener una tabla de frecuencias a partir de un conjunto de datos brutos. Hay una variable de tarea que es “tipo de datos” que produce una gradación en la dificultad de cada ítem. El más fácil es el 1.2, variable cualitativa, le sigue el de variable cuantitativa discreta (Ítem 1.3), el más difícil es el ítem 1.1, variable cuantitativa continua (además del recuento, debe elegir los intervalos) (Experto 7).

Entre os dois primeiros itens, o 1.2 parece-me mais adequado, porque é mais simples, sobretudo para os alunos do 6.º ano. Além disso, sendo o objetivo representar uma lista de dados por uma tabela de frequências, talvez não seja necessário recorrer a uma variável quantitativa discreta, considerada como contínua para efeitos de análise estatística. O contexto do item 1.3 parece-me pouco adequado na medida em que a extração aleatória não desempenha qualquer papel aqui (Experto 8).

El enunciado 1.2 me parece el más adecuado porque es muy común que no se consideren variables cualitativas y son muchos los errores que he podido detectar cuando se resume este tipo de datos, incluso con profesores (Experto 10).

Recogiendo los comentarios y aportes del panel de expertos, en el ítem 1.2 se reemplazará el título de la columna que señala “cantidad” por “frecuencia absoluta” (Ver Figura 5.4.1), pero solo para el cuestionario dirigido a los estudiantes de 3°EOS, para que sea coherente con el cálculo de la columna de frecuencias relativas. También se revisará la frecuencia con que aparece cada insecto, para facilitar los cálculos de la frecuencia relativa y no fatigar a los estudiantes con la primera pregunta del cuestionario.

Ítem 2. Leer tablas de frecuencia absolutas

En este segundo ítem, expuesto en la Figura 5.3.5.1, se ha considerado especialmente la lectura de una tabla estadística con frecuencias absolutas (Nivel de complejidad semiótico C3.1), para ello, cada una de las preguntas que se presentan a partir de la información expuesta en la representación tabular son de un nivel de lectura L1 y L2.

<p>Ítem 2.1. Fuente: Libro del estudiante 5° curso de Educación Básica, p. 218</p> <p>En la siguiente tabla se muestran los resultados de una encuesta realizada a los asistentes de un cumpleaños respecto de la torta que prefieren</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿Cuántos asistentes prefieren la torta de merengue?</p> <p>b) ¿Cuál de las tortas la prefieren 5 personas?</p> <p>c) ¿Qué torta tiene menos preferencias?</p> <p>d) ¿Cuántas personas más prefieren la torta de mil hojas que la de selva negra?</p> <p>e) ¿Cuántas personas asistieron al cumpleaños?</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Torta</th> <th>Cantidad de personas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mil hojas</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Merengue</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Tres leches</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Selva Negra</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Torta	Cantidad de personas	Mil hojas	4	Merengue	6	Tres leches	5	Selva Negra	2				
Torta	Cantidad de personas															
Mil hojas	4															
Merengue	6															
Tres leches	5															
Selva Negra	2															
<p>Ítem 2.2. Adaptado: Libro del estudiante 5° curso de Educación Básica, p. 298</p> <p>En la tabla se muestra el sabor de yogurt preferido por un grupo de niños. Considera que cada niño solo pudo elegir un sabor.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿Cuántos niños prefieren el yogurt de durazno?</p> <p>b) ¿Cuál es el sabor que prefieren 6 niños?</p> <p>c) ¿Cuál es el sabor de yogurt que prefiere la mayoría de los niños?</p> <p>d) ¿Cuántos niños en total respondieron a la encuesta?</p> <p>e) ¿Cuántos niños más debieran preferir el yogurt de piña para igualar la cantidad de niños que prefieren el de vainilla?</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Sabor</th> <th>Cantidad de niños</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Frutilla</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Vainilla</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Damasco</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Durazno</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Piña</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Sabor	Cantidad de niños	Frutilla	8	Vainilla	6	Damasco	4	Durazno	4	Piña	2		
Sabor	Cantidad de niños															
Frutilla	8															
Vainilla	6															
Damasco	4															
Durazno	4															
Piña	2															
<p>Ítem 2.3. Adaptado: Libro del estudiante 7° curso de Educación Básica, p. 362</p> <p>Se ha realizado una encuesta con respecto a la cantidad de televisores que tienen los hogares. La tabla resume la información obtenida.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿En cuántas casas tienen 2 televisores?</p> <p>b) ¿Cuántos televisores tienen 14 hogares?</p> <p>c) ¿Cuántos televisores tiene la mayoría de los hogares?</p> <p>d) ¿Cuántos hogares tienen 3 televisores o menos?</p> <p>e) ¿Cuántos hogares se encuestaron en total?</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Televisores en los hogares</th> </tr> <tr> <th>Cantidad de televisores</th> <th>Cantidad de hogares</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>14</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	Televisores en los hogares		Cantidad de televisores	Cantidad de hogares	1	14	2	16	3	10	4	6	5	4
Televisores en los hogares																
Cantidad de televisores	Cantidad de hogares															
1	14															
2	16															
3	10															
4	6															
5	4															

Figura 5.3.5.1. Versión ítem 2 para juicio de expertos

La Tabla 5.3.5.3 resume la valoración entregada por los expertos a este ítem, se observa una variedad de puntajes recibidos en cada uno de los posibles ítems propuestos, pero, en general, las evaluaciones son altas.

Tabla 5.3.5.3. Resultados de la valoración de expertos ítem 2

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 2.1	1	1	3	6		4,3	5	1,01
Ítem 2.2	1	1	6	3		4	4	0,89
Ítem 2.3	2	2	3	4		3,8	4	1,17

La mayoría de las valoraciones son superiores o iguales a cuatro, al igual que la mediana, y para las tres propuestas se alcanza un buen nivel de aceptación. A pesar de ello, los expertos manifestaron diferentes discrepancias y comentarios respecto a este ítem, algunos de ellos se presentan a continuación:

Ítem 2.1: yo no utilizaría la palabra “encuesta”, porque me parece que se refiere a una serie de preguntas, y aquí sólo se plantea una pregunta. Ítem 2.2: ¿qué pasaría si a la pregunta b alguien responde durazno y piña? ¿se consideraría una respuesta incorrecta? Creo que hay que replantear la redacción si lo que se pretende es que se responda “vainilla” (Experto 1).

Ítem 2.1., la situación es forzada, la encuesta debería ser antes del cumpleaños para decidir qué tortas comprar (Experto 5).

Considero que o ítem 2.1 é o mais adequado. O ítem 2.2 refere no enunciado “Considera que cada niño solo pudo elegir un sabor”, aspeto que o aluno poderá ignorar, não prestar atenção; no ítem 2.3, a variável é numérica, tal como as frequências, o que também pode dificultar a tarefa aos alunos (Experto 8).

En el caso de los dos últimos ítems no logro poner una puntuación mayor a uno, ambos me parecen muy relevantes porque las preguntas que se realizan logran una buena variación de lecturas de ambos niveles y, además, tanto la variable cualitativa como la cuantitativa discreta, se utilizan poco y ambas brindan las mismas complejidades (Experto 10).

Hay preguntas de cada ítem que admiten varias respuestas. La b de todas, y la a del 2.3. Tal vez habría que poner cuántas casas tienen exactamente dos televisores. O dos o más. O dejarlo abierto para estudiar qué interpretan, que también podría ser curioso (Experto 11).

Considerando los diferentes comentarios y valoraciones realizadas por los expertos, se ha optado por el ítem 2.2, pues puede ser un contexto más cercano para los estudiantes, y al tratarse de una variable cualitativa puede ser más sencilla de responder. Se aceptarán las recomendaciones en cuanto a la redacción de este ítem, de modo que la respuesta correcta sea única, evitando así confusiones o dobles interpretaciones (Figura 5.4.3).

Ítem 3. Traducir de gráfico a tabla de frecuencias absolutas

El tercer ítem, como es posible de apreciar en la Figura 5.3.5.2, implica pasar la información de un gráfico, de tipo pictograma para los ítems 3.1 y 3.2, y circular en el ítem 3.3, a una tabla de frecuencias absolutas, lo que se enmarca en un nivel de

complejidad semiótico C3.1. Además se incluyen dos preguntas que requieren la lectura de la tabla en los niveles L2 y L4.

Ítem 3.1. Adaptado: Díaz-Levicoy (2018)
 Representa en una tabla la información mostrada en el siguiente gráfico.

Número de horas por semana que está prendida la luz	
Lugar	Nº de horas
Sala de ejercicios	
Casillero	
Piscina	
Canchas de tenis	
Total	



Responde las siguientes preguntas:

- María dice que en la cancha de tenis las luces están encendidas 5 horas, ¿Tiene razón? ¿por qué?
- ¿Qué medidas podría emplear el centro deportivo para reducir su consumo de electricidad?

Ítem 3.2. Adaptado: Libro de estudiante 5º curso de Educación Básica, Santillana, p. 279
 Observa los datos presentados en el pictograma. Luego, representa esta información en la tabla y responde.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cant. de estudiantes				

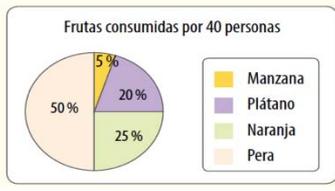


Responde las siguientes preguntas:

- María dice que el deporte favorito fue el fútbol porque 5 estudiantes lo prefieren. ¿Tiene razón María? ¿por qué?
- ¿Qué medidas tomarías para aumentar el gusto por el tenis?

Ítem 3.3. Adaptado: Libro de estudiante 7º curso de Educación Básica, SM, p. 300
 El gráfico muestra la información obtenida a través de una encuesta aplicada a 40 personas acerca de la fruta que más consumen. Representa esta información en la tabla adjunta.

Frutas	Manzana	Plátano	Naranja	Pera
Nº de personas				



Responde las siguientes preguntas:

- Juan dijo que el título está equivocado pues hay más de 40 personas, ya que 50 prefieren la pera. ¿Qué opinas?
- ¿Qué se puede hacer para aumentar el gusto por la manzana?

Figura 5.3.5.2. Versión ítem 3 para juicio de expertos

En este ítem el estudiante requiere realizar cálculos con los datos del gráfico, pues en el caso de los pictogramas cada icono representa un valor diferente de la unidad, mientras que en el gráfico de sectores se requiere calcular porcentajes. Como se puede observar, los contextos son variados: el primero, ya utilizado en una investigación anterior (Díaz-Levicoy, 2018), basado en el consumo eléctrico en la iluminación de un centro

deportivo; el segundo sobre los deportes favoritos de un grupo de estudiantes, y el tercero respecto a la fruta más consumida en una semana por un grupo de estudiantes.

En la Tabla 5.3.5.4, se muestran las valoraciones por parte del panel de expertos a las tres propuestas para este ítem. Se observa que dos de ellos fueron evaluados de manera muy similar, ambos con igual media, pero con mediana y desviación típica diferente.

Tabla 5.3.5.4. Resultados de la valoración de expertos ítem 3

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 3.1		1	2	2	6	4,2	5	1,08
Ítem 3.2			2	5	4	4,2	4	0,75
Ítem 3.3	1		2	5	3	3,8	4	1,17

Algunos de los comentarios y sugerencias entregadas por los expertos en torno a este ítem, se detallan a continuación:

Ítems 3.1., 3.2 y 3.3: entiendo la intencionalidad de la pregunta b de cada ítem, pero no tengo claro si un niño puede llegar a una interpretación profunda de los datos que le permita dar una respuesta coherente (Experto 1).

Son más fáciles los cálculos en 3.1 y 3.2 (Experto 7)

Considera-se o item 3.2 mais adequado, pois no item 3.1 tem-se unidades e partes da unidade e no item 3.3 é necessário transformar percentagens em frequências absolutas (Experto 8).

Al primer ítem le he dado una valoración menor porque, aunque en muchas ocasiones aparece ese tipo de pictograma, considero que tiene una complejidad cognitiva y semiótica que puede provocar conflictos. Considero esto porque en realidad se está midiendo tiempo el cual se expresa de manera discreta y esto lleva muchas veces a conflictos que no se logran solucionar ni siquiera en el nivel superior (Experto 10).

No sé si las preguntas b son apropiadas para la lectura de más allá de los datos. Se podría preguntar algo acerca de cómo han sido recogidos. Si están de acuerdo con ellos, si piensan que la manzana gusta más, dónde han preguntado la encuesta para que pueda pasar eso. La pregunta actual del ítem se podría hacer sin tener los datos. Hay que ir detrás de ellos, no ignorarlos (Experto 11).

De acuerdo a los diversos comentarios recibidos, nos hemos decidido por el ítem 3.2, pues como señalan algunos expertos puede resultar más sencillo para el estudiante, porque la unidad de medida empleada en este pictograma es menor, además, presenta la menor desviación típica, lo que indica cierta heterogeneidad en las valoraciones obtenidas. Se tomaron en cuenta algunas sugerencias en cuanto a la redacción, del detalle de la manera en que se obtuvieron los datos, así como la revisión del planteamiento de la pregunta b, lo que es posible de apreciar en la Figura 5.4.5.

Ítem 4. Completar tabla con frecuencias acumuladas

Este cuarto ítem está destinado exclusivamente para los estudiantes de 3°ESO, y requiere completar una tabla de frecuencias absolutas y acumuladas, de complejidad semiótica C3.2 y posteriormente responder a dos preguntas a partir de la información expuesta en la tabla estadística con un nivel de lectura L2.

Como en los ítems anteriores, en la Figura 5.3.5.3 se presentan tres propuestas de igual contenido, pero con diferente contexto, el primero relacionado con la cantidad de caramelos que consume un grupo de estudiantes durante una semana; el segundo asociado a la cantidad de días de estadía de un grupo de huéspedes en un hotel en una semana; y por último, el registro de estaturas de los jugadores de un equipo de fútbol.

<p>Ítem 4.1. Adaptado: Libro de estudiante 7° curso de Educación Básica, SM, p. 322</p> <p>En un colegio se les preguntó a los estudiantes la cantidad de caramelos que consumen durante los días de clase. Completa la tabla con las frecuencias indicadas.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿Cuántos caramelos comió la mayoría de los estudiantes?</p> <p>b) ¿Cuántos estudiantes comieron más de tres caramelos?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Cantidad de caramelos que consume un grupo de estudiantes en la semana</th> </tr> <tr> <th>N° de caramelos</th> <th>Frecuencia absoluta</th> <th>Frecuencia acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>10</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>40</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Cantidad de caramelos que consume un grupo de estudiantes en la semana			N° de caramelos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	2	12		3	7		4	10		5			Total	40	
Cantidad de caramelos que consume un grupo de estudiantes en la semana																						
N° de caramelos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada																				
2	12																					
3	7																					
4	10																					
5																						
Total	40																					
<p>Ítem 4.2. Adaptado: Libro de estudiante 7° curso de Educación Básica, SM, p. 331</p> <p>En un hotel se registró los días de estadía de los huéspedes por el período de una semana. Completa la tabla con las frecuencias indicadas.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿Cuántos días se quedan la mayoría de los huéspedes?</p> <p>b) ¿Cuántos huéspedes se quedan 4 días o menos?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Estadía de huéspedes en una semana</th> </tr> <tr> <th>Estadía en días</th> <th>Frecuencia absoluta</th> <th>Frecuencia acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>28</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>25</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>28</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>15</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Estadía de huéspedes en una semana			Estadía en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	1	28	28	2		40	3	25		4	28		5	15	
Estadía de huéspedes en una semana																						
Estadía en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada																				
1	28	28																				
2		40																				
3	25																					
4	28																					
5	15																					
<p>Ítem 4.3. Adaptado: Libro de ejercicios 7° curso de Educación Básica, SM, p. 137</p> <p>En una escuela deportiva se midió a los jugadores y se registraron algunos resultados. Completa la tabla que se presenta a continuación.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿Cuál es la estatura de la mayoría de los jugadores?</p> <p>b) ¿Cuántos jugadores miden 162,5 cm o menos?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Estatura de los jugadores de fútbol de una escuela deportiva</th> </tr> <tr> <th>Estatura (cm)</th> <th>Frecuencia absoluta</th> <th>Frecuencia acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>152,5</td> <td>7</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>157,5</td> <td></td> <td>17</td> </tr> <tr> <td>162,5</td> <td>15</td> <td></td> </tr> <tr> <td>167,5</td> <td>12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>172,5</td> <td>6</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Estatura de los jugadores de fútbol de una escuela deportiva			Estatura (cm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	152,5	7	7	157,5		17	162,5	15		167,5	12		172,5	6	
Estatura de los jugadores de fútbol de una escuela deportiva																						
Estatura (cm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada																				
152,5	7	7																				
157,5		17																				
162,5	15																					
167,5	12																					
172,5	6																					

Figura 5.3.5.3. Versión ítem 4 para juicio de expertos

La Tabla 5.3.5.5 resume las valoraciones entregadas por los expertos a los tres ítems propuestos. Es posible apreciar que estas fueron variadas, siendo el ítem 4.2 el mejor evaluado, con una media de 4,4, una mediana de 5 y una baja desviación típica (0,81). El ítem 4.1 recibe una valoración similar al mencionado anteriormente, pero a los expertos no les pareció muy adecuado el contexto, pues el consumo de caramelos no es

saludable para los niños, además, el recuento de estos no es una práctica habitual en el contexto cotidiano de los chicos (Experto 1).

Tabla 5.3.5.5. Resultados de la valoración de expertos ítem 4

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 4.1			1	6	4	4,3	4	0,65
Ítem 4.2			2	3	6	4,4	5	0,81
Ítem 4.3	1	1	4	3	2	3,4	3	1,21

Las evaluaciones entregadas a este ítem por parte de los expertos estuvieron complementadas por algunos comentarios como:

Ítem 4.1: Yo no lo veo mucho sentido que se pregunte a los estudiantes por la cantidad de caramelos que consumen durante los días de clase. Espontáneamente no los contabilizan y, por otro lado, no es muy recomendable el consumo de caramelos desde el punto de vista de la Educación para la Salud. Yo quizás cambiaría el elemento a contabilizar (Experto 1).

El ítem 4.3 me gustó pues contenía frecuencias acumuladas, que pueden ser ampliadas en otros ítems. Es un concepto que se utiliza en los niveles superiores. Se podría agregar más preguntas con el objeto de obtener medidas estadísticas (Experto 4).

4.1. Especificar mejor el periodo de tiempo, *días de clases* es muy amplio

4.3. La variable es continua, usar intervalos (Experto 5).

O item 4.3 parece não ser adequado uma vez que a variável altura não é discreta, pois, na medido do possível, penso que se deve a relação entre o tipo de variável estatística e o método de análise. Considera o item 4.2 mais adequado pois envolve o estabelecimento das frequências acumuladas e a determinação de uma frequência absoluta simples (17-7=10), o que não acontece com o item 4.1 (Experto 8).

Al tercer ítem le asigné menor puntuación porque es raro que las estaturas sean todas “,5”, es decir, al ser una variable continua, parece algo artificiales o forzadas esas mediciones y es al menos raro que 15 alumnos tengan exactamente la misma altura. Esto podría inducir a ciertas creencias, como, por ejemplo, tratar una variable continua como una discreta (Experto 10).

El 4.3 es continua. Debería estar en intervalos, marcas de clase (Experto 11).

Aceptando los comentarios recibidos, se optó por el ítem 4.2, en el cual se realizaron cambios leves, principalmente en las frecuencias absolutas, para que la respuesta de la primera cuestión sea única. También, se amplía el tamaño de la tabla para que al imprimirse sea más nítida, y el estudiante disponga del espacio suficiente para finalizarla.

Ítem 5. Argumentar y predecir valores en tablas con frecuencias relativas

El quinto ítem implica conjeturar información conocidos algunos datos presentados en una tabla de frecuencias relativas, con un nivel de complejidad semiótico C3.1. El nivel de lectura requerido para responder a la tarea corresponde a L3. Cabe señalar, que la cuestión que implica la predicción (pregunta b) está destinada solo a los estudiantes de 3°ESO.

La Figura 5.3.5.4, muestra las tres propuestas presentadas a los expertos, para que decidieran el más apropiado para este ítem, de acuerdo a las tablas de especificaciones (Tabla 5.3.1.1 y 5.3.1.2) entregadas previamente.

Ítem 5.1. Adaptado: Libro de estudiante 7° curso de Educación Básica, p. 346
 En la siguiente tabla se registraron los resultados al extraer 1.000 veces una ficha desde una urna con 10 fichas numeradas desde el 1 al 10, pero olvidaron completar la última columna.

1000 extracciones										
Número de la ficha obtenida										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia absoluta	98	106	96	97	98	110	102	98	92	
Frecuencia relativa	0,098	0,106	0,096	0,097	0,098	0,11	0,102	0,098	0,092	

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces piensas que salió el 10? Justifica tu respuesta.
- Si se aumentan las extracciones a 10.000 ¿cuántas veces piensas que saldría aproximadamente cada ficha? Justifica tu respuesta. **

Ítem 5.2. Adaptado: MINEDUC (2016, p. 173)
 Camilo pertenece a la selección de atletismo de su colegio y entrena en lanzamiento de bala para el próximo campeonato. Sus resultados durante 6 días son expuestos en la siguiente tabla.

Nº de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia (M)	5,05	5,76	6,31	7,17	7,88	8,3		

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles podrían ser los posibles resultados en los días 7 y 8? Justifica tu respuesta.
- Si aumenta sus entrenamientos hasta los 10 días ¿cuál crees que sería la distancia que lograría en su lanzamiento? Justifica tu respuesta. **

Ítem 5.3. Adaptado: Libro de ejercicios 7° curso de Educación Básica, p. 151
 La tabla resume algunos de los resultados de un experimento que consistió en la extracción de una carta de una baraja de naipes español 1.000 veces, registrando su pinta.

Extracción de una carta de una baraja de naipes español con reposición 1.000 veces				
Pinta				
Frecuencia absoluta	257		249	251
Frecuencia relativa	0,257		0,249	0,251

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces piensas que salió la copa? Justifica tu respuesta
- Si se aumentan las extracciones a 10.000 ¿cuántas veces piensas que saldría cada pinta? Justifica tu respuesta. **

Figura 5.3.5.4. Versión ítem 5 para juicio de expertos

La evaluación de los expertos (Tabla 5.3.5.6), es similar en cuanto a las medias obtenidas. El ítem considerado más apropiado es el 5.1, porque es un contexto más cercano y conocido por los estudiantes, aunque su mediana (4) es menor al ítem 5.2 (5),

pero su desviación típica es menor, lo que indica cierta homogeneidad de las valoraciones recibidas.

Tabla 5.3.5.6. Resultados de la valoración de expertos ítem 5

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 5.1		1		6	4	4,2	4	0,87
Ítem 5.2	1	1		2	7	4,2	5	1,40
Ítem 5.3		2		4	5	4,1	4	1,14

Además, para la decisión se toma en cuenta los comentarios entregados por los expertos, algunos de ellos se presentan a continuación:

Ítem 5.1 fue seleccionado ya que se muestra mejor la aplicación de la ley de los grandes números (Experto 4).

En el ítem 5.1 no se observa con claridad el L3 porque el valor faltante se encuentra restando a 1000 los valores de los 9 meses registrados; obteniendo 103. Situación similar a lo observado en el ítem 5.3 (Experto 5).

El ítem 5.2 es de naturaleza distinto a los otros dos en los que la respuesta está determinada. Aquí muchas pueden ser las respuestas y además el estudiante puede hacer consideraciones según su modelo de la situación (Experto 6).

En el Ítem 5.2 no hay frecuencias relativas (Experto 7)

O item 5.1 parece-me menos adequado tendo em conta o seu contexto, que me parece mais artificial. Dos outros dois itens, considere que os contextos de ambos são adequados, embora considere que o item 5.3 é mais adequado por que não percebi muito bem o significado do “lanzamiento de bala” (Experto 8).

En el ítem 5.2, cuestión b, ¿cuál crees que sería la distancia que lograría en su lanzamiento? Justifica tu respuesta. ¿Se refiere al día 10, o a los posibles resultados en los días 9 y 10? (Experto 9).

5.1. Poner el mismo número de cifras significativas. (0,110).

5.3. Muchos alumnos vienen sin conocer cómo es una baraja española. Habría que explicarlo o pensar en otro ítem (Experto 11).

Luego del análisis de los comentarios del panel de expertos, se descarta el ítem 5.2, porque algunos de los especialistas advirtieron que este ítem no respondía a algunas de las variables consideradas para definirlo (Experto 7). Para la versión del cuestionario, se decidió revisar el ítem 5.1 en cuanto a dejar en blanco las frecuencias absolutas y relativas de los valores 9 y 10, para que efectivamente el estudiante, tanto de 1°ESO como de 3°ESO, realice una predicción de los datos e inferir cuántas veces podría haber salido cada ficha. También se acoge la sugerencia de que las frecuencias relativas tengan igual número de cifras significativas (Experto 11). La versión final de este ítem se presenta en la Figura 5.4.9.

Ítem 6. Traducir de gráfico a tabla de contingencia

En el sexto ítem se presentan tres propuestas (Figura 5.3.5.5) que implican pasar información de un gráfico, que representa dos distribuciones, a una tabla de contingencia que tiene un nivel de complejidad semiótico C4.1. También se incluye una pregunta a partir de la información expuesta, que requiere un nivel de lectura L2.

Ítem 6.1. Fuente: Díaz-Levicoy (2018)

En el gráfico de barras se muestra la cantidad de mujeres y hombres que hay en cada curso de una escuela. Representa esta información en la tabla adjunta.

Cursos	Mujeres	Hombres
1º	15	25
2º	20	15
3º	10	5
4º	10	18
5º	7	14
6º	7	14

Responde

a) ¿En qué curso hay menos estudiantes?

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Total
Mujeres							
Hombres							
Total							

Ítem 6.2. Adaptado: Libro de ejercicios 6º curso de Educación Básica, p. 109

El siguiente gráfico de barras muestra la cantidad de hombres y mujeres que practican determinados deportes. Representa esta información en la tabla adjunta

Deporte	Mujeres	Hombres
Tenis	8	10
Natación	4	6
Fútbol	12	6
Voleibol	2	10

	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres					
Hombres					
Total					

Responde

a) ¿Cuál es el deporte que menos se practica?

Ítem 6.3. Adaptado: Castro et al. (2014, p. 261)

El gráfico de líneas muestra la asistencia de un grupo de estudiantes a los talleres de fútbol y tenis durante 5 semanas. Representa esta información en la tabla adjunta.

	Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 5	Total
Fútbol						
Tenis						
Total						

Responde

a) ¿En qué semana se practica menos deporte?

Figura 5.3.5.5. Versión ítem 6 para juicio de expertos

En la Tabla 5.3.5.7, se puede apreciar que la evaluación por parte del panel de expertos a las diferentes propuestas fue alta y similar, consiguiendo los tres ítems igual media (4,6) y mediana (5). La desviación típica del ítem 6.1 (0,69) difiere de los ítems

6.2 y 6.3, que coinciden en su valor (0,51). De todos modos, son pequeñas, lo que indica cierta homogeneidad en las valoraciones recibidas en las tres posibilidades presentadas.

Tabla 5.3.5.7. Resultados de la valoración de expertos ítem 6

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 6.1			1	3	7	4,6	5	0,69
Ítem 6.2				4	7	4,6	5	0,51
Ítem 6.3				4	7	4,6	5	0,51

Para tomar la decisión del ítem más idóneo, se analizaron las recomendaciones de los expertos, algunas de ellas se presentan a continuación:

Ítem 6.1.: yo diría “niños y niñas” más que “hombres y mujeres”

Ítem 6.2. Se sobreentiende que “hombres y mujeres” se refiere a población adulta (Experto 1).

Reformularía alguna de las preguntas, pues en todas se pone énfasis en la cantidad menor, preguntaría por el que más se practica y alguna pregunta en la que el estudiante deba comparar por ejemplo entre hombres y mujeres (Experto 3).

6.2 completar estructura de la tabla (Experto 5).

En 6.3, no veo adecuado el gráfico de línea, yo hubiese puesto uno de barras horizontal, en lugar de vertical como en los ítems anteriores (Experto 7).

No ítem 6.2, além da pergunta a), centrada num dos totais parciais, podia-se incluir mais uma nova pergunta centrada numa das células do interior da tabela, como por exemplo: ¿Cuál es el número de hombres que practican natación? (Experto 8)

Finalmente, se optó por el ítem 6.2, dado que el gráfico de líneas propuesto en el ítem 6.3 puede que no sea muy adecuado, como señala el Experto 7, o difícil de comprender para los estudiantes de 1º curso. Además, en el ítem seleccionado, la variable tipos de deporte posee menos categorías a diferencia del ítem 6.1, lo que podría facilitar la traducción de gráfico a tabla. Acogeremos algunas de las sugerencias, como completar la estructura de la tabla de este ítem, y la posibilidad de incorporar alguna pregunta respecto a las categorías de la variable género, lo que es posible de verificar en el Figura 5.4.10.

Ítem 7. Argumentar a partir de una tabla de datos

En la Figura 5.3.5.6, se presentan las tres alternativas para este ítem, que tienen igual contenido. Los contextos son diversos y cercanos para el estudiante, el primero, referido a los centímetros alcanzados por un grupo de chicas antes y después de un entrenamiento, el segundo con los tiempos conseguidos por tres chicas en completar una carrera de 100 metros durante 5 semanas, mientras que el último presenta las temperaturas registradas en un centro meteorológico, durante el primer semestre de dos años.

Los datos son presentados a través de una tabla de datos, con un nivel de complejidad semiótico C2, se pide tomar una decisión argumentada basada en la información, lo que implica un nivel sofisticado de lectura del tipo L4.

Ítem 7.1. Fuente: Batanero (2001)
 Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de chicas, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los siguientes valores:

Altura saltada en cm.										
Estudiante	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gía	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Responde

a) ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo? Justifica tu respuesta.

Ítem 7.2. Fuente: Sharma (2013)
 La siguiente tabla muestra los tiempos (segundos) conseguidos por un grupo de chicas en cinco carreras de 100 metros, durante un año.

	1	2	3	4	5
Sara	15.2	14.8	15.0	14.7	14.3
María	15.8	15.7	15.4	15.8	14.8
Ana	15.6	15.5	14.8	15.1	14.5

Responde

a) Una de las chicas será seleccionada para competir en un campeonato para representar a su colegio. ¿Cuál de las chicas piensas que debería ser la seleccionada? ¿Por qué?

Ítem 7.3. Adaptado: Castro et al. (2014, p. 301)
 La siguiente tabla muestra la temperatura máxima registrada en cada mes durante el primer semestre de los años 2012 y 2019 en la estación carriel Sur, Concepción.

Temperatura (° C)		
Mes	2012	2019
Enero	29°	27°
Febrero	24°	27°
Marzo	23°	25°
Abril	20°	21°
Mayo	17°	19°
Junio	15°	19°

Responde

a) ¿Piensas que la temperatura máxima en Concepción ha subido como consecuencia del cambio climático? Justifica tu respuesta.

Figura 5.3.5.6. Versión ítem 7 para juicio de expertos

Las evaluaciones, como se observan en la Tabla 5.3.5.8, son altas, lo que se manifiesta en que las medias son a partir de 4,3, con medianas de 4 y 5, además, las desviaciones típicas son pequeñas, lo que indica cierta homogeneidad de las valoraciones recibidas en cada uno de los ítems propuestos. El ítem 7.1 es el que recibe la mejor evaluación, con una media de 4,7 y una mediana de 5. Su desviación típica también es la menor (0,47).

Tabla 5.3.5.8. Resultados de la valoración de expertos ítem 7

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 7.1				3	8	4,7	5	0,47
Ítem 7.2				5	6	4,6	5	0,52
Ítem 7.3			2	4	5	4,3	4	0,79

Este ítem, recibió escasos comentarios o sugerencias por parte de los expertos, que a continuación se presentan:

El ítem 7.2 quizás debería tener una pregunta previa. La pregunta que está planteada es amplia y enriquecedora, pero tengo mis dudas cómo argumentarán los estudiantes de ese nivel (Experto 4).

He tenido en cuenta el orden de dificultad que a mi juicio es: 7.1 más fácil, ... 7.3 más difícil (Experto 7).

Parece-me que o item 7.2 é o mais adequado porque permite mais hipóteses de respostas aos alunos. Já o item 7.1 parece estar muito centrado na correlação (que eles possivelmente não estudaram) e no item 7.3 não percebo bem como os alunos poderão responder. Neste último item não será que os alunos poderão apresentar respostas meramente especulativas, sem qualquer fundamento? (Experto 8).

Considero que los tres ítems son igual de adecuados, pero asigné mayor valoración al 3 porque creo que aquí puede influir las creencias o ideas previas de los estudiantes y puede ser interesante analizar cómo fundamentan sus respuestas. Además, se les presenta un contexto de su entorno más cercano (Experto 10)

Finalmente, se opta por el ítem 7.1 porque es el que tiene mejor valoración, y de acuerdo a comentarios de expertos, puede resultar más sencillo para el estudiante (Experto 7). Se mantendrá tal como está formulado, sin cambios ni modificaciones.

Ítem 8. Leer o interpretar tablas de frecuencias con datos agrupados

La Figura 5.3.5.7 muestra los tres ítems propuestos. En ellos se pretende que el estudiante lea e interprete la información expuesta en una tabla de frecuencias con datos agrupados, con un nivel de complejidad semiótico C3.3. Para responder a las dos cuestiones planteadas en torno a la información presentada, se requiere un nivel de lectura L4, el que implica una lectura crítica de los datos. Cabe destacar, que este ítem está destinado solo a los estudiantes de 3ºESO, pues las tablas que presentan datos agrupados en intervalos se estudian en profundidad desde de 2ºESO.

La valoración de los expertos se presenta en la Tabla 5.3.5.9, donde se puede apreciar que reciben una buena evaluación los tres ítems propuestos. El ítem 8.3 presenta una mayor puntuación, con una media de 4,7, seguido del ítem 8.2 con una media de 4,5, y por último el ítem 8.1 con una media de 4,4. Las medianas de los primeros dos ítems son igual a 4, mientras que la del tercero es 5. Además, las desviaciones típicas de los tres posibles ítems son pequeñas.

<p>Ítem 8.1. Adaptado: Libro de ejercicios 8º curso de Educación Básica, p. 154</p> <p>La siguiente tabla muestra el tiempo que deben esperar los clientes de una compañía en ser atendidos.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) Los directores de la compañía dicen que en total 100 clientes deben esperar 15 minutos o menos. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?</p> <p>b) ¿Qué medidas podrían implementar los directores de la compañía para reducir los tiempos de espera de los clientes?</p>																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo (min)</th> <th>Frecuencia absoluta</th> <th>Frecuencia acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>]0, 5]</td> <td>150</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>]5, 10]</td> <td>220</td> <td>370</td> </tr> <tr> <td>]10, 15]</td> <td>100</td> <td>470</td> </tr> <tr> <td>]15, 20]</td> <td>60</td> <td>530</td> </tr> </tbody> </table>	Tiempo (min)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada]0, 5]	150	150]5, 10]	220	370]10, 15]	100	470]15, 20]	60	530					
Tiempo (min)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada																		
]0, 5]	150	150																		
]5, 10]	220	370																		
]10, 15]	100	470																		
]15, 20]	60	530																		
<p>Ítem 8.2. Adaptado: Castro et al. (2014, p. 257)</p> <p>La siguiente tabla, presenta las remuneraciones de los trabajadores de una pequeña empresa.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) Existen en total 8 personas que ganan \$450.000 o menos ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?</p> <p>b) ¿Qué medidas crees tú que se podrían implementar para mejorar los sueldos de las personas que ganan menos de \$400.000?</p>																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Remuneraciones de los trabajadores de una pequeña empresa</th> </tr> <tr> <th>Sueldo (miles \$)</th> <th>Frecuencia absoluta</th> <th>Frecuencia acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>[300, 350[</td> <td>2</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>[350, 400[</td> <td>5</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>[400, 450[</td> <td>8</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>[450, 500[</td> <td>12</td> <td>27</td> </tr> </tbody> </table>	Remuneraciones de los trabajadores de una pequeña empresa			Sueldo (miles \$)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	[300, 350[2	2	[350, 400[5	7	[400, 450[8	15	[450, 500[12	27		
Remuneraciones de los trabajadores de una pequeña empresa																				
Sueldo (miles \$)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada																		
[300, 350[2	2																		
[350, 400[5	7																		
[400, 450[8	15																		
[450, 500[12	27																		
<p>Ítem 8.3. Adaptado: Castro et al. (2014, p. 277)</p> <p>Se realiza un estudio sobre los resultados obtenidos al aplicar un medicamento a un grupo de hombres. La siguiente tabla muestra los tiempos que demoran en hacer efecto.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>a) Existen en total 20 hombres que reaccionan al medicamento en menos de 60 minutos ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?</p> <p>b) ¿Te parece que el medicamento tiene un efecto rápido o lento? ¿Por qué?</p>																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Tiempo de demora en un grupo de hombres</th> </tr> <tr> <th>Tiempo (min.)</th> <th>Frecuencia absoluta</th> <th>Frecuencia acumulada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>[0, 15[</td> <td>3</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>[15, 30[</td> <td>12</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>[30, 45[</td> <td>18</td> <td>33</td> </tr> <tr> <td>[45, 60[</td> <td>20</td> <td>53</td> </tr> </tbody> </table>	Tiempo de demora en un grupo de hombres			Tiempo (min.)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	[0, 15[3	3	[15, 30[12	15	[30, 45[18	33	[45, 60[20	53		
Tiempo de demora en un grupo de hombres																				
Tiempo (min.)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada																		
[0, 15[3	3																		
[15, 30[12	15																		
[30, 45[18	33																		
[45, 60[20	53																		

Figura 5.3.5.7. Versión ítem 8 para juicio de expertos

Tabla 5.3.5.9. Resultados de la valoración de expertos ítem 8

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 8.1			1	5	5	4,4	4	0,67
Ítem 8.2				6	5	4,5	4	0,52
Ítem 8.3				3	8	4,7	5	0,47

Los comentarios en torno a este ítem fueron escasos y se centraron en la mejora de los contextos en que se presentaban los datos (Experto 1, 5 y 10). Algunas de las sugerencias y críticas recibidas se presentan a continuación:

En general contextualizaría más los ítems con base en los intereses de los niños (Experto 1).

En el 8.3, me parece más interesante la pregunta b) (Experto 2).

Ítem 8.1 me gustó el contexto, los tiempos de espera es una variable de análisis en la Educación Superior (Experto 4).

8.1. especificar contexto (Experto 5)

No ítem 8.3, que considero o mais adecuado, penso que poderia ser feita mais uma pergunta envolvendo as frequências. Por exemplo: Existen en total 38 hombres que reaccionan al medicamento en 30 minutos u más ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué? (Experto 8)

Asigné menor valoración al 1 sólo porque pienso que tal vez el contexto no sea tan familiar para los estudiantes (Experto 10)

8.1 y 8.2, la pregunta por las medidas para N4 no me convence. Pasa lo mismo que los ítems anteriores. Mejor preguntar por algo que requiera tener en cuenta los datos, que no se pueda pasar de ellos. ¿Qué tipo de clientes pueden ser los que han respondido a la encuesta? Haría falta algo más de contexto.

Ojo notación:] o (¿están habituados a una en concreto? (Experto 11).

De acuerdo a los comentarios y valoraciones se opta por el ítem 8.3, el mejor evaluado, y se acogerá la sugerencia de uno de los expertos de incluir una pregunta adicional sobre las frecuencias (Figura 5.4.13).

Ítem 9. Traducir de lenguaje verbal a tabla de contingencia con intervalos

La idea de este último ítem es pasar la información entregada a través de lenguaje verbal a una tabla de contingencia, con un nivel de complejidad semiótico C4.2, dado que las modalidades de una de las variables se presentan en datos agrupados en intervalos. El nivel de lectura en este caso es L2, pues el estudiante tendrá que hacer algunos cálculos sencillos para determinar las frecuencias que debe registrar en las celdas, además de calcular totales. Como en los ítems anteriores, la Figura 5.3.5.8 presenta las tres propuestas, de igual contenido, pero con diversos contextos: el primero trata la relación de cantidad de horas de estudio y aprobación de un examen; el segundo compara el tiempo de reacción de un medicamento en hombres y mujeres; mientras que el último, presenta las edades y sexo de un grupo de trabajadores.

Ítem 9.1. Fuente: Gea et al. (2020)

El profesor de matemáticas de quinto de Educación Primaria hizo una entrevista a sus 100 estudiantes para conocer cuántas horas de estudio dedicaron para preparar el examen. Quiso investigar si estudiaron menos de 5 horas, entre 5 y 10 horas o más de 10 horas. De entre los 53 estudiantes que estudiaron más de 10 horas, 2 suspendieron; de entre los estudiantes que estudiaron entre 5 y 10 horas, 15 aprobaron; mientras que, de los 25 estudiantes que estudiaron menos de 5 horas, sólo 5 aprobaron.

a) Construye la tabla de doble entrada con la información del problema.

				Total
Suspenden				
Aprueban				
Total				100

Ítem 9.2. Adaptado: Castro et al. (2014, p. 277)
 Se realiza un estudio sobre los resultados obtenidos al aplicar un medicamento a un grupo compuesto de 34 hombres y 48 mujeres. De ellos 4 hombres y 12 mujeres tardan de 0 a 15 minutos en reaccionar al medicamento, 12 hombres tardan de 15 a 30 minutos en reaccionar y 21 mujeres lo hacen entre 30 a 45 minutos.

a) Construye la tabla de doble entrada con la información del problema.

				Total
Hombres				34
Mujeres				48
Total				

Ítem 9.3. Adaptado: Libro de ejercicios 7º curso de Educación Básica, p. 149
 En una oficina trabajan 40 personas, de ellos 18 son hombres. 7 mujeres y 4 hombres tienen 25 años o menos, 10 mujeres tienen entre 26 y 32 años de edad y 6 hombres tienen 32 años o más.

a) Construye la tabla de doble entrada con la información del problema.

				Total
Mujeres				
Hombres				18
Total				40

Figura 5.3.5.8. Versión ítem 9 para juicio de expertos

La Tabla 5.3.5.10 presenta el resumen con las valoraciones de los expertos, donde observamos que, en general, son altas, pues se refleja que la media es 4,2 o superior y las medianas de 4 a 5. El ítem mejor evaluado es el 9.1, con una media de 4,6, una baja desviación típica (0,92). De modo que este será el seleccionado para el cuestionario.

Tabla 5.3.5.10. Resultados de la valoración de expertos ítem 9

Ítem	Valoración de expertos							
	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
Ítem 9.1		1		1	9	4,6	5	0,92
Ítem 9.2				8	3	4,3	4	0,47
Ítem 9.3			1	7	3	4,2	4	0,60

A continuación, se presentan algunos de los comentarios o sugerencias entregados por el panel de expertos:

Ítem 9.1; más que usar la palabra “entrevista”, yo diría “mantuvo una conversación”

Los ítems 9.2 y 9.3 se podrían contextualizar más a las edades de los alumnos (Experto 1).

Ítem 9 tengo mis dudas si corresponde al Nivel 1 o 2. Como nota es deseable que las encuestas o entrevistas no sean de tamaño 100, les comento que en trabajos de estudiantes de distintos niveles se acostumbra que la muestra debe ser 100, 50 y eso no necesariamente es así (Experto 4).

El ítem 9.1 debe adaptar el lenguaje para ser comprendido en el contexto chileno, donde no se entiende: Educación Primaria, suspenso y examen. Pero, es la que presenta un contexto más próximo a los estudiantes (Experto 5).

