UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

RESTRICCIONES INSTITUCIONALES EN LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO EN CUANTO AL SIGNIFICADO DEL OBJETO INTEGRAL DEFINIDA

Tesis doctoral

Lourdes Ordóñez Cañada
Jaén 2011
Director: Dr. Ángel Contreras de la Fuente

A Vicente
y a Ángeles

Agradecimientos

En primer lugar quisiera expresar mi agradecimiento al Dr. D. Ángel Contreras de la Fuente, por confiar en mis posibilidades, por su paciencia y, sobre todo, no permitirme abandonar. Gracias por su sabiduría y buen consejo que han iluminado y guiado este trabajo.

Al departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Jaén, donde desarrollo parte de mi trabajo, por la acogida y buena disposición que he encontrado y que ha alentado la realización de la investigación reflejada en esta Memoria.

A Juan Fernández, Manuel García, Rafael Jódar y Juan Herrera profesores de Matemáticas de Educación Secundaria que me permitieron pasar el cuestionario a sus alumnos, recoger apuntes de sus clases, etc. Gracias por sus comentarios y generosas aportaciones, así como por su magnífica disposición en todo momento. Sin ellos no hubiera sido fácil.

Gracias a los alumnos de los Institutos de Educación Secundaria de la provincia de Jaén Albariza de Megíbar, La Pandera de Los Villares y Fuente de la Peña de Jaén por su generosa colaboración realizando el cuestionario. En especial a Tomás, Francisco, Isabel, Mª José y Lucía que, además, compartieron su tiempo conmigo comentando sus respuestas y superaron su miedo y extrañeza y, por qué no decirlo, su pudor inicial. Un verdadero placer hablar y, sobre todo, compartir con ellos.

Un agradecimiento especial a Manolo y a Lorenzo, compañeros con quienes he compartido inicios en la Didáctica, cursos de doctorado, algunos congresos, seminarios y horas de trabajo que ellos hicieron amables.

Por último a los que he tenido cerca, en especial Carmen, Juande, Carmen, Clara y los amigos que me han apoyado. Sin todos ellos no hubiera sido posible.

Resumen

En esta investigación presentamos un estudio sobre las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) y del efecto que tienen, como pruebas de evaluación externa, en el significado institucional implementado en el Bachillerato en lo referente a la integral definida. Asimismo, se abordan los efectos en los significados personales de los estudiantes de cuatro grupos que han recibido este significado institucional. Para ello se utiliza como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, EOS, pues nos aporta las herramientas necesarias para este trabajo que analiza diferentes facetas de la actividad matemática.

Para la consecución de nuestro objetivo hemos determinado, en primer lugar, el significado global de la integral definida, a través de un estudio histórico-epistemológico. Esto nos ha permitido en una segunda etapa, realizar una clasificación de las PAU, comparar el significado que de ellas se desprende con el global y, de esta manera, establecer los sesgos que determinan.

El análisis de los apuntes de clase de cuatro grupos seleccionados de 2º de Bachillerato de Ciencias donde se estudia la integral definida, nos ha posibilitado poner de manifiesto ausencias de algunos significados, énfasis en otros, etc., estos es, establecer el significado implementado y su concordancia con el deducido del análisis de las PAU. La investigación muestra como estas pruebas suponen una verdadera restricción institucional para la enseñanza de la integral definida.

Por último, con el objetivo de ver el efecto de estas restricciones en el aprendizaje de este objeto matemático se elaboró un cuestionario para los alumnos. El análisis cualitativo de los diferentes elementos de significado y su posterior codificación para un estudio cuantitativo nos ha permitido caracterizar los significados personales. Los resultados muestran los vacíos de significado y las dificultades que presentan los estudiantes de este nivel educativo.

Índice

Introducción

El Cálculo Integral juega un papel esencial, como conjunto de nociones básicas, en la instrucción del Cálculo Infinitesimal en segundo de Bachillerato. Sin embargo, la tendencia que se observa en la enseñanza de los conceptos implicados en la integración es la de seguir un desarrollo casi exclusivamente algebraico, ligado a la operación inversa de la derivación y a un cálculo de áreas puramente geométrico basándose en métodos algorítmicos y en la representación gráfica. Esto supone que siendo posible que el estudiante llegue a conocer las diversas técnicas algorítmicas de la integración, sin embargo no efectúe una contextualización adecuada de dicho proceso, es decir, no dote a este objeto matemático de verdadero significado. Se trata de un problema didáctico de gran importancia en los currículos de diferentes países y, por tanto, generador de diversos trabajos de investigación. Wenzelburger (1993) señala que "el Cálculo Integral se introduce normalmente como el método "inverso" del Cálculo Diferencial, lo cual se puede justificar y comprobar desde el punto de vista matemático. Sin embargo, para muchos alumnos permanece el concepto abstracto de un Cálculo Diferencial "inverso" sin significado, ya que no pueden relacionar fácilmente la derivación e integración como tales procesos inversos. Solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización, hace que ésos sean accesibles para los estudiantes" (p. 110).

Cuando nos situamos en el nivel académico del Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía, observamos que el concepto de integral definida ha desaparecido totalmente del primer curso. En cambio, en segundo curso la enseñanza de dicho concepto se desarrolla bajo la perspectiva de objeto de conocimiento, lo que induce a pensar a priori que, dado este tratamiento didáctico que parece alejarnos de un desarrollo exclusivo como herramienta de cálculo, los alumnos pueden adquirir ciertos significados en cuanto a las nociones básicas del Cálculo Integral. Sin embargo, los resultados aportados, tanto por mi experiencia como profesora de la asignatura de Matemáticas del citado nivel académico, como por los resultados en diferentes trabajos de investigación —Ordóñez, Contreras, Luque y Sánchez (2001), Contreras y Ordóñez (2005 a y b), Ordóñez y Contreras (2007a), Ordóñez y Contreras (2007b) —, muestran que los estudiantes tienen dificultades para lograr la emergencia del objeto integral definida, las cuales provocan verdaderas renuncias, tanto institucionales como personales, a lograr el aprendizaje de dicho objeto.

No es de extrañar que este fenómeno didáctico, de renuncia al aprendizaje significativo del objeto integral definida, origine rupturas en las normas, implícitas o explícitas, que condicionan las acciones efectivas de los participantes en el proceso de estudio y que se concretan en la admisión de unas rutinas de cálculo sustitutorias de la enseñanza del objeto matemático, desistiendo, de este modo, de una verdadera enseñanza y dando interpretaciones de que se da un buen aprendizaje donde sólo hay resultados banales. Este caso se da desde el momento en el que el profesor considera que, con unos buenos cambios de variable para que los alumnos los realicen y algunos métodos rutinarios bien aprendidos, el cálculo integral queda dominado suficientemente por aquéllos. En las instituciones de Bachillerato, por tanto, junto al citado fenómeno de renuncia al aprendizaje de la integral definida se da el de la algebrización del Cálculo Integral, los cuales, obviamente, inciden negativamente en la enseñanza-aprendizaje del concepto y que ha sido puesto de manifiesto por diferentes autores (Orton, 1983a, Labraña, 2001)

Consideramos que estos fenómenos didácticos, de perversión de las citadas normas, se potencian por el fenómeno educativo-social de las Pruebas de Acceso a la Universidad[1], puesto que los profesores se ven obligados a preparar a sus alumnos sufriendo verdaderas restricciones institucionales. Primeramente, tienen que limitarse a impartir únicamente unos temas concretos, que son los del "examen", lo que conduce a perder la posibilidad de desarrollar algunos temas de ampliación, muy necesarios para el estudiante que necesita profundizar. En segundo lugar, restringirse a aquellos aspectos de los temas que "pueden caer" en las pruebas, los cuales, por otra parte, están bastante delimitados. Es obvio que todo esto produce efectos negativos en la formación matemática. Refiriéndonos al Cálculo Integral, nos encontramos con tipos de problemas muy concretos, bastante sesgados hacia cálculo algorítmico, en el que las áreas se calculan aplicando un método rutinario, renunciando a otros aprendizajes muy importantes y esenciales para lograr la emergencia del objeto integral definida (relacionados, por ejemplo, con la determinación de resultados totales de procesos de cambio).

Estas consideraciones nos han llevado a proponer como temática de investigación el estudio de los significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002) del concepto integral definida en segundo de Bachillerato y su relación con las restricciones institucionales que imponen el currículum actual y las PAU. Dicha temática tiene una triple faceta: epistemológica (en relación con los significados institucionales), cognitiva (de los significados personales) y curricular (de las restricciones institucionales). Además, como elementos teóricos asociados a los significados, se estudiarán las posibles dificultades de los alumnos en cuanto a su comprensión del objeto integral definida, desde la perspectiva de los conflictos semióticos (Godino, 2002)

En esta Memoria, que tiene un carácter eminentemente exploratorio, descriptivo y explicativo, aunque no predictivo, en primer lugar, se analizará la evolución epistemológica

[1] PAU en lo sucesivo

del significado del objeto integral definida a lo largo de su desarrollo histórico, una vez establecidos, previamente, los fundamentos teóricos en los que se apoya y las aportaciones que, hasta el momento, diferentes investigaciones han realizado sobre el tema que abordamos. En segundo lugar, se estudia el significado de dicho objeto en la institución matemática de referencia de 2º de Bachillerato (mediante los descriptores institucionales). El análisis de la PAU y de las normativas emanadas de las reuniones de coordinación de las pruebas de acceso y su comparación con el significado global nos permite determinar sesgos y restricciones que emanan de ellas.

Más adelante determinamos los efectos de dichas restricciones en 2º Bachillerato respecto de la integral definida en su doble faceta institucional-personal. Observamos y estudiamos la enseñanza-aprendizaje de cuatro grupos del nivel educativo en que nos situamos. Estudiando el significado realmente implementado (analizando los apuntes de las clases) podemos determinar la correspondencia con lo establecido por las PAU. Por último, analizamos y determinamos los significados personales logrados y los conflictos semióticos de los alumnos de los cuatro grupos por medio de un cuestionario elaborado al efecto.

Para este trabajo hemos escogido como marco conceptual el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, EOS (Godino, 2002, Godino, Contreras y Font, 2006) pues nos aporta las herramientas necesarias tal y como veremos en el capítulo 3 y a lo largo de este trabajo.