“Completa” en lugar de “Construye”. El término “construir” se debería referir a comenzarla de cero; pero en esta caso se ha adelantado mucho el trabajo de construirla (experto 6).

Consideram-se todos os itens muito semelhantes e igualmente adequados. Contudo, nos itens 9.2 e 9.3 as tabelas já têm alguns dados registrados, enquanto no item 9.1 a tabela não tem nenhum dado registrado, razão pela qual optei por este item (Experto 8).

No sé hasta qué punto es lectura de los datos. Habría que preguntar algo, si no, solo es el procedimiento de construir la tabla de contingencia (Experto 11).

Se tomaron en cuenta las sugerencias recibidas, mejorando la redacción del ítem 9.1, procurando que sea de fácil comprensión para los estudiantes. También se cambiará la instrucción de construir la tabla por completar (Ver Figura 5.4.14). En un momento se pensó eliminar la tabla, pero se decidió mantener, para facilitar el proceso de traducción, el que podría ser más complejo para los estudiantes, especialmente para los de 1ºESO.

5.4. ÍTEMS QUE COMPONEN EL CUESTIONARIO

Este apartado presenta los ítems que forman parte del cuestionario, junto a la respuesta que se espera de parte del estudiante. Cada uno de los ítems presentados a continuación, van acompañados de la respuesta correcta, además de un análisis semiótico, el que facilitará la valoración de las producciones de los estudiantes.

Ítem 1: Traducir un listado de datos a tabla con frecuencias absolutas y relativas

El ítem 1, expuesto en la Figura 5.4.1, pretende que el estudiante pueda llevar un listado de datos a una tabla de distribución con frecuencias ordinarias (absolutas y relativas). Para resolver la tarea con éxito, como se muestra en la Figura 5.4.2, es necesario aplicar diferentes conceptos matemáticos como: variable, modalidades o valores de la variable, frecuencias absolutas y relativas.

A Claudia le gustan mucho los insectos y una mañana realizó un listado con los insectos que pudo observar en su jardín:

hormiga- mariposa- hormiga- abeja- hormiga- hormiga- mosquito- mosquito- abeja- mosquito- mariposa- hormiga- hormiga- mosquito- hormiga- hormiga

Completa la tabla con los datos registrados por Claudia

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Total		

Figura 5.4.1. Enunciado del ítem 1 del cuestionario

La resolución de esta tarea requiere la ejecución de una serie de procedimientos, los que se detallan a continuación:

1. Lectura del enunciado del problema.
2. Identificar las modalidades de la variable (diferentes tipos de insectos), y como la variable es nominal, no se requiere un orden en la ubicación de estas en la tabla.
3. Evocar el concepto de frecuencia absoluta, y luego calcular las frecuencias absolutas para cada modalidad de la variable, junto con el total, comprobar si este último coincide con el total de insectos entregados en el listado.
4. Evocar el concepto de frecuencia relativa, y luego calcular las frecuencias relativas para cada modalidad de la variable, este cálculo puede ser realizado con fracciones o con el empleo de números decimales, finalmente, completar con el total de frecuencias relativas.

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Hormiga	8	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5$
Mariposa	2	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$
Abeja	2	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$
Mosquito	4	$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$
Total	16	1

Figura 5.4.2. Respuesta esperada en el ítem 1

Para complementar la revisión de este ítem, se realiza un análisis semiótico de las diferentes prácticas ligadas a esta situación-problema, las que se describen en la Tabla 5.4.1. Se puede observar la necesidad del despliegue de una serie de objetos matemáticos involucrados en la resolución de la situación-problema propuesta, los cuales necesariamente el estudiante tendrá que poner en juego para su resolución. Aparecen principalmente objetos estadísticos, así como numéricos, al completar la tabla de frecuencias ordinarias.

Tabla 5.4.1. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 1

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Traducir un listado de datos a una tabla con frecuencias absolutas y relativas.
Lenguajes	Lenguaje verbal: en el enunciado, etiquetas superiores y modalidades de la variable; numérico: números enteros, decimales y fraccionarios y lenguaje diagramático, en estructura tabular (columnas, filas).
Conceptos-definición	Celda, columna, expresión decimal, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, fila, individuo (insecto), modalidad o valor de la variable, número natural, número racional, tabla, total de datos, variable cualitativa.

Proposiciones	<ul style="list-style-type: none"> - Las clases de la variable corresponden a una escala nominal las que pueden distinguirse entre sí por cualidades no medibles. - La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de individuos. - La suma de todas las frecuencias relativas es igual a la unidad. - Las frecuencias absolutas y relativas, se relacionan de manera lineal, pues el cociente entre la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa, para cada modalidad de la variable, es constante (N=16). La frecuencia relativa de cada modalidad se relaciona con la frecuencia absoluta en el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos
Procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> - Leer e interpretar el enunciado. - Identificar las categorías de la variable cualitativa y ubicarlas en la columna correspondiente. - Establecer las frecuencias absolutas de cada categoría, ubicarlas en la columna correspondiente y determinar el total que se corresponderá con la totalidad de individuos (insectos). - Determinar las frecuencias relativas de cada modalidad de la variable, junto con total de estas que será igual a la unidad.
Argumentos	No se solicita argumentación.

Ítem 2. Leer tablas de frecuencia absolutas

En el ítem 2, que se presenta en la Figura 5.4.3, se espera que el estudiante pueda realizar una lectura simple (nivel L1 y L2) de la información presentada en una tabla de frecuencias absolutas, enmarcada en un nivel de complejidad semiótico C3.1. Para evitar confusiones en el enunciado de la situación, destacamos con negrita que el niño encuestado solo podía seleccionar un sabor.

A un grupo de niños se les consultó cuál era el sabor de yogurt preferido, **solo podían elegir un sabor**. En la tabla adjunta se registran sus preferencias.

Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos niños prefieren el yogurt coco?

b) ¿Cuál es el sabor que prefieren exactamente 6 niños?

c) ¿Cuál es el sabor de yogurt que prefiere la mayoría de los niños?

d) ¿A cuántos niños en total se preguntó por su sabor de yogurt preferido?

e) ¿Cuántos niños más prefieren el yogurt de vainilla que el de piña?

Sabor	Cantidad de niños
Fresa	8
Vainilla	6
Melocotón	4
Coco	4
Piña	2

Figura 5.4.3. Enunciado del ítem 2 del cuestionario

En la Figura 5.4.4 se muestra la respuesta que deberían entregar los estudiantes, y como se puede ver, las tres primeras preguntas responden a información explícita presentada en la tabla, en donde basta con observar la columna que presenta las frecuencias absolutas, o bien la columna con las categorías de la variable, por tanto, el nivel de lectura requerido es el más bajo L1, mientras que las siguientes cuestiones requieren la realización de cálculos sencillos para su determinación (Nivel L2), como lo es determinar el total de estudiantes que participaron en la consulta, o cuántos niños más deberían elegir yogurt de piña para igualar a los que prefieren de vainilla.

- | |
|---|
| a) ¿Cuántos niños prefieren el yogurt coco? 4 niños
b) ¿Cuál es el sabor que prefieren exactamente 6 niños? Vainilla
c) ¿Cuál es el sabor de yogurt que prefiere la mayoría de los niños? Fresa
d) ¿A cuántos niños en total se preguntó por su sabor de yogurt preferido? 24 niños
e) ¿Cuántos niños más prefieren el yogurt de vainilla que el de piña? 4 niños |
|---|

Figura 5.4.4. Respuesta esperada en el ítem 2

Para resolver la situación-problema propuesta al estudiante, este debe desarrollar las prácticas matemáticas que se detallan a continuación:

1. Lectura comprensiva del enunciado, relacionando las preguntas con la información expuesta en la tabla de frecuencias.
2. Identificar la variable representada (sabor preferido de yogurt de un grupo de estudiantes) para responder a las preguntas planteadas.
3. Asociar las modalidades de la variable con sus frecuencias absolutas, y viceversa.
4. Comparar los diferentes valores de las frecuencias absolutas, en el caso de la pregunta c y decidir por la de mayor valor.
5. Calcular el total de participantes en la consulta (pregunta d).
6. Comparar los valores de las frecuencias absolutas de dos categorías (piña y vainilla) y restar la frecuencia absoluta de la modalidad mayor con la menor para determinar la cantidad de individuos necesarios para igualar las frecuencias absolutas.

Las prácticas matemáticas que emergen en la resolución de la tarea requieren la movilidad de objetos matemáticos primarios que se presentan en la Tabla 5.4.2.

Tabla 5.4.2. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 2

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Leer tablas de frecuencias absolutas.
Lenguajes	Lenguaje verbal: en el enunciado, etiquetas superiores y modalidades de la variable; numérico: números naturales; y diagramático, en estructura tabular (columnas, filas).
Conceptos-definición	Celda, columna, desigualdad, distribución, fila, frecuencia absoluta, igualdad, individuo, modalidades de la variable, número natural, resta, tabla, variable cualitativa.
Proposiciones	<ul style="list-style-type: none"> - Las modalidades de la variable corresponden a una escala nominal que se distinguen entre sí por cualidades no medibles. - La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de individuos. - Relación de orden. - Relación de igualdad/desigualdad.
Procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> - Leer e interpretar el enunciado. - Leer la frecuencia absoluta de determinada modalidad. - Leer la modalidad de determinada frecuencia absoluta. - Calcular el total de individuos. - Comparar las frecuencias absolutas de dos modalidades. - Calcular el valor para igualar las frecuencias absolutas de dos modalidades de la variable.
Argumentos	No se solicita argumentación.

Ítem 3. Traducir de gráfico a tabla de frecuencias absolutas

En esta situación-problema (Figura 5.4.5) el estudiante, en primera instancia, debe traducir la información expuesta en un pictograma a una tabla de frecuencias absolutas, lo que implica un nivel C3.1 de complejidad semiótica, y luego responder a preguntas que se plantean a partir de la información proporcionada por la tabla. El pictograma presentado en la tarea, usa como icono un ticket que representa dos unidades (estudiantes). Para completar la tabla y responder a las cuestiones formuladas, el estudiante requiere la realización de cálculos sencillos, complementado con una posición crítica en torno a las afirmaciones que se plantean respecto a la información expuesta, correspondiente a un nivel de lectura L2 y L4.

Se le consultó a un grupo de estudiantes cuál era su deporte favorito, sus respuestas se representan en el siguiente pictograma.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes

Gimnasia	✓	✓	✓		
Fútbol	✓	✓	✓	✓	✓
Básquetbol	✓	✓	✓	✓	
Tenis	✓				

✓ = 2 estudiantes

Representa esta información en la siguiente tabla y a continuación responde a las preguntas planteadas.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cant. de estudiantes				

Responde las siguientes preguntas:

- María dice que el deporte favorito fue el fútbol porque 5 estudiantes lo prefieren. ¿Tiene razón María? ¿Por qué?
- De acuerdo a los datos, se podría hablar de que a los estudiantes no les gusta el tenis. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?

Figura 5.4.5. Enunciado del ítem 3 del cuestionario

En la Figura 5.4.6, se muestra la respuesta que se espera del estudiante, que requiere del desarrollo de diversas prácticas matemáticas, las cuales son expuestas a continuación:

1. Lectura comprensiva del enunciado del problema.
2. Evocar el significado de un pictograma y los elementos que lo conforman.
3. Leer el título del pictograma para contextualizar el problema.
4. Leer las etiquetas para identificar las categorías de la variable representada y el valor de cada icono.
5. Leer y contabilizar la cantidad de iconos asociados a la variable y multiplicar estos por su factor, para determinar el valor de la frecuencia absoluta en cada celda de la tabla.
6. Argumentar la veracidad o falsedad de la afirmación.
7. Argumentar la afirmación de acuerdo a algún criterio basado en los datos o de modo personal.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cant. de estudiantes	6	10	8	2

Responde las siguientes preguntas:

- a) María dice que el deporte favorito fue el fútbol porque 5 estudiantes lo prefieren. ¿Tiene razón María? ¿por qué?
Tiene razón en que es el deporte preferido, pero la razón es errónea, pues son 10 los estudiantes que lo prefieren.
- b) De acuerdo a los datos, se podría hablar de que a los estudiantes no les gusta el tenis. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?
La pregunta planteada a los encuestados se refiere al deporte favorito, por lo que el tenis no lo es, pero esto no significa que a los estudiantes les desagrade este deporte, simplemente no es su primera opción de preferencia.

Figura 5.4.6. Respuesta esperada en el ítem 3

En la Tabla 5.4.3 se expone un análisis semiótico de las prácticas que el estudiante puede poner en juego en la resolución de la situación-problema propuesta.

Tabla 5.4.3. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 3

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	- Traducir de gráfico a tabla de frecuencias absolutas e interpretar la información expuesta.
Lenguajes	Lenguaje verbal: en el enunciado, rótulos del gráfico y etiquetas de la tabla; lenguaje numérico: números naturales; iconos; lenguaje diagramático, en estructura tabular: columna y fila.
Conceptos-definición	Celda, columna, distribución, frecuencia absoluta, muestra, multiplicación, número entero, pictograma, proporcionalidad, suma, tabla, unidad de medida, variable cualitativa.
Proposiciones	- Dos iconos iguales tienen igual valor numérico. - Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Procedimientos	- Leer el enunciado de la situación-problema. - Identificar el valor de cada icono. - Contabilizar la cantidad de iconos de cada valor de la variable, multiplicarlos por el factor (2) y registrar los resultados en la tabla. - Determinar la veracidad de las afirmaciones indicadas. - Responder a las preguntas argumentando la respuesta en el análisis de la información en el contexto.
Argumentos	- La primera afirmación es falsa y se fundamenta en la equivalencia de cada icono. - La segunda cuestión se basa en el concepto de muestra y encuesta, lo que debe reunir ciertas condiciones para ser generalizable en base al contenido que mide.

Ítem 4. Completar tabla con frecuencias acumuladas

La actividad planteada en la Figura 5.4.7 pretende que el estudiante de 3ºESO complete las frecuencias acumuladas de la tabla expuesta, correspondiente a un nivel de complejidad semiótica C3.2, y luego responda a dos cuestiones que requieren un nivel de lectura L2 (lectura dentro de los datos).

<p>En un hotel se registró los días de alojamiento de los huéspedes.</p> <p>a) Completa la tabla con las frecuencias indicadas.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>b) ¿Cuántos días se alojan la mayoría de los huéspedes?</p> <p>c) ¿Cuántos huéspedes se quedan 4 días o menos?</p>	Estadía de huéspedes en una semana		
	Estadía en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
	1	28	28
	2		50
	3	23	
	4	20	
5	15		

Figura 5.4.7. Enunciado del ítem 4 del cuestionario

La serie de secuencias prácticas que debe desarrollar el estudiante para responder de manera apropiada a la situación-problema planteada (Figura 5.4.8), se detallan a continuación:

1. Lectura comprensiva del contexto de la situación-problema.
2. Leer etiquetas de la tabla, categorías de la variable y tipos de frecuencias representadas.
3. Recordar el concepto de frecuencia acumulada.
4. Completar la tabla con las frecuencias acumuladas asociadas a cada modalidad de la variable.
5. Comparar los valores de las frecuencias absolutas y seleccionar el valor de la variable asociado a la mayor frecuencia absoluta.
6. Leer la pregunta e interpretar en la tabla el tipo de modalidades de la variable inferiores a uno dado, lo que le permite responder.
7. Seleccionar la frecuencia acumulada asociada a determinado valor de la variable.

<p>En un hotel se registró los días de alojamiento de los huéspedes.</p> <p>a) Completa la tabla con las frecuencias indicadas.</p> <p>Responde las siguientes preguntas:</p> <p>b) ¿Cuántos días se alojan la mayoría de los huéspedes? 1 día.</p> <p>c) ¿Cuántos huéspedes se quedan 4 días o menos? 93 huéspedes.</p>	Estadía de huéspedes en una semana		
	Estadía en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
	1	28	28
	2	22	50
	3	23	73
	4	20	93
5	15	108	

Figura 5.4.8. Respuesta esperada en el ítem 4

En la Tabla 5.4.4 se presenta el análisis semiótico que recoge los diferentes objetos matemáticos que intervienen en la resolución de la situación-problema propuesta.

Tabla 5.4.4. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 4

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Completar y leer una tabla con frecuencias acumuladas.
Lenguajes	Lenguaje verbal: en el enunciado, y etiquetas; lenguaje numérico: números naturales; lenguaje diagramático, en estructura tabular (columnas, filas y celdas).

Conceptos-definición	Celda, columna, desigualdad, distribución, fila, frecuencia absoluta, frecuencia acumulada, muestra, número entero, suma, tabla, variable cuantitativa, valores o modalidades de la variable.
Proposiciones	<ul style="list-style-type: none"> - La frecuencia acumulada está asociada a una variable cuantitativa. - La frecuencia acumulada de un valor de la variable corresponde al número de individuos que han presentado este valor o uno menor. - La frecuencia absoluta asociada a la modalidad x_i de la variable X corresponde a la diferencia entre la frecuencia absoluta acumulada de dicha modalidad (N_i) y la frecuencia absoluta acumulada de la modalidad inmediatamente anterior (N_{i-1}), habiendo sido ordenadas las modalidades de la variable en orden ascendente. - La frecuencia acumulada del último valor de la variable (ordenados sus valores en forma ascendente) es igual al total de individuos.
Procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> - Leer el enunciado de la situación-problema. - Completar las frecuencias solicitadas de las modalidades de la variable. - Comparar las frecuencias absolutas y optar por el valor de la variable asociado a la frecuencia absoluta de mayor valor. - Identificar la frecuencia acumulada asociada a un valor determinado de la variable.
Argumentos	No se solicita argumentos.

Ítem 5. Argumentar y predecir valores en tablas con frecuencias relativas

En el ítem 5 se propone una situación-problema enmarcada en un contexto de experiencia aleatoria (Figura 5.4.9), en que el estudiante debe leer e interpretar una tabla de frecuencias ordinarias (absolutas y relativas), con un nivel de complejidad semiótica C3.1. Los valores faltantes en la tabla implican una predicción de los datos de acuerdo a la tendencia observada. Se acompaña la tabla con dos cuestiones que requieren dicha interpolación de los datos expuestos, lo que implica un nivel de lectura L3 (leer más allá de los datos).

Para responder de manera adecuada, el estudiante requiere llevar a cabo la siguiente serie de prácticas matemáticas:

1. Leer atentamente el enunciado del problema, identificando el contexto en el que se desarrolla.
2. Leer las etiquetas y datos proporcionados por la tabla de frecuencias ordinarias.
3. Recordar el concepto de frecuencia relativa, muestreo, significado frecuencial de probabilidad y Ley de los Grandes Números.
4. Observar la tendencia similar que toman los valores, tanto de la frecuencia absoluta como relativa.
5. Estimar la cantidad de veces que se obtuvo una ficha (frecuencia absoluta) en un experimento aleatorio, basado en los resultados obtenidos anteriormente.
6. Argumentar la respuesta basado en el tipo de experiencia aleatoria, los valores expuestos en la tabla y la cantidad de veces que se realizó la experiencia, la predicción que puede realizar de acuerdo a la información expuesta en la tabla, en el comportamiento de los valores, y tendencia de la frecuencia relativa a la probabilidad.

7. Estimar la frecuencia relativa de las diferentes modalidades de la variable, si se incrementa un número mayor de veces el experimento aleatorio.

En la siguiente tabla se registraron los resultados al extraer 1.000 veces una ficha desde una urna con 10 fichas numeradas desde el 1 al 10, pero olvidaron completar las dos últimas columnas.

1000 extracciones										
Número de la ficha obtenida										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia absoluta	98	106	96	97	98	110	102	98		
Frecuencia relativa	0,098	0,106	0,096	0,097	0,098	0,110	0,102	0,098		

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces piensas que salió el 10? Justifica tu respuesta.
- Si se aumentan las extracciones a 10.000 ¿cuántas veces piensas que saldría aproximadamente cada ficha? Justifica tu respuesta.

Figura 5.4.9. Enunciado del ítem 5 del cuestionario

En la Tabla 5.4.5 se detalla el análisis semiótico realizado de las prácticas matemáticas necesarias de implementar para desarrollar la tarea propuesta.

Tabla 5.4.5. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 5

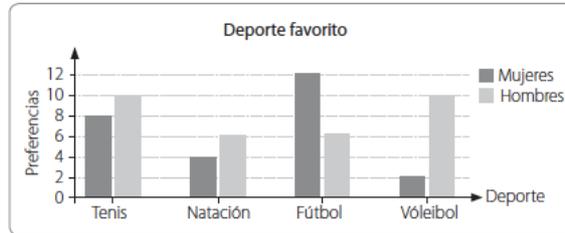
Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas Lenguajes	Conjeturar valores en tablas con frecuencias relativas y argumentar. Lenguaje verbal: enunciado, título y etiquetas; lenguaje numérico: números naturales y decimales; y lenguaje diagramático, en estructura tabular (filas, columnas, celdas).
Conceptos-definición	Celda, columna, convergencia, experimento aleatorio, fila, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, Ley de los Grandes Números, muestra, número decimal y natural, probabilidad, tabla, valores de la variable, variable cuantitativa.
Proposiciones	- La suma de frecuencias absolutas es igual al total de experiencias. - Existe una relación lineal entre frecuencias absolutas y relativas. - La suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad. - La frecuencia relativa de un suceso es un número decimal en $[0,1]$. - Si se repite un número elevado de veces un mismo experimento, la frecuencia relativa de un suceso tiende a su probabilidad.
Procedimientos	- Leer el enunciado de la situación-problema. - Realizar una predicción de los valores faltantes de las frecuencias absolutas y relativas de dos valores de la variable. - Estimar la frecuencia relativa de determinado suceso, si se incrementa el número de extracciones.
Argumentos	Argumentar una estimación basada en la experiencia y los datos.

Ítem 6. Traducir de gráfico a tabla de contingencia

En el ítem 6, expuesto en la Figura 5.4.10, se pide llevar la información expuesta en un diagrama de barras dobles a una tabla de contingencia, enmarcada en un nivel de complejidad semiótico C4.1. Completar la tabla junto con responder a las dos cuestiones

planteadas en torno a la información presentada, implica un nivel de lectura L2 (leer los datos), pues es necesario realizar algunos cálculos sencillos o comparaciones de valores.

El siguiente gráfico de barras muestra la cantidad de hombres y mujeres que practican determinados deportes en un centro deportivo de la ciudad.



a) Representa la información en la tabla adjunta

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres					
Hombres					
Total					

Responde las siguientes preguntas:

- b) ¿Cuál es el deporte que menos se practica? ¿Por qué?
- c) ¿Cuál es el deporte que más practican las mujeres?

Figura 5.4.10. Enunciado del ítem 6 del cuestionario

El estudiante, para resolver la situación-problema de manera adecuada, debe seguir una serie de prácticas matemáticas, como se muestra en la Figura 5.4.11 y se indican a continuación:

1. Leer e identificar las variables representadas, junto a sus diferentes modalidades.
2. Leer el título y las etiquetas de los ejes, reconocer el código para diferenciar la información asociada a los hombres y mujeres, con el objeto de reconocer los valores de las frecuencias absolutas que toman las categorías de la variable cualitativa "tipo de deporte que se practica".
3. Recordar el diagrama de barras, junto con los convenios y elementos que componen su estructura.
4. Identificar los diferentes elementos de la tabla, como el título, las etiquetas con las modalidades de las variables.
5. Efectuar una lectura explícita de los datos expuestos en el gráfico.
6. Traducir las frecuencias absolutas respectivas, desde el gráfico a la tabla.
7. Calcular los totales solicitados en la tabla.
8. Comparar los totales de cada deporte y seleccionar la categoría asociada al menor valor.
9. Argumentar la tendencia en los valores de la variable identificada en la tabla.
10. Comparar los totales asociados a una modalidad de la variable y seleccionar la categoría con mayor valor.

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	4	12	2	26
Hombres	10	6	6	10	32
Total	18	10	18	12	58

Figura 5.4.11. Respuesta esperada en el ítem 6

En la Tabla 5.4.6 se presenta el análisis semiótico realizado y los diferentes objetos matemáticos que intervienen en la resolución de la situación-problema propuesta.

Tabla 5.4.6. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 6

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Traducir de gráfico de barras dobles a una tabla de contingencia.
Lenguajes	Lenguaje gráfico (gráfico de barras) y diagramático, en estructura tabular (columnas, filas, celdas); lenguaje verbal: en el enunciado, título y rótulos del gráfico y la tabla; lenguaje numérico: números naturales.
Conceptos-definición	Altura, barra, celda, columna, dato, distribución, escala, fila, frecuencias absolutas conjuntas, frecuencias marginales respecto a la fila y la columna, gráfico de barras dobles, individuo, medida, número natural, perpendicularidad, tabla de contingencia, valor de la variable, variable unidimensional y bidimensional.
Proposiciones	<ul style="list-style-type: none"> - La altura de las barras son proporcionales al valor de la variable. - Existe una correspondencia entre la proporcionalidad numérica y geométrica. - La suma de las frecuencias absolutas marginales de la variable X o Y, es igual al número de individuos que componen la muestra.
Procedimientos	<ul style="list-style-type: none"> - Leer el enunciado de la situación-problema. - Identificar variables y categorías presentadas en el gráfico. - Traducir la información expuesta en el gráfico a la tabla. - Completar los totales de la tabla. - Comparar totales de alguna variable y seleccionar la categoría que represente al mayor o menor valor, según sea el caso.
Argumentos	Argumentar una estimación basada en los datos.

Ítem 7. Argumentar a partir de una tabla de datos

La Figura 5.4.12 muestra el ítem 7, el cual pide decidir si el entrenamiento realizado por un grupo de chicas es efectivo. La información respecto al rendimiento alcanzado por las chicas previo y luego del entrenamiento se presenta en una tabla de datos con un nivel de complejidad semiótica C2, pues no aparece la idea de distribución. La justificación del estudiante sobre la decisión que tome, se enmarcaría en un nivel de lectura L4 (leer detrás de los datos).

Se espera que el estudiante utilice argumentos basados en conocimientos matemáticos, principalmente comparación de las medidas de centralización de cada serie de datos y su dispersión, así como cotejar uno a uno los valores observados antes y después del entrenamiento, por medio de su diferencia o algún tipo de gráfico, y con ello obtener conclusiones.

Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de niñas, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los siguientes valores:

Altura saltada en cm.										
Estudiante	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gía	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Responde

¿Piensas que el entrenamiento es efectivo? Justifica tu respuesta.

Figura 5.4.12. Enunciado del ítem 7 del cuestionario

Este ítem implicará la realización de las siguientes prácticas matemáticas:

1. Lectura comprensiva del enunciado de la situación-problema.
2. Leer el título y etiquetas de la tabla para contextualizar los datos entregados.
3. Calcular los totales antes y después del entrenamiento.
4. Calcular la media aritmética de ambas series de datos.
5. Comparar las medias aritméticas de ambas series de datos.
6. Generar una argumentación para justificar la decisión de que el entrenamiento fue efectivo, abalado por los pasos realizados anteriormente.

La resolución de la situación-problema expuesta implica el desarrollo de una serie de prácticas matemáticas en las que participan diferentes objetos matemáticos, los que se detallan en la Tabla 5.4.7.

Tabla 5.4.7. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 7

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Argumentar a partir de un listado de datos.
Lenguajes	Lenguaje diagramático, en estructura tabular de tabla de datos (celdas, columnas, filas); lenguaje verbal: enunciado, etiquetas y título; lenguaje numérico: números enteros, lenguaje simbólico: símbolo de la unidad de medida y media aritmética; lenguaje gráfico, si fuera el caso.
Conceptos-definición	Celda, columna, dato, fila, individuo, medidas de centralización (media aritmética), magnitud y unidad de medida, número entero, tabla de datos, variable.
Proposiciones	- La media aritmética se calcula en variables cuantitativas. - Si la media de la serie de datos después del entrenamiento es mayor a la de antes del entrenamiento, resultó efectivo, considerando su desviación estándar.
Procedimientos	- Leer el enunciado de la situación-problema. - Calcular la media aritmética y desviación de cada serie de datos. - Comparar las medias y desviaciones obtenidas.
Argumentos	- Usar representaciones gráficas para determinar la tendencia de los datos. - Entregar un argumento basado en los valores de las medias aritméticas y desviaciones obtenidas en cada serie de datos.

Ítem 8. Leer o interpretar tablas de frecuencias con datos agrupados

El ítem 8 (Figura 5.4.13) presenta una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos, enmarcado en un nivel de complejidad semiótica C3.3. Los estudiantes deben responder a dos cuestiones que requieren una lectura entre los datos (L2) y una lectura crítica de la información expuesta, que implica el máximo nivel de lectura L4 (leer detrás de los datos) (Friel et al., 2001).

Se espera que en la primera cuestión, el estudiante indique que la afirmación es falsa, dado que el total de pacientes que reaccionaron en menos de 60 minutos fue de 53 hombres. En la segunda pregunta, el estudiante debería responder que es verdadera, pues al sumar las frecuencia absolutas de los dos últimos intervalos, se obtiene 38 hombres, lo que coincide con la afirmación; mientras que en la tercera cuestión, las respuestas pueden ser variadas y podrían apoyarse en conocimientos estadísticos o en experiencias personales.

Se realiza un estudio sobre el tiempo que tarda en hacer efecto un medicamento a un grupo de hombres. La siguiente tabla muestra los tiempos. Responde las siguientes preguntas: a) Hay 20 hombres que reaccionan al medicamento en menos de 60 minutos ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué? b) Hay 38 hombres que reaccionan al medicamento en 30 min. o más ¿Estas de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué? c) ¿Te parece que el medicamento tiene un efecto rápido o lento? ¿Por qué?	Tiempo de demora en un grupo de hombres		
	Tiempo (min.)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
	[0, 15[3	3
	[15, 30[12	15
	[30, 45[18	33
[45, 60[20	53	

Figura 5.4.13. Enunciado del ítem 8 del cuestionario

Para resolver la situación-problema, se requiere implementar las siguientes prácticas matemáticas:

1. Lectura comprensiva del enunciado de la situación-problema.
2. Leer el título y etiquetas de la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas.
3. Identificar la variable representada, junto a sus valores.
4. Recordar el significado de frecuencias absoluta y acumulada, además de datos agrupados en intervalos.
5. Lectura comprensiva de la primera afirmación.
6. Leer en la tabla la columna que representa las frecuencias acumuladas asociadas a un determinado intervalo.
7. Comprobar el valor encontrado en la columna de las frecuencias acumuladas con el señalado en la afirmación.
8. Decidir y argumentar la veracidad de la afirmación.
9. Comparar los valores tanto de frecuencias acumuladas como absolutas de cada categoría de la variable.
10. Decidir y argumentar la veracidad de la afirmación en base a los cálculos realizados.
11. Decidir a partir de los datos expuestos en la tabla.

En la Tabla 5.4.8 se presenta un análisis semiótico de las prácticas descritas anteriormente:

Tabla 5.4.8. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 8

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Leer e interpretar tablas de frecuencias con datos agrupados.
Lenguajes	Lenguaje diagramático, en estructura tabular (celdas, columnas, filas); lenguaje verbal: en el enunciado, título y etiquetas; lenguaje numérico: números naturales, lenguaje simbólico: intervalos.
Conceptos-definición	Celda, columna, desigualdad, extremo superior e inferior de intervalo, fila, frecuencia absoluta y acumulada, individuo, intervalo de clase, número natural, tabla, variable cuantitativa.
Proposiciones	- La variable representada en la tabla es cuantitativa continua con una escala de intervalo. - La frecuencia acumulada, cuando los datos de la variable están agrupados en intervalos, corresponde al número de datos acumulado hasta el extremo superior del intervalo, inclusive.
Procedimientos	- Leer el enunciado de la situación-problema. - Leer el título y etiquetas de la tabla. - Establecer la frecuencia acumulada de determinada categoría de la variable. - Indicar la veracidad o falsedad de la afirmación propuesta. - Identificar y relacionar los valores de las frecuencias. - Decidir en torno al comportamiento de los datos.
Argumentos	- La primera afirmación es falsa y se fundamenta en los valores que toma la frecuencia acumulada. - Argumentación basada en los datos.

Ítem 9. Traducir de lenguaje verbal a tabla de contingencia con intervalos

El último ítem del cuestionario se presenta en la Figura 5.4.14, el cual pide llevar la información, proporcionada de forma verbal, a una tabla de doble entrada con un nivel de complejidad semiótica C4.2, pues se representa una variable bidimensional donde las categorías de una de las variables se presentan con datos agrupados en intervalos. El nivel de lectura en este caso es L2 (leer entre los datos), pues el estudiante tendrá que realizar algunos cálculos sencillos para poder completar los valores de las celdas.

El profesor de matemáticas de quinto de Educación Primaria preguntó a sus 100 estudiantes cuántas horas de estudio dedicaron para preparar el examen. Quiso saber si estudiaron menos de 5 horas, entre 5 y 10 horas o más de 10 horas. De entre los 53 estudiantes que estudiaron más de 10 horas, 2 suspendieron; de entre los estudiantes que estudiaron entre 5 y 10 horas, 15 aprobaron; mientras que, de los 25 estudiantes que estudiaron menos de 5 horas, sólo 5 aprobaron.

a) Completa la tabla de doble entrada con la información del problema.

				Total
Aprueban				
Suspenden				
Total				100

Figura 5.4.14. Enunciado del ítem 9 del cuestionario

Se espera que el estudiante complete la tabla de manera adecuada, como se muestra en la Figura 5.4.15. Para ello, se requiere identificar en la tarea los datos que se deben colocar en la tabla considerando las diversas relaciones entre ellos, además de los totales solicitados.

	Menos de 5 horas	Entre 5 y 10 horas	Más de 10 horas	Total
Aprueban	5	15	51	71
Suspenden	20	7	2	29
Total	25	22	53	100

Figura 5.4.15. Respuesta esperada en el ítem 9

Para desarrollar la tarea se requiere implementar una serie de prácticas que se pasan a detallar:

1. Leer comprensivamente el enunciado para contextualizar la información presentada.
2. Identificar las variables y categorías entregadas en el texto.
3. Evocar el concepto de frecuencia absoluta conjunta, marginal, y condicionada del valor de una variable según el que toma otra variable en la tabla de contingencia.
4. Completar la tabla de contingencia según las categorías (datos agrupados y nominales) de la variable bidimensional.
5. Pasar la información descrita en el texto a las celdas interiores de la tabla.
6. Completar las celdas restantes, realizando cálculos.

En la Tabla 5.4.9 se presenta el análisis semiótico realizado a la situación-problema, que detalla la serie de prácticas matemáticas que intervienen en su resolución.

Tabla 5.4.9. Objetos matemáticos ligados a la solución correcta al ítem 9

Tipo de objeto	Objetos matemáticos
Situaciones-problemas	Traducir de lenguaje verbal a tabla de contingencia con intervalos.
Lenguajes	Lenguaje diagramático, en estructura tabular de tabla de contingencia (columnas, filas, celdas); lenguaje verbal: en el párrafo con la información, en el enunciado, título y etiquetas de la tabla; lenguaje numérico: números naturales; lenguaje simbólico: símbolo de intervalos.
Conceptos-definición	Celda, columna, dato, fila, frecuencias absolutas conjuntas, marginales respecto a la fila o la columna y condicionadas, individuo, intervalo, muestra, número natural, tabla, variable unidimensional y bidimensional.
Proposiciones	- La suma de las frecuencias absolutas conjuntas, extendida a todos los pares de valores de la variable bidimensional, es igual al total de observaciones. La suma de las frecuencias absolutas marginales (fila o columna) es igual al total de observaciones.
Procedimientos	- Leer comprensivamente el enunciado de la situación-problema. - Leer el título y variables representadas en la tabla de datos. - Completar las categorías de la variable (intervalos) en la tabla. - Llevar la información proporcionada en el enunciado a la tabla. - Realizar cálculos sencillos para completar las celdas de la tabla.
Argumentos	No se solicita argumento.

5.5. SÍNTESIS. SIGNIFICADO EVALUADO POR EL CUESTIONARIO

Para completar el análisis a priori del cuestionario, se presenta en las Tablas 5.5.1 y 5.5.2 un resumen con los diferentes objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas para resolver las situaciones-problemas y que han sido expuestas en el análisis detallado de cada uno de los ítems que componen el cuestionario. Es posible corroborar que el significado institucional pretendido, plasmado tanto en los libros de texto como en las directrices curriculares (MECD, 2014; 2015) coincide con el evaluado en el instrumento de recogida de información.

De manera específica, se puede observar (Tabla 5.5.1) que en los conceptos se toman en cuenta los diferentes tipos de frecuencias que se puedan representar en una tabla estadística, así como los intervalos de clase. Los conceptos se centran, principalmente, en la estadística y la probabilidad, también se aprecian algunos ligados a números y operaciones, los que están presentes en el currículo escolar, y por tanto en el significado institucional pretendido.

Tabla 5.5.1. Síntesis de situaciones-problemas, lenguajes y conceptos evaluados en el cuestionario

Tipo de objeto	Objetos matemáticos	Ítems								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Situación-problema	- Traducir - Un listado de datos a una tabla de frecuencias.	x								
	- De gráfico a tabla estadística.			x		x				
	- De lenguaje verbal a tabla.									x
	- De tabla a resumen numérico: obtener información	x	x	x					x	
	- De tabla a resumen numérico: Predecir valores						x			
- Construir - Completar tablas de frecuencias.				x					x	
Lenguaje	- Verbal en el enunciado, etiquetas y rótulos, números naturales, enteros, decimales y fraccionarios, lenguaje diagramático en forma tabular (fila, columna, celda).	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Lenguaje gráfico (ejes perpendiculares, barras y colores, puntos, líneas, pictogramas - iconos).			x			x			
Concepto-definición	- Celda, columna, fila, tabla.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Conjunto de datos, dato, individuo, variable, valor.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Frecuencias absolutas.	x	x	x	x	x	x			x
	- Frecuencias relativas.	x					x			
	- Frecuencias acumuladas.				x					x
	- Frecuencias absolutas conjuntas, marginales respecto a la fila y/o columna, condicionada.							x		x
	- Número entero, escala, proporcionalidad y operaciones.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Número racional, número decimal y fracción	x					x			
	- Desigualdad.		x	x	x				x	x
	- Experimento aleatorio, probabilidad.						x			
	- Intervalos de clase, extremo superior e inferior.									x
	- Medidas de centralización y dispersión.									x
	- Pictograma, icono.				x					
	- Diagrama de barras, altura, barra, eje de coordenadas.								x	

Las proposiciones presentadas en la Tabla 5.5.2 corresponden a un resumen de las consideradas de los lineamientos curriculares, y por tanto se conforman en el significado institucional pretendido. Principalmente, se centran en las propiedades de los diferentes tipos de frecuencias.

En los procedimientos, cobra especial importancia identificar en la tabla la o las variables representadas, junto al tipo de frecuencia, para realizar una adecuada interpretación de la información expuesta, también se requiere la construcción de la tabla (por medio de listado, o verbalmente) o completarla conocidos algunos datos entregados.

Los argumentos expuestos, también son recogidos del significado institucional pretendido, aunque no es su totalidad, como por ejemplo la invención de datos de una tabla conocidos algunos estadísticos, por no ajustarse al foco de esta investigación.

Tabla 5.5.2. Síntesis de proposiciones, procedimientos y argumentos evaluados en el cuestionario

Tipo de objeto	Objetos matemáticos	Ítem								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Proposiciones	- La suma de las frecuencias absolutas, es igual al total de observaciones.	x	x			x				x
	- La suma de todas las frecuencias relativas es igual a la unidad.	x				x				
	- La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de individuos u observaciones.	x				x				
	- Las frecuencias absolutas y relativas, se relacionan de manera lineal.	x				x				
	- Relación de igualdad o desigualdad		x	x	x			x	x	x
	- La frecuencia acumulada es el número de individuos que presentan una determinada categoría o una menor.					x			x	
	- La altura de las barras es proporcional al valor de la variable.							x		
	- La media aritmética solo se puede calcular en variables cuantitativas.								x	
	- La suma de las frecuencias absolutas marginales respecto a la fila o la columna, es igual al total de observaciones.									x
Procedimientos	- Leer e interpretar el enunciado.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Leer las etiquetas de la tabla.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Identificar las variables representadas en la tabla.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	- Calcular las frecuencias de modalidades.	x		x	x					x
	- Completar una tabla a partir de listado de datos	x								
	- Calcular a partir de los datos.	x	x						x	
	- Realizar una predicción.						x			
	- Completar los datos de una tabla a partir de un gráfico.				x			x		
	- Determinar la veracidad de una afirmación.				x					x
- Calcular la media aritmética								x		
- Completar una tabla a partir de información verbal									x	
Argumentos	- Argumentar una estimación basada en los datos.					x	x	x	x	
	- Argumentar la veracidad de una afirmación.				x				x	
	- Argumentar basado en la media aritmética.								x	

Como se señaló en los Capítulos 3 y 4, el contexto en que se presentan las situaciones-problemas cobra especial relevancia en la construcción del significado (Font, 2007). Para finalizar el análisis del cuestionario se incluye la valoración de la presencia de los diferentes tipos de contextos emanados de la evaluación PISA (OECD, 2019), el que considera cuatro categorías, a las que se agregó “experiencia aleatoria” porque aparecía en reiteradas oportunidades en el análisis de los libros de texto.

En la Tabla 5.5.3 se observa que la mayor parte de los ítems se plantean en un contexto del tipo personal, lo cual es apropiado porque son situaciones cercanas para el estudiante, lo que facilita una mejor comprensión de la información entregada, y además, coincide con su alta presencia en el análisis de libros de texto (Capítulos 3 y 4).

Tabla 5.5.3. Síntesis de ítems por tipo de contexto

Ítem	Contextos				
	Personal	Ocupacional	Público	Científico	Experimento aleatorio
1	x				
2	x				
3	x				
4		x			
5					x
6	x				
7	x				
8				x	
9	x				

También se proponen ítems con contexto ocupacional, científico y experimento aleatorio, este último incorporado por su representatividad en los textos escolares. Cabe señalar, que todos los ítems se proponen en algún tipo de contexto, dado que fue descartado, desde un inicio, las situaciones-problemas sin contexto.

CAPÍTULO 6

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES

- 6.1. Introducción
- 6.2. Objetivos e hipótesis del estudio
- 6.3. Descripción de la muestra y procedimiento
- 6.4. Metodología del análisis de los datos
- 6.5. Resultados de los ítems
 - 6.5.1. Resultados en el ítem 1. Traducir un listado de datos a tabla de frecuencias
 - 6.5.2. Resultados en el ítem 2. Leer una tabla de frecuencias absolutas
 - 6.5.3. Resultados en el ítem 3. Traducir un gráfico a tabla de frecuencias
 - 6.5.4. Resultados en el ítem 4. Completar una tabla de frecuencias acumuladas
 - 6.5.5. Resultados en el ítem 5. Argumentar y predecir valores en tablas
 - 6.5.6. Resultados en el ítem 6. Traducir un gráfico a una tabla de contingencia
 - 6.5.7. Resultados en el ítem 7. Argumentar a partir de una tabla
 - 6.5.8. Resultados en el ítem 8. Leer una tabla de frecuencia con datos agrupados
 - 6.5.9. Resultados en el ítem 9. Traducir una descripción verbal a tabla de contingencia
- 6.6. Síntesis de resultados
- 6.7. Puntuación global en el cuestionario
- 6.8. Características psicométricas del cuestionario
- 6.9. Resumen de conflictos semióticos identificados
- 6.10. Conclusiones
- 6.11. Conclusiones respecto a los objetivos
- 6.12. Conclusiones respecto a las hipótesis

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se exponen los resultados del estudio de evaluación de la comprensión de las tablas estadísticas llevado a cabo con estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), en el que se utiliza el cuestionario cuya construcción se ha descrito con detalle en el Capítulo 5. Se trata de una investigación de tipo básicamente cualitativa, puesto que las tareas planteadas en el cuestionario son abiertas y los datos recogidos son cualitativos. Además, tiene un carácter exploratorio, porque hay pocos antecedentes sobre la comprensión de tablas estadísticas por estudiantes de las edades seleccionadas y los existentes no se han desarrollado en España.

En primer lugar, se exponen los objetivos específicos e hipótesis de este estudio, y se sigue con la descripción detallada de la muestra de estudiantes que han participado en la investigación. Igualmente se detalla el método utilizado para el análisis de las respuestas recogidas. A continuación, se exponen los resultados en detalle de cada uno de los ítems que componen el cuestionario, para finalizar, se presenta una síntesis de los principales resultados junto a las conclusiones obtenidas.

Algunos resultados de este estudio se han publicado en Pallauta et al. (2021) y en los congresos de CERME (2022) e ICOTS (2022).

6.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

En este capítulo se aborda el tercer objetivo general de la investigación, expuesto en el Capítulo 1:

Objetivo 3. Aplicar el cuestionario construido a una muestra de estudiantes españoles de 1º y 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) para caracterizar el significado personal que alcanzan sobre las tablas estadísticas, evaluando su comprensión y sus conflictos semióticos.

Se pretende examinar si los objetivos propuestos en los lineamientos curriculares y los contenidos en los libros de texto en el tema son alcanzados por los estudiantes españoles. El cuestionario utilizado, cuya construcción fue descrita en el Capítulo 5, permitirá analizar los principales logros y dificultades de los participantes en el trabajo con tablas estadísticas e identificar posibles conflictos semióticos cognitivos.

Aunque al inicio de la tesis doctoral, se había pensado en aplicar el cuestionario a estudiantes chilenos, las restricciones de movilidad derivadas de la pandemia obligaron a cambiar la población objetivo, centrando la atención en estudiantes españoles, quienes compartían los mismos objetivos de aprendizaje en sus lineamientos curriculares. No obstante, se piensa aplicar el cuestionario en Chile en un futuro próximo, para realizar un estudio comparado de resultados. Para alcanzar el objetivo general se han propuesto los siguientes objetivos específicos:

O3.1. Seleccionar una muestra amplia de estudiantes españoles de 11 a 15 años que permita garantizar la fiabilidad y generalizabilidad de los resultados obtenidos.

En este estudio se optó por una muestra intencional, que se describe en la siguiente sección y se conforma por escolares de 1º y 3ºESO de dos ciudades de la Comunidad Autónoma de Andalucía.

O3.2. Analizar la comprensión y describir los conflictos semióticos de los estudiantes en cada uno de los ítems que conforman el cuestionario.

En las siguientes secciones se presenta un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes a cada uno de los ítems del cuestionario, que permite describir el logro de los diferentes procedimientos propuestos, junto con los principales conflictos semióticos cognitivos evidenciados en las respuestas de los participantes. Con el conjunto de ítems se caracteriza el significado personal de estos estudiantes. Esta será una contribución original del estudio, no sólo porque no se han realizado investigaciones previas en España, sino por la interpretación de las dificultades en términos de conflictos semióticos cognitivos junto a su clasificación.

O3.3. Comparar los resultados obtenidos por los estudiantes de 1º y 3º curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Con esta comparación se trata de verificar el progreso del significado personal del estudiante con la edad y el curso escolar, e identificar los conflictos semióticos que se

superan o permanecen. El análisis realizado incorpora representaciones tabulares o gráficas que contrastan los resultados alcanzados por ambos grupos.

O3.4. Comparar los resultados en función de las variables introducidas en el cuestionario: tipo de tabla, tipo de frecuencia, procedimiento y nivel de lectura.

Se llevará a cabo un análisis del porcentaje de respuestas correctas en función de las variables anteriores, para orientar a los profesores encargados del tema, sobre los valores de dicha variable que conviene utilizar en cada uno de los cursos participantes y el orden en que debieran ser introducidos en la enseñanza.

O3.5. Estudiar las características psicométricas del cuestionario.

Al final del capítulo se analizará los índices de dificultad y discriminación de los ítems y el coeficiente de fiabilidad. Dicho análisis completa el estudio de validez realizado en el Capítulo 5.

Hipótesis del estudio de evaluación

De acuerdo a la exhaustiva revisión de la literatura realizada en torno al trabajo con las tablas estadísticas, descrita en el Capítulo 2, junto con los objetivos planteados en el presente estudio, se plantean las siguientes hipótesis.

H1. Se espera que los estudiantes presenten dificultades en los niveles avanzados de lectura de las tablas estadísticas.

La literatura referente al tema, señala que los niveles de lectura literal son sencillos para los estudiantes. Sin embargo, alertan de las dificultades que podrían aparecer conforme se avanza a una lectura que requiera extrapolar o interpolar la información hasta llegar a una lectura crítica (Chick, 2004; Diaz-Levicoy et al., 2019; 2020; Estrella y Estrella, 2020; Gabucio et al., 2010; Pérez-Sedano, 2015).

H2. Siguiendo esta línea, también se espera encontrar conflictos semióticos en la construcción de tablas, o en su traducción a diferentes tipos de registro (tabla a tabla, gráfico a tabla, verbal a tabla, tabla a estadístico).

Diferentes autores advierten de las dificultades que muestran los estudiantes en la construcción de tablas de frecuencia de una variable (Díaz-Levicoy et al., 2020) y en las de doble entrada o de contingencia (Gabucio et al., 2010; Gea et al., 2020; Marti et al., 2011; Pérez-Sedano, 2015), que se interpretarán en términos de conflictos semióticos. Los principales que se esperan encontrar son la confusión entre variable y frecuencia, confusión entre los tipos de frecuencias e interpretación de datos agrupados en intervalos. En el presente estudio, se buscará identificar los conflictos semióticos más frecuentes que se presenten en los estudiantes españoles y contrastar si estos coinciden con los antecedentes.

H3. Se espera encontrar un progreso con la edad tanto en la lectura, como en la construcción de las tablas estadísticas.

Se seleccionarán estudiantes de dos cursos diferentes, por lo que un grupo tendrá

más experiencia y conocimientos sobre las tablas que el otro, lo que permitirá constatar la mejora con la edad (Martí et al., 2010). Este aspecto ya ha sido reportado en investigaciones con niños sobre gráficos estadísticos (e.g. Díaz-Levicoy (2018) dirigido a estudiantes de 11 y 12 años).

6.3. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA Y CONTEXTO

La muestra de este estudio de evaluación se compone de 277 estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), de los cuales 149 realizaban el 1ºESO y 128 cursaban el 3ºESO. Los participantes pertenecen a dos centros públicos de Educación Secundaria de la comunidad Autónoma de Andalucía.

La muestra es intencional y de conveniencia (Izcara, 2014), ya que dada la crisis sanitaria generada por el COVID-19, fue particularmente complejo optar a establecimientos educacionales. En los centros disponibles, se contó con el consentimiento de profesores y directores de los establecimientos. Puesto que el cuestionario fue diseñado para estudiantes de 11 y 13 años, se optó por aplicar el instrumento al alumnado de 1ºESO y 3ºESO a comienzo del curso escolar para asegurar que recordasen los temas relacionados con las tablas estadísticas tratados, según los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015) en el curso anterior.

La Tabla 6.3.1 presenta la distribución de los estudiantes que componen la muestra, según el centro educativo, los que han sido codificados como 1 y 2, y el curso junto con su género. Aunque hubo una participación ligeramente mayor en 1º (149 participantes) que de 3ºESO (128 participantes), se observa una distribución más o menos similar de hombres y mujeres que respondieron el cuestionario.

Tabla 6.3.1. Distribución de la muestra por curso y género

Centro educativo	1º ESO (n=149)		3º ESO (n=128)		Total
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	
1	34	36	29	29	128
2	46	33	41	29	149
Total	80	69	70	58	277

Se usó un único cuestionario para cada curso, aunque la mayor parte de los ítems son compartidos para 1ºESO y 3ºESO. El encabezado del instrumento solicitaba registrar algunos datos, referidos a edad y curso, y además algunas instrucciones.

La aplicación del instrumento se realizó a inicios del curso escolar 2020-2021, durante los meses de septiembre y octubre. Los estudiantes presencialmente completaron de manera individual y escrita el cuestionario, durante una de las sesiones de la asignatura de matemáticas, con la asistencia de su profesor. Se les explicó a los estudiantes la finalidad de la evaluación y se otorgó un tiempo de dos horas para completarlos. Se agradece a los estudiantes y profesores el interés puesto en esta colaboración.

En los ejemplos usados en el capítulo se identifica a cada estudiante con el código Ex, de la forma que x corresponde del 1 al 277.

6.4. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS

Una vez recolectados los cuestionarios aplicados en los centros, para el análisis de las respuestas se establecieron en cada ítem categorías basadas en un análisis de contenido (Bisquerra, 2014; Neuendorf, 2016), cuyo procedimiento ha sido descrito en los Capítulos 3 y 4. Esta técnica ha sido empleada en varias tesis del grupo de investigación con el objeto de describir y caracterizar las producciones de los estudiantes en cuestionarios con preguntas abiertas, por ejemplo, en Arteaga (2011) y Díaz-Levicoy (2018). En el presente análisis se han seguido los pasos que se describen a continuación:

1. *Elección de las unidades de análisis*, que corresponden a cada una de las respuestas entregadas por los estudiantes, es decir, cada ítem y apartado. La reducción y simplificación de dicha información se lleva a cabo mediante la fragmentación de la información en unidades de registro, que permitan facilitar y agilizar los análisis. Para ello, las respuestas de cada estudiante son codificadas como un elemento (fila) de un fichero de datos, asignándole un número y anexando información como el curso, edad y sexo del estudiante.
2. *Crear un sistema de variables y categorías de análisis*, que pueden variar según el ítem que se trate; también, a modo general, se categorizaron las respuestas en correctas, parcialmente correctas e incorrectas. La profunda revisión de los cuestionarios permitió establecer una lista inicial de categorías, en la que se incluyen conflictos semióticos potenciales, o variantes en las respuestas correctas. En los ítems que fue posible, se identificaron, además, los niveles de lectura.
3. *La información asociada a cada una de las variables es codificada y depurada de manera cíclica e inductiva* (Bisquerra, 2014). A través de una lectura detallada de cada respuesta se analiza e interpreta la información presentada, para dar coherencia y sentido a las categorías definidas en el seno del marco teórico utilizado. La fiabilidad de este proceso se asegura con la continua revisión y consulta a los colaboradores de la investigación (directores de tesis) sobre las categorías definitivas.
4. Se desarrollan variados análisis estadísticos de tipo descriptivo, junto con gráficos que permitan comparar resultados.
5. Igualmente, se incluyen gráficos y resúmenes estadísticos de la distribución de la puntuación total, que permitan facilitar la interpretación de la información. También se incluye el estudio de las características psicométricas del instrumento utilizado.

6.5. RESULTADOS DE LOS ÍTEMS

En la presente sección se detalla el análisis de cada uno de los ítems que componen el cuestionario junto a los resultados obtenidos y ejemplos para facilitar la comprensión de las categorías de evaluación propuestas.

6.5.1. RESULTADOS DEL ÍTEM 1: TRADUCIR UN LISTADO DE DATOS A TABLA DE FRECUENCIAS

Este primer ítem del cuestionario (Figura 6.5.1.1) requiere construir, a partir de un listado de datos, una tabla de distribución de una variable con frecuencias ordinarias (absolutas y relativas), lo que involucra un proceso de trasnumeración (Wild y Pfannkuch,

1999). La tarea fue adaptada de un libro de texto chileno, de los analizados en el Capítulo 3 (Kheong et al., 2017). Dicho ítem fue diferenciado si se dirigía a 1° o 3° curso, dado los diferentes conocimientos del alumnado en estos cursos, de acuerdo a los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015). Díaz-Levicoy et al. (2020) utilizó una tarea similar con estudiantes chilenos de 3° curso de Educación Básica (8 años), en la que incluyó una columna para registrar el conteo, obteniendo un bajo porcentaje de respuestas incorrectas (7,6%).

Ítem 1. A Claudia le gustan mucho los insectos y una mañana realizó un listado con los insectos que pudo observar en su jardín:
 hormiga- mariposa-hormiga-abeja-hormiga-hormiga-mosquito-mosquito-abeja-mosquito-mariposa-hormiga-hormiga-mosquito-hormiga-hormiga
 Completa la tabla con los datos registrados por Claudia

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Total		

Figura 6.5.1.1. Ítem 1 del cuestionario de evaluación para 3° ESO

Para resolver la tarea, el estudiante debe completar la tabla de frecuencias a partir de un conjunto de datos asociados a una variable cualitativa, para el caso de 1° ESO solamente se consideró las frecuencias absolutas (1.a). Para ello se debe identificar las diferentes modalidades de la variable; no se requiere ordenar las categorías para representarlas, por tratarse de una variable de escala nominal. A continuación, se determinan las frecuencias absolutas y relativas asociadas a cada una de las modalidades, y finalmente completar los totales correspondientes. La tabla resultante estaría enmarcada en un nivel de complejidad semiótico C3.1 (formar una distribución). Para establecer la frecuencia relativa de cada modalidad de la variable y los totales se requiere un nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Friel et al., 2001), pues es necesario realizar cálculos.

Las producciones realizadas en torno a la resolución de este ítem, fueron clasificadas en tres categorías: correctas, parcialmente correctas e incorrectas que se describen a continuación.

Tabla correcta. Cuando se completa adecuadamente las columnas correspondientes a la frecuencia absoluta y relativa de cada modalidad. La Figura 6.5.1.2 muestra un ejemplo de respuesta correcta entregada por el estudiante E16 de 3° ESO. Como en el ejemplo, los valores de la frecuencia relativa pueden representarse a través de fracciones simplificadas o no, o números decimales finitos.

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Hormiga	8	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
Mariposa	2	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
abeja	2	$\frac{1}{8}$
Mosquito	4	$\frac{1}{4}$
Total	16	$\frac{16}{16} = 1$

Figura 6.5.1.2. Construcción correcta de tabla estadística del estudiante E16

Tabla parcialmente correcta. Se consideran en esta categoría las respuestas que en que gran parte de las celdas han sido completadas con los valores correctos, pero se evidencian algunos errores o ausencia de valores particulares. Por ejemplo, E9, como se muestra en la Figura 6.5.1.3, contabiliza de manera equívoca la cantidad de mosquitos. Aunque dicho valor incorrecto repercute en el total de los datos y frecuencias relativas de la variable, se manifiesta un conocimiento adecuado de este tipo de frecuencias.

Tabla incorrecta. Tablas cuyos valores manifiestan equivocaciones u omisiones. También se observa algunas respuestas en que los valores registrados tanto para la frecuencia absoluta como relativa carecen de sentido, manifestando un desconocimiento de ambos conceptos, por ejemplo E57 en la Figura 6.5.1.3.

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
hormiga	8	8/15
mariposa	2	2/15
abeja	2	2/15
mosquito	3	3/15
Total	15	15/15

Tabla parcialmente correcta del estudiante E9

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
hormiga	hormiga	hormiga
mariposa	hormiga	mosquito
abeja	mosquito	mariposa
mosquito	abeja	mariposa
Total	5	3

Tabla incorrecta del estudiante E57

Figura 6.5.1.3. Tabla parcialmente correcta e incorrecta

No construye. No se realiza ningún tipo de registro.

Dado que el ítem fue diferente para los estudiantes de 1°ESO, para analizar las construcciones realizadas se revisó, en primera instancia, el cálculo de las frecuencias absolutas, pues esta tarea era compartida por ambos cursos. En la Tabla 6.5.1.1 se observa que la mayor parte de las respuestas son correctas o parcialmente correctas, coincidiendo con otras investigaciones (Fernandes et al., 2019; 2020), seguido de incorrecto. Un porcentaje importante de estudiantes no construye la tabla, dejando en blanco las categorías de la variable y su frecuencia absoluta.

Tabla 6.5.1.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 1.a

Construcción	1° ESO	3° ESO	Total
Correcta	75(50,3)	63(49,2)	138(49,8)
Parcialmente correcta	17(11,4)	11(8,6)	28(10,1)
Incorrecta	27(18,1)	30(23,4)	57(20,6)
No construye	30(20,1)	24(18,8)	54(19,5)
Total	149	128	277

Contrario a nuestra hipótesis, se aprecian mejores resultados en 1° ESO, siendo 3°ESO el que presenta un mayor porcentaje de respuestas incorrectas. Sin embargo son más los estudiantes que dejan la respuesta en blanco en 1°ESO que en 3°ESO. Hay coincidencia con el estudio desarrollado por Díaz-Levicoy et al. (2020) con estudiantes de 3° curso de Educación Primaria, donde un mayor número de participantes realizó la construcción con éxito (68,4%), aunque en la tarea propuesta en dicha investigación, solo debían registrar el conteo y la frecuencia absoluta, y no se pidió completar el total.

Se ha realizado una valoración global del desempeño en la completación de la

variable y las frecuencias absolutas (1.a) que permita comparar los resultados obtenidos por los estudiantes de ambos grupos. Para ello, se ha asignado una puntuación, dependiendo de la construcción realizada, de la siguiente forma: sin construir: 0; incorrecto: 1; parcialmente correcto: 2 y correcto: 3. De este modo el estudiante podría alcanzar hasta 3 puntos en este ítem (1.a).

En la Figura 6.5.1.4 los dos gráficos representan la puntuación diferenciada por curso. El gráfico de barras muestra que la mayoría de los estudiantes alcanza 3 puntos, siendo más alta esta frecuencia en 1º curso, sin embargo, en este grupo también se presenta un mayor número de construcciones sin realizar. La mediana y tercer cuartil, como se puede observar en el gráfico de cajas, se sitúa en ambos cursos sobre el valor mediano teórico, cabe destacar que en 1º curso la mediana alcanza el máximo puntaje.

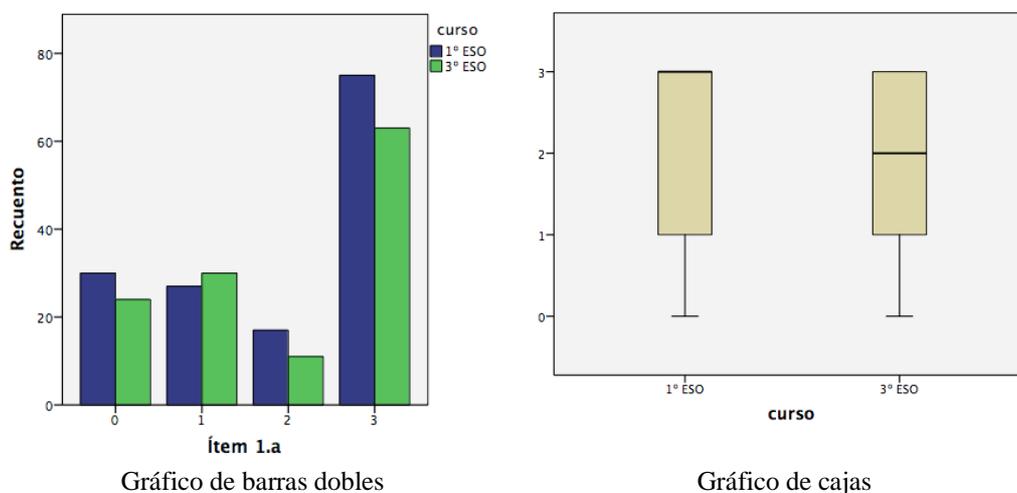


Figura 6.5.1.4. Distribución del ítem 1.a por curso

Por otra parte, en la Tabla 6.5.1.2 son resumidos los resultados del cálculo de frecuencias relativas, que debían de realizar los estudiantes de 3ºESO. Se observa que un alto porcentaje de los estudiantes determina incorrectamente las frecuencias relativas, seguido de las tablas sin construir y las correctas.

Tabla 6.5.1.2. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 1.b

Construcción	3º ESO
Correcto	19(14,8)
Parcialmente correcto	5(3,9)
Incorrecto	80(62,5)
No construye	24(18,8)
Total	128

Conflictos semióticos en la construcción de la tabla

En el análisis de las tablas parcialmente correctas e incorrectas se identificaron diferentes conflictos semióticos cognitivos en las respuestas de los estudiantes, es decir, desajustes de los significados asociados a un mismo objeto matemático (Godino, 2002) por el estudiante (significado personal) y la institución (significado institucional). Los conflictos encontrados han sido clasificados en conceptuales y procedimentales.

Conflictos conceptuales

C1. Confusión de tipos de frecuencias ordinarias. Se puede manifestar a menudo en la construcción de tablas de distribución de una variable (Batanero y Godino, 2001; Fernandes et al., 2019) y se distinguen de la forma siguiente.

- *C1.1. Confusión de frecuencias absolutas y relativas.* Este conflicto, fue detectado en ambos cursos, pese a que la frecuencia relativa solo se pedía completar en 3º curso. Por ejemplo, la Figura 6.5.1.5 muestra las respuestas de los estudiantes E38 de 3ºESO y E71 de 1ºESO con este conflicto al completar las frecuencias absolutas con valores de frecuencias relativas. También este conflicto se presentó de manera inversa.

Insecto	Frecuencia absoluta
Hormiga	8/16 ha visto a una hormiga
Maripeña	2/16 ha visto una maripeña
Abeja	2/16 ha visto una abeja
Mosquito	4/16 ha visto a un mosquito
Total	16 veces vio insectos

E71

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Hormiga	$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	
Maripeña	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	
abeja	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	
mosquito	$\frac{4}{16} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	
Total	$\frac{16}{16} = 1$	

E38

Figura 6.5.1.5. Respuesta con conflicto C1.1

- *C1.2. Confusión de frecuencias relativas y acumuladas.* Siguiendo la línea del conflicto descrito anteriormente, algunas respuestas de los estudiantes manifiestan una confusión entre estos tipos de frecuencias (Álvarez et al., 2020), y en lugar de registrar la frecuencia relativa de cada modalidad, calculan las acumuladas.
- *C1.3. Confusión de frecuencias relativas y porcentuales.* Este caso fue menos habitual, y consiste en registrar los porcentajes en lugar de las frecuencias relativas de cada modalidad de la variable.

C2. Desconoce la estructura de la tabla. Este tipo de respuesta es poco común, por ejemplo, en la Figura 6.5.1.3, el estudiante E57 registra en las celdas combinaciones de tres insectos, sin leer las etiquetas superiores de las columnas referidas a las frecuencias absolutas y relativas. Evidenciando un desconocimiento de los conceptos de variable, sus modalidades y distribución de frecuencias (absoluta o relativa).

Conflictos procedimentales

P1. Confunden o clasifican incorrectamente los valores. En estos casos, también se comenten errores en el cálculo de las frecuencias absolutas alterando de este modo el total y las frecuencias relativas de cada modalidad, como es posible de observar en la respuesta de E9 en la Figura 6.5.1.3.

P2. Conflicto al calcular la frecuencia relativa (solo en tercer curso). Se diferencian tres tipos:

- *P2.1. Invierte numerador y denominador involucrados en algoritmo para calcular la frecuencia relativa,* como se observa en la respuesta de E250 en la Figura 6.5.1.6,

quien manifiesta una confusión de la definición de la frecuencia relativa y en la comprensión de la relación parte-todo (Álvarez et al., 2020).

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
hormiga	8	16/8
mariposa	2	16/2
abeja	2	16/2
mosquito	4	16/4
Total	16	16/16

Figura 6.5.1.6. Respuesta del estudiante E250 con conflicto P2.1

- P2.2. Multiplica o divide por una potencia de 10 para calcular la frecuencia relativa.* En lugar de dividir por el total de la muestra, se calculan las frecuencias relativas dividiendo por alguna potencia de base 10 (10, 100, 1.000) como E58 (Figura 6.5.1.7). En otros casos, se multiplica por 10 cada valor de las frecuencias absolutas como lo hace E43 en la Figura 6.5.1.7. Una posible explicación es que el estudiante trata de efectuar un procedimiento inverso al realizado para encontrar porcentajes conocida la frecuencia relativa.

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Hormiga	8	0'8
Mariposa	2	0'2
Abeja	2	0'2
Mosquito	4	0'4
Total	16	0'46

E58

Insecto	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Hormiga	8	80%
Mariposa	2	20%
Abeja	2	20%
Mosquito	4	40%
Total	16	160%

E43

Figura 6.5.1.7. Respuestas con conflicto P2.2

- P2.3. No calcula las frecuencias relativas.* Cuando se deja sin completar la columna designada para el registro de las frecuencias relativas.

P3. Conflicto procedimental en el cálculo de totales de las frecuencias absolutas y/o relativas. Algunos estudiantes a pesar de obtener adecuadamente los valores de la frecuencia absoluta, confunden el total de la muestra y el número de modalidades de la variable, como E87 (Figura 6.5.1.8), mientras que otros no llegan a calcular los totales.

Insecto	Frecuencia absoluta
hormiga	hormiga salio 8 veces
mariposa	mariposa salio 2 veces
abeja	abeja salio 2 veces
mosquito	mosquito salio 4 veces
Total	hay 4 insectos

Figura 6.5.1.8. Respuesta del estudiante E87 con conflicto P3

La Tabla 6.5.1.3 resume la distribución de los conflictos detectados en 1º curso, donde cabe destacar que en una respuesta se podría presentar más de un tipo de conflicto.

Tabla 6.5.1.3. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos semióticos en 1ºESO

Tipo de conflicto semiótico	1ºESO		Total (n=149)
	Parcialmente correcta	Respuesta Incorrecta	
C1. Confunde las frecuencias			
C1.1. Absolutas y relativas		3(2,0)	3(2,0)
C2. Desconoce la estructura de una tabla		6(4,0)	6(4,0)
P1. Confunde o clasifica incorrectamente valores	12(8,1)	18(12,1)	30(20,1)
P3. Cálculo incorrecto o ausencia del total	15(10,1)	24(16,1)	39(26,2)

El conflicto procedimental que aparece con mayor frecuencia en 1ºESO es P3 asociado a calcular incorrectamente o dejar la celda del total sin completar, seguido de P1 ligado a la confusión o clasificación incorrecta de valores. Sigue C2, conflicto conceptual, que evidencia un desconocimiento de los conceptos ligados a la estructura de una tabla, y por último se presenta el conflicto conceptual C1.1 correspondiente a confundir la frecuencia absoluta con la relativa. Las respuestas parcialmente correctas solo muestran el conflicto P1 y P3. A pesar de que en 1ºESO no se consideraron las frecuencias relativas, algunos estudiantes registraran dicha frecuencia en lugar de la absoluta (C1.1).

Los conflictos presentados en 3ºESO en el cálculo de las frecuencias absolutas y relativas, se presentan en la Tabla 6.5.1.4. En algunas producciones aparece más de un tipo, por lo que fueron contabilizados por separado, razón por la cual al totalizar los porcentajes se puede superar el 100%.

El conflicto semiótico más frecuente en 3ºESO es de tipo procedimental P3 consistente en errores o ausencia de totales, el cual es más usual en las frecuencias relativas que en las absolutas. Le sigue P2.3 asociado a la ausencia de frecuencias relativas; luego P1 correspondiente a clasificar incorrectamente los valores de las frecuencias absolutas; Y C2 enmarcado en un desconocimiento de los conceptos ligados a la estructura de la tabla.

Tabla 6.5.1.4. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos semióticos en 3º curso

Tipo de conflicto semiótico	3º ESO		Total (n=128)
	Absolutas	Frecuencias Relativas	
C1. Confunde las frecuencias			
C1.1. Absolutas y relativas	4(3,1)	6(4,7)	10(7,8)
C1.2. Relativas y acumuladas		5(3,9)	5(3,9)
C1.3. Relativas y porcentuales		1(0,8)	1(0,8)
C2. Desconoce la estructura de una tabla	7(5,5)	6(4,7)	13(10,2)
P1. Confunde o clasifica incorrectamente valores	25(19,5)		25(19,5)
P2. Conflicto con las frecuencias relativas			
P2.1. Invierte numerador y denominador		8(6,3)	8(6,3)
P2.2. Divide o multiplica por potencias de base 10		11(8,6)	11(8,6)
P2.3. No calcula las frecuencias relativas		46(35,9)	46(35,9)
P3. Cálculo incorrecto o ausencia del total	39(30,5)	84(65,6)	123(96,1)

La frecuencia relativa muestra una mayor cantidad de conflictos semióticos, como P2.2 en el que se obtiene la frecuencia relativa dividiendo o multiplicando la absoluta por potencias de base 10, o P2.1 asociado a invertir numerador y denominador; así como confundir este tipo de frecuencias con otras como las absolutas (C1.1), acumuladas (C1.2) y de manera muy escasa las porcentuales (C1.3). Los conflictos semióticos asociados a las frecuencias absolutas son escasos y se relacionan con un desconocimiento de los conceptos ligados a la tabla (C2), o con totales errados, así como la confusión de este tipo de frecuencia con la relativa (C1.1).

6.5.2. RESULTADOS DEL ÍTEM 2. LEER UNA TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

El segundo ítem del cuestionario, fue adaptado de un libro de texto (Kheong et al., 2017). Este ítem (Figura 6.5.2.1) presenta la distribución de una variable cualitativa con frecuencias absolutas, enmarcada de un nivel de complejidad semiótico C3.1. La tarea propuesta es la lectura e interpretación de la información y consta de cinco preguntas, en que las cuestiones 2.a y 2.b corresponden al nivel más básico de lectura *leer los datos* (L1), mientras que 2.c, 2.d y 2.e se enmarcan en leer *dentro de los datos* (L2) (Curcio, 1989; Friel et al., 2001).

<p>Ítem 2. A un grupo de niños se les consultó cuál era el sabor de yogurt preferido; solo podían elegir un sabor. En la tabla adjunta se registran sus preferencias. Responde las siguientes preguntas:</p>													
a) ¿Cuántos niños prefieren el yogurt de sabor coco?													
b) ¿Cuál es el sabor que prefieren exactamente 6 niños?													
c) ¿Cuál es el sabor de yogurt que prefiere la mayoría de los niños?													
d) ¿A cuántos niños en total se preguntó por su sabor de yogurt preferido?													
e) ¿Cuántos niños más prefieren el yogurt de vainilla que el de piña?													
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Sabor</th> <th>Cantidad de niños</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Fresa</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Vainilla</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Melocotón</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Coco</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Piña</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>	Sabor	Cantidad de niños	Fresa	8	Vainilla	6	Melocotón	4	Coco	4	Piña	2
Sabor	Cantidad de niños												
Fresa	8												
Vainilla	6												
Melocotón	4												
Coco	4												
Piña	2												

Figura 6.5.2.1. Ítem 2 del cuestionario de evaluación

Variadas investigaciones (Diaz-Levicoy et al., 2019; 2020; Fernandes et al., 2020; Gabucio et al., 2010), han utilizado actividades con tablas estadísticas para analizar el nivel de lectura que alcanzan los estudiantes, evidenciando que los niveles más básicos de lectura (L1 y L2) son alcanzados por la mayoría de los participantes.

Ítem 2.a. Lectura literal

Para responder a la primera pregunta: "¿Cuántos niños prefieren el yogurt sabor coco?" se requiere el nivel más básico de lectura *leer los datos* (L1) (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), ya que consiste en identificar la frecuencia absoluta de la modalidad señalada. Las respuestas han sido clasificadas como se detallada a continuación.

Respuesta correcta. Se considera la respuesta correcta cuando se indica que son 4 niños los que prefieren el yogurt de sabor coco, como responde E59. El procedimiento para responder la tarea requiere únicamente de identificar la categoría y leer su frecuencia.

E59: 4 niños prefieren el sabor coco.

Respuesta parcialmente correcta. Se identifica la frecuencia absoluta de la modalidad señalada, pero se entrega como respuesta la frecuencia relativa. En este caso, aunque se alcanza el nivel L1 de lectura de la tabla, se confunde frecuencia absoluta y relativa (conflicto C1.1 descrito en el ítem 1). Por ejemplo, E23 y E185, este último quien entrega una respuesta fundamentalmente verbal.

E23: $\frac{4}{24}$ niños.

E185: Lo prefieren 4 de 24.

Incorrecta. Se indican valores incorrectos, sin una justificación que permita interpretar la manera en que se obtuvo dicha respuesta, como es el caso de E180.

E180: Melocotón.

En la Tabla 6.5.2.1 se presentan los resultados de la corrección de las respuestas entregadas por los estudiantes por curso.

Tabla 6.5.2.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 2.a

Corrección	1° ESO	3° ESO	Total
Correcto	143(96)	119(93)	262(94,6)
Parcialmente correcto	2(1,3)	6(4,7)	8(2,9)
Incorrecto	3(2,0)	1(0,8)	4(1,4)
No responde	1(0,7)	2(1,6)	3(1,1)
Total	149	128	277

Al igual que estudios similares (Díaz-Levicoy et al., 2016; 2020; Fernandes et al., 2020) gran parte de los estudiantes alcanza el nivel de lectura L1 de forma correcta, o parcialmente correcta, mientras que un porcentaje menor lo hace de manera incorrecta, o no responde. En 1°ESO se observa un mayor porcentaje de respuestas correctas, lo que coincide con el estudio desarrollado por Gabucio et al. (2010) en que los participantes de este curso, en una pregunta similar, mostraron un bajo nivel de dificultad (18,6%). En 3°ESO, también la mayoría de estudiantes responde correctamente, sin embargo en este curso se concentra un mayor porcentaje de respuestas parcialmente correctas evidenciando un conflicto consistente en confundir la frecuencia absoluta con la relativa, que podría ser debido a que los estudiantes de este curso han tratado este concepto recientemente.

Ítem 2.b. Lectura inversa

La pregunta "¿Cuál es el sabor que prefieren exactamente 6 niños?" también se enmarca en el nivel más básico de lectura *leer datos* (L1) (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). Sin embargo, a diferencia de la anterior pregunta en este caso consiste en identificar la modalidad de la variable asociada a un determinado valor de frecuencia absoluta. Para responder a la tarea, el estudiante debe identificar en la columna de las frecuencias absolutas el valor señalado y luego observar su modalidad. Para evaluar las respuestas entregadas, se han identificado las siguientes categorías.

Respuesta correcta. Se indica la modalidad correspondiente a la frecuencia absoluta señalada, como ocurre con E78, quien señala, de manera correcta, que el sabor vainilla es la categoría de la variable con frecuencia absoluta 6.

E78: El sabor que prefieren exactamente 6 niños es de vainilla.

Respuesta parcialmente correcta. Se clasifican en esta categoría las respuestas en que se entrega la frecuencia (6 niños), en lugar de la modalidad, lo que supone un nuevo conflicto semiótico conceptual C2, descrito por Mayén et al. (2009) en un estudio sobre la mediana, como por ejemplo la respuesta del estudiante E103.

E103: 6 niños.

Respuesta incorrecta. Se indica una modalidad que no corresponde a la frecuencia señalada en la pregunta, como ocurre con E153. Esto supone un conflicto notacional N1, ya que el estudiante no alcanza una lectura de nivel L1 de la tabla.

E153: Fresa.

Tabla 6.5.2.2. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 2.b

Corrección	1° ESO	3° ESO	Total
Correcto	144(96,6)	126(98,4)	270(97,5)
Parcialmente correcto	1(0,7)		1(0,4)
Incorrecto	3(2,0)	1(0,8)	4(1,4)
No responde	1(0,7)	1(0,8)	2(0,7)
Total	149	128	277

La Tabla 6.5.2.2 muestra los resultados obtenidos en la corrección de esta pregunta por curso. Se aprecia, en general, que un alto porcentaje de estudiantes responde de manera correcta, o parcialmente correcta, mientras que un porcentaje menor no responde, o lo hace de manera incorrecta. Los resultados son superiores a los obtenidos por Díaz-Levicoy et al. (2020) en que fue menor el porcentaje de estudiantes de 3° curso de Educación Primaria que resolvieron este tipo de tarea de manera correcta (54,4%), y mayor los que lo realizaron de forma incorrecta (45,6%), lo que podría explicarse a que previo a la lectura de la tabla se debía desarrollar un proceso de traducción de gráfico a tabla.

En 1°ESO se observa que un elevado porcentaje de estudiantes responde correctamente o parcialmente correcto, mientras que las categorías incorrecto o no responde tienen una baja frecuencia. Destacamos que en 3°ESO la mayoría del alumnado realiza una correcta lectura, siendo escasas las respuestas incorrectas, o sin contestar y nulas las parcialmente correctas.

Ítem 2.c. Identificar moda

Para responder a la pregunta: "¿Cuál es el sabor de yogurt que prefiere la mayoría de los niños?" es necesario comparar las frecuencias absolutas de todas las modalidades que componen la variable cualitativa, y seleccionar la modalidad con mayor frecuencia. Por tanto, se enmarca en un segundo nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Curcio,

1989; Friel et al., 2001). Las respuestas entregadas por los estudiantes se han clasificado como se indica a continuación.

Respuesta correcta. Se indica la modalidad de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta, como E3 quien señala el sabor fresa junto con el número de chicos que lo prefiere.

E3: El sabor fresa, exactamente 8 niños.

Respuesta parcialmente correcta. Entrega como respuesta el valor de la frecuencia mayor (moda), en lugar de la modalidad de la variable, como E153. Supone un conflicto conceptual C2, descrito por Mayén et al. (2009) consistente en confundir la variable con la frecuencia.

E153: 8.

Respuesta incorrecta. Señala otras modalidades o valores de otra frecuencia, también puede indicar que la modalidad solicitada no existe, como E51, quien no lee correctamente las etiquetas de la tabla, evidenciando el conflicto notacional N1. En este caso, de nuevo se presenta el conflicto de no ser capaz de leer la tabla.

E151: No hay sabor de yogurt.

En la Tabla 6.5.2.3 se presentan los resultados obtenidos, donde se puede apreciar que gran parte de los estudiantes responde correctamente, alcanzando el nivel L2 *leer dentro de los datos*. Otras respuestas parcialmente correctas, incorrectas o en blanco son muy escasas. En Díaz-Levicoy et al. (2020) se utilizó una pregunta muy similar con estudiantes de 3° curso de Educación Primaria, y el porcentaje del alumnado que alcanza el nivel de lectura L2 fue menor (78,5%).

El porcentaje de respuestas correctas es ligeramente superior en 1°ESO que en 3°ESO; llama la atención que en 1°ESO no aparecen respuestas parcialmente correctas, ni incorrectas, que sí se presentan en 3°ESO, aunque con una escasa frecuencia.

Las respuestas incorrectas evidenciaron un conflicto relacionado con la lectura de la tabla, pues los estudiantes señalan que la modalidad consultada no aparece en los datos (e.g. E51). Otras dificultades advertidas en la literatura, como indicar las categorías que tienen mayores preferencias no discriminando entre ellas (Díaz-Levicoy et al., 2020), no fueron manifestadas por los participantes del presente estudio.

Tabla 6.5.2.3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 2.c

Corrección	1° ESO	3° ESO	Total
Correcto	147(98,7)	124(96,9)	271(97,8)
Parcialmente correcto		1(0,8)	1(0,4)
Incorrecto		2(1,6)	2(0,7)
No responde	2(1,3)	1(0,8)	3(1,1)
Total	149	128	277

Ítem 2.d. Lectura del total

La pregunta "¿A cuántos niños en total se preguntó por su sabor de yogurt preferido?" también implica un nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Friel et al., 2001), pues requiere realizar cálculos para establecer el total de la muestra. Las respuestas de los estudiantes, se han clasificado como correctas e incorrectas, dado que, en este ítem, no se observaron respuestas que se pudieran considerar como parcialmente correctas.

Respuesta correcta. Se señala la cantidad total de chicos que han sido consultados sobre su sabor preferido de yogurt, como la respuesta de E4.

E4: Se les preguntó a 24 niños.

Respuesta incorrecta. Responde de manera equívoca a la cuestión planteada. En este tipo de respuestas se han identificado conflictos semióticos de tipo conceptual (C2), procedimental (P3) y notacional (N1 y N2), los cuales se describen posteriormente.

En la Tabla 6.5.2.4 se resumen los resultados obtenidos, donde gran parte de los participantes alcanza un nivel de lectura L2. El mayor porcentaje de acierto en la lectura de la tabla ocurre en 3°ESO, mientras que en 1°ESO existe una ligera mayor frecuencia de respuestas incorrectas, o sin responder. Los resultados son superiores a los obtenidos por Díaz-Levicoy et al. (2020) en que la mayor parte de los estudiantes de 3° curso de Educación Primaria calculó el total de manera incorrecta (45,6%) o parcialmente correcta (11,4%).

Tabla 6.5.2.4. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 2.d

Corrección	1° ESO	3° ESO	Total
Correcto	130(87,2)	118(92,2)	248(89,5)
Incorrecto	13(8,7)	8(6,3)	21(7,6)
No responde	6(4,0)	2(1,6)	8(2,9)
Total	149	128	277

Ítem 2.e. Comparación de frecuencias

La última pregunta de este ítem es: "¿Cuántos niños más prefieren el yogurt de vainilla que el de piña?". Para responderla se deben identificar los valores de las frecuencias absolutas de dos modalidades de la variable señaladas y calcular su diferencia. Por ello, se requiere un nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). Cuestiones similares han sido planteadas en otras investigaciones (Díaz-Levicoy et al., 2020). Se han categorizado las respuestas de la manera siguiente.

Respuesta correcta. Entrega el valor solicitado correspondiente a la diferencia de las frecuencias absolutas de las modalidades de vainilla y piña, como E17.

E17: Prefieren el de vainilla 4 niños más que el de piña.

Parcialmente correcta. Se mencionan las modalidades junto con su frecuencia absoluta, pero no se realiza la resta. Un ejemplo se presenta en la respuesta de E51, en que se aprecia un nivel de lectura de nivel L1 *leer los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), pues identifica la frecuencia de cada categoría, pero no alcanza el nivel L2 (*leer*

dentro de los datos). Es posible que esto último se deba a que el estudiante no llega a traducir la expresión cuántos más a una operación de diferencia.

E51: Los de vainilla son 6 niños y los de piña son 2 niños.

Incorrecta. Responde indicando otros valores que no son justificados, como E120.

E120: 3 niños.

La Tabla 6.5.2.5 muestra los resultados de este ítem. Se aprecia que gran parte del alumnado responde de forma correcta o parcialmente correcta, seguido de incorrecto, mientras que las preguntas sin contestar son escasas. Se han conseguido mejores resultados que en Díaz-Levicoy et al. (2020), pues en dicho estudio gran parte de los estudiantes (62%) presentó dificultades para alcanzar un nivel L2 de lectura.

En 3ºESO un mayor porcentaje de estudiantes alcanza un nivel de lectura L2, mientras que en 1ºESO se observan mayores dificultades. Los conflictos semióticos detectados en este ítem son tipo notacional (N2) y procedimental (P5) asociado a la comparación de frecuencias.