Capítulo 1

Problema de investigación

El problema de investigación surge de la conjunción de diversos intereses complementarios. Por una parte, la experiencia de la autora de este trabajo como profesora de Matemáticas en distintos Centros de Educación Secundaria; por otra, su labor como investigadora, en el seno del grupo GEIAMJA (Grupo de Enseñanza e Investigación en el Análisis Matemático de Jaén) que está integrado en el grupo de investigación del PAI HUM-793, y que ha elaborado diversos trabajos de investigación. Estos se han ido centrando progresivamente en la integral definida como objeto de investigación y en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002, Godino, Contreras y Font, 2006) como marco de referencia idóneo para analizar los fenómenos en la enseñanza y aprendizaje que surgen de las interacciones en el aula.

La motivación inicial nació de las inquietudes respecto a la propia labor docente de la investigadora. Por una parte, al tener que tomar decisiones curriculares sobre la enseñanza del objeto integral definida, consciente de la influencia de éstas en el aprendizaje de sus alumnos. Por otra parte, al enfrentarse con las dificultades y errores mostrados por los estudiantes respecto a este objeto. Por último, al conjeturar que parte de estos factores puede provenir por el gran sesgo existente en el currículum actual respecto de la integral definida, que prácticamente se relega a los procesos de cálculo algorítmico, lejos de los aspectos conceptuales deseables, lo que, además, potencia el gran salto que supone el paso a la Universidad donde es fundamental una adecuada comprensión de los conceptos del Análisis Matemático. Todo esto puede observarse, tanto en los contenidos marcados por la administración como en las PAU.

El problema de investigación surge, de modo espontáneo, de las consideraciones anteriores. Sin embargo, su formulación teórica responde a los siguientes interrogantes: ¿cuáles son las restricciones institucionales planteadas por el currículum actual y por las PAU en cuanto al objeto integral definida en 2º de bachillerato para la Comunidad Autónoma de Andalucía?, y, en consecuencia, ¿cómo influyen dichas restricciones en los significados realmente implementados en el aula y en los significados personales de los alumnos? Por último, ¿qué dificultades y conflictos semióticos aparecen en el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje del objeto integral definida?

Inicialmente, el problema que se plantea tiene una componente instruccional, pues es el profesor quien se pregunta acerca de qué contenidos explicar y cómo debe organizarlos. Sin embargo, no se puede olvidar que para poder concretar lo anterior el profesor debe tener a su disposición toda la información posible, tanto de los distintos significados institucionales de la integral definida (componente epistemológico) como de las dificultades que entrañan para los estudiantes cada uno de ellos y sus relaciones (componente cognitivo) Por tanto, abordar este problema requiere especificar aquellos interrogantes que surgen de la consideración del mismo bajo la perspectiva de estas componentes. Es decir, la investigación que nos planteamos debe responder a las siguientes cuestiones:

i) Epistemológica: ¿Qué tipo de significados institucionales pueden extraerse en el desarrollo del objeto matemático integral definida a lo largo de su evolución?, ¿qué problemas motivaron cada significado y cómo se resolvieron?, ¿cuáles son los momentos de ruptura epistemológica?, ¿qué cambios representaron en el significado institucional del momento?, ¿qué nuevos problemas se plantearon?, ¿cuál es el significado global de la integral definida?

ii) Instruccional: ¿qué significados institucionales se proponen en el currículum actual y cuales quedan relegados?, ¿qué tipo de problemas resuelven los significados no considerados y cómo se abordan con esta restricción?, ¿qué significados emanan de las situaciones propuestas por las PAU?, ¿qué restricciones imponen las PAU y cuáles son sus consecuencias en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida?

iii) Cognitiva: ¿Cuáles son los significados personales de los alumnos respecto al objeto integral definida?, ¿cuáles son los conflictos semióticos inherentes a cada significado y qué influencia puede tener en el aprendizaje de los estudiantes el hecho de que se aborden y superen, o no, tales conflictos?

1.1 La integral definida en el Bachillerato

Podemos decir que la enseñanza del Cálculo Infinitesimal se encuentra ligada a la propia evolución del Cálculo Diferencial e Integral. Durante la época del Renacimiento los matemáticos, en general, habían abandonado el rigor de los griegos en favor de una matemática heurística que resolviera los nuevos problemas planteados por las Ciencias y las Artes. Esto condujo a un gran avance en Matemáticas y, en concreto, al desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, pero a costa del rigor. El Cálculo Infinitesimal, que se había revelado como una potente herramienta, es objeto de grandes críticas durante el siglo XVIII debido a sus problemas de fundamentación y formalización que no habían sido resueltos a pesar del esfuerzo de importantes matemáticos.

Puede observarse, cómo se encuentra la Matemática ante la necesidad de hacer un cambio importante, buscando el rigor y la fundamentación de las técnicas que se utilizan en ese momento. En este cambio tendrá un papel importante la instucionalización de la enseñanza que se realiza después de la Revolución Francesa, cuando las Universidades toman un gran auge, destacando la creación de la *École Polytechnique* en 1794 y la fundación de la *École Normale* en París en 1795 que fueron modelo de enseñanza de la ciencia en toda Europa. En este contexto, se hace necesaria la creación de libros de texto. Sin embargo, esto requiere que la presentación de los conocimientos del momento, como es el Cálculo Infinitesimal, sea breve, pero también rigurosa y formal, lo que estimuló un camino (el de la formalización) que se había hecho ya necesario en la matemática profesional.

Desde entonces y hasta hoy, la enseñanza del Cálculo Infinitesimal ha sido un tema importante en la formación de los estudiantes preuniversitarios, el cual, como la enseñanza en general, ha sufrido diversas modificaciones. Nuestra investigación se enmarca dentro de la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo[2], LOGSE, que constituye el marco general que regula el bachillerato en España y en ella se establece la organización, las diferentes modalidades y se explicitan las materias comunes, entre las que no se encuentran las Matemáticas. Esta ley orgánica señalaba como objetivo básico de este nivel educativo facultar a los alumnos para acceder a la formación profesional y a los estudios universitarios. Para ello, las materias propias de cada modalidad, como es el caso de las Matemáticas II que es donde se sitúa nuestro objeto de investigación, deben contribuir a dominar los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y las habilidades básicas características de dicha modalidad, estableciendo, además, la relación entre los aspectos teóricos y sus aplicaciones prácticas en la sociedad. Es decir, entre los objetivos básicos de la formación de Bachillerato encontramos el que los contenidos que se impartan expresen sus relaciones con los aspectos tecnológicos y sus aplicaciones prácticas y no sean conocimientos meramente teóricos. Asimismo, otro objetivo básico lo marca el hecho de que son estudios preuniversitarios y, por ello, no pueden ignorar su carácter preparatorio para este nivel educativo, teniendo en cuenta las distintas titulaciones a las que daban acceso.

Para el desarrollo de esta Ley a nivel estatal se aprobaron el Real Decreto 1700/1991, de 29 de noviembre, y el Real Decreto 1178/1992, de 2 de octubre. En el primero, se

[2] En lo sucesivo LOGSE

determinaba la estructura del bachillerato, configura las diferentes modalidades de que consta y fijaba las materias propias de cada una de ellas. En el segundo, se establecieron los aspectos básicos del currículo que constituye las enseñanzas mínimas de dicho nivel educativo, con el fin de garantizar una formación común de todos los alumnos y la validez de los títulos correspondientes a nivel nacional. Tras un proceso de implantación anticipada, realizada por una serie de Centros, con los datos recogidos y diversos estudios realizados ambos decretos fueron modificados por el Real Decreto 3474/2000, de 29 de diciembre. En él se fijan las Matemáticas I y II como materias propias de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de la modalidad de Tecnología y sus contenidos mínimos y criterios de evaluación.

En este Real Decreto se marca como objetivos generales de Matemáticas I y II: *comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general y aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolas en la interpretación de las ciencias y en las actividades cotidianas*. Es decir, se vuelve a hacer hincapié tanto en su carácter instrumental para la interpretación de las Ciencias, como en el propedéutico por lo que sus contenidos deberán estar en consonancia con los de los estudios específicos de grado superior a los que se dirigen.

En lo que respecta a estos contenidos mínimos, observamos que se ha eliminado el concepto de integral de Matemáticas I donde inicialmente se hacía una introducción, encontrándose únicamente en Matemáticas II. Para esta materia dichos contenidos mínimos son: *Integrales definidas. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas*. En lo que respecta a los criterios de evaluación: *Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida de áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables*. De esta manera podemos observar que en los contenidos mínimos el Cálculo Integral están exclusivamente ligados a la aplicación de la regla de Barrow y al cálculo de áreas de funciones que se puedan representar.

Establecer el currículo de cada nivel, etapa y modalidad teniendo en cuenta las enseñanzas mínimas fijadas a nivel nacional, corresponde a las administraciones educativas competentes, como es el caso de la Comunidad Autónoma de Andalucía. De esta manera el Decreto 208/2002, de 23 de julio (BOJA 20 de agosto de 2002), por el que se modifica el Decreto 126/1994, de 7 de junio, establece las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. En él volvemos a observar que el Cálculo Integral desaparece del primer curso pasando a tratarse por completo en segundo curso. Los contenidos propuestos son:

• *El problema del área. Cálculo aproximado: método de las sumas.*

• La integral definida de una función en un intervalo cerrado: concepto, notación y obtención de algunas propiedades sencillas.

• Relación entre los procesos de integración y derivación: el teorema fundamental del cálculo. La regla de Barrow.

• Métodos de cálculo de primitivas. Integración inmediata, por descomposición, cambio de variables y por partes (hasta dos niveles). Integración de funciones racionales sencillas con raíces reales en el denominador.

Resaltamos los siguientes criterios de evaluación:

2. Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida.

Este criterio pretende evaluar la capacidad del alumnado para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio analítico de las funciones. (...). El cálculo de integrales se limitará a los métodos generales de integración, y en todo caso, con cambios de variables simples.

7. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

Se pretende evaluar la madurez del alumnado para enfrentarse con situaciones nuevas utilizando la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas.

Si además consideramos los objetivos generales:

1. Comprender los conceptos, procedimientos, estrategias y métodos matemáticos que le permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de Ciencias o Técnicos y adquirir una formación científica de carácter general.

2. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en actividades cotidianas,

observamos que se pretende que los alumnos sean capaces de aplicar los nuevos conceptos en situaciones de la vida cotidiana y le sirva como instrumento de interpretación de la Ciencia, Tecnología y la vida cotidiana, en consonancia con los objetivos básicos del Bachillerato. Sin embargo, los contenidos están totalmente centrados en la interpretación de la integral definida como área o como inversa de la derivada sin hacer ninguna referencia a la idea de acumulación o la interpretación como *efecto de cambio*. En Ordóñez y otros (2002) se resaltan algunas ideas de Wenzelburger (1993) sobre estos aspectos al señalarse que el Cálculo Integral se suele introducir como proceso inverso de la derivación solamente, con lo que carece de significación. Según su propuesta *la idea fundamental del*

Cálculo Integral es la determinación de resultados o efectos de cambios o procesos. Mientras que en el Cálculo Diferencial interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo integral para determinar los resultados totales de procesos de cambio (p.110-111). Esta idea fundamental está presente en la vida cotidiana de una u otra manera en muchos procesos y sólo será necesario hacerlo consciente mediante una buena didáctica, que además dotará de significación al concepto objeto de estudio. Consideramos que de esta manera adquiere todo su sentido el Cálculo Integral como inversa del Cálculo Diferencial y no sólo como mera operación algebraica (p. 6)

Además, hay que tener en cuenta que la transferencia a contextos no geométricos no es inmediata ni está exenta de conflictos como han puesto de manifiesto diferentes estudios que veremos en el siguiente capítulo.

1.2 La problemática de las pruebas de acceso a la Universidad

La LOGSE establecía que para acceder a los estudios universitarios, tras la obtención del título de Bachiller, sería necesaria la superación de una prueba cuya finalidad es, junto a las calificaciones obtenidas en el Bachillerato, valorar objetivamente la madurez académica de los alumnos y los conocimientos adquiridos en él. Dicha prueba se regula por el Real Decreto 1640/1999, de 22 de octubre (BOE 17/10/99) modificado y completado por el R. Decreto 990/2000, de 2 de junio (BOE 3/6/00), y modificado por el Real Decreto 1025/2002, de 4 de octubre (BOE 22/10/02)

A partir del curso académico 1992-1993, en el que se inició la impartición de los estudios de Bachillerato establecidos en la LOGSE, se hizo necesario regular las Pruebas de Acceso a la Universidad para los alumnos que obtuvieran el título de Bachiller. Esta regulación tenía carácter transitorio y experimental debido a que corresponde a una implantación anticipada de dichos estudios.

En el año académico 2000-2001 se instauró, con carácter general, el primer curso del Bachillerato, por lo que se hizo necesario establecer la regulación definitiva de la Prueba de Acceso a la Universidad. Por una parte se atendieron las conclusiones y recomendaciones formuladas, y aprobadas por unanimidad, por el informe de la Ponencia de estudio sobre las Pruebas de Acceso a la Universidad, y, por otra, las propuestas y observaciones formuladas por la comunidad educativa sobre el documento-propuesta que fue sometido a su consideración con carácter previo a la elaboración del correspondiente proyecto de norma.

Así, se estableció que la prueba de acceso debía basarse en los objetivos generales del Bachillerato y en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación de las materias comunes y de modalidad, establecidas en los Reales Decretos, de enseñanzas mínimas. Además, como la Comunidad Autónoma de Andalucía es competente en materia de regulación y administración de la enseñanza, esta prueba debía basarse también en los Decretos que establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en dicha Comunidad.

En lo que respecta a Andalucía, la Ley 1/1992 de 21 de mayo, de Coordinación del Sistema Universitario dispone que todas la Universidades Andaluzas, a los únicos efectos de ingreso en los Centros Universitarios, se consideraran como un distrito único. Posteriormente, la Orden de 8 de enero de 1996 crea la Comisión Coordinadora Interuniversitaria para la organización y seguimiento de las Pruebas de Acceso a las Universidades Andaluzas. Además, en cada Universidad se crea una Comisión Universitaria delegada de la Interuniversitaria

La Resolución de 21 de febrero de 1996, de las Direcciones Generales de Universidades e Investigación y de Planificación del Sistema Educativo y Formación Profesional, por la que se dictan instrucciones para la organización de las Pruebas de Acceso a la Universidad, establece que la Comisión Interuniversitaria encargará la elaboración de las pruebas a especialistas de la Universidad, los Servicios de Inspección de Educación o los Institutos de Educación Secundaria. Además, se deberán adjuntar a éstas los criterios de corrección. Las Comisiones Universitarias serán las encargadas de informar a los Centros, para lo que se constituye una ponencia por cada una de las materias objeto de examen. Las ponencias informarán a los Centros, en reuniones celebradas al menos una vez al trimestre, sobre la estructura y organización de las pruebas y facilitarán modelos de examen de las diferentes materias.

Anualmente se celebran dos convocatorias de las Pruebas de Acceso al Universidad, una ordinaria, en junio, y otra extraordinaria, en septiembre. La prueba de acceso a los estudios universitarios consta de dos partes. La primera, de carácter general, versará sobre las materias comunes de segundo curso. La segunda parte, de carácter especifico, versará sobre tres materias de entre las de modalidad de Bachillerato cursadas por el estudiante en segundo año.

Como resumen señalaremos varios puntos que nos parecen interesantes. En primer lugar, destacamos que se busca que, tanto en la Comisión Coordinadora Interuniversitaria, como en la Comisión Universitaria, así como en las ponencias de las distintas materias, intervengan igual número de profesores de Universidad y de Educación Secundaria. Por ello las pruebas y las orientaciones que se facilitan a los Centros son elaboradas bajo la supervisión de ambas instituciones. El propósito es que no exista una desconexión entre la Educación Secundaria y la Universidad y por lo tanto las PAU cumplan de forma eficaz su objetivo de valorar la madurez académica de los alumnos y si los conocimientos adquiridos son los adecuados para comenzar sus estudios universitarios.

En segundo lugar, respecto de las Matemáticas II observamos que es una materia vinculada para los alumnos que han escogido la vía Científico- Tecnológica y los que hayan optado por la doble vía (vía Científico- Tecnológica y vía Ciencias de la Salud). Por este motivo su calificación supondrá un 40% de la nota de la segunda parte. Por otra parte, los alumnos de la vía de la Salud no tiene por qué escogerla y, en caso de escogerla, contaría solamente un 20%.

El hecho de que no fuese una materia de obligado examen en las Pruebas de Acceso a la Universidad hacía que hubiera alumnos que ni siquiera optaban a ella. No obstante, si observamos los estudios vinculados preferentemente a las vías de acceso determinados en la Orden de 25 de noviembre de 1999 (BOE de 30 de noviembre de 1999), actualizada por la Orden de 27 de junio de 2000 (BOE de 4 de julio) y la Orden de 14 de mayo de 2001 (BOE de 22 de mayo), podíamos comprobar que encontramos entre los estudios vinculados preferentemente a la vía de la Salud carreras técnicas, Matemáticas, Física, etc., es decir, carreras donde son necesarios unos sólidos conocimientos matemáticos. Nos preguntamos si los currículos de estas carreras contemplaban a estos alumnos o si el paso a la Universidad para ellos era franqueable. Probablemente, este sería un tema de otra investigación, pero nos parece interesante apuntar que en la nueva normativa vigente en la actualidad esta cuestión ha sido modificada y todos los alumnos de Ciencias deben cursar las Matemáticas II.

Centrándonos en la integral definida, la Ponencia de Matemáticas II propone un Documento de Orientación para las Pruebas de Acceso a la Universidad cada curso cuya finalidad es servir de orientación para la elaboración de la Prueba de Acceso a la Universidad de la materia Matemáticas II, como ya se ha explicado anteriormente, y se debe informar a los Centros de Secundaria de su contenido junto con modelos de examen.

Dicho documento se adapta al currículum de la asignatura y su objetivo es matizar y especificar con cierto detalle algunos aspectos de los apartados de dicho currículum. En lo que respecta a la integral definida en los últimos 10 años (los que corresponden a las PAU que analizaremos en el capítulo 5) no se han producido cambios. En todos ellos nos encontramos con:

- *Conocer la técnica de integración por cambio de variable. [2]* [3].
- *Conocer las propiedades de linealidad de la integral definida con respecto tanto al integrando como al intervalo de integración. [2].*

[3] Los números entre corchetes indican los criterios de evaluación, según el Decreto 208/2002 de 23 de Julio de 2002 (B.O.J.A. de 20 de Agosto de 2002) y han sido expuestos en la página 9.

− *Conocer las propiedades de monotonía de la integral definida con respecto al integrando. [2].*

− *Conocer la interpretación geométrica de la integral definida de una función (el área como límite de sumas superiores e inferiores). [2,7].*

− *Conocer la noción de función integral (o función área) y saber el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow. [2,7].*

− *Saber calcular el área de recintos planos limitados por curvas. [2,7].*

Resaltamos que no hay prácticamente cambios respecto a los contenidos propuestos para el Bachillerato con lo que lo apuntado allí vuelve a ser válido en este punto. Sin embargo, nos parece que el penúltimo punto merece una atención especial pues en su redacción *Conocer la noción de función integral (o función área)* potencia la identificación entre integral y área que trataremos en este trabajo y que nos parece está en la base de algunos errores de los alumnos como expondremos más adelante.

Capítulo 2

Antecedentes

El tema de investigación de la enseñanza de la integral definida ha sido tratado desde diversas perspectivas en diferentes estudios. Nos proponemos, en este momento, hacer un recorrido por dichos estudios como paso previo de orientación y justificación de nuestra propia investigación. El objetivo es centrar el trabajo dentro del contexto de los resultados obtenidos hasta el momento, lo que nos permitirá, junto con el marco teórico, poder determinar nuestros objetivos y establecer las hipótesis de trabajo.

Nuestra propia concepción de que en la investigación educativa van íntimamente unidas las facetas institucional-personal, nos ha permitido clasificar los trabajos sobre la integral definida en las siguientes categorías:

i. Investigaciones centradas en la faceta institucional: propuestas didácticas, análisis de currículos y estudios epistemológicos de la integral definida.

ii. Investigaciones centradas en la faceta personal: estudio y/o análisis de las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la integral definida.