Tabla 6.5.2.5. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 2.e

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcta	115(77,2)	106(82,8)	221(79,8)
Parcialmente correcta	5(3,4)	3(2,3)	8(2,9)
Incorrecta	26(17,4)	17(13,3)	43(15,5)
No responde	3(2,0)	2(1,6)	5(1,8)
Total	149	128	277

Conflictos semióticos en la lectura de la tabla

Para profundizar en los conflictos semióticos que presentan los estudiantes en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas, estos se han clasificado y detallado a continuación.

Conceptuales

C1.1. Confusión de frecuencias absolutas y relativas. Se manifiesta cuando en lugar de indicar la frecuencia absoluta se señala la relativa; por ejemplo el estudiante E6 en el apartado 2.a.

E6: $\frac{4}{24}$ (apartado 2.a).

C3. Confusión entre frecuencia y valor de la variable. Conflicto de tipo conceptual identificado por Mayén et al. (2009) en su estudio sobre la mediana, por ejemplo, E153 indica la frecuencia cuando le consultan por la moda.

E153: 8 (apartado 2.c).

Procedimentales

P3. Conflicto procedimental en el cálculo del total de la muestra. Cuando el estudiante determina de manera incorrecta el total de personas consultadas, como E21 quien responde de forma imprecisa en el apartado 2.d.

E21: 26 niños.

P4. Conflicto al comparar frecuencias. Este conflicto se ha detectado en el apartado 2.e. Por ejemplo, el estudiante E129, suma los valores de las frecuencias de las modalidades indicadas, en lugar de hallar la diferencia.

E129: 8 porque $2+6=8$.

Notacionales

N1. No alcanza el nivel mínimo de lectura de los datos. Cuando la respuesta entregada no se ajusta a la pregunta, o solamente se aporta un monosílabo. Por ejemplo en 2.b. la respuesta de E153.

E153: Fresa (apartado 2.b).

N2. Conflicto en la interpretación de la pregunta. Cuando el estudiante relaciona su respuesta con la pregunta anterior, por ejemplo E87, en el apartado 2.d, señala la frecuencia de la moda en lugar del total. Se considera que es un conflicto notacional (N2) el cual ha sido detectado en otras investigaciones (Díaz-Levicoy et al., 2020).

E87: 8 niños (apartado 2.d).

Tabla 6.5.2.6. Frecuencia (y porcentaje) de tipo de conflicto por ítem

Tipo	Ítem 2.a		Ítem 2.b		Ítem 2.c		Ítem 2.d		Ítem 2.e	
	1° ESO	3°ESO	1°ESO	3°ESO	1°ESO	3°ESO	1°ESO	3°ESO	1°ESO	3°ESO
C1.1	2(1,3)	6(4,7)				1(0,8)				1(0,8)
C3			1(0,7)							
P3							7(4,7)	7(5,5)		
P4									15(10,1)	15(11,7)
N1	3(2,0)	1(0,8)	3(2,0)	1(0,8)		1(0,8)	3(2,0)		2(1,3)	
N2						1(0,8)	3(2,0)	1(0,8)	14(9,4)	4(3,1)

Los conflictos semióticos detectados en este ítem son resumidos en la Tabla 6.5.2.6. Se observa que el apartado 2.e presenta un mayor porcentaje de conflictos, siendo P4, de tipo procedimental referido a la comparación de frecuencias, el que más aparece, con similar frecuencia en ambos cursos. En el apartado 2.c, asociado a establecer la moda, se aprecian escasos conflictos y solo se presentan en 3°ESO. Respecto a los conflictos notacionales relacionados con la lectura de la información, N1 aparece en todos los apartados de manera similar, mientras que N2 vinculado a la interpretación de la cuestión planteada se presenta a partir del apartado 2.c en 3°ESO y en las siguientes secciones, alcanzando su mayor porcentaje en 1°ESO en 2.e.

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global del desempeño del ítem 2, se ha asignado una puntuación para cada uno de los apartados. A cada respuesta se le asigna la siguiente puntuación: sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2 y correcta: 3. El estudiante en este ítem podría alcanzar hasta 15 puntos en total.

En la Figura 6.5.2.2, el gráfico de barras muestra que la mayoría de los estudiantes alcanza el total de 15 puntos, siendo más alta esta frecuencia en 1°ESO. El gráfico de cajas muestra que en ambos grupos los valores de la mediana son casi idénticos y además coinciden con el tercer cuartil. En 1°ESO las diferencias también indican una mayor

variabilidad, y en ambos cursos se observan valores atípicos.

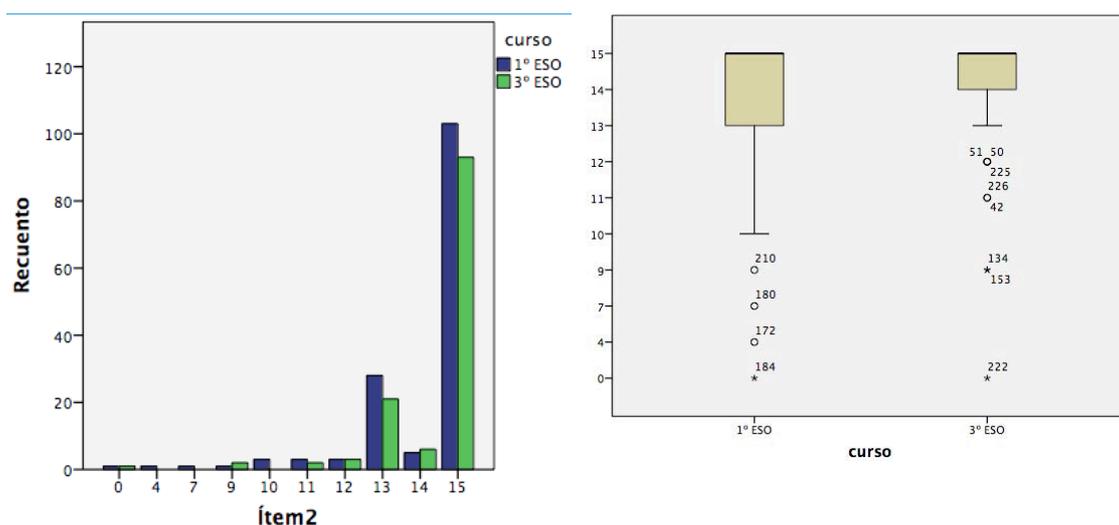


Gráfico de barras dobles

Gráfico de cajas

Figura 6.5.2.2. Distribución total del ítem 2 por curso

6.5.3. RESULTADOS DEL ÍTEM 3. TRADUCIR UN GRÁFICO A TABLA DE FRECUENCIAS

El tercer ítem expuesto en la Figura 6.5.3.1 es una adaptación de una tarea de un libro de texto (Kheong et al., 2017) y fue propuesta a ambos grupos. Se pide traducir de gráfico (pictograma) a una tabla de frecuencias absolutas, enmarcada en un nivel de complejidad semiótica C3.1 (Pallauta y Arteaga, 2021). La construcción de la tabla requiere realizar una serie de procedimientos, comenzando con leer de manera comprensiva el enunciado del problema, para luego evocar el significado de un pictograma, en el cual se usa como icono un ticket que representa dos unidades. También es necesario prestar atención a diferentes elementos del gráfico como el título y la variable (tipo de deporte) junto a sus modalidades representadas. Luego, es necesario calcular y asociar cada modalidad de la variable y su frecuencia absoluta.

La traducción de gráfico a tabla, según Koschat (2005) no es una tarea sencilla, por la serie de procedimientos requeridos, los cuales se enmarcan en un nivel de lectura L2 *leer datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). A continuación, el estudiante debe responder a dos cuestiones que requieren el máximo nivel de lectura L4 *leer detrás de los datos* (Shaughnessy et al., 1996), pues es necesario tener una posición crítica ante la veracidad de las afirmaciones que se presentan, en particular en la 3.c. La respuesta correcta a la primera cuestión, dependerá, en gran medida, de la traducción realizada, mientras que en la segunda cuestión se necesita interpretar el contexto de la situación y los datos aportados. Es importante trabajar este tipo de cuestiones, para tomar conciencia de que los datos pueden ser utilizados para realizar afirmaciones sesgadas (Kemp y Kissane, 2010; Sharma, 2013).

Se le consultó a un grupo de estudiantes cuál era su deporte favorito, sus respuestas se representan en el siguiente pictograma.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes

Gimnasia	✓ ✓ ✓
Fútbol	✓ ✓ ✓ ✓ ✓
Básquetbol	✓ ✓ ✓ ✓ ✓
Tenis	✓

✓ = 2 estudiantes

a) Representa esta información en la siguiente tabla.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cant. de estudiantes				

Responde las siguientes preguntas

b) María dice que el deporte favorito fue el fútbol porque 5 estudiantes lo prefieren. ¿Tiene razón María? ¿Por qué?

c) De acuerdo a los datos, se podría hablar de que a los estudiantes no les gusta el tenis. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?

Figura 6.5.3.1. Ítem 3 del cuestionario de evaluación

Ítem 3.a. Construcción de la tabla

La traducción de gráfico a tabla también fue empleada por Díaz-Levicoy (2018), y las construcciones de los estudiantes se han clasificado como se detalla a continuación.

Tabla correcta. Se identifican correctamente los valores de cada modalidad de la variable (tipo de deporte), considerando que cada icono representa dos unidades, y registra de manera apropiada las frecuencias, como E1 en la Figura 6.5.3.2.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cantidad de estudiantes	6	10	8	2

Figura 6.5.3.2. Tabla correcta E1

Tabla parcialmente correcta. La tabla muestra algún error puntual de los valores registrados. Por ejemplo, el estudiante E57 (Figura 6.5.3.3) registra de manera errada la cantidad de estudiantes que prefieren el tenis, debido a que en la frecuencia de dicha modalidad cuenta también la correspondiente al icono que aparece en la leyenda.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cantidad de estudiantes	6	10	8	4

Figura 6.5.3.3. Tabla incorrecta E57

Tabla incorrecta. Cuando gran parte de los valores registrados en las celdas son incorrectos, evidenciando una inadecuada interpretación de los iconos expuestos en el gráfico. La Figura 6.5.3.4 muestra un ejemplo del estudiante E42 quien realiza una lectura literal del gráfico, contando cada icono como una unidad y omitiendo la información presentada en la escala.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cantidad de estudiantes	3	5	4	1

Figura 6.5.3.4. Tabla incorrecta E42

La Tabla 6.5.3.1 muestra los resultados obtenidos en la construcción de la tabla (ítem 3.a), según curso. Se aprecia que la mayor parte de los estudiantes resuelve de manera correcta la tarea, seguido de las respuestas incorrectas. Las respuestas parcialmente correctas, o en blanco son muy escasas.

Tabla 6.5.3.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 3.a

Corrección	1° ESO	3° ESO	Total
Correcto	107(71,8)	99(77,3)	206(74,3)
Parcialmente correcto	1(0,7)	2(1,6)	3(1,1)
Incorrecto	38(25,5)	25(19,5)	63(22,7)
No completan la tabla	3(2,0)	2(1,6)	5(1,8)
Total	149	128	277

Los resultados obtenidos coinciden con Díaz-Levicoy (2018) en cuanto al porcentaje de estudiantes que construyen la tabla correctamente (75,4%), pero difieren en las respuestas parcialmente correctas (18,5%) e incorrectas (3,8%). Cabe señalar que el citado estudio incorporó medios iconos en el pictograma, lo que podría ser más complejo para los estudiantes, y además se pidió calcular el total, elementos que en este caso no fueron considerados.

En 3°ESO un ligero mayor porcentaje de estudiantes construye la tabla de manera correcta respecto a 1°ESO, mientras que las construcciones incorrectas se presentan en un porcentaje similar en ambos grupos. Las respuestas parcialmente correctas son escasas y solo algunos estudiantes no completan la tabla.

Conflictos semióticos en la traducción

En las respuestas parcialmente correctas e incorrectas se han identificado diferentes conflictos semióticos notacionales:

N1. No alcanza el nivel mínimo de lectura de los datos. Por ejemplo, el participante E125 (Figura 6.5.3.5), copia los iconos del pictograma en la tabla de manera explícita, otros estudiantes registran valores que carecen de sentido, evidenciando una inadecuada lectura de la información expuesta.

Deportes preferidos por un grupo de estudiantes				
Deporte	Gimnasia	Fútbol	Básquetbol	Tenis
Cantidad de estudiantes	✓✓✓	✓✓✓✓✓	✓✓✓✓✓	✓

Figura 6.5.3.5 Respuesta del estudiante E125 con conflicto N1

N3. Conflicto en la interpretación del icono en el pictograma. En estos casos se interpreta incorrectamente la leyenda que indica que cada icono equivale a dos unidades. Es un conflicto notacional y se ha subdividido en dos categorías:

- *N3.1. Traducción literal de gráfico a tabla.* La construcción de la tabla muestra que cada icono del pictograma fue reemplazado por una unidad. Un ejemplo es la respuesta presentada por E42 en Figura 6.5.3.4.
- *N3.2. Interpreta el icono que explica la escala del pictograma como correspondiente a una de las modalidades.* Cuando se considera que el icono de la leyenda es parte de

la frecuencia de alguna modalidad. Un ejemplo es la respuesta de E57 (Figura 6.5.3.3) la cual sugiere una inadecuada lectura del gráfico y de los diferentes elementos que lo conforman.

La distribución de los diferentes conflictos semióticos notacionales detectados son resumidos en la Tabla 6.5.3.2, donde cabe destacar que en una respuesta se puede observar más de uno. El conflicto que más aparece es N3.1 correspondiente a interpretar el icono con un valor unitario, seguido del tipo N3.2 asociado a incluir en la frecuencia de alguna modalidad (tenis o básquetbol) el valor del icono presentado en la leyenda del pictograma, mientras que N1, relacionado con una incorrecta lectura de la información, aparece en un menor porcentaje. El conflicto N3.1 aparece más en 1°ESO, mientras que N3.2 se presenta algo más en 3°ESO, sin embargo, en este mismo curso N1 es escaso.

Tabla 6.5.3.2. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos del ítem 3.a

Tipo de conflicto semiótico	1° ESO (n=149)	3° ESO (n=128)	Total (n=277)
N1. No alcanza el nivel mínimo de lectura de datos	5(3,4)	2(1,6)	7(2,5)
N3.1. Interpretación incorrecta del icono	34(22,8)	24(18,8)	58(20,9)
N3.2. Considera el icono de la etiqueta	4(2,7)	8(6,3)	12(4,3)

Ítem 3.b. Lectura crítica

La cuestión: "María dice que el deporte favorito fue el fútbol porque 5 estudiantes lo prefieren. ¿Tiene razón María? ¿Por qué?" implica decidir, de manera argumentada, la veracidad de la afirmación, lo que requiere el máximo nivel de lectura L4 *leer detrás de los datos* (Friel et al., 2001). Díaz-Levicoy (2018) propuso un ítem similar en que se debía indicar si era verdadera o falsa una afirmación respecto a la información aportada por un pictograma, pero en dicha tarea no se incluía la traducción de gráfico a tabla.

Para responder a la pregunta, se debe ubicar en la tabla el valor de la modalidad señalada (fútbol) y compararlo con el resto valores de las categorías de la variable para asegurar de que efectivamente ésta sea la modalidad con mayor frecuencia, y luego responder indicando el valor correcto de la frecuencia. Para evaluar las respuestas de los estudiantes, se han diferenciado tres categorías que se detallan seguidamente.

Respuesta correcta. Cuando se señala que efectivamente el fútbol es el deporte favorito por la mayoría de los consultados, pero es falso que lo prefieren 5 estudiantes, pues cada icono del gráfico equivale a 2 unidades, y por tanto, las preferencias de este deporte alcanza a 10 personas, como señala el estudiante E54.

E54: No, ya que son 10 estudiantes y no 5.

Respuesta parcialmente correcta. Se consideran las respuestas que indican su desacuerdo con la afirmación planteada, sin embargo la justificación no es del todo completa. Por ejemplo, E58 indica su desacuerdo porque cada icono equivale a dos unidades, pero no indica la cantidad de preferencias que tiene el fútbol.

E58: No, porque cada marca son dos estudiantes.

Respuesta incorrecta. Cuando se indica que la afirmación es correcta evidenciando una interpretación incorrecta de la información del pictograma, como E55 quien realizó una incorrecta traducción de gráfico a tabla, lo que incide en la respuesta de esta cuestión.

E55: Si, porque 5 estudiantes han elegido futbol y es el más votado.

La Tabla 6.5.3.3 resume los resultados obtenidos, en que la mayor parte de los estudiantes responde de manera correcta o parcialmente correcta. Estos resultados son inferiores a los obtenidos por Díaz-Levicoy (2018) en un ítem similar, ya que en su caso se obtuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas (63,4%), lo que podría deberse, a que solo consideró si la respuesta era correcta o no.

Tabla 6.5.3.3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 3.b

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	69(46,3)	50(39,1)	119(43,0)
Parcialmente correcto	18(12,1)	18(14,1)	36(13,0)
Incorrecto	54(36,2)	56(43,8)	110(39,7)
No responde	8(5,4)	4(3,1)	12(4,3)
Total	149	128	277

Los resultados son similares en ambos cursos, siendo las respuestas correctas ligeramente más elevadas en 1ºESO, mientras que en 3º ESO aparece un mayor porcentaje de respuestas parcialmente correctas e incorrectas. Las preguntas sin contestar fueron escasas, y se presentaron más en 1ºESO.

Ítem 3.c. Lectura crítica

La segunda pregunta: "De acuerdo a los datos, se podría hablar de que a los estudiantes no les gusta el tenis. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?" está dirigida a conocer la capacidad crítica que manifiestan los estudiantes para evaluar la veracidad de una afirmación basada en los datos, y se enmarca en el máximo nivel de lectura *leer detrás de los datos* (Friel et al., 2001). Las respuestas se han clasificado de la manera que se detalla a continuación.

Respuesta correcta. Cuando se cuestiona la afirmación, señalando que esta no se ajusta a la información entregada en la tabla, y, por tanto, no es posible concluir el rechazo de los participantes hacia la modalidad menos elegida. Así, E3 evidencia una comprensión de la información presentada junto con el contexto en el que surgen los datos, pues como señala, que el tenis sea el menos elegido no significa que al grupo consultado no les guste dicho deporte.

E3: No estoy de acuerdo por dos razones: a) Que no sea el deporte favorito no significa que no les gusta el tenis; b) No todos los estudiantes prefieren otros deportes, ya que hay 2 estudiantes que prefieren el tenis.

Respuesta parcialmente correcta. Se observa una correcta comprensión del contexto en que se extraen los datos, pero no se justifica adecuadamente. Por ejemplo, E98 señala su desacuerdo, pues hay dos alumnos que gustan del tenis.

E98: No, porque a 2 personas si les gusta el tenis.

Respuesta incorrecta. Se consideran las respuestas que evidencian una interpretación inadecuada del contexto o de los datos. Por ejemplo, denotan una interpretación personal de la pregunta, como E205, quien manifiesta su acuerdo con la afirmación pues piensa que el tenis no es un buen deporte.

E205: Si, el tenis a mi tampoco me gusta; es un deporte no muy bueno. Esta es mi opinión.

La Tabla 6.5.3.4 resume los resultados en esta cuestión, donde gran parte de los participantes responde de manera incorrecta, habiendo menor porcentaje de respuestas parcialmente correctas o correctas y siendo escasa la respuesta en blanco. En un estudio realizado con futuras maestras de infantil (Díaz-Levicoy et al., 2016) quienes debían responder de manera crítica a una pregunta basada en los datos expuestos en una tabla, las respuestas en blanco alcanzaron un mayor porcentaje (38,8%). En 3ºESO se presenta un mayor porcentaje de respuestas correctas, y las parcialmente correctas son ligeramente inferiores a las de 1ºESO. El porcentaje de respuestas incorrectas es similar en ambos grupos y las respuestas en blanco aparecen más en 1ºESO.

Tabla 6.5.3.4. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 3.c

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	12(8,1)	18(14,1)	30(10,8)
Parcialmente correcto	25(16,8)	20(15,6)	45(16,2)
Incorrecto	99(66,4)	84(65,6)	183(66,1)
No responde	13(8,7)	6(4,7)	19(6,9)
Total	149	128	277

Nivel de lectura

En estas dos preguntas, al igual que Díaz-Levicoy (2018), también se ha analizado el nivel de lectura alcanzado por los estudiantes al justificar la veracidad de la afirmación planteada. Las categorías utilizadas son los niveles de lectura propuestos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shaughnessy et al., 1996). A continuación, se presentan los resultados obtenidos.

L0. No leen los datos. Este nivel no fue descrito por Curcio y sus colaboradores, pero sí por Díaz-Levicoy (2018), para incorporar las respuestas que evidencian una muy limitada o nula interpretación de la información a la cuestión planteada, así como también los casos en que no se entrega respuesta. Por ejemplo, en el apartado 3.b, el estudiante E99 ignora los datos proporcionados, al señalar que se desconoce la cantidad de personas que optan a otros deportes, aunque esta información está dada en el gráfico. Como señala Sharma (2013) algunos estudiantes interpretan la afirmación desde una perspectiva personal, como el estudiante E183 en el apartado 3.c.

- E99: No, porque no sabe la cantidad de estudiantes que prefieren otro deporte (ítem 3.b).
- E183: No, porque el tenis también es divertido y es un deporte chulo (ítem 3.c).

L1. Leer los datos. Cuando la respuesta denota una lectura literal del pictograma o de la tabla, y se sustenta en la cantidad de iconos asociados a cada modalidad de la variable, y con ello entregar una respuesta limitada, como señala E86 en el apartado 3.b. En el apartado 3.c, E42 afirma estar de acuerdo porque muy pocos participantes de la encuesta han votado por el tenis.

- E86: Si, porque lo votaron 5 estudiantes (ítem 3.b).
- E42: Si, porque solo le gusta a 1 (ítem 3.c).

L2. Leer dentro de los datos. La respuesta muestra una correcta lectura de la tabla, construida a partir del pictograma, pues se señala que la afirmación planteada no es correcta. Sin embargo, la justificación es insuficiente o incompleta, como ocurre con E2 en el ítem 3.b. Igual ocurre en el apartado 3.c, E23 manifiesta estar en desacuerdo pues hay estudiantes que prefieren la modalidad señalada, sin considerar que la información proporcionada impide establecer la cantidad de estudiantes que les gusta el tenis.

- E2: No, porque cada tic son 2 estudiantes, así que no puede ser impar (ítem 3.b).
- E23: No estoy de acuerdo, si les gusta, a la minoría de los estudiantes (ítem 3.c).

L3. Leer más allá de los datos. En este ítem no fue considerado este nivel, pues no se realiza una pregunta que requiera de predicción con los datos entregados.

L4. Leer detrás de los datos. Es el máximo nivel de lectura y es alcanzado cuando el estudiante, además de realizar una correcta lectura, es capaz de cuestionar la información presentada (Shaughnessy, 2007). En el ítem 3.b, la respuesta se enmarcaría en este nivel cuando se muestra un desacuerdo de la aseveración en el sentido de que el fútbol, efectivamente, es el deporte favorito de la mayoría, pero se añade que hay un error de cálculo, pues lo prefieren 10 estudiantes, en lugar de 5 porque cada icono equivale a dos unidades, como señala el estudiante E3. En el ítem 3.c, se espera que el estudiante observe que la afirmación no se ajusta a la información proporcionada, puesto que la pregunta realizada a los consultados se refiere a su deporte favorito, como bien señala E6.

- E3: Tiene razón en que el fútbol fue el deporte favorito, pero con una cantidad de 10 estudiantes, no 5, ya que cada tic son 2 estudiantes (ítem 3.b).
- E6: No, ya que la pregunta que se les hizo a los alumnos era cual era su deporte favorito, no si les gustaba o no los demás deportes (ítem 3.c).

La Tabla 6.5.3.5 y la Figura 6.5.3.6 presentan la distribución de los niveles de lectura alcanzados por los estudiantes. En el ítem 3.b una cantidad importante de estudiantes alcanza el nivel L4, globalmente, le sigue L2, que se presenta en un mayor porcentaje en 3ºESO, mientras que L1 aparece de manera similar en ambos cursos. L0 tuvo una presencia significativa en ambos cursos siendo más frecuente en 1ºESO. En el ítem 3.c se detecta un cambio de tendencia en los niveles de lectura comparado con la anterior pregunta, pues L2 aparece con gran fuerza en ambos cursos, y además se

incrementa la presencia tanto de L1 como L0. El nivel L4 se reduce considerablemente en ambos grupos, siendo menor su presencia en 1ºESO. En Díaz-Levicoy (2018) un mayor porcentaje de estudiantes alcanza el nivel de lectura L2.

Respecto al ítem 3.c, los resultados son inferiores a los obtenidos por Díaz-Levicoy et al. (2016) en un estudio con futuras maestras de infantil en que más de la mitad (50,4%) alcanzó el máximo nivel de lectura *leer detrás de los datos* (L4).

Tabla 6.5.3.5. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura en ítem 3

Nivel de lectura	Ítem 3.b			Ítem 3.c		
	1º ESO	3º ESO	Total	1º ESO	3º ESO	Total
L0	28(18,8)	14(10,9)	42(15,2)	34(22,8)	15(11,7)	49(17,7)
L1	12(8,1)	14(10,9)	26(9,4)	20(13,4)	15(11,7)	35(12,6)
L2	40(26,8)	50(39,1)	90(32,5)	84(56,4)	84(65,6)	168(60,6)
L4	69(46,3)	50(39,1)	119(43,0)	11(7,4)	14(10,9)	25(9,0)
Total	149	128	277	149	128	277

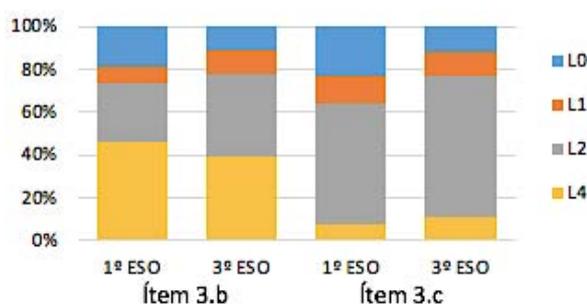


Figura 6.5.3.6. Porcentaje de niveles de lectura alcanzados por curso

Se aprecia una gran diferencia entre el porcentaje de estudiantes que logra alcanzar el nivel de lectura crítica en la primera cuestión en comparación con la segunda. Esto podría deberse a que, en el ítem 3.b, para dar un argumento correcto es suficiente con comprobar que la frecuencia de estudiantes que prefiere el fútbol no es la expresada en la pregunta, mientras que en el ítem 3.c se requiere un mayor conocimiento del contexto, para comprender la diferencia entre un enunciado que se refiere a la mayoría de los estudiantes citados en el ítem y otro que se refiere a la generalidad.

Síntesis de resultados

Se ha realizado una valoración global del desempeño, asignando una puntuación a la respuesta de la siguiente manera: sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2 y correcta: 3. En resumen, se podría alcanzar hasta 9 puntos en este ítem.

En la Figura 6.5.3.7 se presentan dos gráficos que representan la puntuación total de este ítem, los cuales se diferencian por curso. El gráfico de barras muestra que la mayoría de los estudiantes alcanza 7 puntos, siendo más alta esta frecuencia en 1ºESO. La mediana y tercer cuartil, en el gráfico de cajas, se sitúan en ambos cursos sobre el valor mediano teórico, siendo la mediana superior en 1ºESO.

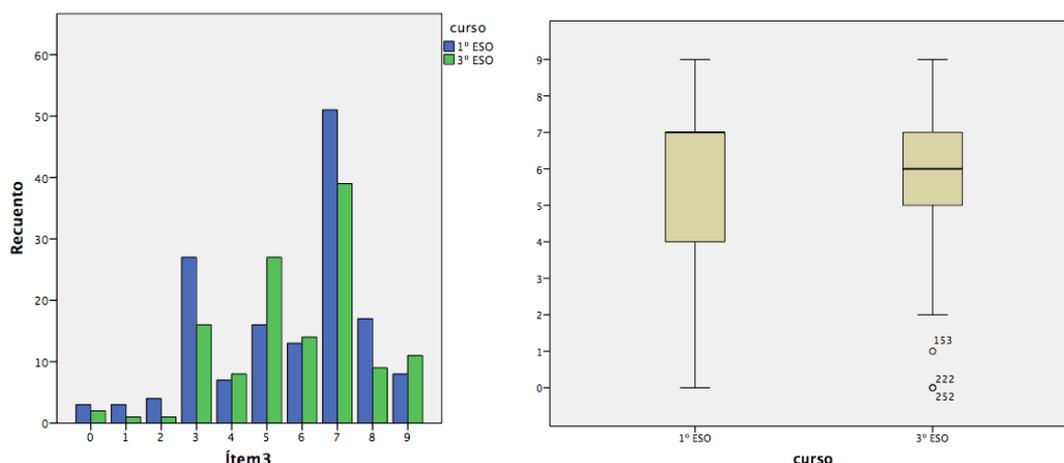


Gráfico de barras dobles

Gráfico de cajas

Figura 6.5.3.7. Distribución total del ítem 3 por curso

6.5.4. RESULTADOS EN EL ÍTEM 4. COMPLETAR UNA TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

El cuarto ítem del cuestionario es presentado en la Figura 6.5.4.1, fue extraído y adaptado de un libro de texto (Merino et al., 2016), y planteado solo en 3 ºESO, ya que en 1º curso no se considera el estudio de frecuencias acumuladas, de acuerdo a los lineamientos curriculares (MECD, 2014; 2015). Se propone una tabla que representa una variable cuantitativa con frecuencias absolutas y acumuladas con un nivel de complejidad semiótico C3.2, pues se trabaja con frecuencias acumuladas que requieren el manejo de desigualdades (Pallauta y Arteaga, 2021).

En un hotel se registró los días de alojamiento de los huéspedes.

a) Completa la tabla con las frecuencias indicadas.
Responde las siguientes preguntas

b) ¿Cuántos días se alojan la mayoría de los huéspedes?

c) ¿Cuántos huéspedes se quedan 4 días o menos?

Estadía de huéspedes en una semana		
Estadía en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	28	28
2		50
3	23	
4	20	
5	15	

Figura 6.5.4.1. Ítem 4 del cuestionario de evaluación

El estudiante debe completar los valores de las frecuencias faltantes, principalmente, frecuencias acumuladas, y seguidamente responder a dos cuestiones. El nivel de lectura requerido para responder a la tarea es L2 *leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), porque es necesario realizar algunos cálculos para establecer los valores de las celdas en blanco, además de realizar comparaciones para responder a las dos preguntas planteadas.

Ítem 4.a. Completar la tabla con frecuencias acumuladas

La primera tarea de este ítem es completar la tabla (Figura 6.5.4.1), para lo cual el estudiante requiere la lectura comprensiva del contexto de la situación problema, interpretar el título y las etiquetas de la tabla para entender a qué se refieren los datos

presentados. Además, se debe recordar el concepto de frecuencia acumulada para calcular los valores de las celdas. Las producciones de los estudiantes se han establecido de acuerdo a las categorías que se describen a continuación.

Tabla correcta. Cuando se presentan todos los valores solicitados en la tabla de manera apropiada, como E135 (Figura 6.5.4.2), quien evidencia un conocimiento apropiado de la definición y el cálculo de las frecuencias acumuladas. Para calcular la frecuencia absoluta correspondiente al valor 2 de la variable, se debe restar las dos primeras frecuencias acumuladas, mientras que para completar el resto de frecuencias acumuladas, basta con sumar a cada frecuencia acumulada la frecuencia absoluta del siguiente valor de la variable.

Alojamiento en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	28	28
2	22	50
3	23	73
4	20	93
5	15	108

Figura 6.5.4.2. Tabla correcta del estudiante E135

Tabla parcialmente correcta. Son las tablas que presentan algún valor errado, a pesar de ello, es posible observar un conocimiento adecuado sobre la frecuencia absoluta y acumulada. Por ejemplo, en la Figura 6.5.4.3 se puede observar que E13 calcula de manera incorrecta la frecuencia acumulada del valor 3, al cometer un error en la suma, y eso altera los valores restantes. Sin embargo, calcula correctamente las frecuencias acumuladas restantes.

Alojamiento en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	28	28
2	22	50
3	23	83
4	20	103
5	15	118

Figura 6.5.4.3. Tabla parcialmente correcta del estudiante E13

Tabla incorrecta. Cuando en las celdas se registran valores que no corresponden a las frecuencias solicitadas, como se observa en la Figura 6.5.4.4, donde E4 repite los valores de las frecuencias absolutas en las acumuladas. El estudiante muestra un nuevo conflicto semiótico conceptual C1.4, consistente en confundir las frecuencias ordinarias y acumuladas. Autores señalan (e.g. Fernandes et al., 2020) que este tipo de frecuencias pueden ser más complejas para los estudiantes debido a que involucran relaciones de orden.

Alojamiento de huéspedes		
Alojamiento en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	28	28
2	50	50
3	23	73
4	20	10
5	15	15

Figura 6.5.4.4. Tabla incorrecta del estudiante E4

Cabe recordar, que este ítem solo fue propuesto a los estudiantes de 3° curso y, aunque los lineamientos curriculares españoles (MECD, 2015) consideran a partir de este curso el estudio de las frecuencias acumuladas para determinar las medidas de posición, en los libros de textos comienzan a aparecer a partir de 1°ESO (Pallauta et al., 2021) como se evidenció en el análisis de textos seleccionados en nuestro estudio (Capítulo 3). Los resultados son presentados en la Tabla 6.5.4.1, y en ella se aprecia que la mayoría de los participantes deja la tabla sin completar, seguido de las tablas incorrectas, y con menos frecuencia aparecen las tablas correctas o parcialmente correctas. Por tanto, ha sido un ítem difícil incluso para los estudiantes que ya han estudiado el tema.

Tabla 6.5.4.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 4.a

Completar la tabla	3° ESO
Correcta	14(10,9)
Parcialmente correcta	2(1,6)
Incorrecta	38(29,7)
Sin completar	74(57,8)
Total	128

En el estudio desarrollado por Fernandes et al. (2020) con futuros maestros, los participantes debían decidir el tipo de frecuencias que debían considerar en la tabla de acuerdo a la variable presentada. Un 21% incorporó las frecuencias acumuladas en sus construcciones para representar la distribución de una variable cuantitativa discreta. La mayor parte de los participantes optó por representar frecuencias absolutas o relativas (37%), lo que podría deberse a que estas últimas son más conocidas por los estudiantes y, además, se pueden determinar para cualquier tipo de variable (cualitativa y cuantitativa).

Conflictos semióticos en la completación de la tabla

En las respuestas parcialmente correctas e incorrectas, se han identificado los conflictos semióticos que se describen a continuación.

Conceptuales

C2. Desconoce la estructura de una tabla. Cuando los valores registrados en la tabla carecen de lógica, evidenciando un desconocimiento de los conceptos de frecuencia absoluta y acumulada, o de la estructura de la tabla planteada.

C4. Conflicto con el concepto de frecuencia acumulada. Cuando en la tabla se

presentan valores incorrectos, los cuales se deben a la confusión en la definición del concepto, y que han sido detectados en otros estudios (Álvarez et al., 2020). Se han identificado las siguientes subcategorías asociadas a este tipo de conflicto semiótico.

- *C4.1. Confundir la frecuencia acumulada con el producto del valor de la variable por la frecuencia absoluta.* Por ejemplo, en la Figura 6.5.4.5, el estudiante E3 muestra este conflicto, denotando una confusión de la definición del concepto de frecuencia acumulada y su procedimiento de cálculo. Este conflicto se podría producir porque los libros de texto, para facilitar el cálculo de la media aritmética, incluyen en las tablas una columna auxiliar para registrar el producto de los valores de la variable y sus respectivas frecuencias, y los estudiantes podrían haber deducido que dicho cálculo corresponde a la frecuencia acumulada.

Alojamiento de huéspedes		
Alojamiento en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	28	28
2	25	50
3	23	69
4	20	80
5	15	75

Figura 6.5.4.5. Ejemplo conflicto semiótico C4.1 del estudiante E3

- *C4.2. Confundir frecuencia absoluta y acumulada.* Se presenta cuando se registra igual valor tanto para la frecuencia absoluta como la acumulada para cada valor de la variable, como el estudiante E4 en la Figura 6.5.4.4.

Procedimentales

P5. Conflicto procedimental en el cálculo de frecuencias acumuladas. Cuando se registra valores errados en la columna de la frecuencia acumulada. En otro estudio fue detectado este tipo de conflicto (Álvarez et al., 2020), y se debe a una confusión en el algoritmo de la suma. Por ejemplo, E14 (Figura 6.5.4.6) calcula de manera incorrecta la frecuencia acumulada del valor 4, debido a este error en la suma, se alteran los siguientes valores de dicha frecuencia.

Alojamiento de huéspedes		
Alojamiento en días	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	28	28
2	22	50
3	23	23
4	20	83
5	15	98

Figura 6.5.4.6. Ejemplo conflicto semiótico P5 del estudiante E14

En la Tabla 6.5.4.2 se resume la distribución de los conflictos semióticos detectados en 3ºESO. El conflicto conceptual C4.2 (confundir la frecuencia absoluta y acumulada), manifestado en repetir los valores en ambos tipos de frecuencia, es el que

aparece con mayor fuerza, mientras que los conflictos, también conceptuales, C2 y C4.1 aparecen en igual porcentaje. P5 conflicto relacionado con errores de cálculo aparece de manera escasa.

En Álvarez et al. (2020), los estudiantes confundían las frecuencias relativas con la acumuladas, o también obtenían la frecuencia acumulada a partir de la diferencia de dos frecuencias absolutas, situación que no se presentó en las respuestas analizadas. El conflicto procedimental (P5) se dio en un número superior de estudiantes (49/431 = 0,11%), comparado con este análisis.

Tabla 6.5.4.2. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos semióticos en el ítem 4.a

Tipo de conflicto semiótico	3° ESO (n=128)
C2. Desconoce la estructura de una tabla	8(6,3)
C4. Conflicto con el concepto de frecuencia acumulada	
C4.1. Confunde producto de variable por la frecuencia absoluta	8(6,3)
C4.2. Confunde frecuencia absoluta y acumulada	21(16,4)
P5. Cálculo incorrecto de la frecuencia acumulada	3(2,3)

Ítem 4.b. Identificar la moda

La primera cuestión: "¿Cuántos días se alojan la mayoría de los huéspedes?" precisa identificar la moda, o valor de la variable con mayor frecuencia absoluta y, por tanto, requiere un nivel de lectura L2 *Leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). Las categorías para evaluar las respuestas de los estudiantes se clasifican en correctas e incorrectas, pues no hubo parcialmente correctas.

Respuesta correcta. Cuando se indica el valor de la variable cuya frecuencia absoluta alcanza el mayor valor de los datos presentados, como E3 quien señala que 1 día se aloja la mayor parte de los huéspedes en el hotel.

E3: La mayoría de los huéspedes se alojan 1 día.

Respuesta incorrecta. Cuando se completa la tabla de manera incorrecta incidiendo, generalmente, en una respuesta errada a la cuestión. Se indica un valor de la variable que no corresponde a la moda, por ejemplo E19. Varios estudiantes repitieron el valor de la frecuencia acumulada en las celdas de las absolutas o viceversa (conflicto semiótico C4.2), lo que se refleja en respuestas como la entregada por E51.

E19: 4 días.

E51: 2 días y el resultado son 50 huéspedes.

Los resultados de este ítem se presentan en la Tabla 6.5.4.3, donde se puede apreciar que las respuestas incorrectas alcanzan un mayor porcentaje, seguido de las correctas, las cuales manifiestan un nivel de *lectura leer dentro de los datos*, y luego aparecen las cuestiones sin contestar. Fernandes et al. (2020) obtuvieron mejores resultados en su análisis de tablas construidas por futuros profesores, y algo inferiores en las tablas en que no se realizaba ningún tipo de interpretación (24%).

Tabla 6.5.4.3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 4.b

Respuesta	3° ESO
Correcta	35(27,3)
Incorrecta	59(46,1)
No responde	34(26,6)
Total	128

Ítem 4.c. Lectura de la frecuencia acumulada

La segunda cuestión: "¿Cuántos huéspedes se quedan 4 días o menos?" implica determinar el valor de una frecuencia menor o igual a un valor dado, lo que requiere el manejo de desigualdades y, por tanto, un nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). La adecuada respuesta dependerá, en gran medida, de la correcta completación de la tabla solicitada anteriormente (ítem 4.a). El estudiante podría optar por sumar las frecuencias absolutas menores o iguales al valor de la variable señalado, o bien leer la frecuencia acumulada asociada al valor de la variable indicada en la tabla. Para evaluar las respuestas de los estudiantes, se han considerado las categorías detalladas a continuación.

Respuesta correcta. Cuando se indica de manera adecuada el valor de la frecuencia acumulada asociada al valor de la variable señalada, como el estudiante E40.

E40: Se quedan 93 huéspedes si son 4 días o menos.

Respuesta parcialmente correcta. Cuando en lugar de indicar la frecuencia acumulada se fija solamente en la absoluta, aunque la tabla la completa de manera correcta o parcialmente correcta, como E41. También se contemplan respuestas que consideran el valor señalado junto al inmediatamente anterior como E52 quien ignora que debe considerar también a todos los valores menores al dado en la pregunta.

E41: 20 huéspedes.

E52: 4 días se quedan 20 y 3 -23.

Respuesta incorrecta. Proviene, generalmente, de una tabla sin completar, o incorrecta. Por ejemplo, E32 obtiene el valor 71 al sumar las frecuencias absolutas menores o iguales al valor señalado, pero ignorando la frecuencia de la modalidad 2 que no estaba proporcionada en la tabla propuesta.

E32: 71 huésped se quedan 2 días o menos.

En la Tabla 6.5.4.4 se presentan los resultados obtenidos, donde se aprecia que un alto porcentaje de estudiantes de 3°ESO responde de manera incorrecta, o no contestan la pregunta. Siguen las respuestas parcialmente correctas, y solo un pequeño porcentaje de estudiantes alcanza un nivel de lectura L2 (*leer dentro de los datos*).

Tabla 6.5.4.4. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 4.c

Respuesta	3° ESO
Correcta	11(8,6)
Parcialmente correcta	31(24,2)
Incorrecta	49(38,3)
No responde	37(28,9)
Total	128

Conflictos semióticos en la lectura de la tabla

En las respuestas incorrectas y parcialmente correctas se han identificado los siguientes conflictos semióticos:

Conceptuales

C2. Desconoce la estructura de una tabla. Son respuestas que emanan de una tabla sin completar, o con escasos valores que carecen de sentido. En estos casos, no es posible interpretar el razonamiento empleado por el estudiante, por ejemplo, en la respuesta de E258 al apartado 4.b.

E258: 2 o menos (ítem 4.b).

C3. Confunde frecuencia y valor de la variable. Este conflicto, descrito en ítems anteriores e identificado por Mayén et al. (2009), se manifiesta cuando el estudiante compara los valores de la variable, en lugar de hacerlo con las frecuencias absolutas, como E40, quien en el ítem 4.b señala que la mayor parte de los huéspedes se alojan 5 días.

E40: Se alojan 5 días (ítem 4.b).

C4.2. Confunde frecuencia absoluta y acumulada. Cuando se repiten los valores de la frecuencia absoluta en la acumulada o viceversa, lo que en la primera pregunta incide en que el valor 2 de la variable sea el que tiene mayor frecuencia absoluta, como ocurre con E36. En la segunda cuestión (4.c), E155 indica el valor de la frecuencia absoluta en lugar de la acumulada, evidenciando una inadecuada interpretación de la expresión menor o igual que aparece implícita en la pregunta.