Además, dichas categorías están muy en consonancia con la estructura o partes de nuestro trabajo, en el que, tras un estudio de los significados institucionales, se realiza un análisis de los significados personales de los estudiantes. Y también muy en la línea de la concepción que tenemos de la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Es importante resaltar que, dado que las facetas institucional-personal están íntimamente ligadas, estas categorías no son disjuntas y en gran parte de los trabajos de los que nos ocuparemos se tratan ambas.

2.1 Investigaciones centradas en la faceta institucional

Han sido diversas las propuestas didácticas realizadas en torno a la noción de integral definida. En todas ellas se considera la introducción de dicha noción y encontramos el común denominador de proponer su estudio antes de la integral indefinida, exponiendo esta última como una generalización de la primera. El objetivo perseguido es dotar al concepto de sentido y conseguir, en definitiva, un aprendizaje significativo en los estudiantes. Por tanto, se pretende con estas propuestas superar la algoritmización del Cálculo Integral, que ya hemos comentado y ha sido ampliamente expuesta por diversos investigadores, según la cual el estudiante considera el Cálculo Integral solamente como un conjunto de reglas algorítmicas, pero permaneciendo el concepto sin sentido para él, lo que conduce, por ejemplo, a la incapacidad para decidir si en la resolución de una determinada situación la integración es necesaria, a no ser que aparezca explícitamente.

Otro denominador común para este nivel introductorio es considerar un enfoque intuitivo, sin mucho rigor matemático en principio, basado en combinar desarrollos gráficos y numéricos. Éstos se apoyan en los recursos informáticos que liberan al estudiante de cálculos pesados, le permiten realizar exploraciones gráficas y contrastarlas con las numéricas, o viceversa, fácilmente y amplia la tipología de problemas que puede abordar al prescindir de la parte algebraica. Se dejarían, por tanto, los desarrollos algebraicos para una etapa de formalización una vez que se ha trabajado el concepto intuitivamente.

En los últimos años, además, diversos trabajos han mostrado cómo los alumnos de ingeniería, principalmente, tienen dificultades para aplicar la integral definida a contextos no geométricos y postulan la necesidad de trabajar la idea de acumulación.

En esta línea de trabajo, Wenzelburger (1993) presenta una propuesta didáctica para la introducción de la integral definida desde lo que denomina un enfoque propedéutico intuitivo y relacionado con sus aplicaciones, ya que considera que una didáctica de la matemática puede proponerse la tarea de tomar como punto de partida los preconceptos de la idea fundamental del Cálculo, y hacerla consciente a través de un proceso de reflexión. Según esta autora, "esta idea fundamental del Cálculo Integral es la determinación de *resultados o efectos de cambios o procesos*. Mientras que en el Cálculo Diferencial nos interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo Integral para determinar los resultados totales de estos procesos de cambio" (pp.110-111) Dicha idea está presente de una u otra forma en la vida diaria. Postula que solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización, hace que ésos sean accesibles para los estudiantes.

En su estudio se restringe a la integral de Riemann para funciones elementales continuas o con un número finito de discontinuidades. En cierto modo se reconstruye didácticamente el desarrollo histórico del Cálculo Integral, ya que parte de sumas pero utilizando lo que denomina "efectos de cambio", aludiendo con ello a la relación existente entre el Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial que estudia el cambio instantáneo.

Posteriormente, se estudia cálculo de áreas una vez que se ha establecido que el área bajo la curva de las razones de cambio representa el resultado de los cambios. Esto permite observar que si hacemos una subdivisión más fina, obtenemos una mejor aproximación al valor real.

Por último, después de estudiar diversos casos donde se pone de manifiesto la necesidad del área y, sobre todo, se interpreta ésta dentro del contexto (no es un área geométrica completamente descontextualizada sino que tiene una interpretación dependiendo de la situación estudiada), se establecen la integración y la diferenciación como procesos inversos.

Más tarde, en Wenzelburger (1994) se amplía el trabajo realizado anteriormente. Nuevamente incide en la idea de conseguir un aprendizaje significativo en los estudiantes, antes de abordar el estudio de desarrollos algorítmicos, a través de un enfoque intuitivo, gráfico y siempre por medio de problemas concretos ya que parte de la premisa de que los conceptos básicos e intuitivos del Cálculo aparecen en situaciones de la vida diaria, no así los conceptos formales del Análisis Matemático. En este sentido expone: "si como finalidad de la enseñanza de la matemática se acepta el desarrollo de habilidades competitivas en la aplicación de conceptos, no podemos confrontar al alumno con una matemática rigurosa, terminada y abstracta. (…) Una presentación abstracta del Cálculo Integral que se basa solamente en definiciones, teoremas y procedimientos algorítmicos no es adecuada para alumnos que se enfrentan por primera vez a su complejidad. No es suficiente trabajar, después de un tratamiento rigurosamente matemático del cálculo, algunos ejemplos de aplicación a las ciencias o la tecnología. Lo que se requiere es una construcción de los conceptos fundamentales a partir de su núcleo tratando de relacionar éste con intuiciones primitivas que el alumno ya tiene." (p.5)

Considera la determinación de *resultados* o *efectos de procesos de cambio* como idea central para el desarrollo del Cálculo Integral y sugiere recurrir al término *valor pronóstico*, en cuanto a su utilidad para tomar decisiones, para destacar su importancia.

Pospone la relación con el área ya que cuando utilizamos el proceso de integración para resolver un problema no estamos interesados en el área debajo de la curva, sino en lo que esta área representa: un saldo, un consumo, una distancia… Esto es, al calcular integrales definidas, obtenemos siempre un valor concreto que representa el resultado final de algún proceso que cambia en el tiempo y el estudiante debe aprender a interpretarlo en el contexto en el que lo esté utilizando.

Sin embargo, un problema didáctico en la conceptualización del Cálculo Integral es que en esta idea intervienen tres aspectos básicos: la razón de cambio, el resultado de los cambios y el efecto acumulado de las razones de cambio. Estos tres aspectos deben coordinarse, lo cual no es fácil, por lo que estima que la interpretación del proceso de integración a un nivel intuitivo y conceptual es bastante complejo.

El procedimiento para calcular el efecto total de estas razones de cambio es la suma de productos: *tasa de consumo x intervalo de tiempo*. Este método pone el énfasis en la idea fundamental del Cálculo Integral: la acumulación (suma) de resultados parciales producen un efecto total del proceso de cambio. Sin embargo, interpretar la suma de los resultados parciales como el efecto total de los cambios presenta dificultades conceptuales para los alumnos, proponiendo para superarlo desarrollar en el alumno la habilidad de reconocer simultáneamente características de la función original y la función integrada. En este sentido hay que tener en cuenta que "en la formación del concepto de integral intervienen dos aspectos complementarios. Por un lado, la acumulación gradual de los resultados de los cambios y la interpretación de este proceso; por otro lado, la información que se puede obtener del resultado acumulado o en otras palabras del valor de la integral definida misma. Ambos aspectos aportan algo a la formación de conceptos ricos y contextualizados lo que facilita su aplicabilidad" (ibíd., p. 21)

Otro concepto básico del Cálculo Integral es la necesidad de aumentar el número de rectángulos, cada vez más, para lograr una aproximación más exacta del valor numérico, intuyendo posteriormente que un número arbitrariamente grande o infinito de intervalos producirá el mejor resultado.

Ahora bien, el "paso al infinito" en el Cálculo Integral, que matemáticamente significa calcular un límite, se puede interpretar de dos maneras. Por un lado, suponiendo que el número de intervalos o subdivisiones, crece al infinito ($n \to \infty$), y por otro, estableciendo que la longitud de cada intervalo se hace cada vez más pequeña ($\Delta x \to 0$)

Respecto a esta doble interpretación la autora señala: "los razonamientos necesarios para hacer $n \to \infty$ son equivalentes a las consideraciones subyacentes al proceso que hace $\Delta x \to 0$. Dos caminos conceptualmente diferentes llevan al mismo resultado. Para la interpretación de procesos de integración en el caso de aplicaciones concretas, ambos acercamientos pueden ser útiles y es importante que profesores y alumnos manejen éstos con flexibilidad". (ibíd., p.37)

Destacamos de las aportaciones de esta autora la idea de considerar la determinación de *resultados* o *efectos de procesos de cambio* como idea central para el desarrollo del Cálculo Integral, realizando su introducción desde un punto de vista intuitivo, con ayuda de ejemplos de la vida cotidiana en el que las interpretaciones de los procesos toman espacial interés y dejar para posteriores etapas la asociación de la integral con el área y los procesos donde interviene el infinito.

En Turégano (1994) se realiza un estudio sobre los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal. La finalidad es encontrar un modelo dentro del contexto matemático (definición de integral alternativa a la de Riemann) para elaborar una propuesta didáctica que permita introducir, a nivel conceptual, la integral definida a los estudiantes de Secundaria que no han sido iniciados en el estudio del Cálculo Infinitesimal. La integral sería la primera introducción al Análisis, tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas y basándose en la definición geométrica de integral definida presentada por Lebesgue. Su hipótesis de trabajo, siguiendo la corriente constructivista, es que los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos de Cálculo antes de dominar las habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de integral definida y sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.

Como paso previo e indispensable, por la importancia que da al método genético, realiza un estudio histórico, análisis de tratados, manuales y textos, y el estudio de currículos, buscando determinar el tránsito noción-concepto-definición para el área de una región. Por otra parte, analiza la situación de partida de los estudiantes en cuanto a su intuición del infinito, y su capacidad para la visualización y la resolución de problemas de áreas, pues considera que son nociones que influyen en el aprendizaje de la integral definida.

Con el modelo teórico elaborado y los conocimientos previos e intuiciones manifestadas por los estudiantes en las entrevistas de la etapa de preaprendizaje, diseña las situaciones didácticas que componen su propuesta didáctica para la enseñanza de la integral definida. Las imágenes del concepto que han formado los estudiantes, la evolución, si la ha habido, en el concepto de límite, y si este enfoque de la integración favorece la transferencia a otros contextos distintos del matemático se evalúa a través de una serie de entrevistas.