E36: La mayoría se alojan 2 días (ítem 4.b).

E155: 20 huéspedes se quedan 4 días (ítem 4.c).

Procedimentales

P5. Conflicto procedimental al calcular la frecuencia acumulada. Este tipo de conflicto procedimental se presenta en el ítem 4.c, generalmente, a partir de tablas incorrectas. Por ejemplo, E3 identifica de manera adecuada las frecuencias absolutas de los valores de la variable que debe sumar, pero como uno de los valores es incorrecto, se altera el resultado de la suma.

E3: Se quedan 76 huéspedes 4 días o menos, pues $28+25+23+20=76$ (ítem 4.c).

Notacionales

N2. No alcanza una lectura comprensiva del enunciado. Son respuestas, en que a pesar de que la tabla se haya completado correctamente, se evidencia una incomprensión a lo solicitado, como E57 en 4.b. En el apartado 4.c son respuestas que solamente consideran la frecuencia de los valores menores al dado, es el caso de E46.

E57: Se alojan más de dos días (ítem 4.b).

E46: 73 huéspedes (ítem 4.c).

La distribución de los variados conflictos detectados en las respuestas de los estudiantes de 3ºESO se resume en la Tabla 6.5.4.5, donde se observa un mayor número de conflictos en el apartado 4.c. En el ítem 4.b aparece con mayor frecuencia C2 ligado

al desconocimiento de la estructura de la tabla y C4.2 correspondiente a la confusión entre frecuencia absoluta y acumulada, que también es común en la segunda cuestión. En el apartado 4.c hay una importante proporción de estudiantes con el conflicto procedimental P5 ligado al cálculo incorrecto de las frecuencias acumuladas. Tampoco se debe subestimar la proporción de estudiantes que confunde valor y variable (C3) que aparece principalmente en el apartado 4.b.

Tabla 6.5.4.5. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos semióticos en los ítems 4.b y 4.c

Tipo de conflicto semiótico	3° ESO (n=128)	
	Ítem 4.b	Ítem 4.c
C2. Desconoce la estructura de una tabla	22(17,2)	5(3,9)
C3. Confunde frecuencia y valor de la variable	12(9,4)	4(3,1)
C4.2. Confunde frecuencia absoluta y acumulada	22(17,2)	28(21,9)
P5. Conflicto al calcular la frecuencia acumulada		39(30,5)
N2. No alcanza una lectura comprensiva del enunciado	3(2,3)	4(3,1)

6.5.5. RESULTADOS DEL ÍTEM 5. ARGUMENTAR Y PREDECIR VALORES EN TABLAS

En la Figura 6.5.5.1 se presenta el quinto ítem que compone el cuestionario, adaptado de un texto escolar (Merino et al., 2016), del cual solo el primer apartado (5.a) fue planteada a los estudiantes de 1°ESO y 3°ESO. Se pide interpretar los resultados del experimento de extraer una ficha (1 al 10) desde una urna en 1.000 repeticiones. Una parte de los valores obtenidos se exponen en una tabla con frecuencias absolutas y relativas (Figura 6.5.5.1), correspondiente a un nivel C3.1 de complejidad semiótica (Pallauta y Arteaga, 2021; Pallauta et al., 2020). A partir de esta información, el estudiante debe responder a dos cuestiones que requieren alcanzar un nivel L3 *leer más allá de los datos* (Friel et al., 2001), pues se debe inferir datos que no están en la tabla.

En la siguiente tabla se registraron los resultados al extraer 1.000 veces una ficha desde una urna con 10 fichas numeradas desde el 1 al 10, pero olvidaron completar las dos últimas columnas.

1000 extracciones										
Número de la ficha obtenida										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia absoluta	98	106	96	97	98	110	102	98		
Frecuencia relativa	0,098	0,106	0,096	0,097	0,098	0,110	0,102	0,098		

Responde

- ¿Cuántas veces piensas que salió el 10? Justifica tu respuesta.
- Si se aumentan las extracciones a 10.000 ¿cuántas veces piensas que saldría aproximadamente cada ficha? Justifica tu respuesta.

Figura 6.5.5.1. Ítem 5 del cuestionario de evaluación

En el primer apartado (5.a) se debe dar un valor aproximado al observado en las demás fichas, mientras que en la segunda cuestión (5.b) se debería dar un valor multiplicado por 10 en cada celda de las frecuencias absolutas, contemplando a la vez cierta variabilidad. Para responder a la tarea, se requiere una lectura comprensiva del enunciado del problema para comprender el contexto del que surgen los datos,

seguidamente prestar atención a la tabla, identificando las etiquetas, valores de la variable y las frecuencias representadas.

Ítem 5.a. Extrapolar datos dentro de una muestra

Esta primera cuestión fue planteada a ambos grupos. Una tarea que también abordó este nivel de lectura fue utilizada en un estudio con futuras maestras en infantil por Diaz-Levicoy et al., (2019) que aporta orientaciones referente a la categorización de las posibles respuestas, que se detallan seguidamente.

Respuesta correcta. Cuando se señala un valor alrededor de 100, teniendo en cuenta que las frecuencias relativas tienden al valor 0,1 como indica E3. Para conjeturar un posible número de veces que salió el valor de la variable señalado, es necesario considerar que el total de extracciones es 1.000, por tanto, las frecuencias absolutas deben totalizar dicho valor.

E3: 94 veces, porque sería lo que queda hasta 1.000, habiendo puesto 101 veces el 9, pero si hubiera cambiado la frecuencia absoluta de 9, también hubiera cambiado la de 10.

Parcialmente correcta. En esta categoría, se identifican respuestas que consideran el total de extracciones realizadas, sin embargo, no se considera la tendencia de los datos, como ocurre con el estudiante E10. En otros casos ocurre lo inverso, es decir, el estudiante considera, la tendencia de los datos, sin prestar atención al total de las extracciones, como indicar "alrededor de 100", y sin ofrecer una justificación.

E10: Entre 0 y 195, porque no puede haber salido más veces.

Incorrecta. Son respuestas con valores desajustados a la tendencia de los datos expuestos, además, generalmente, no adicionan alguna justificación que permita analizar el razonamiento realizado. Por ejemplo, E35 indica que el 10 podría salir seis veces, y se infiere de su respuesta que confunde la frecuencia con el valor de la variable.

E35: 6 veces.

Los resultados de este apartado se presentan en la Tabla 6.5.5.1, donde la mayoría de los estudiantes deja la pregunta sin contestar, seguido de las respuestas parcialmente correctas, luego las incorrectas, mientras que respuestas correctas son muy escasas. En el estudio realizado por Diaz-Levicoy et al. (2019) con futuras maestras, en una pregunta que pedía estimar el siguiente porcentaje de una serie de datos, las respuestas correctas (7,7%) y parcialmente correctas (20,5%) fueron ligeramente superiores a lo obtenido en este estudio, mientras que las respuestas incorrectas se presentaron en un mayor porcentaje (33,3%).

El 1ºESO se alcanza un porcentaje ligeramente superior de respuestas correctas y parcialmente correctas que 3ºESO, mientras que en las respuestas incorrectas y en blanco ocurre lo contrario.

Para realizar una valoración del desempeño del ítem 5.a comparando ambos grupos, al igual que los ítems anteriores, se ha asignado una puntuación con el objeto de valorar su dificultad. La respuesta podría obtener la siguiente puntuación: sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2 y correcta: 3. Por tanto, en este apartado se podría

obtener hasta 3 puntos.

Tabla 6.5.5.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 5.a

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	9(6,0)	7(5,5)	16(5,8)
Parcialmente correcto	28(18,8)	20(15,6)	48(17,3)
Incorrecto	20(13,4)	15(11,7)	35(12,6)
No responde	92(61,7)	86(67,2)	178(64,3)
Total	149	128	277

En la Figura 6.5.5.2 se aprecia, en el gráfico de barras, que la mayoría de los participantes no consigue puntaje, y en todo caso siempre es más frecuente en 1ºESO, mientras que el diagrama de cajas muestra que los tres cuartiles coinciden en ambos grupos, siendo muy escasos los estudiantes que consiguen el máximo puntaje.

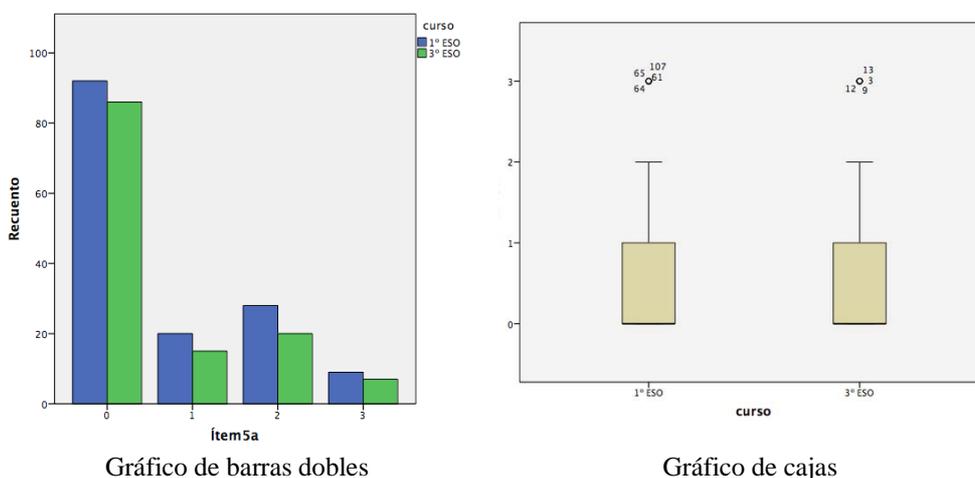


Gráfico de barras dobles

Gráfico de cajas

Figura 6.5.5.2. Distribución total del ítem 5.a por curso

Ítem 5.b. Generalizar los datos a una muestra más amplia

La segunda cuestión de este ítem pide estimar la frecuencia de cada valor en 10.000 repeticiones del experimento y fue planteada solo a los estudiantes de 3º curso, debido a que posee una mayor dificultad que la anterior. Las categorías para evaluar las respuestas se refieren a los argumentos empleados para realizar las estimaciones y son detallados a continuación.

Correcto. Cuando se entrega una estimación basada en los valores expuestos en la tabla. Por ejemplo, el estudiante E225 multiplica por 10 la frecuencia absoluta para cada valor de la variable.

E255: 1: 980; 2: 1.060; 3: 960; 4: 970; 5: 980; 6: 1.100; 7: 1.020; 8: 980; 9: 970; 10: 980.

Parcialmente correcto. Se indica la cantidad de veces que salió alguna ficha, puntualmente, cuya cantidad es producto de la multiplicación del valor de la frecuencia absoluta por 10, y no se aporta ningún tipo de justificación adicional, como E5, quien sólo registra la cantidad de veces que podría salir la ficha 1.

E5: Si el 1 salió 98 veces, saldrá 980.

Incorrecto. Algunas respuestas se aferran al carácter aleatorio de la experiencia de extraer una determinada ficha de una urna, como E3, quien indica que no se puede predecir el resultado. También se incluye en esta categoría aquellas respuestas donde se señala que cada frecuencia debería multiplicarse por otras potencias de base 10.

E3: No se puede saber, ya que a lo mejor el 1 sale 10 veces y el 9, 200 veces, porque al ser una urna no sigue ningún código.

Los resultados de este ítem se presentan en la Tabla 6.5.5.2, donde la mayoría de los estudiantes de 3ºESO deja sin contestar esta pregunta. Las respuestas correctas o parcialmente correctas aparecen en un bajo porcentaje, por lo que se puede considerar que esta pregunta tuvo una dificultad mayor para los participantes.

Tabla 6.5.5.2. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 5.b

Respuesta	3º ESO
Correcta	13(10,2)
Parcialmente correcta	6(4,7)
Incorrecta	17(13,3)
No responde	92(71,9)
Total	128

En general, se observa que el ítem resultó demasiado difícil para los estudiantes de ambos grupos, pues los resultados obtenidos en los dos apartados fueron bajos.

Niveles de lectura

La interpretación tanto de los cálculos realizados como de las justificaciones aportadas en las respuestas, permite identificar el nivel de lectura alcanzado en las dos partes que componen este ítem, que se describen a continuación.

L0. No leen los datos. Esta categoría incluye las respuestas muy limitadas, o que carecen de sentido, como E72 en el ítem 5.a o E28 en el ítem 5.b. También se incorporan los casos en que no se ofrece una respuesta a la cuestión planteada.

E72: Pienso que son 104, porque a la gente le gustan más los números altos (ítem 5.a).

E28: No lo sé, porque tienes la misma probabilidad de sacar un 5 que un 7 (ítem 5.b).

L1. Leer los datos. Cuando la respuesta muestra una lectura literal de los datos presentados en la tabla. Por ejemplo, en el primer apartado (5.a) algunos estudiantes justificaron su respuesta en la frecuencia del valor 6 de la variable, porque 110 es múltiplo de 10, como señala E7. En el ítem 5.b se encontraron respuestas, por ejemplo E239, que indican los mismos valores presentados en la tabla cuando se realizan 1.000 extracciones, añadiendo los que se pudieron obtener las fichas 9 y 10.

E7: Una sola vez ya que 110 es múltiplo de 10 (ítem 5.a).

E239: 1: 98; 2: 106; 3: 96; 4: 97; 5: 98; 6: 110; 7: 102; 9: 98; 9: 100; 10: 193 (ítem 5.b).

L2. Leer dentro de los datos. En este nivel la respuesta, por lo general, denota una correcta lectura y comparación de los datos. A pesar de ello, se ignora, por ejemplo en el apartado 5.a, que el total de las frecuencias absolutas debe totalizar 1.000, o que la suma

de las frecuencias relativas debe ser 1. También puede ocurrir, que no considere la tendencia de los datos como E10. En el apartado 5.b se presentan respuestas en que el estudiante identifica que se obtendrá la frecuencia para cada ficha multiplicando el valor de la frecuencia absoluta por 10, para cada valor de la variable, como lo indica E248.

E10: Entre 0 y 195, porque no puede haber salido más veces (ítem 5.a).

E248: $\times 10$, Porque se agrega un 0 (ítem 5.b).

L3. Leer más allá de los datos. Este nivel es alcanzado cuando la predicción se basa en la tendencia de los datos, generalizando la información recibida. En el caso del apartado 5.a, para realizar una predicción ajustada a la información, se debía considerar la tendencia de los datos y, además, que la suma de las frecuencias absolutas fuese 1.000, como lo hace E12. En el apartado 5.b, alcanzan este nivel de lectura respuestas que evidencian una relación de los datos al incrementar a 10.000 la cantidad de extracciones de la urna, como E30, quien señala que para cada ficha se obtendría alrededor de 1.000 veces.

E12: 95, porque si sumamos todos los números da 805 y restamos 1.000 – 85 da 195, así el 10 sale 95 (ítem 5.a).

E30: Aproximadamente 1.000, porque si divido 10.000 entre 10 pues sale 1.000 (ítem 5.a).

Los niveles de lectura alcanzados en el ítem se muestran en la Tabla 6.5.5.3 y Figura 6.5.5.3. Se observa que la mayoría de los estudiantes queda en el nivel L0 en ambos apartados, debido, principalmente, a que no responden las preguntas, le sigue el nivel L2 (leer dentro de los datos). El nivel de lectura L3 (leer más allá de los datos), requerido para responder adecuadamente a la tarea, lo alcanza solo un bajo porcentaje de estudiantes.

Tabla 6.5.5.3. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura en ítem 5.a

Nivel de lectura	Ítem 5.a			Ítem 5.b
	1° ESO	3° ESO	Total	3° ESO
L0	100(67,1)	92(71,9)	192(69,3)	98(76,6)
L1	13(8,7)	7(5,5)	20(7,2)	11(8,6)
L2	27(18,1)	22(17,2)	49(17,7)	6(4,7)
L3	9(6,0)	7(5,5)	16(5,8)	13(10,2)
Total	149	128	277	128

Por curso, se observa en la primera cuestión (ítem 5.a) que 1°ESO muestra ligeramente mejores resultados que 3°ESO, lo que podría ser debido a que trataron de manera más reciente la frecuencia relativa, o que estén más habituados a contextos de experimentos aleatorios, pues en el análisis de libros de texto, se detectó una alta presencia de este tipo de contexto en el último curso de Educación Primaria.

Los niveles de lectura alcanzados en 3°ESO en la segunda cuestión (5.b), son también en su mayoría L0, aunque la proporción de los que llegan al nivel L3 es mayor que en la primera pregunta.

En resumen, este ítem fue muy difícil para los estudiantes, como habíamos comentado anteriormente, pues las respuestas no alcanzaron ni siquiera los niveles más básicos de los planteados por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001).

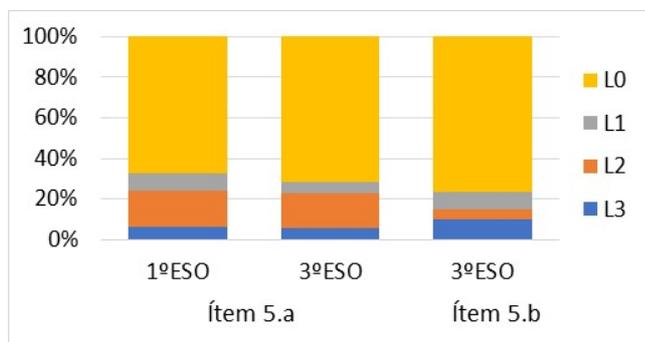


Figura 6.5.5.3. Porcentaje de niveles de lectura alcanzados por curso

6.5.6. RESULTADOS DEL ÍTEM 6. TRADUCIR UN GRÁFICO A UNA TABLA DE CONTINGENCIA

La Figura 6.5.6.1 presenta el sexto ítem del cuestionario, adaptado de un texto escolar (Castro, 2017). Este ítem fue propuesto a los estudiantes de 1º y 3º curso. En la primera parte se pide traducir de gráfico de barras dobles a una tabla de contingencia, con un nivel de complejidad semiótica C4.1 (Arteaga, 2011; Pallauta y Arteaga, 2021). A continuación, se plantean dos cuestiones que requieren un nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), pues se deben realizar algunos cálculos para completar los totales de la tabla y comparar frecuencias marginales.

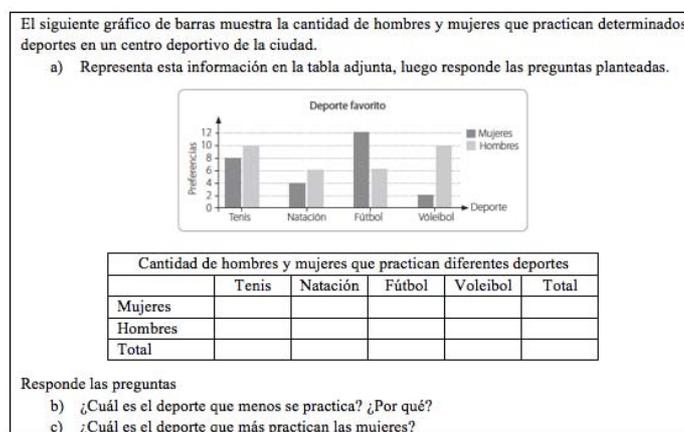


Figura 6.5.6.1. Ítem 6 del cuestionario de evaluación

Ítem 6.a. Construcción de la tabla de contingencia

Para construir la tabla, el estudiante debe realizar un proceso de traducción de gráfico de barras dobles a una tabla de contingencia. Una tarea similar fue utilizada en un estudio con profesores en formación (Pallauta y Gea, 2019), pero en nuestro caso, se optó por ofrecer la estructura junto a las etiquetas de la tabla (Figura 6.5.6.1) para facilitar dicha traducción, dado que los participantes eran de menor edad. También Díaz-Levicoy (2018) propuso a estudiantes de Educación Primaria una tarea muy similar, en la cual

tampoco se ofreció la estructura tabular. Dichos estudios permiten establecer las categorías para evaluar las construcciones realizadas por los estudiantes.

Tabla correcta. Cuando se presentan correctamente las frecuencias deducidas del gráfico de barras y los totales, como E1 en la Figura 6.5.6.2. Este tipo de respuesta refleja una correcta lectura del gráfico junto a una adecuada traducción a lenguaje tabular.

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	4	12	2	26
Hombres	10	6	6	10	32
Total	18	10	18	12	58

Figura 6.5.6.2. Tabla correcta construida por el estudiante E1

Tabla parcialmente correcta. En esta categoría se consideran las respuestas que muestran una traducción parcial de gráfico a la tabla, con algunos errores puntuales como se observa en la respuesta de E164 (Figura 6.5.6.3), quien registra erróneamente las frecuencias de la modalidad voleibol, o como E5, con algún cálculo incorrecto o ausencia de los totales.

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	4	12	2	24
Hombres	10	6	6	10	32
Total	18	10	18	12	

E5

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	4	12	10	34
Hombres	10	6	6	2	24
Total	18	10	18	12	58

E164

Figura 6.5.6.3. Tablas parcialmente correctas

Tabla incorrecta. Cuando la tabla no recoge la información expuesta en el gráfico, evidenciando una incorrecta traducción del gráfico a la tabla. Por ejemplo, en la Figura 6.5.6.4, el estudiante E10 invierte los valores de las modalidades mujer y hombre, mientras que E19 asigna valores decimales a las frecuencias dobles, ignorando el contexto de los datos, pues las frecuencias corresponden a personas y deben ser números enteros.

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	10	6	6	10	32
Hombres	8	4	12	2	26
Total	18	10	18	12	58

E10

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	4	12	2.1	26.1
Hombres	10	6	6.2	10	32.2
Total	18	10	18.2	12.1	58.3

E19

Figura 6.5.6.4. Tablas incorrectas

La Tabla 6.5.6.1 resume los resultados obtenidos, donde se aprecia que la mayor parte de los estudiantes realiza la traducción de gráfico a tabla de manera correcta o parcialmente correcta, mientras que las traducciones incorrectas y las respuestas en blanco aparecen en un menor porcentaje. En Pallauta y Gea (2019), con futuros profesores, las respuestas correctas fueron superiores (60,9%) y hubo menos respuestas incorrectas (8,7%), aunque en dicho estudio la evaluación de las respuestas solo considero las categorías correcto e incorrecto y si aparecían los totales (uno o dos totales). Los resultados de Díaz-Levicoy (2018) fueron inferiores porcentualmente en cuanto a las respuestas correctas (39,2%) y parcialmente correctas (19,7%), y peores en cuanto a la

respuesta en blanco (35,4%), pese a que los estudiantes eran de edades similares. La diferencia podría radicar en que dicho estudio no facilitó la estructura tabular junto a las etiquetas. Al comparar por curso (Tabla 6.5.6.1), en 1ºESO se obtuvo un porcentaje ligeramente superior de respuestas correctas y muy similar en las traducciones parcialmente correctas, mientras que en 3ºESO hubo más respuestas incorrectas y en blanco.

Tabla 6.5.6.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 6.a

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	84(56,4)	65(50,8)	149(53,8)
Parcialmente correcto	41(27,5)	36(28,1)	77(27,8)
Incorrecto	14(9,4)	18(14,1)	32(11,6)
No completan la tabla	10(6,7)	9(7,0)	19(6,9)
Total	149	128	277

Conflictos semióticos en la construcción de la tabla

En el proceso de traducción de gráfico a tabla se han identificado variados conflictos semióticos cognitivos que se describen a continuación. Cabe señalar, que en algunas ocasiones se puede presentar más de uno de ellos.

Conceptuales

C1.4. Confundir frecuencias con porcentajes. Es una nueva variante del conflicto C1 (confundir diversos tipos de frecuencias ordinarias). Un ejemplo es la respuesta de E33 (Figura 6.5.6.5). Además, el estudiante no es consciente de la existencia de diferentes tipos de porcentajes para cada frecuencia conjunta respecto: al total, a la fila o la columna.

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8%	4%	12%	2%	26%
Hombres	10%	6%	6%	10%	32%
Total	18%	10%	18%	12%	58%

Figura 6.5.6.5. Ejemplo conflicto semiótico C1.4 del estudiante E33

Procedimentales

P3. Conflicto en el cálculo de los totales. Cuando los totales registrados en la tabla estadística son incorrectos o se dejan en blanco. Este conflicto, descrito en ítems anteriores fue advertido por Álvarez et al. (2020), y se presenta, por ejemplo, en la respuesta de E20 (Figura 6.5.6.6), quien a pesar de traducir correctamente el gráfico a la tabla, no calcula de manera adecuada el total de la frecuencia marginal de la modalidad hombres. Otros estudiantes dejan en blanco el total como E169 (Figura 6.5.6.6).

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	4	12	2	26
Hombres	10	6	6	10	22
Total	18	10	18	12	48

E20

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	8	2	12	0	
Hombres	10	6	6	10	
Total					

E169

Figura 6.5.6.6. Ejemplos de conflicto semiótico P3

Notacionales

N1. No alcanza el nivel mínimo de lectura de los datos. Cuando en las celdas se registran frecuencias que no se ajustan a la información presentada en el gráfico, evidenciando una incorrecta lectura de uno o varios datos. Este conflicto se presentó anteriormente en los ítems 2 y 3 (en relación a la lectura de la tabla y la traducción del gráfico a la tabla) y se puede apreciar en la Figura 6.5.6.7 en la respuesta de E57, quien apunta en las celdas valores que carecen de sentido de acuerdo a la información.

Cantidad de hombres y mujeres que practican diferentes deportes					
	Tenis	Natación	Fútbol	Voleibol	Total
Mujeres	816	8	16	4	24
Hombres	20	12	24	20	28
Total	36	22	33	24	52

Figura 6.5.6.7. Ejemplo conflicto semiótico N1 del estudiante E57

N4. Interpreta incorrectamente las etiquetas de las modalidades de una de las variables. Se puede presentar de manera parcial, como se muestra en la respuesta de E164 en la Figura 6.5.3.3, o de manera total como se muestra en la respuesta de E10 en la Figura 6.5.6.4.

Los diferentes conflictos detectados son resumidos en la Tabla 6.5.6.2, donde el más frecuente es P3 asociado al cálculo incorrecto de los totales, especialmente en 3°ESO. Siguen los conflictos notacionales, principalmente N4, relativo a la confusión de las etiquetas de las modalidades de una variable, con menor proporción en 1°ESO, mientras que N1, enmarcado en no alcanzar un mínimo nivel de lectura, es algo más frecuente en 1°ESO. El conflicto conceptual C1.4 aparece de manera muy escasa en ambos grupos.

Tabla 6.5.6.2. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos en ítem 6.a

Tipo de conflicto semiótico	1° ESO (n=149)	3° ESO (n=128)	Total (n=277)
C1.4. Confunde frecuencia absoluta con porcentual	2(1,3)	1(0,8)	3(1,1)
P3. Calcula incorrectamente o no completa totales	56(37,6)	56(43,8)	112(40,4)
N1. No alcanza el nivel mínimo de lectura de datos	12(8,1)	6(4,7)	18(6,5)
N4. Confunde las etiquetas de las modalidades	11(7,4)	14(10,9)	25(9,0)

Ítem 6.b. Lectura de una frecuencia marginal

En la pregunta "¿Cuál es el deporte que menos se practica?" se deben comparar los valores de la frecuencia marginal de una variable para decidir el de menor frecuencia, por lo que se requiere un nivel de lectura L2 *leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). Las categorías consideradas son detalladas a continuación.

Respuesta correcta. Cuando se señala que la modalidad con menor frecuencia es la natación, identificando correctamente la frecuencia mínima en la tabla, como E1.

E1: La natación, porque solo lo practican 10.

Respuesta parcialmente correcta. Cuando se indica el deporte menos practicado, pero la respuesta denota una lectura parcial de los datos, como el estudiante E75, quien diferencia el deporte menos practicado por mujeres y hombres, pero no indica la frecuencia mínima a nivel global. Este tipo de respuestas se podrían originar por una

inadecuada interpretación de la pregunta, o una carencia en la habilidad de interpretar la información presentada en tablas de contingencia (Batanero et al., 2015).

E75: Mujeres: voleibol; hombres: fútbol y natación.

Respuesta incorrecta. En este caso, la respuesta manifiesta una incorrecta lectura de los datos, pues el estudiante se centra solo en una celda de la tabla o en la barra del gráfico con menor valor de frecuencia absoluta. Un ejemplo se presenta en la respuesta de E37, quien no considera correctamente la etiqueta de la frecuencia que observa del conjunto de valores, según sexo y tipo de deporte, que corresponde al par: mujer-voleibol.

E37: El voleibol porque en los datos sale que el voleibol es el menos practicado.

La Tabla 6.5.6.3 resume los resultados de este apartado. Se puede apreciar que la mayor parte de los estudiantes responde correctamente, mientras que las respuestas parcialmente correctas, incorrectas y en blanco aparecen en un menor porcentaje. En 3ºESO se obtuvieron mejores resultados, pues consiguieron un mayor porcentaje de respuestas correctas que 1ºESO, lo que también se aprecia en los porcentajes de respuestas incorrectas y en blanco que fueron inferiores en dicho curso.

Tabla 6.5.6.3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 6.b

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	116(77,9)	110(85,9)	226(81,6)
Parcialmente correcto	3(2,0)	2(1,6)	5(1,8)
Incorrecto	17(11,4)	7(5,5)	24(8,7)
No responde	13(8,7)	9(7,0)	22(7,9)
Total	149	128	277

Justificaciones a la lectura de una frecuencia marginal

Las justificaciones entregadas por los estudiantes a la pregunta sobre el deporte menos practicado se han clasificado de acuerdo a la representación utilizada para responder, o si se basaron en criterios personales.

Tipo 1. Justificación a partir de la representación tabular. Cuando se señala de manera explícita que se ha recogido la información desde la tabla estadística, como E92. Se consideraron en esta categoría también respuestas en las que se infiere que se utilizó la tabla para responder, porque se indica, por ejemplo, el total de personas que prefieren la natación, como señala el estudiante E275.

E92: Es el de natación, porque es el que menos gente lo practica según la tabla.

E275: Natación porque solo hay 10 personas en ese deporte.

Tipo 2. Justificación a partir de la representación gráfica. Cuando se indica, explícitamente, la observación del gráfico en la obtención de la respuesta, como señala el estudiante E105.

E105: Natación, porque las barras están más bajas.

Tipo 3. Justificación a partir de criterios personales. Esta categoría recoge las justificaciones que manifiestan criterios personales para decidir la respuesta, como ocurre con el estudiante E29 o E88. Este tipo de respuestas se han presentado en otros estudios sobre lectura de tablas (Guimaraes et al., 2021; Sharma, 2013) evidenciando una inadecuada interpretación tanto de la información como de la cuestión planteada.

E29: Natación, porque no gustará a la gente.

E88: Natación, porque todo el mundo no tiene piscina.

La Tabla 6.5.6.4 resume la distribución de los diferentes tipos de justificaciones identificadas en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 6.5.6.4. Frecuencia (y porcentaje) de justificaciones en ítem 6.b

Tipo de justificación	1º ESO	3º ESO	Total
T1. Representación tabular	76(51,0)	79(61,7)	155(56,0)
T2. Representación gráfica	14(9,4)	13(10,2)	27(9,7)
T3. Criterio personal	21(14,1)	5(3,9)	26(9,4)
T4. No justifica	38(25,5)	31(24,2)	69(24,9)
Total	149	128	277

Se aprecia que la mayoría se basa en la lectura de la tabla, seguido de los que no justifican, entretanto las justificaciones basadas en la lectura del gráfico y en criterios personales aparecen en un menor porcentaje. En 3ºESO predomina la justificación apoyada en la tabla más que en 1ºESO, mientras que las respuestas en blanco aparecen de manera similar en ambos cursos. Los criterios personales son más empleados por los estudiantes de 1ºESO que en 3ºESO. Este tipo de respuesta también fue observada por Dvir y Ben-Zvi (2021). En este sentido, cobra relevancia proponer preguntas a los estudiantes que promuevan el desarrollo de la comprensión del contexto en que se plantean los datos, con la idea de movilizar funciones cognitivas de mayor nivel (Rosenshine et al., 1996).

Ítem 6.c. Lectura de una frecuencia condicional

En la cuestión "¿Cuál es el deporte que más practican las mujeres?" se debe identificar la modalidad con mayor frecuencia condicional. Esto requiere comparar los diferentes valores de una categoría (mujeres) de la variable género, e implica un nivel de lectura de *leer dentro de los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001). La evaluación de las respuestas se enmarca en las siguientes categorías.

Respuesta correcta. Cuando se identifica de manera correcta el tipo de deporte con la mayor frecuencia condicional, como E9, quien aporta además la cantidad de mujeres que prefieren el fútbol.

E9: El fútbol con 12 mujeres.

Respuesta parcialmente correcta. Se indican las modalidades con mayor frecuencia, como el estudiante E78, quien no considera que uno de ellos prevalece sobre el otro.

E78: Tenis y fútbol.

Respuesta incorrecta. Generalmente, este tipo de respuestas son producto de una inadecuada traducción de gráfico a tabla, o de una incorrecta lectura o interpretación de la pregunta. Por ejemplo, E10 indica los deportes con mayor frecuencia de la modalidad hombre en lugar de mujer.

E10: Tenis y voleibol.

Los resultados obtenidos en este ítem se resumen en la Tabla 6.5.6.5, donde se aprecia que la mayoría de los estudiantes responde de manera correcta, mientras que las respuestas parcialmente correctas, incorrectas y sin contestar son escasas. Las respuestas correctas y en blanco se presentan en un porcentaje ligeramente mayor en 1ºESO, donde también hay menor porcentaje de respuestas incorrectas.

Tabla 6.5.6.5. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 6.c

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	130(87,2)	107(83,6)	237(85,6)
Parcialmente correcto	1(0,7)		1(0,4)
Incorrecto	6(4,0)	12(9,4)	18(6,5)
No responde	12(8,1)	9(7,0)	21(7,6)
Total	149	128	277

Los resultados obtenidos en los apartados 6.b y 6.c en relación a la lectura de frecuencias marginales y condicionales son superiores a los obtenidos por Gea et al. (2020) (Respuestas correctas de lectura de frecuencias marginales: 68,1% y condicionales: 73,9%). Cabe mencionar que en dicho estudio, realizado con futuros maestros, una de las variables de la tabla de doble entrada se presentaba con datos agrupados, lo que incrementaba el nivel de dificultad en su interpretación.

Síntesis de resultados

Para realizar una valoración global del desempeño de este ítem, se ha asignado una puntuación que considera la respuesta de cada uno de los apartados del mismo. Se asignó la siguiente puntuación: sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2 y correcta: 3. De este modo, se podría alcanzar hasta un total de 9 puntos en este ítem.

En la Figura 6.5.6.9 se presentan dos gráficos que representan la puntuación total de este ítem. El gráfico de barras muestra que una alta frecuencia de estudiantes alcanza 9 puntos, especialmente en 1ºESO. La mediana y tercer cuartil, como se puede observar en el gráfico de caja, tienen el mismo valor en ambos cursos y se sitúan por encima del valor mediano teórico, aunque también es posible apreciar valores atípicos.

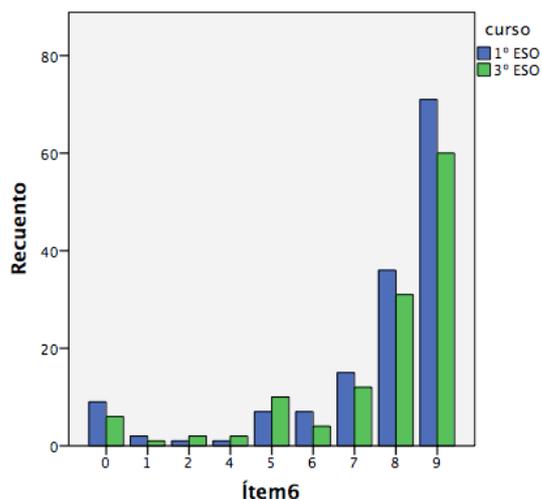


Gráfico de barras dobles

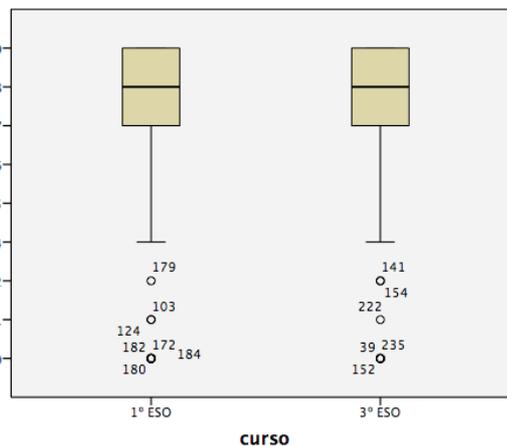


Gráfico de cajas

Figura 6.5.6.9. Distribución total del ítem 6 por curso

6.5.7. RESULTADOS DEL ÍTEM 7. ARGUMENTAR A PARTIR DE UNA TABLA

El ítem 7 del cuestionario (Figura 6.5.7.1) fue tomado de Batanero (2000) y planteado a los participantes de ambos grupos. Se pretende que el estudiante, de manera argumentada, decida si el entrenamiento deportivo realizado por un grupo de chicas fue efectivo, lo que requiere un nivel de lectura L4 (leer detrás de los datos) (Friel et al., 2001). La altura (cm.) del salto conseguida antes y después del entrenamiento por cada chica se muestra en una tabla de datos, con un nivel C2 de complejidad semiótica (Arteaga, 2011; Pallauta y Arteaga, 2021).

Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de niñas, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los siguientes valores:

		Altura saltada en cm.									
Estudiante		Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gía	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento		115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento		128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Responde
¿Pensas que el entrenamiento es efectivo? Justifica tu respuesta.

Figura 6.5.7.1. Ítem 7 del cuestionario de evaluación

Este ítem, de acuerdo a Batanero (2000), requiere considerar la media como elemento representativo de un conjunto de valores en una distribución simétrica, por lo que se podría comparar la altura media antes y después del entrenamiento para determinar si se han generado mejoras. Esta situación ha sido utilizada en investigaciones para analizar la complejidad de la media aritmética (Rondero y Font, 2015), y para conocer el significado que atribuyen futuros profesores a la media aritmética (Calle et al., 2020). Las categorías de respuestas de los estudiantes se describen a continuación.

Respuesta correcta. Cuando se analiza el conjunto de datos y se evidencia una mejora del rendimiento de las chicas luego del entrenamiento recibido, por ejemplo, el estudiante E74 aporta el porcentaje de chicas que conseguieron mejorar su marca anterior.

E74: Yo creo que el entrenamiento funciona, pues el 80% de las niñas han aumentado su salto, pero el 20% ha bajado de altura.

Respuesta parcialmente correcta. Son las respuestas que no contemplan el conjunto de datos, sino solo una parte de los valores para decidir si el entrenamiento es efectivo, mostrando una concepción local de la asociación (Estepa et al., 1999). Por ejemplo, E90 indica que fue efectivo para parte del grupo, porque hubo dos chicas que disminuyeron su marca anterior.

E90: Según la persona, porque Carla e Inés bajaron su media de salto.

Respuesta incorrecta. Se consideran las respuestas que muestran una inadecuada interpretación de la información y el contexto de los datos presentados, como E15, quien no es consciente de la información pues no indica la altura de los saltos sino la cantidad de ellos.

E15: Porque en la mayoría de casos después de entrenar las estudiantes pudieron saltar más veces.

En la Tabla 6.5.7.1 se presentan los resultados obtenidos en este ítem, donde se aprecia que la mayoría de los estudiantes responde de manera correcta o parcialmente correcta, sin embargo, las respuestas incorrectas o en blanco son frecuentes. Hay un porcentaje superior de respuestas correctas en 3ºESO a diferencia de 1ºESO; esta ventaja también se manifiesta en las respuestas incorrectas, las cuales son inferiores en 3ºESO. En 1ºESO se presenta un mayor porcentaje de respuestas parcialmente correctas, mientras que las respuestas en blanco se presentan de manera muy similar en ambos cursos.

Tabla 6.5.7.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 7

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	43(28,9)	66(51,6)	109(39,4)
Parcialmente correcto	22(14,8)	7(5,5)	29(10,5)
Incorrecto	53(35,6)	28(21,9)	81(29,2)
No responde	31(20,8)	27(21,1)	58(20,9)
Total	149	128	277

Niveles de lectura

En esta situación también fue posible distinguir los diferentes niveles de lectura alcanzados por los estudiantes.

L0. No leen los datos. Aunque esta categoría no fue considerada por Curcio y colaboradores (1989), se ha propuesto para considerar las respuestas que evidencian una carencia de lectura de los datos presentados en la tabla a igual que Díaz-Levicoy (2018). Por ejemplo, se han observado justificaciones que apelan a criterios personales, como E8. Este tipo de argumentos manifiesta el arraigo de las creencias personales al momento de emitir juicios (Gal y Trostianitser, 2016).

E8: Si, porque al realizar entrenamiento la musculatura se desarrolla, así mejorando y adaptándose al tipo de deporte o ejercicio.

L1. Leer los datos. Cuando se observa una lectura de valores particulares, es el caso de E129. Estas respuestas denotan la concepción local de la asociación (Estepa et al., 1999), o una dificultad en realizar comparaciones de grupos de datos considerando cada grupo como una unidad o distribución, pues solamente se contemplaron algunos casos particulares.

E129: El de Fanny 138 a 145.

L2. Leer dentro de los datos. Las respuestas que alcanzan este nivel de lectura se basan en la comparación de los valores correspondientes a las alturas alcanzadas en el salto por el grupo de chicas antes y después de recibido el entrenamiento. Por ejemplo, el estudiante E30 señala que la mayor parte del grupo ha mejorado su marca inicial.

E30: Si, porque la mayoría de las niñas salta más alto de lo que saltaba al principio.

L3. Leer más allá de los datos. En este ítem no se considera este nivel de lectura, dado que no se requiere la interpolación o extrapolación de los datos.

L4. Leer detrás de los datos. Se corresponde con el máximo nivel de lectura (Friel et al., 2001), debido a que requiere una lectura crítica de la información presentada. En este ítem, se esperaba que el estudiante pudiese desarrollar un argumento más elaborado que le permita asegurar que el entrenamiento recibido por el grupo de chicas fue efectivo, como por ejemplo comparar la media de cada grupo. En este sentido, la respuesta del estudiante E223 se acerca a esta idea comparando la suma de la serie antes del entrenamiento con la posterior.

E223: Si, porque si sumas todo lo de antes y todo lo de después, te da más cantidad después, eso significa que han mejorado.

Los diferentes niveles de lectura alcanzados por los estudiantes se resumen en la Tabla 6.5.7.2 y Figura 6.5.7.2. Se observa que un porcentaje similar alcanza los niveles L0, ausencia de lectura de los datos y L2 (leer dentro de los datos) en que se comparan ambas series de datos. Los niveles L1 (leer los datos), enmarcada en una lectura literal y L4 (leer detrás de los datos), asociado a una lectura crítica, se presentan de manera muy escasa.