De las conclusiones obtenidas destacan que el acercamiento a la integral, como medida del área de un rectángulo congruente con la región curvilínea, permite una transferencia inmediata a la relación $e=v \cdot t$, ya que asocia el tiempo con la base y la velocidad con la altura y también a gran parte del contexto físico y al contexto probabilístico. En general, esta introducción al Cálculo vía la definición geométrica permite, por una parte, dar sentido a conceptos como sucesión, límite, número real e integral y, por otra, establecer una relación integral-medida, lo que favorece la transferencia a otros contextos y organizar la experiencia previa a la formalización de los conceptos de Cálculo. En este sentido expone que “los modelos visuales en la enseñanza del Cálculo y la eliminación de cálculos algebraicos (mediante el uso del ordenador) favorece la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes del concepto que ayudarán posteriormente a la formalización de los conceptos de Cálculo Infinitesimal." (Turégano, 1994, p. 247)

Realiza, por último, unas implicaciones didácticas entre las que destacamos la necesidad de una fase previa de carácter experimental antes de formalizar los conceptos de Cálculo Infinitesimal. Además, la introducción a los conceptos vía resolución de problemas que han estado en el origen del concepto logran realzar la formación del mismo. Por otra parte, utilizar simultáneamente modos visuales y analíticos favorece establecer relaciones entre ellos, y aquí es donde el ordenador ayuda poderosamente a este tratamiento. De esta manera se forma una estructura cognitiva estable sobre la que se podría construir un desarrollo posterior de las habilidades.

Fruto del análisis de su propuesta, identifica tres tipos de imágenes de concepto de los estudiantes con respecto a su acercamiento a la integral definida: primitiva (asocian la integral con una fórmula $(b\text{-}a)\cdot h$), operativa (integral es área y no consideran el signo) y descriptiva (ha asimilado la noción de integral)

Como continuación de este trabajo, en Turégano (1996, 1997 y 1998) se expone que este enfoque permite dar sentido a las áreas negativas, dificultad detectada en un número importante de estudiantes. Además, al unir el contexto numérico con el geométrico, la imagen visual permite romper con la idea de que el límite no se alcanza. "El infinito potencial se muestra como el mayor obstáculo para concebir un proceso infinito como algo definido o acabado" (Turégano, 1998, p.238). Esta autora señala, además, que los alumnos no recuerdan los cortes laminares por planos o la descomposición infinitesimal de las superficies de forma espontánea, quizás porque rompen con su imagen de área como algo que se cubre y que está en la base de la integral de Riemann.

Nos parece interesante de estos trabajos resaltar, sobre todo, la necesidad de buscar métodos alternativos para favorecer la transferencia a otros contextos (proponiendo la noción de medida como idónea) y la necesidad de realizar acercamientos intuitivos vía resolución de problemas que han estado en el origen del concepto, en la misma línea anterior, así como usar modos visuales combinados con analíticos para favorecer las relaciones entre ellos, utilizando el ordenador como apoyo y además abordar dificultades importantes relacionadas con el límite.

Algunas sugerencias o problemas que están relacionados con la integración son los siguientes (extraídos de Turégano, 1994):

- Utilización de métodos sencillos para aproximar el área bajo una curva sobre el eje x y entre las líneas $x=a$ y $x=b$ en el primer y segundo cuadrante, usando conceptos adicionales diferentes al concepto de área, que son eficaces y matemáticamente seguros a la vez que sencillos: densidad y probabilidad (Sconyers, 1984)

- Martín y Ponte (1985): resolución de un problema real en el que hay que determinar el área de superficies irregulares estudiando diversas aproximaciones al área y con la ayuda del ordenador.
- Powell (1985) utilizando la regla de Simpson hace hincapié en los procesos de adicción y búsqueda de áreas en integrales definidas, apuntando que se puede enseñar independientemente de la diferenciación.
- Tall (1986a) sugiere la utilización de ideas gráficas mediante su programa de ordenador consiguiendo mejorar la comprensión de los estudiantes en cuanto a dos ideas fundamentales: a) cuando se toman áreas más pequeñas la aproximación se acerca más al área verdadera; b) áreas positivas y negativas.
- Dreyfus (1987) propone una serie de métodos que son herramientas apropiadas para fortalecer la comprensión intuitiva de este aspecto de la integración (área) sin recurrir al cálculo, usando sólo el concepto de área, el concepto de gráfica de una función y fórmulas. Concluye lo siguiente: a) la naturaleza gráfica de los métodos discutidos es apropiada para ayudar a los estudiantes a visualizar sucesivas aproximaciones a la función *f*, y por tanto, al área bajo el gráfico de *f*; b) los métodos utilizados pueden usarse de un modo natural que lleva a la discusión de límites; c) por medio de un ejemplo se pueden enseñar nociones y procedimientos matemáticos contando con los conceptos mismos. (p. 66)

En una línea similar a la tratada en los trabajos de Turégano, Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996) realizan una propuesta didáctica para presentar el concepto de integral definida a partir del concepto de área y su cálculo mediante un método de aproximaciones, combinando lo gráfico, lo numérico y lo algebraico por medio del uso de la tecnología (calculadoras u ordenador), pero, basada en la integral de Cauchy-Riemann. La idea básica es que la enseñanza de las Matemáticas debe fundamentarse en la dialéctica existente entre las Matemáticas como instrumento y como objeto de conocimiento. Postulan que el éxito en Matemáticas depende de la riqueza de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos y de la facilidad para pasar de uno a otro, señalando que “la adquisición de flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos (gráfico, numérico y algebraico) de los conceptos del cálculo diferencial e integral es un paso necesario para la introducción posterior del cálculo formal y asegura una sólida base para enfrentarse con los conceptos y los métodos cada vez más abstractos que se construirán a partir de aquí.” (p.17)

En cuanto a la integral definida, consideran que tal y como se expone en los libros de texto es incomprensible para los alumnos y, además, éstos no reconocen cuándo el cálculo de una magnitud requiere una integración en situaciones más allá de áreas y quizás determinados volúmenes. Proponen considerar el aprendizaje del concepto de integral definida como independiente del concepto de derivada y que puede, incluso, darse antes. Así, no verán la integración exclusivamente como la operación inversa de la derivación, con lo que darán mayor valor al Teorema Fundamental del Cálculo pues une dos estructuras aparentemente diferentes, lo que reproduce, en cierta medida, el proceso histórico de desarrollo de dicha noción.

En su propuesta se trabaja primero el aspecto gráfico para formar una imagen geométrica. Posteriormente se trabajan diversos métodos de integración numérica. El método de los trapecios o el de la ordenada media se consideran adecuados para este nivel educativo por su sencillez y utilidad. Estiman que es necesario también realizar ejemplos que combinen la integración numérica con la geometría. La introducción del cálculo de áreas para funciones negativas en un intervalo puede hacerse a partir de la velocidad.

Por último se introducirá el cálculo algebraico de la integral definida desde la integración numérica y a continuación se abordará el Teorema Fundamental del Cálculo como una relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, estudiando las integrales indefinidas. Una dificultad importante que surge en esta presentación de la integral definida es la aparición de *dx*, aparentemente inútil y arbitraria.

Se incide en este trabajo en la idea de realizar una aproximación intuitiva basada en el contexto geométrico como medio para la formación del concepto, pero nos parece importante la indicación de trabajar las diversas representaciones, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos como una clave, antes de la introducción de la formalización. Además, una cuestión interesante es la de considerar el aprendizaje de la integral definida independiente del de derivada estableciendo la relación posteriormente.

Un trabajo al que ya hemos hecho una pequeña referencia pero que es posterior a este último es Turégano (1998) donde, de acuerdo con Wenzelburger (1993), se considera que "las ideas fundamentales del Cálculo Integral están presentes, aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas. Allí donde existe una función que relacione dos magnitudes de tal forma que, a cada valor de una de ellas, corresponde determinado valor de la otra, existe un problema de Cálculo Integral. El Cálculo Integral determina los resultados de los cambios entre esas dos magnitudes." (p. 41) en este sentido la imagen visual es muy importante ya que posibilita la interpretación del área bajo el gráfico. Esto permite que los estudiantes reconozcan la integral en problemas donde no aparece explícitamente lo que no sucede en los planteamientos exclusivamente algorítmicos que predominan en la enseñanza actual y que es la causa del gran fracaso escolar.

Señala esta autora que "la idea de proceso acumulativo de la integral surge de las variaciones de las magnitudes (…). Es necesario encauzar el trabajo de los estudiantes en estos procesos de variación, más que en el proceso de integración. (…) Estas variaciones nos permiten confeccionar una tabla de valores que, al ser representados, nos da una información interesantísima, ya que cada punto representa el área acumulada hasta ese momento, y el último punto, el resultado final." (ibíd., p. 41) Además, se pueden explorar las propiedades de la integral y su conexión con el Cálculo Diferencial a través de las variaciones. Aunque "estos planteamientos chocan de frente con un agente externo; las Pruebas de Acceso a la Universidad, que ponen el énfasis, principalmente, en los aspectos mecánicos y no en los conceptuales" (ibíd., p. 42)

En este trabajo podemos observar que se vuelve a hacer referencia a la noción de acumulación como idea central en la integración estableciendo los procesos de variación como claves para la relación integral-derivada. Aporta una cuestión muy interesante en nuestra investigación y es el choque de este tipo de planteamientos, que se ven necesarios, con agentes externos como son las PAU.

Podemos observar como las propuestas didácticas expuestas hasta ahora abordan diferentes significados para la integral definida. Sin embargo, Cantoral (2003) indica, desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento matemático avanzado, que los mecanismos de consenso en los grupos humanos para favorecer imágenes colectivas también se dan en la elección de los contenidos escolares. En lo que respecta a la introducción de la integral definida considera tres de las versiones más conocidas, la integral de Cauchy-Riemann, la de Newton-Leibniz y la de Wallis, señalando que "cada una de las tres representaciones se ve acompañada de explicaciones diferentes. La de Cauchy-Riemann alude a la aproximación, la de Wallis a la noción de promedio y, la de Newton-Leibniz a la de acumulación" (p. 12) Apunta este autor que el consenso escolar de estudiar la integral de Cauchy-Riemann obedece, más que a necesidades escolares, a mecanismos de consenso ya que no hay evidencias empíricas que justifiquen qué representación de la integral conviene más a fin de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, algunos trabajos están poniendo de manifiesto las dificultades de los estudiantes en las nociones asociadas a la integral de Cauchy- Riemann.