Tabla 6.5.7.2. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura en el ítem 7

Nivel de lectura	1º ESO	3º ESO	Total
L0	83(55,7)	52(40,6)	135(48,7)
L1	1(0,7)	2(1,6)	3(1,1)
L2	64(43,0)	71(55,5)	135(48,7)
L4	1(0,7)	3(2,3)	4(1,4)
Total	149	128	277

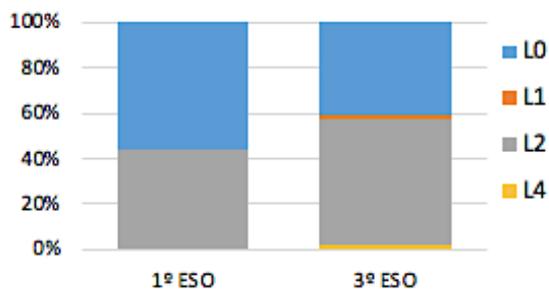


Figura 6.5.7.2. Porcentaje de niveles de lectura alcanzados por curso

Los niveles L0 y L2 comparten la hegemonía en ambos grupos, con más frecuencia L0 en 1ºESO y L2 en 3ºESO. L1 se observa algo más en 3ºESO, mientras que el máximo nivel de lectura L4, que se esperaría que tuviera una presencia más significativa en 3ºESO, aparece en un bajo porcentaje. Este hecho llama la atención, pues los estudiantes de ambos cursos tienen conocimientos de las medidas de centralización, específicamente la media aritmética para este caso, lo que les permitía emitir un juicio crítico con mayor fundamento. Aparentemente, los estudiantes solo aplican los conocimientos de manera algorítmica, o cuando se les solicita explícitamente, evidenciando de este modo un significado limitado del concepto y su complejidad (Batanero, 2000; Rondero y Font, 2015), que no surgió de manera natural como una estrategia de resolución, de acuerdo a lo esperado.

Síntesis de resultados

Para valorar los resultados globales de los estudiantes, se asignó una puntuación a la respuesta (sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2; y correcta: 3). En la Figura 6.5.7.3, el gráfico de barras muestra que la mayoría de los estudiantes de 1ºESO alcanza 1 punto, mientras que la mayor frecuencia de 3 puntos es en 3ºESO. La mediana, como se observa en el gráfico de cajas, coincide con el primer cuartil para el caso de 1ºESO, en cambio es superior en 3ºESO y, además, coincide con el tercer cuartil.

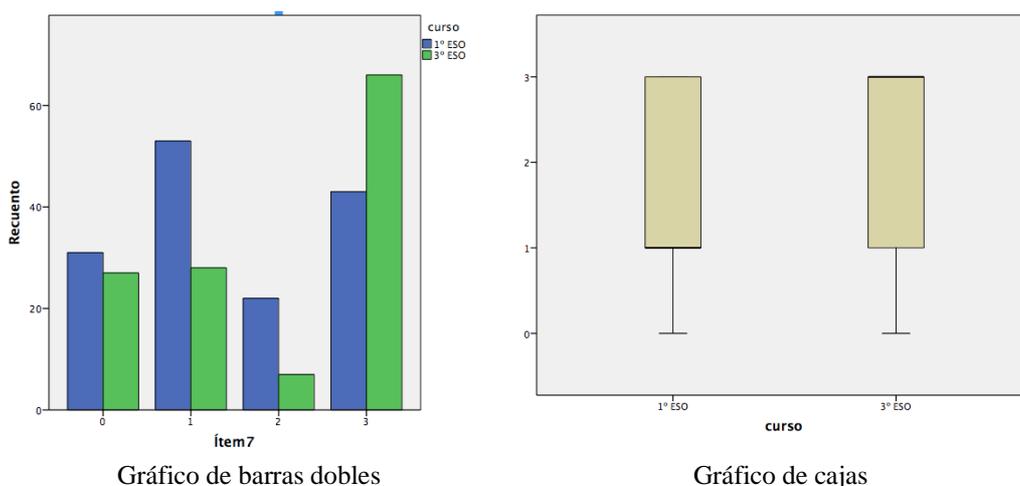


Gráfico de barras dobles

Gráfico de cajas

Figura 6.5.7.3. Distribución total del ítem 7 por curso

6.5.8. RESULTADOS DEL ÍTEM 8. LEER TABLA DE FRECUENCIAS CON DATOS AGRUPADOS

El ítem 8 del cuestionario (Figura 6.5.8.1) solamente fue propuesto a los estudiantes de 3º curso. Requiere la interpretación de la información expuesta en una tabla de distribución de una variable con datos agrupados, de nivel de complejidad semiótica C3.3 (Pallauta y Arteaga, 2021; Pallauta et al., 2020). A partir de la tabla, el estudiante debe responder a tres cuestiones que requieren una lectura crítica de la información, asociado al máximo nivel de lectura *L4 leer detrás de los datos* (Friel et al., 2001). Para responder a las preguntas, el estudiante debe aplicar los conceptos de frecuencias absolutas y acumuladas, junto al concepto de desigualdad asociado de manera directa al trabajo con intervalos de clase, lo cual puede resultar complejo (Batanero, 2001).

Se realiza un estudio sobre el tiempo que tarda en hacer efecto un medicamento a un grupo de hombres. La siguiente tabla muestra los tiempos.			
Responde		Tiempo de demora en un grupo de hombres	
a)	Hay 20 hombres que reaccionan al medicamento en menos de 60 minutos ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?	Tiempo (min.)	Frecuencia absoluta
b)	Hay 38 hombres que reaccionan al medicamento en 30 min. o más ¿Estas de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?	[0, 15[3
c)	¿Te parece que el medicamento tiene un efecto rápido o lento? ¿Por qué?	[15, 30[12
		[30, 45[18
		[45, 60[20
			53

Figura 6.5.8.1. Ítem 8 del cuestionario de evaluación

Los estudios que han abordado la interpretación de tablas con datos agrupados en intervalos se han centrado, principalmente, en las tablas de doble entrada (Castellaro y Roselli, 2020; Gabucio et al., 2010), mientras que la investigación sobre tablas con distribución de una variable con datos agrupados en intervalos de clase que incluyan diferentes tipos de frecuencias es escasa (Batanero, 2001). Algunas investigaciones que abordan esta temática, con estudiantes de edad similar al presente estudio, analizan los errores y dificultades en la interpretación de la información expuesta (Álvarez et al., 2020), o evalúan los niveles de lectura, de los propuestos por Curcio (1989), alcanzados por los estudiantes (González et al., 2021). Dichos trabajos aportan información que contribuye a establecer las categorías en cada apartado del ítem.

Ítem 8.a. Lectura de una frecuencia acumulada

El primer apartado de este ítem pide leer una frecuencia acumulada y requiere el máximo nivel de lectura *L4 leer detrás de los datos* (Friel et al., 2001), pues el estudiante debe contrastar los datos presentados en la tabla con la afirmación. Para ello es necesario establecer la frecuencia asociada a un conjunto de valores menores a un determinado valor. Una vez realizado este proceso, se espera que el estudiante decida que la afirmación planteada es falsa, porque 53 hombres reaccionan al medicamento en menos de 60 minutos. También se puede observar la frecuencia acumulada del último intervalo de clase, pues todos los valores de la variable representada son menores a 60 minutos. Las respuestas se clasificaron como se detalla a continuación.

Respuesta correcta. Se señala el desacuerdo con la afirmación planteada, indicando que el total de la muestra reacciona al medicamento en menos de 60 minutos, como E12 quien, identifica los sumandos que permiten obtener el total de la muestra.

E12: No, porque $3+12+18+20$ no es igual a 20.

Respuesta parcialmente correcta. Este tipo de respuesta puede omitir el acuerdo o desacuerdo con la afirmación, pero, a pesar de ello, se infiere de la justificación entregada un desacuerdo. Sin embargo, la observación de la información de la tabla es limitada porque solo considera una parte de la muestra. Por ejemplo, E8 no indica su acuerdo con la afirmación, pero agrega que son 33 hombres los que reaccionan al medicamento en el tiempo señalando, lo que evidencia que consideró solo una parte de los valores representados en los intervalos.

E8: Hay 33 hombres que reaccionan al medicamento en menos de 60 minutos

Respuesta incorrecta. Son aquellas que manifiestan un acuerdo con la afirmación producto de una inadecuada interpretación de los intervalos representados en la tabla, como el estudiante E48.

E48: Sí, porque la frecuencia absoluta es 20.

Los resultados de este ítem se resumen en la Tabla 6.5.8.1, en la que se observa que la mayor parte de los participantes no responde o lo realiza de forma incorrecta, mientras que las respuestas correctas y parcialmente correctas son escasas.

Tabla 6.5.8.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 8.a

Respuesta	3° ESO
Correcta	21(16,4)
Parcialmente correcta	8(6,3)
Incorrecta	43(33,6)
No responde	56(43,8)
Total	128

Ítem 8.b. Lectura de la suma de dos frecuencias

El segundo apartado de este ítem, “Hay 38 hombres que reaccionan al medicamento en 30 minutos o más ¿Estas de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?” implica determinar la veracidad de una afirmación basada en los datos presentados en una tabla. En este caso, se debe verificar la frecuencia absoluta asociada a un conjunto de valores, y el estudiante debe concluir que la afirmación entregada es verdadera, alcanzando de este modo el máximo nivel de lectura L4 *leer detrás de los datos* (Friel et al., 2001). Las respuestas de los estudiantes, fueron evaluadas de acuerdo a las siguientes categorías.

Respuesta correcta. Se manifiesta el acuerdo con la afirmación planteada, acompañada de una justificación correcta basada en los datos entregados en la tabla. Por ejemplo, E2 identifica la frecuencia absoluta de los intervalos que incluyen los valores mayores o iguales a 30 minutos, los suma y concluye que este total coincide con lo señalado en la pregunta, por lo cual la afirmación es verdadera.

E2: Sí, porque $18+20=38$ que son los que tardan 30 minutos o más.

Respuesta parcialmente correcta. Son las respuestas con una incompleta comprensión de la cuestión planteada. Por ejemplo, E7 señala que no fueron considerados en el recuento los participantes pertenecientes al intervalo [45, 60[.

E7: No, porque no se han contado las 20 personas del [45, 60[.

Respuesta incorrecta. Son producciones en que, independiente de su acuerdo o desacuerdo, evidencian una carencia en la justificación presentada. Es el caso de E49, quien considera la frecuencia absoluta de los valores menores al señalado en la pregunta, denotando una inadecuada interpretación de los intervalos.

E49: No, porque la frecuencia acumulada en menos de 30 minutos es de 33 hombres.

En la Tabla 6.5.8.2 se presentan los resultados obtenidos en este ítem, donde la mayor parte de los estudiantes no responden o lo hacen de manera incorrecta. Las respuestas correctas o parcialmente correctas se presentan en un menor porcentaje.

Tabla 6.5.8.2. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 8.b

Respuesta	3° ESO
Correcta	13(10,2)
Parcialmente correcta	3(2,3)
Incorrecta	50(39,1)
No responde	62(48,4)
Total	128

En los apartados 8.a y 8.b se observaron inadecuadas interpretaciones de los intervalos de clase presentados en la tabla, evidenciando lo complejo que resulta este tipo de representación, asociado a un nivel de complejidad semiótica C3.3 (Pallauta et al., 2021; Pallauta y Arteaga, 2021), pues, además de los conceptos de frecuencia, se suman los de intervalo, sus extremos, junto al tipo de intervalo (cerrado, abierto y semiabierto). Los resultados coinciden con estudios de participantes de edades similares (Álvarez et al., 2020), donde se observan errores de interpretación de tablas con datos agrupados en intervalos de clase, por ejemplo, utilizar el extremo de un intervalo como su representante. Otra posible causa a estos fallos se podría deber a una inadecuada traducción de lenguaje verbal a lenguaje simbólico, y viceversa, especialmente el asociado al tratamiento de las desigualdades (Haji Botty et al., 2015).

Ítem 8.c. Análisis de la tendencia

En la tercera pregunta de este ítem "¿Te parece que el medicamento tiene un efecto rápido o lento? ¿Por qué?" Se debe exponer un juicio basado en la información presentada en la tabla. Se espera que las justificaciones se apoyen tanto en conocimientos estadísticos como en opiniones personales (Sharma, 2013). Como indica Gal (2011), plantear este tipo de cuestiones a los estudiantes es importante para poder conocer las observaciones e interpretaciones que realizan de los datos presentados en tablas estadísticas, y cómo estas se relacionan con la experiencia cercana.

Las respuestas aportadas por los estudiantes se han clasificado de acuerdo a las categorías de evaluación que se detallan a continuación.

Respuesta correcta. Se considera lenta la reacción del medicamento basados en los datos presentados en la tabla estadística. Por ejemplo, el estudiante E35 observa que la cantidad de personas que reaccionan en poco tiempo es muy pequeña comparada con los que lo realizan en el máximo tiempo, indicando que el medicamento tiene un efecto lento.

E35: Lento, porque hay 3 personas que les tarda menos de 15 minutos y 20 que tardan 45 minutos o más.

Respuesta parcialmente correcta. Cuando la decisión se sustenta en la observación de intervalos de valores excesivamente amplios. Por ejemplo, E4 considera que la reacción del medicamento es lenta porque la mayoría de los hombres requiere más de 15 minutos.

E4: Lento, ya que la mayoría tarda más de 15 minutos.

Respuesta incorrecta. Se trata de las respuestas en que se aprecia una carencia en la interpretación de la información aportada por la tabla, o de la pregunta planteada. Por ejemplo, E41 manifiesta la aplicación de un criterio personal basado en su experiencia para tomar la decisión.

E41: Lento, porque el medicamento mientras cae por la garganta y hace efecto tarda un poquito pero bueno, mientras haga su función pues bien.

Los resultados obtenidos por los estudiantes de 3°ESO son resumidos en la Tabla 6.5.8.3, en la cual es posible observar que la mayor parte de los participantes no responde a la cuestión planteada, o lo hace de manera incorrecta. Las respuestas correctas y parcialmente correctas se presentan en un menor porcentaje.

Tabla 6.5.8.3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 8.c

Respuesta	3° ESO
Correcta	15(11,7)
Parcialmente correcta	7(5,5)
Incorrecta	51(39,8)
No responde	55(43,0)
Total	128

Niveles de lectura

En este ítem, al igual que en anteriores, se han analizado los niveles de lectura de los propuestos por Curcio (1989) y Friel et al. (2001), alcanzados por los estudiantes. Las justificaciones utilizadas por los participantes para determinar la veracidad de las afirmaciones propuestas en los apartados 8.a y 8.b, o los argumentos para decidir en 8.c, permiten establecer dicho nivel de lectura.

L0. No leen los datos. Son las respuestas con una evidente carencia de lectura de la información planteada en la tabla. Así, en el apartado 8.a el estudiante E36 indica su acuerdo porque la información aparece en el gráfico, evidenciando que no distingue entre una representación gráfica y una tabular. Algo similar ocurre en 8.b con E10, quien señala

su desacuerdo con la afirmación porque no aparece en los datos propuestos. En el apartado 8.c, el participante E1 no justifica su decisión.

E36: Si, porque sale representado en el gráfico (ítem 8.a).

E10: No, porque no lo pone (ítem 8.b).

E1: Rápido (ítem 8.c).

L1. Leer los datos. La respuesta muestra una lectura literal de la información proporcionada por la tabla. Por ejemplo, el estudiante E40, en 8.a, afirma que es verdadera la afirmación porque solo considera la frecuencia absoluta del intervalo en que aparece el valor indicado en la pregunta, evidenciando una falta de comprensión tanto de la pregunta como del concepto de intervalo. En el apartado 8.b, el estudiante E15 indica su desacuerdo porque considera la frecuencia absoluta del intervalo que incluye el valor señalado en la cuestión. En el último apartado 8.c, E226 realiza una inadecuada interpretación de un intervalo, confundiendo uno de los extremos con el tiempo expresado en segundos.

E40: Si, porque los hombres han tardado 45 a 60 minutos en reaccionar (ítem 8.a).

E15: No, porque no hay 38 hombres, hay 18 hombres (ítem 8.b).

E226: Medio, ya que en treinta minutos y 45 segundos 33 hombres ya están afectados (ítem 8.c).

L2. Leer dentro de los datos. Cuando la respuesta sugiere una correcta lectura de la tabla, y la realización de operaciones o comparaciones de valores. Sin embargo, la justificación aportada denota una limitada comprensión de la cuestión planteada. Por ejemplo, en el apartado 8.a el estudiante E239 indica que la afirmación es falsa, porque considera solo una parte de los valores menores al valor extremo señalado en la pregunta. En 8.b, el estudiante E31 opera con las frecuencias acumuladas de los intervalos, sin embargo, considera en el sustraendo de la resta la frecuencia acumulada de un intervalo equivocado. En el apartado 8.c, el estudiante E4 indica que el efecto del medicamento es lento, pues lee en la tabla que la mayor parte de los hombres tardan más de 15 minutos en tener algún efecto.

E239: No, son 33 porque 20 hombres son los que racionan de 45 a 60 minutos (ítem 8.a).

E31: No, porque si nos fijamos en la tabla “frecuencia acumulada” $53-33=20$ que son los hombres que tardan entre 30 y 60 minutos (ítem 8.b).

E4: Lento, ya que la mayoría tarda más de 15 minutos (ítem 8.c).

L3. Leer más allá de los datos. Este ítem no aborda este nivel de lectura, pues no se requiere la interpolación o extrapolación de los datos.

L4. Leer detrás de los datos. Corresponde al máximo nivel de lectura, el cual es alcanzado cuando se cuestiona la información planteada. En el apartado 8.a, E14 identifica que la frecuencia señalada en la cuestión corresponde a otro conjunto de valores. En el segundo apartado 8.b, el estudiante E14 indica su acuerdo con la afirmación, luego de sumar las frecuencias absolutas de los dos intervalos que incluyen los valores mayores o igual al de la cuestión. Este nivel también se observa en 8.c en la respuesta de E12, quien al comparar las frecuencias de los intervalos presentados en la

tabla, considera que el medicamento tiene un efecto lento, pues la mayoría de los hombres reacciona en el tiempo máximo, correspondiente al intervalo [45, 60[.

E14: No, porque hay 53 hombres no 20 que son los que tardan 45 a 60 minutos (ítem8.a).

E14: Sí, porque 18 que son los que tardan [30, 45[minutos y si le sumamos que son los que tardan [45, 60[minutos sale 38 (ítem 8.b).

E12: Lento porque la mayoría de hombres han reaccionado al medicamento en 45 a 60 minutos (ítem 8.c).

Los niveles de lectura de cada apartado de este ítem se resumen en la Tabla 6.5.8.4 y la Figura 6.5.8.2. La mayor parte de los participantes no alcanza ni un mínimo nivel de lectura (L1) en los apartados, mientras L0 aparece con gran fuerza. El nivel L1 *leer los datos* es alcanzado en un porcentaje mayor en el segundo apartado (8.b), y L2 *leer dentro de los datos* se presenta más en el apartado 8.c.

Tabla 6.5.8.4. Frecuencia (y porcentaje) de niveles de lectura en el ítem 8

Nivel de lectura	3° ESO (n=128)		
	Ítem 8.a	Ítem 8.b	Ítem 8.c
L0	86(67,2)	87(68,0)	93(72,7)
L1	11(8,6)	23(18,0)	7(5,5)
L2	11(8,6)	5(3,9)	13(10,2)
L4	20(15,6)	13(10,2)	15(11,7)

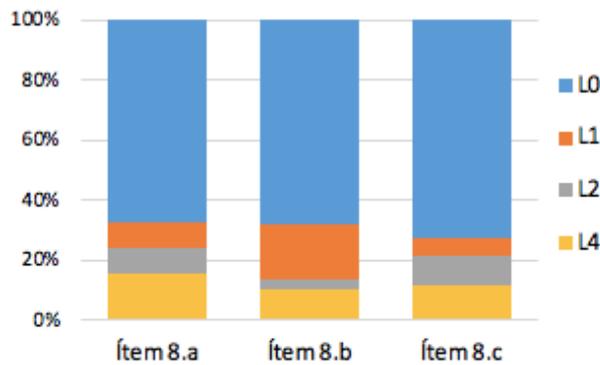


Figura 6.5.8.2. Porcentaje de niveles de lectura alcanzados en ítem 8

El apartado con mejores resultados es 8.a, dado que un mayor porcentaje de estudiantes alcanzó un nivel crítico de lectura (L4), mientras que el más difícil es 8.c, pues muestra un menor porcentaje de estudiantes que alcanzan, al menos, un mínimo nivel de lectura (Curcio, 1989), lo que podría deberse a que se requería tomar una decisión sustentada en los datos. La literatura señala que es complejo para el estudiante este tipo de tareas, especialmente porque los estudiantes priorizan la aplicación de criterios propios de su experiencia (Sharma, 2013). Otra posible explicación de los resultados, podría ser que los estudiantes están habituados en la escuela a resolver situaciones que requieren de una lectura literal. También González et al. (2021), trabajando con tablas de distribución de frecuencias con datos agrupados, con participantes chilenos de 15 a 16 años,

observaron que los estudiantes no consideraban los datos y se basaban en opiniones personales, y que las tareas que requerían de niveles de lectura literal resultaban sencillas. Esto evidencia la necesidad de incorporar en la enseñanza situaciones que promuevan las justificaciones basadas en la información planteada, especialmente en contextos de incertidumbre.

6.5.9. RESULTADOS DEL ÍTEM 9. TRADUCIR UNA DESCRIPCIÓN VERBAL A TABLA DE CONTINGENCIA

En la Figura 6.5.9.1 se presenta el último ítem del cuestionario, tomado de Gea et al. (2020). Se trata de una traducción de lenguaje verbal a tabla de contingencia. Una de las variables se presenta en intervalos de clase, lo que incrementa su nivel de complejidad semiótica al máximo nivel C4.2 de los propuestos por Pallauta y Arteaga (2021). Para realizar la traducción se requiere un nivel de lectura L2 *leer entre los datos* (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), debido a que es necesario desarrollar algunos cálculos sencillos para completar los valores de las celdas de la tabla.

El profesor de matemáticas de quinto de primaria preguntó a sus 100 estudiantes cuántas horas de estudio dedicaron para preparar el examen. Preguntó si estudiaron menos de 5 horas, entre 5 y 10 horas o más de 10 horas. De entre los 53 estudiantes que estudiaron más de 10 horas, 2 suspendieron; de entre los estudiantes que estudiaron entre 5 y 10 horas, 15 aprobaron; mientras que, de los 25 estudiantes que estudiaron menos de 5 horas, sólo 5 aprobaron.

b) Completa la tabla de doble entrada con la información del problema.

				Total
Aprueban				
Suspenden				
Total				100

Figura 6.5.9.1. Ítem 9 del cuestionario de evaluación

Construcción de la tabla de doble entrada

La estructura tabular es entregada a diferencia de otros estudios (Marti et al., 2011) para facilitar el procedimiento de organización de los datos. El estudiante, en primera instancia, debería identificar los intervalos de clase de la segunda variable (tiempo de estudio), y luego llevar los datos entregados de forma verbal a la tabla. Posteriormente, se requiere realizar cálculos sencillos que permitan completar las celdas con los valores del cruce de las categorías de filas y columnas, junto a los totales de las frecuencias marginales respecto a la fila y columna. El estudio realizado por Gea et al. (2020) aporta algunas orientaciones que permiten establecer las categorías detalladas seguidamente.

Tabla correcta. Se completa de manera correcta todos los elementos de la tabla, es decir, se indican los intervalos de clase de la variable tiempo y las celdas con las frecuencias dobles, junto con los totales marginales (respecto a la fila y columna). Por ejemplo, E7 (Figura 6.5.9.2), muestra una comprensión de la situación planteada junto con un adecuado proceso trasnumertativo.

	-5h	5-10h	+10h	Total
Aprueban	5	15	51	71
Suspenden	20	7	2	29
Total	25	22	53	100

Figura 6.5.9.2. Tabla correcta construida por el estudiante E7

Tabla correcta salvo pequeños detalles. Son tablas en que el contenido registrado es correcto, pero se observan algunas omisiones como el cálculo de algún total marginal. Un ejemplo es la respuesta de E9 en la Figura 6.5.9.3, quien dejó en blanco el total de una modalidad de la variable (calificación de la prueba), mientras E74 (Figura 6.5.9.3) deja sin completar los intervalos de clase de la variable tiempo de estudio.

	-5h	5h-10h	+10h	Total
Aprueban	5	15	51	71
Suspenden	20	7	2	
Total	25	22	53	100

E9

				Total
Aprueban	53	15	5	71
Suspenden	2	7	20	29
Total	53	22	25	100

E74

Figura 6.5.9.3. Tabla correcta con pequeños detalles

Tabla parcialmente correcta. En esta categoría se consideran las respuestas que muestran un proceso parcial de traducción de lenguaje verbal a tabla, que se manifiesta en algunos errores puntuales en la obtención de frecuencias dobles o en los totales, y que alteran la información de la situación. Así, en la Figura 6.5.9.4, E15 calcula incorrectamente la frecuencia de los estudiantes que dedican entre 5 y 10 horas al estudio y suspenden, lo que incide en el total de la columna y la fila asociada a dicho dato.

	menos de 5h	Entre 5h y 10h	más de 10h	Total
Aprueban	5	15	51	71
Suspenden	20	22	2	44
Total	25	37	63	100

Figura 6.5.9.4. Tabla parcialmente correcta del estudiante E15

Tabla incorrecta. Estas construcciones no recogen la información entregada, evidenciando un incorrecto proceso de traducción. Por ejemplo, en la Figura 6.5.9.5, el estudiante E5 registra como frecuencia doble (25) en lugar de hacerlo en el total, y también tiene errores en valores de otras celdas de frecuencias y totales. Por otra parte, E20 (Figura 6.5.9.5) no registra de manera adecuada la información entregada y muestra errores en el cálculo de totales respecto a la fila, confundiendo los con medias.

Tiempo	Menos de 5h	Entre 5 y 10h	más de 10h	Total
Aprueban	5	15	51	71
Suspenden	25	2	2	4
Total	30	17	53	100

E5

Horas	10	5-10	-5 horas	Total
Aprueban	98	15	2	115/3
Suspenden	2	85	95	182/100
Total	100	100	100	100

E20

Figura 6.5.9.5. Tablas incorrectas

Los resultados de este ítem se resumen en la Tabla 6.5.9.1, donde la mayor parte de los estudiantes deja en blanco la tabla, seguidos de los que construyen de manera incorrecta. Las tablas correctas aparecen con una tercera mayoría, mientras que las respuestas parcialmente correctas y correctas salvo detalles, aparecen en un menor porcentaje. Estos resultados son inferiores a los obtenidos por Gea et al. (2020), en que la mayor parte de los futuros profesores construyó la tabla correctamente (58%), pese a no contar con la estructura tabular que en este ítem se ofrecía, por otra parte, las respuestas incorrectas o en blanco aparecieron en un menor porcentaje (7,2%).

Tabla 6.5.9.1. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítem 9

Corrección	1º ESO	3º ESO	Total
Correcto	29(19,5)	27(21,1)	56(20,2)
Correcto con detalles	12(8,1)	9(7,0)	21(7,6)
Parcialmente correcto	21(14,1)	11(8,6)	32(11,6)
Incorrecto	41(27,5)	39(30,5)	80(28,9)
No completan la tabla	46(30,9)	42(32,8)	88(31,8)
Total	149	128	277

Ambos cursos obtienen porcentualmente resultados muy parejos, aunque las respuestas parcialmente correctas aparecen en un porcentaje superior en 1ºESO. Por otra parte, las tablas correctas son ligeramente superiores en 3ºESO, mientras que las correctas con detalles aparecen más en 1ºESO. Estos resultados evidencian carencias en el conocimiento de la estructura de la tabla de contingencia, lo que ha sido advertido en otros trabajos (García-Mila et al., 2014; Guimaraes et al., 2021) con estudiantes de diferentes edades. Este hecho pone de manifiesto que pasar de lenguaje verbal a este tipo de tabla requiere de procesos de abstracción para ubicar la información entregada de manera lineal a una disposición de filas y columnas (Martí, 2009) y, por tanto, es necesario tratar con mayor detenimiento estos aspectos en la escuela.

Conflictos semióticos en la construcción de la tabla de contingencia

A continuación, se detallan los diferentes conflictos semióticos cognitivos detectados en las respuestas correctas salvo detalles, parcialmente correctas e incorrectas.
Procedimentales

P3. Cálculo incorrecto o ausencia de totales. Este conflicto, que apareció en ítems anteriores (ítems 1, 2 y 6), se refiere al cálculo incorrecto o ausencia de totales marginales. Ha sido detectado, entre otros por Álvarez et al. (2020) y Gea et al. (2020). Por ejemplo, en la Figura 6.5.9.6, E68 presenta un error al calcular el total marginal, respecto a la fila, de la modalidad "suspenden". Por su parte, E47 deja sin completar los totales marginales de ambas modalidades de la variable "superación de la prueba".

	5h	5-10h	10h	Total
Aprueban	25 5	15	51	71
Suspenden	2 20	7	2	28
Total	25	22	53	100

E68

	-5h	5-10h	+10h	Total
Aprueban	5	15	51	
Suspenden	20	7	2	
Total	25	22	53	100

E47

Figura 6.5.9.6. Ejemplos de conflicto semiótico P3

P6. Cálculo incorrecto o ausencia de frecuencias dobles. Cuando se completa con valores incorrectos las frecuencias dobles, a partir de la información proporcionada de manera verbal. En la Figura 6.5.9.7, E24 no registra la frecuencia doble que representa a los alumnos que estudian de 5 a 10 horas y suspenden, de modo que los totales marginales respecto a la fila y columna no totalizan correctamente su frecuencia y, por consiguiente, es evidente que no se completa el total de la muestra: 100.

	-5h	5h y 10h	+10h	Total
Aprueban	5	15	51	71
Suspenden	20		2	22
Total	25	15	53	100

Figura 6.5.9.7. Ejemplo conflicto semiótico P6 del estudiante E24

Notacionales

N5. Traducción incorrecta del lenguaje verbal. Este conflicto se manifiesta en el registro errado de los valores en la tabla (frecuencias dobles o totales marginales respecto a la columna) descritos verbalmente en la situación problema. Por ejemplo, en la Figura 6.5.9.8, E17 registra incorrectamente el valor 5, correspondiente a una frecuencia doble, en la celda de los estudiantes que dedican menos de 5 horas a estudiar y que suspenden, en lugar de hacerlo en la celda de los que aprueban.

100 Estudiantes	-5h	5h y 10h	+10h	Total
Aprueban	20	15	51	86
Suspenden	5	14	2	21
Total	25	29	53	100

Figura 6.5.9.8. Ejemplo conflicto semiótico N5 del estudiante E17

N6. No registran las etiquetas que corresponden a los intervalos de la variable. Esto ocurre con el estudiante E60, en la Figura 6.5.9.9, quien deja en blanco las celdas destinadas a los valores de variable tiempo de estudio. También se incluyó en este tipo de conflicto a las tablas que en lugar de registrar los intervalos, utilizan dichas celdas para completar totales como ocurre con E91. Este tipo de casos fueron muy escasos y podrían deberse a desconocimiento del lenguaje tabular y para representar los intervalos.

				Total
Aprueban	51	15	5	71
Suspenden	2	7	20	29
Total	53	22	25	100

E60

Niños	53	22	25	Total
Aprueban	51	15	5	71
Suspenden	2	7	20	29
Total	53	15	5	100

E91

Figura 6.5.9.9. Ejemplos conflicto semiótico N6

La Tabla 6.5.9.2 resume los diferentes conflictos identificados en las respuestas de los estudiantes, donde se aprecia que P3, referido al cálculo de los totales marginales, aparece con gran fuerza. Le sigue P6, asociado al cálculo incorrecto de las frecuencias dobles. Otro conflicto de tipo notacional que tiene una amplia presencia es N5, correspondiente al incorrecto registro de los datos proporcionados verbalmente en la tabla. Por curso, los diferentes conflictos semióticos se presentan de manera muy pareja, en ambos grupos, donde la principal diferencia se observa en N6, pues en 3°ESO aparece en un menor porcentaje.

Tabla 6.5.9.2. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de conflictos semióticos en el ítem 9

Tipo de conflicto semiótico	1° ESO (n=149)	3° ESO (n=128)	Total (n=277)
P3. Cálculo incorrecto o ausencia de totales	67(45,0)	62(48,4)	129(46,6)
P6. Cálculo incorrecto o ausencia de frecuencias dobles	53(35,6)	46(35,9)	99(35,7)
N5. Registro incorrecto de datos entregados verbalmente	45(30,2)	41(32,0)	86(31,0)
N6. No registran intervalos de la variable	48(32,2)	25(19,5)	73(26,4)

Síntesis de resultados

En este ítem, para comparar los resultados globales de ambos cursos, se ha asignado una puntuación a la respuesta (sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2; correcta con pequeños detalles: 3; y correcta: 4), en que el estudiante podría alcanzar hasta 4 puntos. El gráfico de barras (Figura 6.5.9.10), muestra que la mayoría de los estudiantes de ambos cursos alcanzan de 0 a 1 punto, mientras que el puntaje máximo se presenta ligeramente con una mayor frecuencia en 1°ESO. La mediana, como se puede observar en el gráfico de caja, y los dos cuartiles coinciden en ambos grupos, siendo muy similares los puntajes obtenidos.

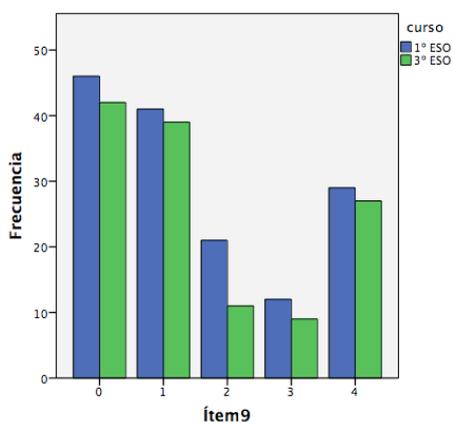


Gráfico de barras dobles

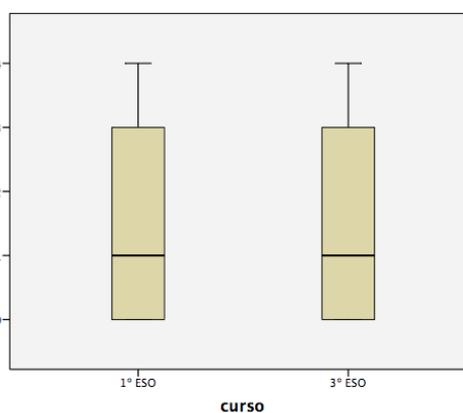


Gráfico de cajas

Figura 6.5.9.10. Distribución total del ítem 9 por curso

6.6. SÍNTESIS DE RESULTADOS

Para finalizar el trabajo, en esta sección se trata de resumir los principales resultados, de modo que se puedan comparar los resultados globales en los dos grupos de estudiantes (Objetivo 3.3), así como en función de las diferentes variables consideradas en el cuestionario (Objetivo 3.4).

6.6.1. PUNTUACIÓN GLOBAL DEL CUESTIONARIO

Para la evaluación de cada ítem se asignó un puntaje de acuerdo a la respuesta entregada de la siguiente manera: sin contestar: 0; incorrecta: 1; parcialmente correcta: 2 y correcta: 3. Excepcionalmente, en el ítem 9 se podrían alcanzar hasta 4 puntos (sin contestar: 0; incorrecto: 1; parcialmente correcto: 2; correcto salvo pequeños detalles: 3; y correcto: 4), pues en este apartado se identificaron cinco categorías a diferencia de los demás ítems. De este modo, es posible entregar una medida cuantitativa del conocimiento global sobre las tablas estadísticas.

Las puntuaciones de los participantes fueron sumadas, diferenciando los ítems que fueron aplicados a una parte o al total de la muestra, de esta manera se obtuvo un puntaje total del cual se calcularon los valores mínimo y máximo, media, desviación típica y coeficiente de asimetría. Dichos valores se presentan en la Tabla 6.6.1.1.

También se presenta la puntuación global de manera diferenciada en la Figura 6.6.1.1, según se trate de 1º curso (1ºESO: N=149) o de 3º curso (3ºESO: N=128). Los estudiantes de 1ºESO podrían alcanzar una puntuación teórica máxima de 46, mientras que la puntuación teórica se incrementa en 3ºESO a 70. Así es que, en 1ºESO se consigue una puntuación máxima de 45, mientras que en 3ºESO se alcanza a 63. Los mayores valores para las medias de los puntajes se alcanzan en el ítem 2 y 6, con sus diferentes apartados, que fueron planteados al total de los estudiantes.

Tabla 6.6.1.1. Estadísticos descriptivos en la puntuación global de los ítems

Ítem	Contenido	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica
1.a	Cálculo f. absoluta	277	0	3	1,90	1,21
1.b	Cálculo f. relativa	128	0	3	1,15	0,90
2	Leer tabla con f. absoluta	277	0	15	14,17	1,87
3	Traducir pictograma a tabla	277	0	9	5,74	2,08
4	Completar tabla de f. acum.	128	0	9	3,06	2,40
5.a	Predecir datos	277	0	3	0,65	0,96
5.b	Generalizar datos	128	0	3	0,53	0,98
6	Traducir barras dobles	277	0	9	7,49	2,37
7	Lectura crítica	277	0	3	1,68	1,20
8	Lectura f. Acum.	128	0	9	2,55	2,69
9	Traducir lenguaje verbal	277	0	4	1,56	1,50

En los histogramas (Figura 6.6.1.1) se observa mayor puntaje en 3ºESO, lo que era esperable, dado que el cuestionario de este curso contaba con un mayor número de ítems. En 1ºESO un participante no obtuvo puntaje, representando un pequeño porcentaje del total de la muestra (0,4%). La moda de la puntuación total en 1ºESO es 32, mientras que en 3ºEOS es 45, valores que superarían la media teórica. La distribución en 1ºESO muestra una asimetría sesgada a la izquierda, con mayor número de estudiantes por

encima de la media y moda, mientras que la distribución de 3ºESO presenta una ligera asimetría sesgada a la izquierda.

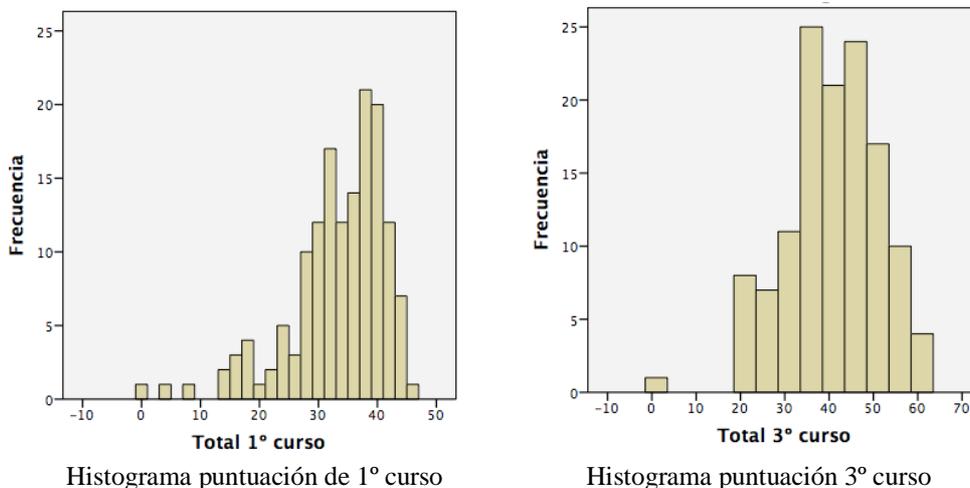


Figura 6.6.1.1. Distribución de la puntuación total en el cuestionario por curso

En la Tabla 6.6.1.2 se presenta el cálculo de estadísticos de la puntuación total alcanzada en ambos cursos. Se observa que la mediana de la puntuación total de 1ºESO es 35, y los cuartiles son 29 (primer cuartil) y 39 (tercer cuartil), mientras que en 3ºESO la mediana es 40,5 y los cuartiles 34 (primer cuartil) y 48 (tercer cuartil). También se aprecia que los valores de media, mediana y moda, en general, son próximos, especialmente en 1ºESO, donde el valor de error típico de asimetría es muy similar en ambos cursos. Las puntuaciones varían de acuerdo a los valores centrales, lo que sugiere que el cuestionario se comporta de forma apropiada para evaluar conocimientos complejos de los estudiantes, como es el caso de la comprensión de las tablas estadísticas (Thissen y Wainer, 2001), además, las puntuaciones se concentran en torno a la parte central.

Tabla 6.6.1.2. Resumen de estadísticos de la puntuación total

Estadístico	1º ESO	3º ESO
	N=149	N=128
Media	32,94	40,78
Mediana	35,00	40,50
Moda	32,00	45
Desviación típica	8,17	10,81
Asimetría	-1,36	-0,42
Error típico. de asimetría	0,20	0,21
Percentiles	25	29,00
	50	35,00
	75	39,00

Diferencias entre grupos

La muestra de este estudio, como se ha señalado anteriormente, se conforma de dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria, por este motivo, en esta sección se realizará un análisis de las diferencias de aciertos en cada uno de los cursos.

En la Figura 6.6.1.2, los histogramas muestran la cantidad de aciertos en cada uno

de los cursos donde, como comentamos anteriormente, es de esperar que en 3ºESO se alcance un mayor número de aciertos debido a que su cuestionario tenía más preguntas. En ambos grupos la moda se sitúa alrededor del valor 10, aunque en 1ºESO hay más estudiantes en el intervalo modal.

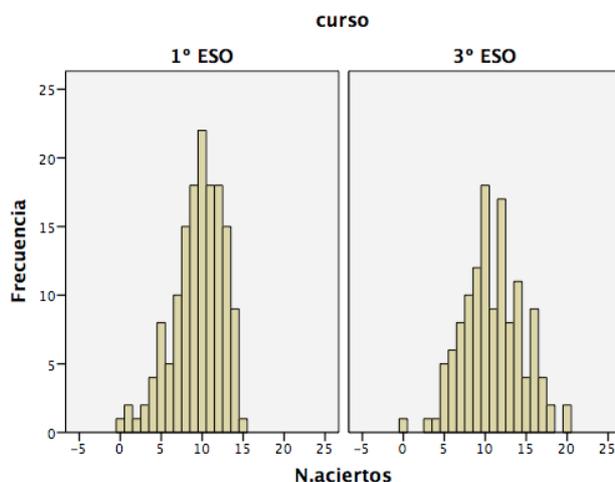


Figura 6.6.1.2. Distribución del número de aciertos totales en los dos cursos

Por otra parte, en la Tabla 6.6.1.3 se presentan los resultados del contraste de diferencia de medias entre ambos cursos, correspondiente a muestras independientes, donde se considera asumir que las varianzas no son iguales. Cabe señalar, que para este análisis se consideraron, únicamente, los ítems que fueron resueltos por ambos cursos, adicionalmente se incluye la media, desviación típica y error típico de la media de cada grupo.

Tabla 6.6.1.3. Comparación de las medias de los aciertos en los dos cursos

Ítem	Media		Desviación típica		Error típico de la media		Valor t	Valor p
	1º ESO	3º ESO	1º ESO	3º ESO	1º ESO	3º ESO		
	N=149	N=128	N=149	N=128	N=149	N=128		
1.a	0,50	0,49	0,502	0,502	0,041	0,041	0,185	,854
2	4,56	4,63	0,833	0,752	0,068	0,066	-0,795	,427
3	1,43	1,46	1,035	0,938	0,085	0,083	-0,265	,791
5.a	0,25	0,21	0,433	0,410	0,036	0,036	0,737	,462
6	2,21	2,20	0,927	0,917	0,076	0,081	0,105	,917
7	0,29	0,52	0,455	0,502	0,037	0,044	-3,920	,000**
9	0,28	0,28	0,448	0,51	0,037	0,040	-0,112	,911
Total	9,52	9,80	3,048	2,600	0,250	0,230	-0,825	,410

Se observa que se presenta una puntuación con una diferencia estadísticamente muy significativa en el ítem 7, mientras que el resto de los ítems no hay diferencias significativas, siendo las medias iguales o ligeramente superiores en 3ºESO. Respecto a la diferencia de puntuación total es muy pequeña (0,28) con una ligera ventaja para 3ºESO.

Para complementar este análisis, en la Figura 6.6.1.3 se muestra el gráfico de caja con las puntuaciones totales de aciertos, que se comportan de manera similar en ambos grupos, compartiendo iguales valores para los tres cuartiles, la única diferencia se aprecia

es que en 1ºESO aparecen un poco más de valores atípicos. Dado estos resultados, se puede concluir que ambos grupos fueron bastante similares y que los conocimientos se conservaron pasados dos años, o lo que es lo mismo, no hay evidencia de un progreso en el tema conforme se avanza en el curso escolar.

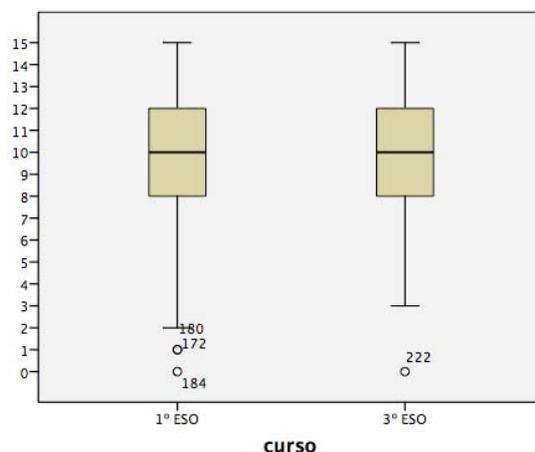


Figura 6.6.1.3. Gráficos de caja del número de aciertos total en los dos cursos

6.6.2. PROPIEDADES PSICOMÉTRICAS DEL CUESTIONARIO

En esta investigación, como se señaló anteriormente, se utilizó un cuestionario de elaboración propia, ítems de respuesta abierta (Martínez et al., 2014), por tanto es necesario realizar el análisis de algunas características psicométricas (Muñiz y Fonseca-Pedrero, 2019), para entregar garantías en una eventual réplica de este instrumento en otro estudio. A continuación, se presentan los resultados de los indicadores considerados.

Indicadores de dificultad de los ítems

En la teoría clásica de los test, cobra especial relevancia el análisis de cada uno de los ítems que componen el cuestionario con el objeto de determinar su calidad (Martínez et al., 2014), la cual se manifiesta en la proporción de respuestas correctas (índice de dificultad). En este estudio, se ha considerado el índice de dificultad como la proporción de participantes que responden de manera correcta entre el número de sujetos que lo intentaron (Barbero et al., 2015; Martínez et al., 2014). En este sentido, es importante que los índices de los ítems tengan una distribución variada (no todos los ítems con igual dificultad), además, se considera que un ítem es difícil cuando su índice es inferior a 0,5, debido a que menos de la mitad de los estudiantes ha conseguido responder de manera correcta.

En la Tabla 6.6.2.1 se presentan los indicadores obtenidos en los que se contempla la media y desviación típica, se diferencian los valores por curso, debido a que solo al grupo de 3º curso se le plantearon todas las preguntas del cuestionario.

Se observa que los ítems muestran un rango de dificultad variado (entre 0,09 y 0,98), lo que indica una buena dispersión de los ítems en función de su dificultad, algunos de ellos resultaron muy sencillos para los estudiantes, mientras que otros tienen una mayor dificultad, pues tienen un indicador de dificultad inferior a 0,5.

Tabla 6.6.2.1. Índice de dificultad de los ítems

Ítem	Contenido	Media		Desv. típica	
		1º ESO	3º ESO	1º ESO	3º ESO
1.a	Cálculo frecuencia absoluta	0,5	0,49	0,50	0,50
1.b	Cálculo frecuencia relativa		0,15		0,36
2.a	Lectura literal	0,96	0,93	0,20	0,26
2.b	Lectura inversa	0,97	0,98	0,18	0,13
2.c	Identificar moda	0,99	0,97	0,12	0,18
2.d	Lectura del total	0,87	0,92	0,34	0,27
2.e	Comparar frecuencias	0,77	0,83	0,42	0,38
3.a	Traducir pictograma	0,72	0,77	0,45	0,42
3.b	Lectura crítica	0,46	0,39	0,50	0,49
3.c	Decidir críticamente	0,25	0,30	0,43	0,46
4.a	Cálculo frecuencia acumulada		0,11		0,31
4.b	Determinar moda		0,27		0,45
4.c	Lectura frecuencia acumulada		0,09		0,28
5.a	Predecir datos	0,25	0,21	0,43	0,41
5.b	Generalizar datos		0,15		0,36
6.a	Traducir gráfico barras dobles	0,56	0,51	0,50	0,50
6.b	Lectura frecuencia marginal	0,78	0,86	0,42	0,35
6.c	Lectura frecuencia condicional	0,87	0,84	0,34	0,37
7	Argumentar a partir de datos	0,29	0,52	0,46	0,50
8.a	Lectura frecuencia acumulada		0,16		0,37
8.b	Lectura suma de frecuencias		0,10		0,30
8.c	Análisis de tendencia		0,12		0,32
9	Traducir verbal	0,28	0,28	0,45	0,45

Los ítems más difíciles fueron los siguientes:

- *Ítem 1.b.* Este ítem, con indicador de dificultad 0,15, consiste en calcular la frecuencia relativa y estaba dirigido solo para los estudiantes de 3ºESO. De ellos, un 18,7% consigue calcularlas de manera correcta o parcialmente correcta, identificando en el proceso una serie de conflictos semióticos.
- *Ítem 3 (apartado b y c).* En estos apartados, con diferentes indicadores de dificultad en cada curso (3.b. 1ºESO: 0,46, 3ºESO: 0,39; 3.c. 1ºESO: 0,25, 3ºESO: 0,30), se refieren a la lectura crítica de la información presentada en un pictograma y traducida a una tabla, por los propios estudiantes. Aunque la mayoría realiza la traducción correctamente (74,3%), en el apartado 3.b un 43% alcanza el máximo nivel de lectura requerido (con una diferencia de porcentaje de 46,3% a 39,1% entre 1ºESO y 3ºESO, respectivamente), mientras que en el apartado 3.c se observan un considerable descenso al 9%, con ligero mejor resultado en 3ºESO (10,9%) que en 1ºESO (7,4%).
- *Ítem 4.* En este ítem con diferentes indicadores de dificultad en cada apartado (4.a: 0,11; 4.b: 0,27; 4.c: 0,09) fue aplicado solo en 3ºESO. Consiste en completar e interpretar una tabla de distribución de una variable cuantitativa con frecuencias acumuladas con un nivel de complejidad semiótico C3.2. El apartado 4.a, que consistía en la lectura de la frecuencia acumulada, fue el más difícil para los estudiantes, debido a que, la gran mayoría, no completó la tabla (57,8%) o lo realizó de manera de incorrecta (29,7%).

- *Ítem 5.* Este ítem se refiere a predecir y generalizar datos presentados en una tabla de distribución de una variable, de complejidad semiótica C3.1, lo que implica un nivel de lectura L3. Sólo el apartado 5.a, asociado a predecir datos dentro de una muestra, fue aplicado a ambos grupos, en los que se obtuvo similar indicador de dificultad, siendo ligeramente superior la dificultad en 3ºESO (0,21) que en 1ºESO (0,25). El apartado 5.b, con indicador de dificultad 0,15 relativo a generalizar los datos a una muestra más amplia, fue un ítem difícil para los estudiantes de 3ºESO. En este ítem, la mayor parte de los estudiantes ni siquiera alcanzan un mínimo nivel de lectura.
- *Ítem 8.* Este ítem se aplicó sólo en 3ºESO, y consta de tres apartados que implican la lectura e interpretación de una tabla de frecuencias con datos agrupados con un nivel de lectura L4 y complejidad semiótica C3.3. En el apartado 8.a, referido a la lectura de una frecuencia acumulada con indicador de dificultad 0,16, se obtuvo un 22,7% de los estudiantes que lo resolvió de manera correcta o parcialmente correcta. El apartado 8.b, asociado a la lectura de la suma de dos frecuencias, con un indicador de dificultad 0,10 fue el más difícil para los estudiantes, mientras que el apartado 8.c, relativo a analizar la tendencia de los datos, presenta un indicador de dificultad de 0,12. La mayor parte de los estudiantes (72,7%) no alcanza un mínimo nivel de lectura.
- *Ítem 9.* Traducir de lenguaje verbal a tabla de contingencia, con un nivel de complejidad semiótica C4.1, cuyo indicador de dificultad fue igual en ambos cursos (0,28). Este ítem fue realizado de manera correcta o parcialmente correcta por un 39,4% de los estudiantes, y se identificaron variados tipos de conflictos semióticos.

Los ítems más sencillos, en que el indicador de dificultad supera a 0,7 en ambos grupos, se detallan a continuación.

- *Ítem 2.* Leer e interpretar una tabla que representaba una variable cualitativa de complejidad semiótica C3.1, en que los dos primeros apartados (a y b) requerían de un nivel de lectura L1, mientras que los siguientes apartados (c, d y e) alcanzaban un nivel de lectura L2. El indicador de dificultad es 0,92 o superior en 3ºESO exceptuando el apartado 2.e que es 0,83. En 1ºESO el indicador de dificultad es 0,96 o superior en los primeros tres apartados (a, b y c) y en los siguientes (d y e) es 0,87 y 0,77. En este ítem la mayoría de los estudiantes de ambos grupos respondió de manera correcta o parcialmente correcta a cada uno de los apartados, alcanzando el mayor porcentaje (97,8%) en el apartado c (identificar la moda).
- *Ítem 3 (apartado a).* Traducir un pictograma a la tabla de frecuencias absolutas de complejidad semiótica C3.1, con indicador de dificultad 0,72 en 1ºESO y 0,77 en 3ºESO. Dicho ítem fue resuelto de manera correcta o parcialmente correcta (75,4%) por la mayor parte de los estudiantes de ambos grupos. Se identificaron algunos conflictos semióticos de tipo notacional asociados a la interpretación del gráfico.
- *Ítem 6 (apartado b y c).* Leer la frecuencia marginal y condicional de una tabla de contingencia correspondiente a la información presentada en un gráfico de barras dobles, con un nivel de complejidad semiótica C4.1, con un indicador de dificultad diferente en cada apartado y curso (6.b. 1ºESO: 0,78, 3ºESO: 0,86; 6.c. 1ºESO: 0,87; 3ºESO: 0,84). Los apartados de este ítem requerían un nivel de lectura L2, y fueron

resueltos de manera correcta o parcialmente correcta por la mayor parte de los estudiantes de ambos grupos (6.b: 83,4%; 6.c: 86%).

Se infiere una tendencia a la dificultad, en función del nivel de complejidad semiótica de la tabla y el nivel de lectura requerido, como se puede apreciar en la Tabla 6.6.2.1. Se observa que los ítems más sencillos, en general, corresponden a un nivel de lectura L1 o L2 y a tablas de complejidad semiótica C3.1, mientras que los más difíciles requieren un nivel de lectura L3 o L4, o se basan en tablas con un mayor nivel de complejidad semiótica.

Indicadores de la discriminación de los ítems

Otro elemento a considerar en el cuestionario es el análisis de la discriminación de los ítems, es decir, la capacidad de separar a los estudiantes de acuerdo a sus conocimientos sobre el tema, lo que permitirá verificar la discriminación en una escala homogénea.

En este caso, el indicador de discriminación corresponderá a la diferencia de la proporción de estudiantes que aciertan y la proporción de estudiantes con inferior desempeño (Martínez et al., 2014) medidos por el total de aciertos, utilizando el contraste de hipótesis de diferencia de medias. Los grupos se obtendrán de 3º curso, porque respondieron todos los ítems del cuestionario. Para ello se usará el método más frecuente, que consiste en seleccionar los estudiantes que puntúan por encima del segundo tercil y debajo del primer tercil. Se elegirán de manera aproximada para que el número de estudiantes de ambos grupos sea razonable. Así, considerando que en 3ºESO (N=128) respondieron todos los ítems del cuestionario, se ha elegido un grupo de 42 y otro de 43 estudiantes con menor y mayor puntuación respectivamente.

Tabla 6.6.2.2. Discriminación de los ítems

Ítem	Grupo	Media	Desviación típica	Error típico de la media	Valor <i>t</i>	Valor <i>p</i>
Ítem 1.a	1	0,21	0,42	0,064	-5,059	,000**
	2	0,70	0,47	0,071		
Ítem 1.b	1	0,00	0,00	0,000	-4,503	,000**
	2	0,33	0,47	0,072		
Ítem 2.a	1	0,90	0,30	0,046	-1,400	,167
	2	0,98	0,15	0,023		
Ítem 2.b	1	0,95	0,22	0,033	-1,432	,160
	2	1,00	0,00	0,000		
Ítem 2.c	1	0,93	0,26	0,040	-1,776	,083
	2	1,00	0,00	0,000		
Ítem 2.d	1	0,83	0,38	0,058	-1,803	,076
	2	0,95	0,21	0,032		
Ítem 2.e	1	0,62	0,49	0,076	-3,268	,002**
	2	0,91	0,29	0,045		
Ítem 3.a	1	0,48	0,51	0,078	-6,716	,000**
	2	1,00	0,00	0,000		
Ítem 3.b	1	0,12	0,33	0,051	-7,021	,000**
	2	0,72	0,45	0,069		
Ítem 3.c	1	0,05	0,22	0,033	-5,812	,000**
	2	0,53	0,51	0,077		

Ítem 4.a	1	0,00	0,00	0,000	-4,266	,000**
	2	0,30	0,47	0,071		
Ítem 4.b	1	0,10	0,30	0,046	-4,641	,000**
	2	0,51	0,51	0,077		
Ítem 4.c	1	0,00	0,00	0,000	-3,800	,000**
	2	0,26	0,44	0,067		
Ítem 5.a	1	0,10	0,30	0,046	-3,400	,001**
	2	0,40	0,50	0,075		
Ítem 5.b	1	0,00	0,00	0,000	-4,989	,000**
	2	0,37	0,49	0,075		
Ítem 6.a	1	0,31	0,47	0,072	-3,571	,001**
	2	0,67	0,47	0,072		
Ítem 6.b	1	0,67	0,48	0,074	-3,564	,001**
	2	0,95	0,21	0,032		
Ítem 6.c	1	0,67	0,48	0,074	-3,158	,002**
	2	0,93	0,26	0,039		
Ítem 7	1	0,07	0,26	0,040	-9,648	,000**
	2	0,79	0,41	0,063		
Ítem 8.a	1	0,00	0,00	0,000	-5,766	,000**
	2	0,44	0,50	0,077		
Ítem 8.b	1	0,00	0,00	0,000	-4,032	,000**
	2	0,28	0,45	0,069		
Ítem 8.c	1	0,00	0,00	0,000	-4,266	,000**
	2	0,30	0,47	0,071		
Ítem 9	1	0,00	0,00	0,000	-8,015	,000**
	2	0,60	0,50	0,075		

A continuación, se describe el método utilizado para analizar la significación estadística de las diferencias entre los aciertos en cada indicador en ambos grupos de estudiantes con conocimientos bajos y otro con altos conocimientos donde, para formar ambos grupos, en primer lugar, se ordena el fichero de datos en orden creciente de aciertos en el cuestionario, pues de este modo se mide el conocimiento global sobre las tablas de cada estudiante.

Luego de ordenar los datos, se formaron dos grupos definidos por su puntuación (Martínez, 2005; Muñiz, 2017): el grupo con puntuación superior (43 estudiantes con mayor puntuación), y el grupo de puntuación inferior (42 estudiantes de menor puntuación). Se realiza una prueba *t* para evaluar las medias de dos muestras independientes de cada uno de los indicadores, entre ambos grupos (superior e inferior), cuyos valores se presentan en la Tabla 6.6.2.2, de este modo será posible analizar la capacidad de discriminación de cada ítem. Previo a la aplicación del contraste *t*, se realizó la prueba de homogeneidad de varianzas, seleccionando el contraste apropiado de acuerdo a la significatividad de la prueba.

En la Tabla 6.6.2.2 se aprecia una fuerte discriminación en la mayor parte de los ítems, exceptuando el ítem 2 con sus diferentes apartados, considerando que los valores *t* son altos y el valor *p* obtenido en la mayoría de ellos, es menor que 0,001. En consecuencia, los ítems del cuestionario permiten discriminar de manera efectiva entre los estudiantes con conocimientos y los que carecen de estos sobre las tablas estadísticas.

De acuerdo al proceso de análisis realizado, es posible confirmar la validez del cuestionario, entendido como la evaluación global del grado en que las evidencias y los

procedimientos teóricos permiten la interpretación de las puntuaciones obtenidas (Martínez et al., 2014).

Como señala Muñiz (2017), existen diferentes procesos para la validación de los test. En este sentido, la validez de contenido del cuestionario fue analizado en el Capítulo 5, asegurando que midiera lo que se pretendía. Estas evidencias de validez se pueden complementar con este estudio de discriminación, lo cual sugiere que el cuestionario presenta una buena validez discriminante, como se pudo observar en los resultados obtenidos en el proceso de análisis (Tabla 6.6.2.2).

Fiabilidad

Se consideró también incluir evidencias sobre la fiabilidad, con el objeto de proporcionar mayor información sobre el cuestionario, basado en la teoría clásica de los test, luego se estudiará la fiabilidad como consistencia interna (Martínez, 2005).

Para ello, como método basado en las covarianzas entre los ítems, se calcula el coeficiente alfa de Cronbach, entendido como la medida de la correlación de los ítems que conforman el cuestionario y que en este caso su valor es 0,787. Kaplan y Saccuzzo (2017) indican como suficientemente buenos valores entre 0,7 y 0,8 para las investigaciones que emplean test, como en este caso, por tanto, el valor obtenido es razonable, considerando que los valores usualmente son moderados en cuestionarios que evalúan conocimientos complejos que no son unidimensionales. Se incluyó, en este caso, los 9 ítems que componen el cuestionario, y sus diferentes apartados que totalizan 23 ítems, con el objeto de entregar una mayor precisión y abarcar todos los contenidos.

Tabla 6.6.2.3. Análisis de fiabilidad del instrumento

Ítem	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach se elimina el elemento
1.a	10,45	11,809	,358	,776
1.b	10,80	12,179	,397	,774
2.a	10,02	13,086	,078	,788
2.b	9,96	13,014	,297	,783
2.c	9,98	12,952	,249	,782
2.d	10,02	12,842	,198	,784
2.e	10,12	12,435	,269	,781
3.a	10,17	11,828	,447	,770
3.b	10,55	11,729	,396	,774
3.c	10,65	11,883	,380	,774
4.a	10,84	12,422	,351	,777
4.b	10,67	12,206	,284	,781
4.c	10,86	12,547	,336	,778
5.a	10,73	12,275	,297	,780
5.b	10,80	12,258	,365	,776
6.a	10,44	12,295	,213	,787
6.b	10,09	12,378	,324	,778
6.c	10,11	12,555	,229	,783
7	10,43	11,397	,486	,767
8.a	10,78	11,873	,502	,768
8.b	10,84	12,432	,361	,777
8.c	10,83	12,411	,343	,777
9	10,66	11,721	,444	,770

En la Tabla 6.6.2.3 se presenta un resumen de los estadísticos en el cuestionario en su conjunto, el cual recoge el coeficiente alfa de Cronbach cuando se suprime cada uno de los ítems. Se observa que todas las correlaciones son positivas y superan el valor 0,2 excepto algunos apartados del ítem 2 (a y d). Dicha correlación es un índice de discriminación que complementa el análisis anterior y reafirma la capacidad de discriminación de los ítems del cuestionario.

En relación a la variación del coeficiente alfa de Cronbach, se observa que decrece en la mayoría de los casos cuando se elimina el ítem, exceptuando en los ítems 2.a y 6.a que se incrementa ligeramente o se mantiene el valor, respectivamente.

6.6.3. RESUMEN DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS

En este apartado se resumen los conflictos semióticos detectados en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes en los diversos ítems planteados. En la Tabla 6.6.3.1 se puede apreciar los tres tipos de conflictos semióticos detectados, clasificados en conceptuales, procedimentales y notacionales.

Se observa que los conflictos conceptuales que más aparecen son C1.1 que denota la confusión entre frecuencias absolutas y relativas, C2 que evidencia un desconocimiento de la estructura de la tabla con sus diferentes elementos, y C3 correspondiente a confundir la frecuencia con el valor de la variable y que fue anteriormente detectado por Mayén et al. (2009). En relación a los conflictos procedimentales, P3 aparece en una mayor cantidad de ítems y se refiere a cálculo incorrecto o ausencia de totales, lo que refleja un conflicto con el algoritmo de la suma (Álvarez et al., 2020).

En el caso de los conflictos semióticos notaciones aparecen en un número mayor de ítems N1, en que no se alcanza ni un mínimo nivel de lectura de la información de los datos, le sigue N2 que refleja una inadecuada interpretación de la cuestión planteada.

Tabla 6.6.3.1. Tipos de conflictos observados en los diferentes ítems

Conflictos semióticos	Ítems												
	1.a	1.b	2.a	2.b	2.c	2.d	2.e	3.a	4.a	4.b	4.c	6.a	9
Conceptuales													
C1. Confunde f. ordinarias													
C1.1. Absolutas y relativas	x	x	x		x		x						
C1.2. Relativas y acum.		x											
C1.3. Relativas y porcentajes		x											
C1.4. Abs. y porcentajes													x
C2. Desconoce la estructura de la tabla	x	x							x	x	x		
C3. Confunde f. y valor de la variable				x						x	x		
C4. Conflicto f. acumulada													
C4.1. Producto: variable- f. abs.									x				
C4.2. Confunde f. abs y acum.									x	x	x		
Procedimentales													
P1. Confunde o clasifica incorrectamente valores	x	x											
P2. Calcular f. relativas													
P21. Invierte numerador y denominador		x											

la recogida de datos era especialmente complejo, debido a las restricciones de acceso a los centros educativos por la crisis sanitaria generada por el COVID-19.

Por otra parte, en la Sección 6.6.2 se obtuvo un valor de 0,787 para el coeficiente de fiabilidad en la aplicación del cuestionario. En este apartado se justificó que dicho valor es suficiente, pues se enmarca dentro de límites razonables (Kaplan y Saccuzzo, 2017), considerando la variedad de contenidos que contemplaba el cuestionario (tipos de tablas, junto a su complejidad semiótica, variedad de actividades y niveles de lectura). El cuestionario fue construido de manera rigurosa, como se describió en el Capítulo 5.

O3.2. Analizar la comprensión y describir los conflictos semióticos de los estudiantes en cada uno de los ítems que conforman el cuestionario.

Este objetivo también se considera alcanzado. Cada uno de los ítems que componen el cuestionario ha sido analizado en detalle, clasificando las respuestas de los estudiantes en función de su calidad y corrección. Dichas respuestas, en primera instancia, fueron categorizadas en correctas, parcialmente correctas e incorrectas, en la mayoría de los casos. Excepcionalmente, en dos apartados no se observaron respuestas parcialmente correctas (ítem 2.d y 4.b), mientras que en otro se distinguieron respuestas correctas con pequeños detalles (ítem 9).

Así también, en el análisis se consideró, como en otros estudios con tablas estadísticas (Castellaro y Roselli, 2020; Gabucio et al., 2010), el nivel de lectura alcanzado por los estudiantes de acuerdo a los niveles propuestos por Curcio y colaboradores, identificando la distribución de los niveles de lectura alcanzados en los diferentes ítems por los estudiantes.

El análisis también permitió identificar una serie de conflictos semióticos cognitivos ligados al trabajo con tablas estadísticas, que fueron clasificados en conceptuales, procedimentales y notacionales, de acuerdo a sus particulares características.

O3.3. Comparar los resultados obtenidos por los estudiantes de 1º y 3º curso de la ESO.

Para alcanzar este objetivo se llevaron a cabo variadas acciones, como diferenciar los resultados obtenidos por cada grupo en los ítems que compartieron, así como un análisis global tanto de las puntuaciones como de la cantidad de respuestas correctas en los ítems que fueron resueltos por los estudiantes de ambos niveles educativos. Dichas comparaciones muestran resultados muy similares, con escasas diferencias significativas entre ambos grupos.

El estudio de las medias de aciertos muestra una ligera ventaja para 3ºESO en los ítems resueltos por ambos grupos, las principales ventajas se observan en el ítem 2, correspondiente a la lectura e interpretación de una tabla con frecuencias absolutas (Media 1ºESO: 4,56; Media 3ºESO: 4,63) y en el ítem 7 (Media 1ºESO: 0,29; Media 3ºESO: 0,52) asociado a argumentar a partir de una tabla de datos, el cual tiene una diferencia estadísticamente significativa.

Así también, el grupo de 1ºESO muestra algunas ligeras ventajas en la media de aciertos de los ítems 1.a que requería el cálculo de frecuencias absolutas (Media 1ºESO:

0,50 ; Media 3ºESO: 0,49); en el ítem 5.a (Media 1ºESO: 0,25; Media 3ºESO: 0,21) correspondiente a predecir datos dentro de una muestra y por último en el ítem 6 (Media 1ºESO: 2,21; Media 3ºESO: 2,20) ligado a traducir un gráfico de barras dobles a tabla.

O3.4. Comparar los resultados en función de las variables introducidas en el cuestionario: tipo de tabla, tipo de frecuencia, procedimiento y nivel de lectura.

Este objetivo se considera cumplido. Cada uno de los ítems fueron analizados detalladamente considerando las variables señaladas. De este modo, a través de la evaluación de las respuestas se pudo identificar los aspectos que presentaron mejores resultados y los que requieren refuerzo.

En el análisis se observó que los ítems correspondientes a tablas de frecuencias absolutas (ítem 2) resultan sencillos para el estudiante, mientras que las tablas que representan frecuencias relativas (ítem 1.b y 5), acumuladas (ítem 4) o con datos agrupados en intervalos (ítem 8), son más complejas para ellos. Algo similar ocurre con las tablas de contingencia (ítem 9). Las actividades que implican la construcción de tablas (ítem 1 y 9), así como argumentar decisiones (ítem 7) no son sencillas para los estudiantes, mientras que la traducción de gráfico a tabla (ítem 3.a y 6.a) muestra mejores resultados.

En cuanto a los niveles de lectura, de los propuestos por Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel et al., 2001), los más sencillos son alcanzados fácilmente (ítem 1), mientras que los más sofisticados como *leer detrás de los datos* (ítem 5) y *leer más allá de los datos* (ítem 3.c y 7) son más complejos para los estudiantes.

O3.5. Estudiar las características psicométricas del cuestionario.

Para alcanzar este objetivo, desde el Capítulo 5 se partió describiendo en detalle el estudio de la validez de contenido del instrumento utilizado y que se ha completado en este Capítulo.

En la Sección 6.6.2 se realiza un estudio de la dificultad y discriminación de los ítems junto a la fiabilidad del cuestionario. La dificultad presentó un rango de valores variados entre 0,09 y 0,99. Algunos de los ítems más difíciles para los estudiantes son el cálculo de frecuencias relativas (ítem 1.b) con valor 0,15; completar una tabla con frecuencias acumuladas (ítem 4.a) con valor 0,11, e interpretarla, identificando la moda (ítem 4.b) con valor 0,27, y leyendo la frecuencia acumulada (ítem 4.c) con valor 0,09, lo que resultó muy complejo para los estudiantes. Así también, generalizar datos a partir de una tabla de frecuencias absolutas (ítem 5.b) con valor 0,15, junto a analizar la tendencia de los datos (ítem 8.c) con valor 0,12, fueron difíciles para los estudiantes.

Entre los ítems más sencillos, se destaca la lectura e interpretación de tablas con frecuencias absolutas (ítem 2) con indicadores 0,77 o superior, alcanzando hasta el valor 0,99; Traducir de pictograma a tabla (ítem 3.a) con valor 0,77 en 3ºESO y 0,72 en 1ºESO, junto a la lectura de la frecuencia marginal (ítem 6.b) o condicional (ítem 6.c) de una tabla con valor superior a 0,84 en 3ESOº y 0,78 en 1ºESO.

En el estudio de la discriminación, entendido como la capacidad de separar a los estudiantes en función de sus conocimientos, se observó una fuerte discriminación en la mayoría de los ítems (respecto a la cantidad de respuestas correctas) lo que indica que el cuestionario permite discriminar de manera efectiva entre los estudiantes que tienen o no

conocimientos, en relación a los diferentes tipos de tablas estadísticas y las tareas planteadas.

En relación a la fiabilidad, se destaca que el cuestionario tiene un coeficiente de fiabilidad de 0,787, como se indicó en el Objetivo 1, valor que es suficientemente bueno, considerando las características de instrumento.

6.7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS

Inicialmente se plantearon las siguientes hipótesis, que se pasan a discutir.

H1. Se espera que los estudiantes presenten dificultades en los niveles avanzados de lectura de las tablas estadísticas.

Esta hipótesis se cumple, dado que los estudiantes presentaron diferentes conflictos semióticos notacionales ligados a la lectura e interpretación de tablas estadísticas.

Las actividades que requerían los primeros niveles de lectura (L1 y L2), especialmente en tablas solo con frecuencias absolutas, fueron resueltas con facilidad, mientras que las tareas que requerían niveles más sofisticados de lectura como L3 y L4, fue posible observar que, en varios ítems, los estudiantes ni siquiera consiguieron alcanzar un mínimo nivel de lectura o interpretar adecuadamente la cuestión planteada (Tabla 6.6.3.1). Estos resultados coinciden con los de otros estudios (Chick, 2004; Diaz-Levicoy et al., 2019; 2020; Estrella y Estrella, 2020; Gabucio et al., 2010; Pérez-Sedano, 2015) que alertan sobre lo complejo que resulta para los estudiantes alcanzar niveles más sofisticados de lectura en tablas estadísticas.

H2. Siguiendo esta línea, también se espera encontrar conflictos semióticos en la construcción de tablas, o en su traducción a diferentes tipos de registro (tabla a tabla, gráfico a tabla, verbal a tabla, tabla a estadístico).

Esta hipótesis se confirma. En el análisis se identificó una variedad de conflictos semióticos cognitivos de tipo conceptual, procedimental y notacionales, ligados a la construcción de tablas y a la traducción de diferentes lenguajes (gráfico y verbal) a tabla.

En la construcción de tablas (ítem 1) se observaron conflictos conceptuales como confusión entre los diferentes tipos de frecuencias o desconocer la estructura de la tabla, mientras que otros refieren a confundir la frecuencia con el valor de la variable o confundir el concepto de frecuencia acumulada. Entre los conflictos procedimentales encontramos la clasificación incorrecta de valores, los referidos al cálculo de la frecuencia relativa tales como invertir el numerador y denominador, además de calcular incorrectamente o no completar totales, entre otros. Algunos de estos habían sido advertidos en la literatura previa (Álvarez et al., 2020; Batanero y Godino, 2001; Fernandes et al., 2019), pero no en términos de conflicto semiótico.

Respecto a la traducción, en el caso de pictograma a tabla (ítem 3.a) se detectaron los conflictos semióticos notacionales como traducir de manera literal de gráfico a tabla, ignorando la escala del ícono, o no alcanzar un mínimo nivel de lectura de los datos. Para la traducción de gráfico de barras doble a tabla (ítem 6.a) surgieron conflictos

conceptuales como confundir las frecuencias absolutas con las porcentuales, también de tipo procedimental como el cálculo incorrecto o ausencia de totales, y notacionales evidenciados en que no se alcanza un mínimo nivel de lectura de los datos, así como interpretar incorrectamente las etiquetas de la tabla.

En la traducción de verbal a tabla (ítem 9), en los conflictos procedimentales se repite el cálculo incorrecto o ausencia de totales, además del cálculo incorrecto o ausencia de frecuencias dobles. Los conflictos semióticos notacionales observados fueron la traducción incorrecta del lenguaje verbal y no registrar en las etiquetas los intervalos de clase. Algunos de estos conflictos habían sido detectados anteriormente (Gea et al., 2020).

H3. Se espera encontrar un progreso con la edad tanto en la lectura, como en la construcción de las tablas estadísticas.

Esta hipótesis se cumple, debido a que en la mayor parte de los ítems ligados a la lectura, resueltos por ambos grupos (ítem 2, 3, 6 y 7) se observó una ligera ventaja para los estudiantes de 3ºESO, especialmente cuando se requería de los niveles de lectura más sofisticados (L3 y L4). Sin embargo, se coincide con Gabucio et al. (2010) en que alcanzar dichos niveles de lectura, a pesar de tener mayor edad, es complejo para los estudiantes.

En la construcción de tablas (ítem 1, 3, 6 y 9) la hipótesis no se cumple, pues los resultados obtenidos por ambos grupos son muy similares, a diferencia de otros estudios sobre la construcción de tablas (Guimaraes et al., 2021; Marti et al., 2011). A pesar de entregar la estructura de la tabla, contrario a otros estudios (Díaz-Levicoy, 2018; Guimaraes et al., 2021), con el objeto de facilitar la tarea, se considera que los resultados en general son bajos, evidenciando que la construcción de tablas, especialmente cuando se incrementa el nivel de complejidad semiótica, no resulta sencillo para los estudiantes.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

- 7.1. Introducción
- 7.2. Conclusiones respecto a los objetivos generales del trabajo
- 7.3. Principales aportaciones
- 7.4. Limitaciones y líneas de investigación abiertas

7.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo, para finalizar la Memoria, se presenta un resumen de las principales conclusiones obtenidas en esta investigación, con la idea de poner en valor las aportaciones originales sobre el estudio de las tablas estadísticas. Para iniciar, se discuten las conclusiones en relación a cada uno de los objetivos generales planteados en el Capítulo 1, puesto que cada uno de los cuatro estudios que componen este trabajo tiene objetivos e hipótesis específicas, que fueron discutidas con detalle en su correspondiente capítulo, luego en esta sección no se repiten.

A continuación, se resaltan las principales aportaciones del trabajo respecto a la investigación en Didáctica de la Matemática, las cuales se han recogido en variadas publicaciones en revistas, así como en congresos del área. Finalmente, se plantean algunas limitaciones las que, en algunos casos, dan origen a líneas de investigación futuras que podrían complementar este trabajo.

7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS GENERALES DEL TRABAJO

En el Capítulo 1 se describen tres objetivos generales con los que parte esta investigación, y a continuación se presenta, para cada uno de ellos, las conclusiones que se han obtenido.

Objetivo 1. Realizar un análisis detallado del tipo de tabla estadística y las características de la actividad matemática que se propone al estudiante en las situaciones-problema que se plantean mediante representación tabular en estadística, en una muestra de textos dirigidos a estudiantes chilenos y españoles de Educación Básica en edades similares.

Se considera que este objetivo ha sido alcanzado razonablemente, en los Capítulos 3 y 4 donde se analizó una muestra de 12 textos escolares chilenos dirigidos a los últimos cursos de Educación Básica (10 a 13 años) y 24 libros de texto españoles, 6 de ellos correspondientes a los últimos cursos de Educación Primaria (5° y 6° curso), y 18 que abarcan toda la Educación Secundaria Obligatoria. Dicho análisis permitió caracterizar la actividad matemática que se espera de los estudiantes sobre las tablas estadísticas de ambos países.

La base del estudio fue el análisis epistémico del significado de la tabla estadística, considerando sus diferentes tipos (datos, distribución de una frecuencia, doble entrada o contingencia) junto al nivel de complejidad semiótico, presentado en el Capítulo

1. Algunos resultados fueron publicados en Pallauta et al. (2020). El análisis semiótico permitió obtener una primera versión del significado institucional de referencia de las tablas estadísticas en este trabajo. Así también, en dicho capítulo se analizaron los lineamientos curriculares chilenos, españoles y más destacados a nivel internacional, considerados de referencia. Producto de dicho estudio, también se abordó las relaciones algebraicas entre los objetos matemáticos que pueden estar presentes en los diferentes tipos de tablas en Pallauta et al. (2020), desde los niveles de razonamiento algebraico propuesto por (Godino et al., 2014; 2015), lo que no había sido considerado en investigaciones previas.

Los análisis realizados en los Capítulos 3 y 4 permitieron establecer el significado institucional implementado sobre las tablas estadísticas en las muestras de libros de texto, donde se analizó un gran número de actividades (990 en textos chilenos y 2861 en los españoles). El tipo de tabla estadística más utilizada en los libros de texto de ambos países es la de distribución de una variable con frecuencias ordinarias con un nivel de complejidad semiótica C3.1. Las tablas de doble entrada o contingencia de complejidad semiótica C4 tienen escasa presencia en los textos chilenos, y su frecuencia no sigue una tendencia clara conforme se progresa de curso, a diferencia del caso español, las cuales se incrementan al avanzar de curso, cobrando mayor importancia en 4°ESO.

El tipo de situación-problema que se presenta con mayor frecuencia en los textos de ambos países es la traducción de tabla a resumen estadístico, en que a partir de la información expuesta en una tabla se debe calcular alguna medida, generalmente de centralización o dispersión, seguido de la construcción de tablas de distribución de una variable. Otra similitud en los libros de texto de los dos países, es que se priorizan tareas con niveles de lectura elementales, de los propuestos por Curcio (1989) y Friel et al. (2001), específicamente el de leer dentro de los datos, mientras que los niveles más sofisticados de lectura como leer más allá de los datos o leer detrás de los datos aparecen muy escasamente. Así, también, se consideró el análisis de las tareas, y aquellas planteadas en los libros de texto que involucran el uso de recursos tecnológicos, si bien ambos países las incluyen, pero de manera muy escasa.

Finalmente, los conflictos semióticos encontrados en los textos analizados se identifican y categorizan, de acuerdo a los objetos matemáticos primarios involucrados. Dichos conflictos semióticos potenciales se relacionan con impresiones de los conceptos, o solicitar estadísticos inadecuados para las variables representadas.

Las diferentes variables analizadas fueron comparadas por curso y también por editorial. Se detectaron diferencias importantes, especialmente entre editoriales, pues algunas, por ejemplo, no consideran determinados tipos de tablas estadísticas o su presencia es muy escasa, lo que pone de manifiesto la responsabilidad del profesor en la selección de los textos para el proceso de instrucción. Pues cada uno de los elementos considerados en estos estudios repercuten en la demanda cognitiva que alcanza la tarea debido a los diferentes objetos matemáticos involucrados.

Objetivo 2. Construir un instrumento válido y fiable para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas de los estudiantes chilenos de quinto a octavo Básico, y españoles de Educación Secundaria Obligatoria, y los conflictos semióticos

asociados, con el fin de caracterizar el significado personal adquirido por los estudiantes en estos niveles educativos.

La construcción de un cuestionario que sirviera para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas era necesario para alcanzar el Objetivo 3, como se observó, luego de verificar en la revisión de las investigaciones previas la inexistencia de un instrumento ajustado a las características deseadas para este estudio. A pesar de identificar algunas investigaciones en torno al tema, estas tenían otras características, por ejemplo: se dirigían a estudiantes de otras edades, contemplaban el estudio en conjunto con gráficos estadísticos, o se consideraba solo un tipo de tabla estadística. En resumen, los instrumentos observados no consideraban de manera conjunta los diferentes tipos de tablas propuestas en los lineamientos curriculares españoles, así como la variedad de procedimientos posibles de realizar en torno a ellas.

Se considera cumplido este objetivo, puesto que se ha llevado a cabo dicha construcción, siguiendo un procedimiento riguroso. El instrumento que se requería para evaluar la comprensión de los estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria sobre las tablas estadísticas ha contemplado diferentes variables, las cuales surgieron producto del análisis de los lineamientos curriculares y los libros de texto descritos en los Capítulos 1, 2, 3 y 4.

El cuestionario se diseñó, como se describe en el Capítulo 5, partiendo de la definición semántica del constructo, en la que se consideraron las variables que serían incorporadas en el cuestionario, y que surgieron a partir del análisis de los libros de texto, junto a la revisión de los antecedentes sobre el tema. Las variables consideradas fueron: tipo de tabla y nivel de complejidad semiótica, niveles de lectura y procedimiento pedido.

La construcción del cuestionario contempló la creación de un banco de ítems de respuesta abierta conformado de tareas seleccionadas de investigaciones previas, libros de texto, así como de las orientaciones curriculares; los ítems, en varios casos, fueron adaptados de acuerdo a los intereses del estudio. Finalmente, la elección de los ítems definitivos del cuestionario se realizó a través del juicio de expertos. La realización del proceso seguido asegura la validez del contenido del cuestionario final. Así también, se ha complementado el estudio de su fiabilidad, dificultad y discriminación de los ítems que lo conforman.

Objetivo 3. Aplicar el cuestionario construido a una muestra de estudiantes españoles de 1º y 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), para caracterizar el significado personal que alcanzan sobre las tablas estadísticas, evaluando su comprensión y sus conflictos semióticos.

Este objetivo es relevante debido a la carencia de investigaciones sobre la comprensión de las tablas estadísticas con estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria. La revisión de los antecedentes en el Capítulo 2 evidenció, en general, que los estudios en torno a la tabla estadística son escasos y usualmente se plantean junto a los gráficos estadísticos, quedando relegadas a un segundo plano. En este sentido, este trabajo aporta información original, pues no se encontraron estudios de tipo global, como el descrito en el Capítulo 6, que aborden profundamente este objeto matemático, contribuyendo de este modo a nuevos antecedentes.

Este objetivo general, que posee gran relevancia en este estudio, se considera cumplido. Pues como se describe en el Capítulo 6, el cuestionario fue aplicado a una muestra de 277 estudiantes españoles de 1º y 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria de dos institutos públicos de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Por otra parte, cada una de las respuestas de los participantes en los diferentes ítems fue analizada en detalle, clasificándola en función de su calidad e identificando, de manera paralela, una serie de conflictos semióticos cognitivos ligados al trabajo con tablas estadísticas.

Los resultados del análisis aportan información referida sobre la dificultad de las tareas planteadas, así como de los niveles de lectura alcanzados y los conflictos semióticos conceptuales que presentan los estudiantes. Se observó que los estudiantes son capaces de comprender tablas estadísticas con niveles iniciales de complejidad semiótica, sin embargo, al incrementar de nivel se presentan dificultades y con ello aparecen los conflictos semióticos cognitivos, ligados a la construcción y la lectura, que fueron clasificados como conceptuales, procedimentales y notacionales.

Dado que el cuestionario, para el grupo de 3ºESO, tenía un mayor número de ítems, el análisis del mismo contempló identificar las diferencias de resultados en los ítems que coincidían ambos grupos de acuerdo a la puntuación obtenida y el número de aciertos en cada ítem. Parte de los resultados se han publicado en Pallauta, Arteaga y Garzón-Guerrero (2021).

7.3. PRINCIPALES APORTACIONES

En esta investigación se han realizado diferentes contribuciones, las cuales se respaldan a través de diversas publicaciones y participaciones en congresos internacionales. En esta sección se sintetizan estas aportaciones.

Contribución a la investigación en educación estadística

Este trabajo aporta nuevo conocimiento en esta línea de investigación, dado que, como se ha indicado en los diferentes capítulos, son escasas las investigaciones centradas de manera específica en la comprensión de las tablas estadísticas en las edades abordadas. La mayoría de las existentes se han enfocado solo en un tipo de tabla (Gabucio et al., 2010; Marti et al., 2011), o en las dificultades en su construcción (Álvarez et al., 2020; Guimarães et al., 2021).