Asociadas a la integral definida hay, también, diferentes dificultades epistemológicas. En los trabajos de Artigue (1998 y 2003) se exponen, en primer lugar, dos ejemplos de obstáculos epistemológicos. Un primer ejemplo extraído de un test pasado a estudiantes de diferentes niveles universitarios en el que se manifiesta un obstáculo epistemológico de la integral definida asociado al concepto del límite, en concreto el paso al límite simple de la triangulación de una superficie de R^3 que puede no conducir al área (contraejemplo de Schwarz). El segundo ejemplo, es una situación sencilla donde el obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones (Schneider-Gilot, 1988 que comentaremos más adelante) lleva a resultados erróneos, siendo los alumnos incapaces de resolver el error aunque lo detecten. Señala esta autora que, en este tipo de resistencia a superar los errores, el formalismo juega un importante papel así como el hecho de que los símbolos diferenciales sólo se interpreten como simples marcadores de integración, cuestión expuesta también por Azacárate y cols. (1996) como hemos visto.

En segundo lugar, expone un ejemplo de una situación fundamental, en el contexto de la ingeniería didáctica, para el procedimiento de la integral de Riemann expuesta por Legrand en 1997 y en la que no interviene la variable tiempo.

Esta autora muestra la difícil ecología en la enseñanza Secundaria del campo de la aproximación en el Análisis y la influencia de la tecnología en el aprendizaje.

Partiendo de estos últimos trabajos, en Ordóñez y otros (2002) se realiza un estudio del significado institucional del concepto de integral definida en el currículo actual de la Secundaria. En primer lugar se exponen las tres versiones más habituales de dicho concepto (la de Cauchy-Riemann, la de Newton-Leibniz y la de Wallis) observando que en las instituciones escolares el estudio queda muy sesgado pues no conviven los tres significados quedando, por tanto, el concepto con un significado incompleto. En segundo lugar, se muestran las concepciones cognitivas, aportando un ejemplo sencillo para el estudio de la integral como un proceso de cambio, significado institucional que no aparece en el currículo. Por último, presentamos un caso práctico en el que el obstáculo llamado de heterogeneidad de las dimensiones (Schneider-Gilot 1988) lleva a error.

También en la línea del análisis de currículum, el estudio de Contreras y cols (2003) se centra en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos de derivada e integral en Bachillerato LOGSE, en cuanto a los procesos de trasposición didáctica efectuados por los manuales, desde la óptica de las nociones de concepción, obstáculo epistemológico y acto de comprensión. Se postula que una enseñanza que no esté basada en la superación de los numerosos obstáculos epistemológicos y didácticos por parte de los alumnos no es efectiva, lo que provoca el escaso rendimiento de éstos.

Para alcanzar el objetivo general de identificar los factores y fenómenos didácticos que influyen en una adecuada comprensión por parte de los alumnos, de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático: derivada e integral en los manuales al uso se realiza, en primer lugar, un análisis epistemológico de la evolución y génesis histórica de las distintas nociones objeto de estudio lo que permite identificar las concepciones históricas. Por otra parte, se consideran las concepciones cognitivas de ambos conceptos que pueden detectarse en las respuestas de los alumnos y por último, los obstáculos epistemológicos y didácticos. Así se establecen las concepciones y obstáculos que se utilizarán en el análisis de manuales. A partir de este estudio previo, se realizó un análisis de los 10 manuales de Bachillerato más utilizados en la provincia de Jaén correspondientes al período 1998-2000, según autor y nivel de enseñanza, respecto a ambos conceptos, considerando 4 variables entre las que se incluyen las variables significados institucionales y conflictos semióticos potenciales. Por último, se realiza un diagnóstico, a la vista de los resultados obtenidos, sobre los contenidos y el tipo de enseñanza que se realiza en dichos manuales.

En cuanto a las conclusiones generales, se ha podido ver que en casi todos los manuales el estudio de obstáculos y actos de comprensión es bastante limitado, con alguna mínima excepción.

En lo que se refiere a la integral se concluye que el tipo de enseñanza propuesto en los manuales es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto meramente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del conocimiento y además, solamente en tres de los manuales se establece una conexión con las ideas previas, aunque posteriormente no se utilizan situaciones didácticas capaces de facilitar la construcción del saber matemático.

Destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizada.

Tal como se observa en los manuales, la enseñanza del Cálculo Integral no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento. Además, al tener los alumnos que asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados a las apariciones del infinito y de los límites, y los conceptos y teorías formales que los definen y desarrollan matemáticamente, se encuentran, a veces, en un callejón cuya única salida es la algoritmización.

Este estudio del currículum a través de los manuales se continuó en Ordóñez y Contreras (2003) Basándose en las nociones de significado institucional y conflicto semiótico (Godino, 2002) se realiza en primer lugar, un estudio de manuales de primero y segundo de Bachillerato-LOGSE, respecto al concepto de integral definida, exponiendo las cuatro dimensiones consideradas y un ejemplo de aplicación a un manual de 2º de Bachillerato. En la segunda parte, se hace un estudio comparativo entre nueve manuales analizados, los más representativos de los que se utilizan en los centros de Educación Secundaria de Jaén y provincia, centrándonos en los significados institucionales históricos y en los conflictos semióticos. Se postula que los manuales de enseñanza se encargan de adaptar los programas de las materias influyendo en la programación del aula. Es decir, el análisis de los libros de texto constituye un instrumento muy útil cuando se busca estudiar los significados institucionales y los conflictos semióticos inherentes a este momento de la transposición didáctica.

Los resultados de este trabajo ponen de manifiesto un tratamiento de la integral definida muy sesgado hacia la integral de Cauchy-Riemann, muy formalizada, lo que se considera demasiado difícil para este nivel y que conduce, además, a una interpretación como área geométrica muy descontextualiazada. Se observa también, que por el tipo de significado institucional elegido se potencian los conflictos semióticos asociados al límite como son considerar que el área tiene un valor aproximado o que un volumen puede obtenerse como una infinidad de superficies (en la línea del obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones estudiado por Schneider-Gilot, 1988) e incluso que uno de los manuales potencia este último conflicto.

Se propone introducir la integral definida como resultado de los procesos de cambio de distintos fenómenos, en consonancia con los trabajos de Wenzelburger (1993 y 1994) anteriormente citados, de esta manera "se enriquecería el campo de problemas y los distintos significados institucionales surgirían de forma natural y la relación entre derivada e integral se podría establecer de forma intuitiva y no algebraica. Se potenciaría, en definitiva la no algebraización del Cálculo Integral y se daría una visión más amplia del concepto." (Ordóñez y Contreras, 2003, p. 286)

El análisis de manuales se ha perfeccionado en Contreras y Ordóñez (2005a) donde se efectúa el análisis de un manual, basándose en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006). Se establecen tres dimensiones de estudio: semiótico, didáctico y epistemológico-cognitivo. Los resultados muestran la escasez de ejercicios contextualizados, una definición formal de integral definida, lo que no se considera adecuado para un nivel de introducción. Además se potencian los conflictos asociados al límite como se han expuesto anteriormente y todo ello en un tipo de enseñanza en la que el estudiante tiene un papel totalmente pasivo, de mero receptor de conocimientos.

En otro orden de ideas, la reconstrucción del significado global de la integral se considera como un primer paso para abordar el análisis de los problemas de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático ya que aporta criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. La revisión histórico-epistemológico-didáctica muestra las situaciones que dieron origen a cada significado, los conflictos y rupturas que hubo que superar en cada etapa y los diferentes modos de hacer hasta llegar a nuestros días. Partiendo de esta idea en Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005) se trata de clarificar el significado de la integral definida desde un marco institucional global descrito como histórico-epistemológico-didáctico y que tiene como base el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática ya citado. Esto permite establecer siete configuraciones epistémicas designadas como, finita, intuitiva, infinita, primitiva, sumatoria, analítica y generalizada, las cuales son interpretadas como significados parciales de la integral que constituyen el significado global.

Observamos de estos trabajos varias cuestiones que nos parece importante resaltar en este momento. Por una parte, el estudio epistemológico de la integral definida nos ofrece las dificultades inherentes el objeto matemático en cuestión (como las dificultades asociadas con el paso al límite, los ejemplos expuestos o de las dificultades con la diferencial) y también los diferentes significados de la integral. Precisamente el estudio de los significados posibilita el análisis del currículum con una visión amplia. Permite, por comparación, detectar que hay significados como los de acumulación (o resultado de un proceso de cambio) que no aparecen.

De este análisis del currículum se obtiene también que la enseñanza de la integral definida no tiene una fase experimental por parte de los alumnos, recomendada por los investigadores como hemos visto, no se atiende a las dificultades epistemológicas y está muy formalizada sin atender a la gran complejidad que tiene, lo que puede provocar la algoritmización como única salida.

Extraemos también algunas recomendaciones realizadas por diferentes investigadores sobre la enseñanza de la integral. De los estudios de Orton (1983a y b) se extrae la necesidad de fomentar el estudio de la integral durante varios cursos académicos, comenzando por una aproximación informal a través de las calculadoras o el ordenador para obtener aproximaciones de áreas de recintos y usando para ello la tecnología; después relacionar derivada e integral partiendo de situaciones experimentales y teniendo en cuenta que el Teorema Fundamental del Cálculo presenta obstáculos importantes en los primeros niveles de secundaria. Propone, en definitiva, introducir el concepto de integral desde el marco gráfico-geométrico con ayuda de la tecnología para continuar, a nivel intuitivo, con situaciones experimentales y dar las reglas de cálculo una vez afianzado el concepto.

Por todo esto plantea la necesidad de buscar nuevos enfoques, para lo que realiza las siguientes sugerencias sobre el currículum: a) incidir de forma especial en la formación gradual de las ideas de límites e infinitud en cursos inferiores, ya que es uno de los temas más descuidados en la escuela y, sin embargo, son básicos para una adecuada comprensión de los conceptos del Cálculo; b) favorecer enfoques de investigación informales del área bajo la curva a través de la integración numérica, sirviéndose de la calculadora; c) la necesidad de volver a los fundamentos del Cálculo planteando la posibilidad de desarrollarlo de nuevo varias veces a lo largo de la educación matemática de los estudiantes.