El análisis realizado a los lineamientos curriculares, es un punto de partida que permitió conocer la presencia de las tablas estadísticas dentro de los contenidos y objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria. Se abordaron los análisis de documentos curriculares chilenos (MINEDUC, 2015; 2018), españoles (MECD, 2014; 2015), y otros como el NCTM (2014) y el proyecto GAISE (Franklin et al., 2005), con la idea de identificar sus similitudes y diferencias, además de caracterizar el significado institucional pretendido sobre este tema. Los resultados de este estudio se pueden observar en el Trabajo Fin de Máster (Pallauta, 2018), en algunas publicaciones (Pallauta et al., 2020), y de manera más completa en el Capítulo 1, en que se incorpora el análisis de las directrices curriculares españolas.

El estudio de los libros de texto chilenos y españoles, descrito en los Capítulos 3 y 4, respectivamente, es novedoso, pues en ambos países no había estudios previos que

abordaran los niveles educativos analizados. Sobre este punto, se aporta una descripción detallada del significado institucional implementado, tanto en los textos chilenos como españoles, a través de un análisis semiótico en que se caracteriza cada uno de los objetos matemáticos involucrados en el estudio de las tablas, para las edades consideradas en el estudio, situando de este modo a la tabla estadística como un objeto matemático de estudio. Así también, se consideran otras variables que pueden influir en el aprendizaje (e.g. contexto, tecnología). Otra novedad que se aporta, es una ampliación de los niveles de complejidad semiótica, propuesto inicialmente por Arteaga (2011) para los gráficos estadísticos, para el caso de las tablas estadísticas (Pallauta y Arteaga, 2021) el que considera los diferentes objetos matemáticos que se puedan presentar en la tabla incrementando su complejidad. Dicho modelo ya ha comenzado a ser utilizado en el análisis de las tablas estadísticas en libros de texto dirigidos otros niveles educativos (Arredondo et al., 2021). Los resultados de los análisis de los libros de texto han sido publicados en diversos trabajos, considerando el contexto chileno (Pallauta et al., 2021), español (Pallauta, Arteaga, et al., 2021; Pallauta, Gea, et al., 2021), y comparando ambos países en Educación Primaria (Pallauta, Batanero, et al., 2021) y Secundaria (Pallauta, Batanero, Gea, et al., 2021).

Otra aportación destacada de este trabajo consiste en la construcción de un cuestionario para evaluar la comprensión de tablas estadísticas que ha sido detallada en el Capítulo 5. Se considera que dicho cuestionario es un aporte, debido a la inexistencia de instrumentos que aborden la variedad de tablas estadísticas, junto a los diferentes procedimientos posibles de realizar en ellas. Para su confección, se siguió un método riguroso en el que se consideró la valoración de juicio de expertos, por tanto, es un instrumento que podría ser aplicado en otros contextos.

Los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario a estudiantes españoles de Educación Secundaria Obligatoria para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas, ofrece una caracterización del significado personal atribuido a este objeto matemático por parte de los participantes. En el Capítulo 6 se presenta un análisis exhaustivo sobre el porcentaje de estudiantes que consigue realizar cada una de las tareas propuestas con éxito, así como la valoración del nivel de lectura alcanzado en la mismas. Por otra parte, las respuestas incorrectas y parcialmente correctas han permitido identificar y caracterizar los conflictos semióticos cognitivos que manifiestan los estudiantes en el trabajo con tablas estadísticas. Los resultados obtenidos son originales, y parte de ellos han sido publicados (Pallauta, Arteaga y Garzón-Guerrero, 2021) y presentados en diferentes congresos internacionales (CERME, 2022; ICOTS, 2022).

Implicaciones para la enseñanza

Los resultados obtenidos tanto en el análisis de libros de texto (Capítulos 3, 4) como en la aplicación del cuestionario (Capítulo 6), pueden ser de interés tanto para la formación de futuros profesores como para docentes en ejercicio, dado que se entregan algunas indicaciones referidas a las dificultades y errores que pueden manifestar los estudiantes en el trabajo con las tablas estadísticas, en términos de conflictos semióticos. De este modo, dichos resultados aportan al profesor, por una parte, algunos criterios a considerar en la selección de un determinado libro de texto, así como anticiparse a los

conflictos que pueden surgir en el proceso de enseñanza y que deberían estar considerados en el diseño de instrucción.

Por otra parte, el análisis de los libros de texto (Capítulos 3 y 4) también puede dar orientaciones a los autores y editoriales de libros de texto para realizar mejoras o ajustes en las propuestas, las cuales finalmente pueden repercutir en el aula.

Otras aportaciones

En este trabajo se incluyó el estudio del estado de la cuestión sobre las tablas estadísticas desde variadas perspectivas, como el análisis de su presencia en libros de texto, su comprensión tanto de estudiantes, de diferentes edades, como de futuros maestros o de profesores en ejercicio. Aunque dichos estudios cuando se comenzó esta tesis eran escasos, especialmente los dirigidos a estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, fueron la base para iniciar este trabajo. En el Capítulo 2 se entrega un panorama general en torno a la literatura sobre las tablas estadísticas, el cual se resume en una publicación Pallauta, Gea, Arteaga y Begué (2022, en prensa).

Otro aporte derivado del análisis semiótico realizado a las tablas estadísticas, junto a su clasificación de acuerdo a los niveles de complejidad semiótica, desembocó en el análisis de la actividad algebraica implicada en el trabajo con cada tipo de tabla a través de los niveles de algebrización propuestos por Godino y colaboradores (Godino et al., 2014; 2015), algunos resultados obtenidos en el análisis de libros de texto han sido publicados (Pallauta et al., 2020), y presentados en algunos congresos o jornadas de Educación Matemática (ICERI, 2020; ICME, 2021; SOCHIEM, 2021).

7.4. LIMITACIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

El presente estudio, como cualquier otro, posee ciertas limitaciones, a pesar de la variedad de aportes que se realizan en torno a la tablas estadísticas, y se destacan algunas:

- Por una parte, respecto al análisis de libros de texto, algunas editoriales, principalmente españolas, disponen de recursos interactivos para los estudiantes. Habría sido interesante analizarlas para poder evaluar, de manera más profunda, la variable asociada al uso de tecnología propuesta para los estudiantes.
- En relación al cuestionario construido y validado, aunque se consideraron diferentes variables (seleccionadas por su amplia presencia en los libros de texto), se podría haber incluido, por ejemplo, la construcción de tablas de distribución de una frecuencia o de doble entrada sin ofrecer la estructura, así como la construcción de tablas con datos agrupados en intervalos para representar una variable continua.
- Respecto a la muestra, podría haber sido más amplia y variada, sin embargo por las restricciones generadas por la crisis sanitaria generada por el COVID-19, fue muy complicado poder acceder a los establecimientos educativos.
- Siguiendo esta línea, algunas respuestas llamaron bastante la atención, por lo que podría haber sido de interés realizar algunas entrevistas para comprender el significado personal atribuido por los estudiantes y que podrían explicar, desde otra perspectiva, los diferentes conflictos semióticos cognitivos detectados.

La identificación de las limitaciones, entrega algunas luces sobre futuras investigaciones posibles de realizar en torno a las tablas estadísticas. Respecto a los libros de texto, se podría analizar las actividades interactivas, asociadas al estudio de las tablas estadísticas, que acompañan a los libros de texto, para valorar los recursos tecnológicos propuestos. Así también, se podría dar continuidad a este trabajo, considerando las mismas variables o similares, analizando los libros de texto españoles dirigidos a Bachillerato, con el objeto de comparar el tratamiento de las tablas con la Educación Secundaria.

En el ámbito de la formación de profesores, se podría realizar un estudio de evaluación y desarrollo del componente de Conocimiento Didáctico-Matemático sobre las tablas estadísticas, dicho estudio podría también incorporar los niveles de razonamiento algebraico para el análisis de tareas con tablas estadísticas.

Otra posible línea es el estudio del rol de la tabla estadística en el cálculo de los diferentes estadísticos o en la probabilidad, ya que habitualmente este objeto es utilizado como medio para el estudio de diferentes temas de la estadística y la probabilidad.

REFERENCIAS

- Alkhateeb, M. (2019). The language used in the 8th grade mathematics textbook. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(7), 3-13. <https://doi.org/10.29333/ejmste/106111>
- Alsina, Á., Vásquez, C., y Gómez, O. (2021). Contar cuentos para contar datos: vínculos entre la literatura, la estadística y la probabilidad en Educación Infantil. *Revista Educação Matemática em Foco*, 10(1). <https://doi.org/10.29327/252910.10.1-1>
- Alvarado, J., y Obagi, J. (2008). *Fundamentos de inferencia estadística*. Editorial Pontificia Universidad Javeriana.
- Álvarez, I., Guerrero, Y., y Torres, Y (2020). Taxonomía de errores y dificultades en la construcción e interpretación de tablas de frecuencia. *Zetetiké*, 28, e020012. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656553>
- American Educational Research Association, American Psychological Association, y National Council on Measurement in Education (AERA, APA y NCME). (2014). *Standards for educational and psychological testing*. American Educational Research Association
- Amorim, N., y Silva, R. (2016). Apresentação e utilização de tabelas em livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental. *Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 7(1), 1-21. <https://doi.org/10.36397/emteia.v7i1.3893>
- Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 298-318. <https://doi.org/10.29333/iejme/214>
- Arredondo, E., Vásquez, C., y García-García. (2021). Análisis de las tablas y los gráficos estadísticos en libros de texto de Chile y España para la Educación Infantil. *Revista de Investigación e Divulgação em Educação Matemática*, 5(1), 1-26. <https://doi.org/10.34019/2594-4673>
- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Arteaga, P., y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 725-734). ERME.
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números* 76, 55-67.
- Balcaza, T., Contreras, A., y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema, Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 1061-1081. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a11>.
- Barbero, M. I., Vila, E., y Holgado, F.P. (2015) *Psicometría*. Sanz y Torres.
- Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education*

19(2), 118–126. <https://doi.org/10.1080/0950078050866866>

- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 41-58.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. Cañadas, M.M. Gea, y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 55-61). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2019). Statistical sense in the information society. En K.O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F.J. García-Peñalvo, y J. Lavonen (Eds.), *Proceeding of the Congreso Inter-nacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias - CISETC 2019* (pp. 28-38). CEUR-WS.
- Batanero, C., Arteaga, P., y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3627>
- Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J., y Gea, M. (2015). Understanding of contingency tables: a synthesis of educational research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 31(3), 299-315.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. En A. Contreras, L. Ordóñez, y C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 13-36). Universidad de Jaén.
- Batanero C. y Godino, J (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Grupo de Investigación en Educación Estadística.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Biggs, J. B., y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. Academic Press.
- Bisquerra, R. (2014). *Metodología de la investigación educativa* (6ª ed.). La Muralla.
- Bivar, D., y Selva, A. (2011). Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática. En R. Borba, C. Monteiro, y A. Ruiz (Eds.), *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-12). Universidad Federal de Pernambuco.
- Bogdan, R., y Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods* (3ª ed.). Allyn and Bacon.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., y Cheetham, M. R. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(3), 113-133. <https://doi.org/10.29333/iejme/264>

- Bologna, E. (2012). *Estadística para psicología y educación* (2ª ed.). Brujas.
- Braga, G., y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Brizuela, B. M., y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 309-319. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00076-7](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00076-7)
- Burgess, T. (2002). Investigating the “data sense” of preservice teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Cape Town, South Africa.
- Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40-68. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (Vol. 14, pp. 57-69). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10
- Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2020). ¿Qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio? *Revista acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 643-652.
- Callingham, R. and Bond, T. (2006). Research in Mathematics Educations and Rasch Measurement. *Mathematics Educations Research Journal*, 18(2), 1-10.
- Cañadas, G. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Carvalho, M. J., Fernandes, J. A., y Freitas, A. (2018). Determinação da mediana em contexto tabelar e gráfico. *Ciencia & Educação*, 24(3), 779-798. <https://doi.org/10.1590/1516-731320180030015>
- Castellanos, M. (2013). *Tablas y gráficos estadísticos en la prueba Saber de Colombia* (Trabajo fin de Máster). Universidad de Granada, Granada.
- Castellaro, M., y Roselli, N. (2020). Comprensión individual y diádica de tablas de frecuencias en alumnos de escolaridad primaria. *Pensamiento Psicológico*, 18(1), 57-70. <https://doi.org/10.11144/Javerianacali.PPSI18-1.cidt>
- Castro, C., Curiche, A., y Vega, M. (2014). *Sé protagonista Matemática 8*. SM.
- Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos* (Tesis Doctoral). Universidad Estatal de Campinas, São Paulo.
- CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En I. Putt, R. Faragher, y M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third*

millennium: Towards 2010, Proceedings of the Twenty-seventh Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp.167-174). MERGA.

- Chick, H., Pfannkuch, M., y Watson, J. (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. *Curriculum Matters*, 1, 86-107. <https://doi.org/10.18296/cm.0063>
- Cobb, G.W. (2015). Mere renovation is too little, too late: We need to rethink the undergraduate curriculum from the ground up. *The American Statistician*, 69(4), 266-282. <https://doi.org/10.1080/00031305.2015.1093029>
- Cobo, B., y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? *UNO*, 23, 85-96.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8ª ed.). Routledge.
- Conti, K., y de Carvalho, D. (2011). O letramento presente na construção de tabelas por alunos da educação de jovens e adultos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 24(40), 637-658.
- Cook, T. D., y Reichardt, C. S. (2000). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Paideia.
- Cook, A., y Teo, S. (2011). The communicability of graphical alternatives to tabular displays of statistical simulation studies. *PLoS ONE*, 6(11), e27974. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0027974>
- Corral, Y., Corral, I., y Corral, A. F. (2015). Procedimientos de muestreo. *Revista Ciencias de la Educación*, 26(46), 151-167.
- Cruz, M., y Martínez M. C. (2012). Perfeccionamiento de un instrumento para la selección de expertos en las investigaciones educativas. *Revista electrónica de investigación educativa*, 14(2), 167-179.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. N.C.T.M.
- Curi, E., y Nascimento, J. C. (2016). O ensino de gráfico e tabelas nos anos iniciais do Ensino Fundamental: resultados de pesquisa nas várias instâncias curriculares. *Em Teia Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana*, 7(1), 1-22.
- Del Puerto, S., Seminara, S., y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en estadística descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43(3), 1-8.
- Díaz, C., y de la Fuente, E.I. (2005). Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada. *Biaix*, 24(1), 85-91.
- Díaz-Levicoy. (2018). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos chilenos de educación primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., y López-Martín, M. D. M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educación Matemática Pesquisa*, 17(4), 715-739.
- Díaz-Levicoy, D., y Arteaga P. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos escolares de séptimo básico en Chile. *Diálogos educativos*, 14(28), 21-40.
- Díaz-Levicoy, D., Guerrero-Contreras, O., Sepúlveda, A., y Minte, A. (2019).

- Comprensión de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Revista Educação*, 14(1), 16-24. <https://doi.org/10.33947/1980-6269-v14n1-3742>.
- Díaz-Levicoy, D., Morales, R., Arteaga, P., y López-Martín, M.M. (2020). Conocimiento sobre tablas estadísticas por estudiantes chilenos de tercer año de Educación Primaria. *Educación Matemática*, 32(2), 247- 277. <https://doi.org/10.24844/EM3202.10>
- Díaz-Levicoy, D., Morales, R. y López-Martín, M. M. (2015). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de 1º y 2º año de Educación Primaria. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 4(7), 10-39.
- Díaz-Levicoy, D., Morales, R., y Vásquez, C. (2017). Construcción de tablas estadísticas por estudiantes chilenos de tercero de Educación Primaria. *Educação & Linguagem*, 20(1), 149-166.
- Díaz-Levicoy, D., Ruz, F., y Molina-Portillo, E. (2017). Tablas estadísticas en libros de texto chilenos de tercer año de Educación Primaria. *Espaço Plural*, 18(36), 196-218.
- Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C., y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación/Infantil-Reading statistical tables by future Early Childhood Education teachers. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1099-1115.
- Díaz-Levicoy, D., Vásquez, C., y Molina-Portillo, E. (2018). Estudio exploratorio sobre tablas estadísticas en libros de texto de tercer año de educación primaria. *Tangram*, 1(2), 18-39. <http://dx.doi.org/10.30612/tangram.v1i2.7574>
- Ding, C., y Hershberger, S. (2002). Assessing content validity and content equivalence using structural equation modeling. *Structural Equation Modeling. A Multidisciplinary Journal*, 9 (2), 283--297. https://doi.org/10.1207/S15328007SEM0902_7
- Drisko, J. W., y Maschi, T. (2016). *Content analysis*. Oxford University Press.
- Duval, R. (2003). Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité? *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 32(32), 7-31. <https://doi.org/10.3406/spira.2003.1377>
- Dvir, M., y Ben-Zvi, D. (2021). The double-edged sword of conjecturing. *Mathematical Thinking and Learning*. Routledge. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1940427>
- Eilam, B., Poyas, Y., y Hashimshoni, R. (2014). Representing visually: What teachers know and what they prefer. En B. Eilam, y J.K. Gilbert (Eds.), *Science teachers' use of visual representations* (Vol. 8, pp. 53-83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06526-7_3
- Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Erickson, T., Wilkerson, M., Finzer, W., y Reichsman, F. (2019). Data Moves. *Technology Innovations in Statistics Education*, 12(1). <https://doi.org/10.5070/T5121038001>

- Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, 6(1), 27-36.
- Eshach, H., y Schwartz, J. L. (2002). Understanding children's comprehension of visual displays of complex information. *Journal of Science Education and Technology*, 11, 333-346. <https://doi.org/10.1023/A:1020690201324>
- Espinel, M., y Antequera, A. (2009). Un estudio sobre la competencia de los alumnos en el manejo de tablas para resolver situaciones cotidianas. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 227-236). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Estepa, A., Batanero, C., y Sanchez, F. T. (1999). Students' intuitive strategies in judging association when comparing two samples. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 7, 17-30.
- Estrada, A., y Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. En A. Rossman, y B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. International Association for Statistical Education.
- Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23. <https://doi.org/10.15517/AIE.V14I2.14817>
- Estrella, S., y Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: De listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(1), 21-34. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.20>
- Estrella, S., y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia. En P. Scott, y A. Ruíz (Eds.), *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (Vol. 8, pp.220-225). Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Evangelista, B., y Guimarães, G. (2019). Análise de atividades sobre tabelas em livros didáticos brasileiros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Fan, L., Zhu, Y., y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>.
- Feinberg, R., y Wainer, H. (2011) Extracting sunbeams from cucumbers. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20(4), 793-810. <https://doi.org/10.1198/jcgs.2011.204a>.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., y Gea, M. M. (2019). Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Fernandes, J. A., Gonçalves, G., y Barros, P. M. (2020). Uso de tabelas de frequências por futuros professores na realização de trabalhos de projeto. *Uniciencia*, 35(1), 139-151. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.9>

- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 10(2), 427-442.
- Font, V., y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Font, V., Godino, J.D., y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2-7, 14.
- Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática, *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K- 12 curriculum framework*. American Statistical Association.
- Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education* 32(2), 124-158. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Furr, M. (2011). Evaluating psychometric properties: dimensionality and reliability. En *Scale construction and Psychometrics for social and personality Psychology* (pp. 25-51). SAGE Publications. <https://dx.doi.org/10.4135/9781446287866>
- Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S., y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*, 22(2), 183-197. <https://doi.org/10.1174/113564010791304528>
- Gal, I. (1998). Assessing statistical knowledge as it relates to students' interpretation of data. En S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on Statistics: Learning, Teaching, and Assessment in Grades K-12* (pp. 275-295). Lawrence Erlbaum Associates.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review*, 70(1), 1-25. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x>
- Gal, I. (2011). Assessing statistical knowledge as it relates to students' interpretation of data. En S. Lajoie (Ed.), *Reflections on Statistics: Learning, Teaching, and Assessment in Grades K-12* (2ª ed., pp. 275-295). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203053478>
- Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.
- Gal, I., y Trostianitser, A. (2016). Understanding basic demographic trends: Connecting table reading, task design, and context. En J. Engel (Ed.), *Promoting understanding of statistics about society*. IASE.
- García-García, J., Díaz-Levicoy, D., Vidal, H., y Arredondo E. (2019). Las tablas estadísticas en libros de texto de educación primaria en México. *Revista Paradigma*, 40(2), 153 – 175. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p153-175.id754>
- García-García, J., Rivera, I., Arredondo, E., y Fernández, N. (2019). Comprensión de una

tabla estadística por estudiantes universitarios en México y Chile. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 14, 1-16. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e62811>

- García-Mila, M., Martí, E., Gilabert, S., y Catells, M. (2014). Fifth through Eighth grade students' difficulties in constructing bar graphs: data organization, data aggregation, and integration of a second variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 201-233. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921132>
- Gattuso, L., y Ottaviani, M. G. (2011). Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (Vol. 4, pp. 121-132). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_15.
- Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: Análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Gea, M. M., Arteaga, P., Batanero, C., y Ortiz, J. J. (2018). Conocimiento Tecnológico sobre la Correlación y Regresión: un estudio exploratorio con Futuros Profesores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32, 134-155. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n6a07>
- Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R., y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Gea, M.M., Gossa, A., Batanero, C., y Pallauta, J.D. (2020). Comprensión de tablas de doble entrada por profesores de educación primaria en formación. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 348-370. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p348-370>
- Giot, B., y Quittre, V. (2008). Les tableaux à double entrée dans les écrits scientifiques des jeunes élèves. *Cahiers des Sciences de l'Éducation*, 27(28), 103-124.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding]. En, L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, pp. 417-424). Universidad de Valencia, España.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García., y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.

- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., y Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 117-150.
- Godino, J., Font, V., y Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Relime*, 9, 131-155.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., y Contreras, A. (2015). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático*. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Godino, J. D., y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 19(3), 405-414. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3991>
- Gómez, E. Ortiz, J. J., y Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-71. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.63>
- González, C. P., Muñoz, R., y Muñoz, J. (2021). Características argumentativas de la interpretación de tablas de frecuencia en estudiantes chilenos de Segundo Año Medio. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(1), 17-29. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i1.39>
- Grymuza, A., y Rêgo, R. (2016). O ensino de gráficos e tabelas na perspectiva da teoria da atividade. *Em TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnologia*

Iberoamericana, 7(1), 1-22.

- Guimarães, G., Evangelista, B., y Oliveira, I. (2021). What students in the first grades of elementary school know about tables. *Statistics Education Research Journal*, 20(2), 9-9. <https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.358>
- Guimarães, G., Gitirana, V., Cavalcanti, M., y Marques, M. (2007). Livros Didáticos de Matemática nas Séries Iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. *Anais do IX Encontro nacional de educação matemática*, 9, (pp.1-17).
- Haji Botty, H. M. R., Hj Mohd Yusof, H. J., Shahrill, M., y Mahadi, M. A. (2015). Exploring Students' Understanding on 'Inequalities'. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 6(5), 218-227. <https://doi.org/10.5901/mjss.2015.v6n5s1p218>
- Haladyna, T. M. (2004). *Developing and validating multiple-choice test items*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203825945>
- Henriques, A., y Ponte, J. P. D. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28, 276-298. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a14>
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369. <https://doi.org/10.2307/30034878>
- Hernández-Baeza, A., Muñiz, J., y García, E. (2000). Comportamiento del modelo de respuesta graduada en función del número de categorías de la escala. *Psicothema*, 12(2), 288-291.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill.
- Icart, M., Pulpón, A., Garrido, E., y Delgado, P. (2012). *Cómo elaborar y presentar un proyecto de investigación, una tesina y una tesis*. Universidad de Barcelona.
- Izcarra, S. (2014). *Manual de investigación cualitativa*. Fontamara.
- Janvier, C. (1987). *Translation process in mathematics education*. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 27-31). Lawrence Erlbaum Associates.
- Jeannotte, D., y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Johnson, R., y Kuby, P. (2012). *Estadística elemental* (11º ed.). Cenegage Learning.
- Juarez-Hernández, L. G., y Tobon, S. (2018). Análisis de los elementos implícitos en la validación de contenido de un instrumento de investigación. *Revista Espacios*, 39(53).
- Kaplan, R., y Saccuzzo, D. (2017). *Psychological Testing: Principles, Applications, and Issues* (9ª ed.). CENGAGE Learning.
- Karazsia, B. (2013). Enhancing table interpretation skills via training in table creation. *Teaching of Psychology*, 40(3), 208-211. <https://doi.org/10.1177/0098628313487453>
- Karazsia, B., y Wong, K. (2016). Does training in table creation enhance table

- interpretation? A quasi-experimental study with follow-up. *Teaching of Psychology*, 43(2), 126-130. <https://doi.org/10.1177/0098628316636286>
- Kemp, M. (2003). Critical numeracy: helping people to decide. En A. Rogerson (Ed.), *Mathematics into the 21st Century Project Conference. Proceedings of the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 144-148).
- Kemp, M., y Kissane, B. (2010). A Five Step Framework For Interpreting Tables And Graphs In Their Contexts. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*. International Statistical Institute.
- Kempen, L., y Biehler, R. (2015). Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory. En K. Krainer, y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9* (pp. 135–141). Charles University and ERME.
- Kerlinger, F. N., y Lee, H. B. (2002). *Investigación del comportamiento* (4^a ed.). McGraw-Hill.
- Kline, P. (2013). *Handbook of psychological testing* (2^a ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315812274>
- Koschat, M. (2005). A case for simple tables. *The American Statistician*, 59(1), 31-40. <https://doi.org/10.1198/000313005X21429>
- Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 32(32), 143-154. <https://doi.org/10.3406/spira.2003.1386>
- Lahanier-Reuter, D. (2006). Listes et tableaux : mise en perspective. *Pratiques*, 131(1), 174-186. <https://doi.org/10.3406/prati.2006.2126>
- Larkin, J., y Simon, H. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65–99. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(87\)80026-5](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(87)80026-5)
- Leclère, J. (2003). Le tableau numérique, un objet de formation. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 32(32), 115-131. <https://doi.org/10.3406/spira.2003.1384>
- Lee, H. S., Kersaint, G., Harper, S. R., Driskell, S. O., Jones, D. L., Leatham, K. R., Angotti, R. L., y Adu-Gyamfi, K. (2014). Teachers' use of transnumeration in solving statistical tasks with dynamic statistical software. *Statistics Education Research Journal*, 13(1), 25-52. <https://doi.org/10.52041/serj.v13i1.297>
- Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría, y E. Teubal (Eds.), *Representational Systems and Practices as Learning Tools in different Fields of Learning* (pp. 133–148). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087905286_009
- Martí, E., Garcia-Mila, M., Gabucio, F., y Konstantinidou, K. (2011). The construction of a double-entry table: a study of primary and secondary school students' difficulties. *European Journal of Psychology of Education*, 26(2), 215-234. <https://doi.org/10.1007/s10212-010-0046-1>
- Martí, E., Pérez, E., y de la Cerda, C. (2010). Alfabetización gráfica. La apropiación de las tablas como instrumentos cognitivos. *Contextos*, 10, 65-78.
- Martínez, R. (2005). *Psicometría: Teoría de los tests psicológicos y educativos*. Síntesis.

- Martínez, M., Hernández, M., y Hernández, M. (2014). *Psicometría*. Larousse - Alianza Editorial.
- Mayén, S., Díaz, C., y Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal*, 8(2),74-93.
- Mayring P. (2020). Qualitative Inhaltsanalyse. En Mey G., y Mruck K. (Eds.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (pp. 495-511). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26887-9_52
- McArdle, K. (2018). Ethical Education and Research. En K. McArdle, *Freedom Research in Education* (pp. 127-144). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-3-319-69650-8_8
- McGartland, D., Berg, M., Tebb, S., Lee, E., y Rauch, S. (2003). Objectifying content validity: Conducting a content validity study in social work research. *Social work research*, 27(2), 94-104. <https://doi.org/10.1093/swr/27.2.94>
- Meyer, M., y Schnell, S. (2020). What counts as a “good” argument in school? how teachers grade students’ mathematical arguments. *Educational Studies in Mathematics*, 105(1), 35-51. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09974-z>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD. (2014). *Real decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria*. Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD. (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato*. Autor.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022a). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022b). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, MINEDUC. (2013a). *Matemática. Programa de Estudio Quinto Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación, MINEDUC. (2013b). *Matemática. Programa de Estudio Sexto Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación, MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación, MINEDUC. (2016a). *Matemática. Programa de Estudio Séptimo Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación, MINEDUC. (2016b). *Matemática. Programa de Estudio Octavo Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación, MINEDUC. (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Moore, D. S. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon, y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the Twenty-First Century* (pp. 14-25). Mathematical Association of America.

- Moore, D. (2005). *Estadística aplicada básica* (2ª ed.). Antoni Bosch.
- Moschkovich, J. (2003). What counts as mathematical discourse? En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 3, pp. 325–331). University of Hawai'i.
- Muñiz, J. (2017). *Teoría clásica de los tests* (2ª ed.). Pirámide.
- Muñiz, J., y Fonseca-Pedrero, E. (2019). Diez pasos para la construcción de un test. *Psicothema*, 31(1), 7-16. <https://doi.org/10.7334/psicothema2018.291>
- National Council of Teacher of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teacher of Mathematics, NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Neuendorf, K. (2016), *The content analysis guidebook*. Sage.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, OECD. (2019). PISA 2018 Mathematics Framework. En *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework* (pp. 73-95). OECD Publishing, <https://doi.org/10.1787/13c8a22c-en>.
- Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada.
- Osterlind, S. J., y Merz, W. R. (1994). Building a taxonomy for constructed-response test items. *Educational Assessment*, 2(2), 133-147. https://doi.org/10.1207/s15326977ea0202_2
- Pagan, A., y Magina, S. (2011). O ensino de Estatística na educação básica com foco na interdisciplinaridade: um estudo comparativo. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 92(232), 723-738. <https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.92i232.675>
- Pallauta, J.D. (2018). *Las tablas estadísticas en textos escolares chilenos de Enseñanza Básica* (Trabajo fin de Máster). Universidad de Granada, Granada.
- Pallauta, J.D., y Arteaga, P. (2021). Niveles de complejidad semiótica en gráficos y tablas estadísticas. *Números*, 106, 13-22.
- Pallauta, J. D., Arteaga, P., y Garzón-Guerrero, J. A. (2021). Secondary School Students' Construction and Interpretation of Statistical Tables. *Mathematics*, 9(24), 3197. <https://doi.org/10.3390/math9243197>
- Pallauta, J., Arteaga, P., Begué, N., y Gea, M. (2021). Análisis de la complejidad semiótica y el contexto de las tablas estadísticas en los libros de texto españoles de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 193-220. <https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p193-220>
- Pallauta, J., Batanero, C., y Gea, M. M. (2021). Complejidad semiótica de las tablas estadísticas en textos escolares chilenos y españoles de educación primaria. *Em Teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 12(3). <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2021.250155>
- Pallauta, J. D., Batanero, C., Gea, M. M., y Arteaga, P. (2021). Niveles de lectura y contextos en las actividades sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos y

- españoles. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(4), 119-133. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.74>
- Pallauta, J. D., y Gea, M. (2019a). Las actividades sobre tablas estadísticas en textos escolares chilenos de educación básica. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Pallauta, J. D., y Gea, M. M. (2019b). Competencia de traducción de gráfico a tabla de doble entrada de profesores en formación. En S. A. García, J. M. Romero, C. Rodríguez-Jiménez, y J. M. Sola (Eds.), *Investigación, Innovación docente y TIC. Nuevos horizontes educativos* (pp. 2201-2212). Dikynson. S.L.
- Pallauta, J., Gea, M., y Arteaga, P. (2021). Caracterización de las tareas propuestas sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos de educación básica. *Paradigma Revista de investigación educativa*, 42(Extra 1), 32-60. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p32-60.id1017>
- Pallauta, J. D., Gea, M.M., Arteaga, P. y Begué, N. (2022, en prensa). Comprensión de las tablas estadísticas: una revisión de la literatura. *Boletín de estadística e investigación operativa*. ISSN: 1889-3805.
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., y Batanero, C. (2020a). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos. *Zetetike*, 28, e020001. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656257>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., y Batanero, C. (2020b). Análisis de la actividad algebraica implicada en el trabajo con las tablas estadísticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 20(2). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v20i2.5036>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C., y Arteaga, P. (2021). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1803-1824. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26>
- Pérez-Sedano, E. (2015). Construction and interpretation by kindergarten and primary school children of a calendar organized in tabular form. *Estudios de Psicología*, 36(1), 176-184. <https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000030>
- Pfannkuch, M., y Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, 1(2), 4-21.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1983). *Gênese das estruturas lógicas elementares*. Zahar.
- Planas, N., Morgan, C., y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (1ª ed., pp. 196-210). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315113562>
- Pratt, D., Davies, N., y Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. En Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics-challenges for Teaching and Teacher Education* (Vol. 4, pp. 97-107). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_13
- Prodromou, T. (2015). Students' emerging reasoning about data tables of large-scale data. *International Journal of Statistics and Probability*, 4(3), 181-197.

<http://dx.doi.org/10.5539/ijsp.v4n3pxx>

- Quinnell, L., y Carter, M. (2012). Greek or not: The use of symbols and abbreviations in mathematics. *Australian Mathematics Teacher*, 68(2), 34-40. <https://doi.org/10.3316/informit.578487467887087>
- Ramos, A. B., y Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica*, 4(20), 535-556.
- Recio, A. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Reckase, M. D. (2009). *Multidimensional item response theory*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-89976-3>
- Reguant-Álvarez, M., y Torrado-Fonseca, M. (2016). El método delphi. *REIRE. Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, 9(2), 87-102. <https://doi.org/10.1344/reire2016.9.1916>
- Ridgway, J. (2015). Implications of the data revolution for statistics education. *International Statistical Review*, 84(3), 528-549. <https://doi.org/10.1111/insr.12110>
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Rittle-Johnson, B., y Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561-574. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561>
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñoz-Rodríguez, L., Vázquez Ortiz, C. A., y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números*, 104, 217-238.
- Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 33(2), 29. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386>
- Rosenshine, B., Meister, C., y Chapman, S. (1996). Teaching students to generate questions: A review of the intervention studies. *Review of Educational Research* 66(2), 181-221. <https://doi.org/10.3102/00346543066002181>
- Ruiz, D. (2004). *Manual de Estadística*. Eumed-Net.
- Salcedo, A. (2020). Actividades de Tablas Estadísticas en Textos Escolares de Matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 20(2). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v20i2.5044>
- Sampieri, R. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill.
- Sánchez Cobo, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

- Sanoja, J., y Ortiz, J. (2013). Conocimiento de contenido estadístico de los maestros. En J. Contreras, G. Cañadas, M.M. Gea, y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 157-164). Universidad de Granada.
- Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23(2), 139-159. <https://doi.org/10.1080/10573560601158461>
- Sepúlveda, A., Díaz-Levicoy, D., y Jara, D. (2018). Evaluación de la comprensión sobre Tablas Estadísticas en estudiantes de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 869-886. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a06>
- Sharma, S. (1997). *Statistical ideas of high school students: Some findings from Fiji* (Tesis doctoral). Waikato University, Hamilton.
- Sharma, S. (2013). Assessing students' understanding of tables and graphs: implications for teaching and research. *International Journal of Educational Research and Technology*, 4(4), 61-69.
- Sharma, S., Doyle, P., Shandil, V., y Talakia'atu, S. (2011). Developing statistical literacy with Year 9 students. *Set: Research Information for Teachers*, (1), 43-50. <https://doi.org/10.3316/informit.320258805409828>
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1010). Information Age y NCTM.
- Shaughnessy, J., Garfield, J., y Greer, B. (1996). Data handling. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205-237). Springer.
- Shultz, K. S., Whitney, D. J., y Zickar, M. J. (2020). *Measurement theory in action: Case studies and exercises*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003127536>
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404 - 411. <https://doi.org/10.2307/30034943>
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Summers, B., Williamson, T., y Read, D. (2004). Does method of acquisition affect the quality of expert judgment? A comparison of education with on-the-job learning. *Journal of Occupational and Organizational Psychology*. 77(2), 237-258. <https://doi.org/10.1348/096317904774202162>
- Thissen, D., y Wainer, H. (2001). *Test Scoring*. Routledge.
- Utkin, L. V. (2006). A method for processing the unreliable expert judgments about parameters of probability distributions. *European Journal of Operational Research*. 175(1), 385-398. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.04.041>
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., y Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy Into Practice Through the World of Textbooks*. Springer Science & Business Media.
- van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in

- mathematics. *For the learning of mathematics*, 25(2), 2-23.
- Verbaere, O. (2003). Une expérience, en cours préparatoire, pour faire organiser de l'information en tableau. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 32(32), 105-113. <https://doi.org/10.3406/spira.2003.1383>
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, 21(1), 14-23. <https://doi.org/10.3102/0013189X021001014>
- Walichinski, D., y Junior, G. S. (2013). Contribuições de uma sequência de ensino para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas segundo pressupostos da contextualização. *Unión*, 35, 19-42.
- Wang, Z., y Osterlind, S. J. (2013). *Classical test theory*. En Teo T. (Ed.), *Handbook of quantitative methods for educational research* (pp. 31-44). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-404-8_2
- Watson, J.M. (2013). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals*. Routledge.
- Weiland, T. (2019). The contextualized situations constructed for the use of statistics by school mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 18(2), 18-38. <https://doi.org/10.52041/serj.v18i2.138>
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., y Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, 11(3), 555-584.
- Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>
- Wild, C., Utts, J., y Horton, J. (2018). What is statistics? En Ben-Zvi, D., Makar, K., y Garfield, J. (Eds.), *International handbook research in statistics education* (pp.5-36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_1
- Wilson, M., y Gochyyev, P. (2013). Psychometrics. En T. Teo (Ed.), *Handbook of quantitative methods for educational research* (pp. 1-30). Sense Publishers.
- Yaremko, R. M., Harari, H., Harrison, R. C., y Lynn, E. (2013). *Handbook of research and quantitative methods in psychology: For students and professionals*. Hilldale, NJ: Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9780203767740>
- Zahner, W., y Aquino-Sterling, C. R. (2020). Are the words as important as the concepts? Using pedagogical language knowledge to expand analysis of mathematics teaching with linguistically diverse students. *Mathematics Education Research Journal*, 32(4), 1-21. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00352-9>
- Zapata-Cardona, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística?. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 33, 247-247.

A1. PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS

Artículos

- Pallauta, J. D., Arteaga, P., y Garzón-Guerrero, J. A. (2021). Secondary School Students' Construction and Interpretation of Statistical Tables. *Mathematics*, 9(24), 3197. <https://doi.org/10.3390/math9243197>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C., y Arteaga, P. (2021). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1803-1824. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26>
- Pallauta, J. D., Arteaga, P., M. Gea, y Begué. N. (En prensa). Understanding statistical tables: a survey of research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*.
- Pallauta, J.D. y Arteaga, P. (2021). Niveles de complejidad semiótica en gráficos y tablas estadísticas. *Números*, 106, 13-22
- Pallauta, J., Batanero, C., y Gea, M. M. (2021). Complejidad semiótica de las tablas estadísticas en textos escolares chilenos y españoles de educación primaria. *Em Teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 12(3). <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2021.250155>
- Pallauta, J. D., Batanero, C., Gea, M. M., y Arteaga, P. (2021). Niveles de lectura y contextos en las actividades sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos y españoles. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(4), 119-133. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.74>
- Pallauta, J.D., Arteaga, P., Begué, N., y Gea, M. (2021). Análisis de la complejidad semiótica y el contexto de las tablas estadísticas en los libros de texto españoles de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(4), 193-220. <https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p193-220>
- Pallauta, J., Gea, M., y Arteaga, P. (2021). Caracterización de las tareas propuestas sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos de educación básica. *Paradigma Revista de investigación educativa*, 42(Extra 1), 32-60. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p32-60.id1017>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., y Batanero, C. (2020). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos. *Zetetike*, 28, e020001. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656257>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., y Batanero, C. (2020). Análisis de la actividad algebraica implicada en el trabajo con las tablas estadísticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 20(2). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v20i2.5036>

Congresos

- Pallauta, J.D., Gea, M.M., Arteaga, P., y Valenzuela-Ruiz, S. (Aceptada). Secondary school students' interpretation of the frequency table. Ponencia aceptada en 11th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 11).

- Pallauta, J.D., Gea, M.M., Batanero, C., y Arteaga, P (2022). How secondary school students build frequency tables? Ponencia presentada en 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME 12. Celebrada del 2 al 5 de febrero de 2022.
- Pallauta, J.D., Gea, M.M., Arteaga, P., y Batanero, C. (2021). Algebrization levels of statistical tables in Spanish secondary textbooks. Ponencia presentada en el 14th *Internacional Congress on Mathematical Education*. ICME. Celebrada del 11 al 18 de julio de 2021.
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., y Begué, N. (2021). Situaciones ligadas al estudio de las tablas estadísticas en libros de texto chilenos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 34(2), 13-23.
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C., y Arteaga, P. (2021). Complejidad semiótica de tablas estadísticas y su distribución en textos chilenos de educación básica. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 481 – 488). SEIEM.
- Pallauta, J.D., Gea, M.M., y Arteaga, P. (2021). Estudio de los niveles de algebrización en tablas estadísticas en libros de texto chilenos y españoles. En Gómez, D. M., Cornejo, C., y Martínez, M. V. (Eds.), *Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. (pp. 275-279). Sochiem y Universidad de O'Higgins.
- Pallauta, J.D., Valenzuela, S. y Begué, N. (2020). Analysis of algebrization levels in statistical tables. Ponencia presentada en the 13 annual *Internacional Conference of Education. Research and Innovation ICERI*. 9th-10th of November 2020. <https://doi.org/10.21125/iceri.2020.0377>
- Arteaga, P. y Pallauta, J. (2020). Niveles de complejidad semiótica en gráficos y tablas estadísticas. En M. M. Gea. R. Álvarez-Arroyo, y J.A. Garzón (Eds.), *Seminario Hispano Brasileño de Educación Estadística*. Grupo PAI FQM-126.
- Pallauta, J.D. (2020). Análisis de la comprensión de tablas estadísticas. Conferencia presentada en *IV Congreso Internacional de Profesores de Matemática Ugel Chucuito*. Evento organizado por el Ministerio de Educación, Gobierno regional de Puno, Unidad de gestión educativa local Chucuito Juli, Perú. Celebra el 10 de Noviembre de 2020.
- Pallauta, J.D., Gea, M., y Gossa, A. (2019). Análisis de tareas sobre tablas estadísticas en textos escolares de Educación Primaria en España. Ponencia presentada en el grupo “Didáctica de la Estadística, la probabilidad y la combinatoria”, *XXIII Simposio de la SEIEM*. Valladolid, España.
- Pallauta, J. D., y Gea, M. (2019). Las actividades sobre tablas estadísticas en textos escolares chilenos de educación básica. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html
- Pallauta, J. D., y Gea, M. M. (2019b). Competencia de traducción de gráfico a tabla de doble entrada de profesores en formación. En S. A. García, J. M. Romero, C. Rodríguez-Jiménez, y J. M. Sola (Eds.), *Investigación, Innovación docente y TIC. Nuevos horizontes educativos* (pp. 2201-2212). Dikynson. S.L.
- Pallauta, J.D., Gea, M.M., y Venegas, A. (2018). Caracterización de tablas estadísticas en

los textos escolares de los últimos cursos de Enseñanza Básica. En Díaz, M (Ed.), *Libro de actas de las XXII Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 168-173). Universidad Alberto Hurtado.