En esta misma línea de pensamiento, Orton (1985, citado en Turégano 1994) recomienda que la enseñanza del Cálculo comience permitiendo a los estudiantes "dibujar gráficos de funciones y hallar razones de cambio y áreas bajo gráficos por medio del dibujo". Los conceptos se deberían introducir intuitivamente desde el primer momento. Recomienda el uso de la calculadora para introducir la integración por medio de suma de áreas rectangulares, obteniendo sucesiones de sumas que aproximan un límite. De esta forma, se da al estudiante la oportunidad real de investigar áreas bajo curvas a través de la simple aritmética solamente. Para este investigador, el asunto crucial no es *cuándo* deberíamos enseñar Cálculo, sino *cómo* deberíamos fomentar la comprensión del Cálculo y del precálculo, según el nivel de logro del estudiante. Defiende un enfoque más cognitivo del Cálculo.

Por su parte, Schneider-Gilot (1988) propone dar sentido a las técnicas formales por medio de intuiciones perceptivas; contemplar una fenomenología más amplia; rescatar el papel de los conceptos del Cálculo como instrumentos para resolver problemas; concentrarse en una primera fase en el tratamiento de evidencias de cara a la formación de conceptos; darles a los alumnos oportunidad para una reflexión epistemológica a propósito de sus propios errores.

En esta última línea, Hegedus (1998, citado en Labraña, 2001) considera necesario introducir el análisis metacognitivo como una componente esencial para el análisis de los problemas de aprendizaje del Cálculo. En lo que respecta a la integral ensaya una metodología que denomina ROME (reflexión, organización, instrucción y evaluación). Incide en la necesidad de contemplar la epistemología del desarrollo de los conceptos del Cálculo como una fuente de información providencial para identificar y tratar de comprender los obstáculos en el aprendizaje del Cálculo.

Por otra parte, en Labraña (2001) se dan unas líneas esenciales para un enfoque alternativo. Propone una metodología de descubrimiento dirigido, través de problemas extraídos de diversos contextos y que servirán como base para la introducción de los conceptos y propiedades utilizando el razonamiento deductivo e inductivo combinado con la intuición. El análisis de las conjeturas realizadas dará paso a un proceso de fundamentación. La tipología de problemas de integración responde a dos percepciones psicológicamente diferentes: Una estática que se conecta fácilmente con la idea de suma de todas las pequeñas cantidades $f(x)/dx$, que constituyen la integral definida, que corresponde a una densidad (densidad, presión (fuerza/superficie) intensidad de campo (cantidad de flujo/superficie),…); otra dinámica que permite conectar con la idea de antiderivación, y que se refiere a una tasa de variación instantánea (velocidad, tasa de crecimiento de una población, ingreso marginal (ingreso/producción),…) (p. 290).

El campo fenomenológico de la integral propuesto por este autor es: a) espacio/ velocidad; muy familiar a los estudiantes y reafirma la relación fundamental integral-derivada; b) volúmenes de revolución; permiten una buena identificación del elemento diferencial dV y permite una recreación visual novedosa; c) velocidad/aceleración; introduce el concepto de variación y acumulación frente a los otros ejemplos que tratan de dividir en elementos; d) área; recuperaría a los estudiantes confusos y aclararía dudas, sirviendo de repaso y deteniéndonos en la cuestión del signo. Luego, proponer casos donde la integral valga cero para que las interpreten, de donde seguirá el cálculo de los puntos de corte y profundizar en cuestiones teóricas.

Otro aspecto importante es la delimitación del recinto cuando está situado entre dos curvas, derivándose la necesidad de saber qué función está por encima y en que intervalos, etc.; e) aplicación a la Economía ya que es uno de los ámbitos cada vez más importantes, trata una modelización de un proceso discreto mediante una función continua y coincide con los avances preliminares de Leibniz en la construcción del Cálculo, proporcionando una excelente ejemplificación (p.313). Después el cálculo de primitivas está ya suficientemente justificado por el amplio campo de situaciones trabajado. Proponen que los estudiantes hagan inicialmente una tabla de integrales a partir de las derivadas lo que fomentaría el pensamiento reversible. Luego se irían abordando otras más complejas y después descomposición de funciones como combinación de otras más simples. Se pasaría, por último, a la integración numérica y la delimitación del error. El interés en este punto, no radica sólo en la posibilidad técnica de obtener aproximaciones, sino en la conceptual de evaluar su calidad: decidir el número de subintervalos necesarios para que el error cometido no exceda un valor preestablecido. En este caso es importante el uso de la tecnología. Una perspectiva diferente es aproximar la función dada por medio de otras conocidas (métodos de los trapecios de Simpson)

El autor considera que los aspectos formales de los contenidos matemáticos deben formularse como consecuencia de un proceso intencionado de dotar de rigor al contenido y de proporcionarnos un método estricto y eficaz de analizar críticamente conjeturas y deducir resultados. Propone introducir según las sumas superiores e inferiores apoyándose en el cuadro geométrico, sometiendo a funciones con "irregularidades", consiguiendo una visión más general e interesante.

Posteriormente se propondrán ejercicios concretos que provoquen conflictos cognitivos cuya intención sea detectar y superar los obstáculos epistemológicos que hayan podido surgir en este proceso de aprendizaje. Después, se estudiarían los métodos de integración: integración por partes, cambios de variable, ejercicios combinados. Ecuaciones diferenciales, en casos sencillos por su gran aplicación en campos como el crecimiento de población o desintegración radioactiva, o contagio de enfermedades en función del tiempo, o los movimientos armónicos. Esto, además, favorece la relación derivada-integral.

Por último, se trabajarían las integrales impropias como aplicación del concepto de límite que corresponde a este nivel educativo. Entre sus aplicaciones más importantes está el cálculo de la esperanza de vida.

Cita a White y Mitchelmore (1996) los cuales atribuyen una gran importancia al significado personal del concepto de variable, como prerrequisito para tener éxito en el estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

Por su parte, Camacho y Depool (2003) presentan una propuesta didáctica para introducir el concepto de integral definida desde una perspectiva gráfica y numérica partiendo de la aproximación al cálculo del área limitada por una curva y el eje de abscisas. Para ello, utiliza un programa de utilidades diseñado con el Programa de Cálculo Simbólico DERIVE. Se pretende que al trabajar ambas perspectivas previamente al cálculo de primitivas, el concepto de integral definida no sea visto como una mera aplicación de la regla de Barrow y que el estudiante comprenda el significado de la integración aproximada como un medio para encontrar respuestas a situaciones que modelizan la realidad.

Consideran que al introducir el concepto de esta manera "el estudiante tendrá claro, por un lado, cuál es el problema real que da lugar al cálculo de áreas limitadas por ciertas curvas, y por otro, la importancia de la aproximación gráfica y numérica para la resolución del problema" (p. 132). Realizan algunas aportaciones didácticas entre las que señalamos: los alumnos descubren que hay métodos aproximados para calcular integrales que podrían resultar complicadas o imposible por métodos algebraicos; se contribuye a formar una imagen del concepto de integral definida evitando los procedimientos exclusivamente algorítmicos; los estudiantes pueden comprender el sentido de la aproximación mediante una adecuada utilización del software adecuado, lo que es complicado sin este recurso; la posibilidad de presentar los procedimientos de resolución paso a paso en los sistemas de representación gráfico y numérico proporcionan una ventaja considerable en comparación con procedimientos utilizados en las clases habituales, donde una representación pormenorizada de los conceptos requerirán un tiempo y un nivel de comprensión considerablemente mayores (p.135)

Cabañas y Cantoral (2005) exponen, desde una aproximación socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 2003, 2004) la necesidad de trabajar con el área como conocimiento previo antes de abordar la integral definida. Su propuesta es realizar una visión alternativa a partir del tratamiento de la noción de área al nivel de las actividades asociadas, que son detectadas en las filiaciones entre enseñanza básica y superior cuando tratan con la integral definida y que clasifican en: repartir, comparar y reproducir, medir y cuantificar, conservar. Consideran el principio de conservación como esencial para construir la noción de área, afirmando que aunque estemos en el nivel superior y trabajemos con objetos formales, es necesario introducir a esos objetos con actividades previas que tomen en cuenta principios esenciales como la conservación pues consideran que previo a la representación didáctica de la integral, se requiere movilizar prácticas como la conservación y conceptos asociados.

Cordero (2005) expone las conclusiones obtenidas tras un experimento de enseñanza controlada. Para ello en primer lugar realiza un estudio epistemológico de la integral definida donde identifica la diferencia $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ como un patrón de construcción de esta noción. Observa además, en las respuestas de los profesores y estudiantes que tienden a usar esta "resta" como definición de integral definida en lugar de considerarla como límite de una suma. Este patrón ha ido cambiando los contextos considerando la resta $F(b) - F(a)$ asociada a la noción de acumulación para posteriormente pasar por el contexto de función y continuidad. Así, "se desarrolla una teoría de integración para conservar el patrón $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Al ser resignificado, adquiere nuevas definiciones y conceptos, siendo los más significativos las *cantidades variables* y las *funciones* y sus formas de organización" (p. 273) En cuanto a los usos encuentra dos clases en el desarrollo histórico, coincidentes con lo anterior. Por una parte, encuentra los que descansan en el estudio del movimiento, asociado al interés por comprender el estado natural de un fenómeno. Sin embargo, en otras ocasiones el objeto de estudio no está dirigido a las cantidades que varían continuamente, sino a las funciones arbitrarias como relaciones numéricas especiales. Respecto a este uso, observa que en los textos escolares viene determinado por tres patrones: i) Dada una función f, asignarle una nueva función *f'* que se obtiene a partir de *f*; ii) dada una función *F=f'*, reproducir la función de la cual se derivó F, iii) dada una función $F = \int f$, regresar a la función *f*.

Tras este estudio, propone una experiencia que consiste en estudiar la integración en una perspectiva de variación continua, reincorporando ciertos significados de la integral tradicionalmente discutidos en Cálculo, en concreto, el estudio del movimiento de un fluido y fenómenos de variación continua en la Economía y la Física. No se tratan estas situaciones como aplicaciones de la integración sino que se pretende entender la matemática en el fenómeno. Cualquier fenómeno de variación que incluye un cambio de una cantidad inicial, que bajo un proceso es transformada en otra siendo ésta el valor último en el proceso, puede ser organizado por dos aspectos distintos como son acumulación: $\varphi(b) = \varphi(a) + \int_a^b f(x)dx$ y valor acumulado: $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x f(x)dx$ que son el paso a la variación continua de las operaciones de resta y suma en las variaciones discretas. Apunta cómo los participantes en la experiencia tiene el siguiente diagrama de categorías: Operaciones elementales: suma y resta(a+b=c valor acumulado, c-a=b acumulación); variación discreta: suma y resta ($a_n - a_0 = \sum(a_i - a_{i-1})$ valor acumulado, $a_n = a_0 + \sum(a_i - a_{i-1})$ acumulación); variación continua: diferenciación e integración.

Como conclusión propone considerar la situación fenoménica de la integral, la cual favorece su constitución. Expone: "Todo ello sugiere situaciones de enseñanza que enfoquen más la atención en situaciones específicas de variación continua y cambio, como en la noción de acumulación, y no directamente en los conceptos de función derivada o suma de Riemann (…) Enfocar la atención hacia la situación de cambio permitió mirar dos operaciones elementales, la suma y la resta, reconociendo, además, que construyen en cierto sentido las ideas fundamentales del Calculus" (p. 280)

En el trabajo de Contreras y Ordóñez (2006) se analiza la complejidad ontosemiótica de un fragmento de un libro de 2º bachillerato representativo de la introducción a la integral definida en este nivel educativo. Para ello se utilizan las herramientas del EOS, principalmente las entidades primarias y las facetas duales que, junto con la función semiótica, muestran una gran potencia para hacer aflorar la complejidad y, por tanto, los puntos conflictivos de un texto aparentemente transparente.

Tras descomponer el texto en unidades de análisis y establecer en cada una de ellas la trama de funciones semióticas necesarias para su comprensión, se analizan las facetas puestas en juego. Así, las facetas intensivo/extensivo (correspondiente a los procesos de generalización/particularización) y unitario-elemental/sistémico (que corresponde al proceso de reificación/descomposición) se muestran como los de mayor complejidad, por lo que deberán ser considerados como tales y tenidos en cuenta en el proceso de instrucción.

Hernández (2007) considera que "lo que suele hacerse, tradicionalmente, para que los estudiantes desarrollen habilidades en la aplicación de la integral definida en la resolución de problemas es mostrarles ejemplos de problemas que se resuelven mediante esa operación matemática. Estos ejemplos se muestran como aplicaciones aisladas de la operación, sin que se destaquen propiedades comunes entre ellos que sirvan para identificar otros problemas que puedan presentarse posteriormente" (p. 3) Sin embargo, por su experiencia como profesor, ha observado que los estudiantes universitarios y los egresados de este nivel no tienen la habilidad para identificar problemas nuevos que deben ser resueltos mediante la integral definida. Realiza una caracterización del conjunto de propiedades esenciales que tienen en común todos los problemas que pueden resolverse mediante la integral definida, basada en una definición alternativa de esta noción y que demuestra que es equivalente a la definición tradicional. Esta caracterización es:

> "Sean: P un conjunto de problemas que pertenecen a un mismo tipo de problemas, *S* el conjunto de las soluciones de dichos problemas y *F* un conjunto de funciones reales definidas en puntos de un intervalo $[a, b]$, donde, para cada problema $p \in P$ su solución $s \in S$ está relacionada con una función $f \in F$.
>
> Entonces, la solución s de un problema $p \in P$, que está relacionada con una función $f \in F$ en $[a, b]$, es equivalente a $\int_a^b f(x)dx$ si se cumplen las siguientes propiedades:
>
> a) *f* está definida y es continua en todo punto de $[a, b]$.
>
> b) En ese tipo de problemas, si la función asociada fuera constante en $[a, b]$; es decir, si fuera una función g tal que $g(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la solución sería $s=c(b-a)$.
>
> c) La solución *s* de un problema de ese tipo, en un intervalo $[a, b]$, no se altera si se realiza cualquier partición de $[a,b]$ y se toma como solución la suma de las soluciones del problema en cada uno de los subintervalos en que se ha dividido $[a, b]$.
>
> d) En ese tipo de problemas, cuanto mayor sea la imagen de la función asociada, mayor será la solución *s* del problema." (p.4)

Su propuesta didáctica, por tanto, consiste en trabajar en diferentes problemas si se cumplen o no todas estas características, proponiendo plantear a los estudiantes tantos problemas donde se cumplan, y por tanto se resolverán mediante el empleo de la integral definida, como problemas donde, al menos una de ellas, no sea cierta, con lo que no se podrá emplear en su resolución dicho objeto matemático. De esta manera afirma que se consiguen mejores resultados según su propia experiencia a lo largo de varios años.

Especialmente interesante para nuestra investigación nos parece el trabajo de Thompson & Silverman (2007) que está en la línea de los trabajos de Wenzelburger comentados y utiliza los trabajos realizados por Thompson (1994, citado en Thompson & Silverman, 2007) y Carlson, Persson, and Smith (2003), que comentaremos más adelante. Estiman que el concepto de acumulación es fundamental para la idea de la integración, y por lo tanto está en el centro de la comprensión de muchas ideas y aplicaciones en el cálculo (p. 117). Sin embargo, observan que la idea de acumulación es casi trivial, muy sencilla a nivel intuitivo, pero, a la vez, muy compleja desde el punto de vista matemático. En particular, muestran que la función de acumulación representada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tiene una gran dificultad para los estudiantes y estudian dicha complejidad.

Consideran que para entender esta función de acumulación es necesario, por una parte, tener lo que denominan una concepción como fórmula, la cual consiste en asimilar que al calcular cualquier valor particular de $\int_a^x f(t)dt$, al final, se obtiene un número, y dicho número sólo depende del valor de *x*. Por otra parte, necesitan una comprensión covariacional de la relación entre *x* y *f*, deben crear una imagen de cómo el valor de *f* varía al variar el valor de *x*, y viceversa generando así la relación expresada por la gráfica de la función. Por último, los estudiantes deben coordinar un tercer aspecto que es la acumulación y su cuantificación. En resumen, deben coordinar el valor de *x* variando desde un punto de partida, el valor de $f(x)$ variando según *x* y, además, imaginar la acumulación del área encerrada entre x y $f(x)$ (un área total acumulada para cada valor de *x*), y los tres valores variando en conjunto. Esto introduce una tercera dimensión en la conceptualización de las funciones de acumulación, los estudiantes deben coordinar los tres valores al mismo tiempo (p.118)

Por otra parte, afirman que cuando se exponen las sumas de Riemann como la manera de aproximar el área bajo la curva, hay que tener en cuenta que para que los estudiantes vean el "área bajo la curva" como la representación de una cantidad y no solamente como un área, es necesario concebir las cantidades que se acumulan compuesta por trozos que se forman multiplicativamente $f(c)\Delta x$, lo que claramente tiene un trasfondo de pensamiento con infinitesimales y obtienen también que es muy complejo para los estudiantes comprender las sumas de Riemann como funciones.

La notación es señalada como una sutil dificultad en la comprensión de las funciones de acumulación. Así, encuentra que los estudiantes pueden considerar $\int_a^x f(t)dt$ como un caso particular de $\int_a^b f(x)dx$, sin tener nada que ver con el significado de la integración como límite de sumas de Riemann, como acumulación. Afirman que cuando los estudiantes no ven *t* como variable, es difícil, si no imposible, para ellos concebir que la función de acumulación tiene una tasa de cambio para cada valor de *t* en la que se define (p. 124)

Para estos autores, además de la importancia que tiene en sí mismo el estudio de la acumulación, se tiene que éste, al estar conectado con otras nociones también mejora su comprensión. En este sentido considera, en primer lugar, la tasa de cambio señalando que cuando algo cambia, algo se acumula. Cuando algo se acumula, se acumula con una tasa. Entender la tasa de cambio, entonces, significa que uno ve la acumulación y la tasa de cambio como las dos caras de una misma moneda. (p. 127). Otras nociones con las que está conectada la acumulación son las funciones de dos variables y las funciones ya que hay una evidente relación con ellas, pues las funciones de acumulación son en particular eso, un tipo de funciones, aunque este hecho no es evidente para los estudiantes. En este sentido hay que tener en cuenta que las funciones de acumulación son el primer caso de funciones definidas mediante un proceso complejo y no en términos de una expresión algebraica, trigonométrica o exponencial. Consideran que las funciones de acumulación de Riemann que vienen dadas por la fórmula $g(x) = \sum_{i=0}^{\left|\frac{x-a}{\Delta x}\right|} f(i\Delta x + a)\,\Delta x,\ \ a \leq x \leq b$ son funciones de paso, es decir, un paso previo al estudio de las funciones de acumulación. Así, los programas de ordenador que permiten trabajar con sumas de Riemann así definidas serán un apoyo para que los estudiantes puedan explorar la convergencia.

Apuntan estos investigadores que el tema de la convergencia, sin embargo, se expresa de manera diferente en este contexto que como lo hace en los tratamientos típicos de las sumas de Riemann. En el caso típico, la cuestión es si hay un número que es el límite de una suma de Riemann cuando $\Delta x \to 0$. La función de acumulación $\int_a^x f(t)dt$ se define entonces de manera que cada valor de la función es un límite en un punto. En el caso de una función de acumulación de Riemann, la cuestión es si existe una función que es el límite de la familia de funciones de acumulación de Riemann que se genera cuando Δx se aproxima a cero (pp. 127-128) Nuevamente los programas de ordenador permitirán una visualización muy fructífera pues, en su opinión, dicha visualización permite obtener una nueva función sobre la que los estudiantes pueden trabajar o investigar: ¿Cuál es la nueva función obtenida?, ¿qué relación tiene con la función inicial?, ¿se puede determinar su expresión analítica?… Postulan que estas cuestiones pueden ser aprovechadas para desarrollar la comprensión de los estudiantes de toda una red de ideas–aproximación, límites, funciones, convergencia y antiderivada, por nombrar algunas.

A modo de conclusión afirman que las ideas subyacentes en el enfoque tradicional de la integral definida, el área bajo la curva, y este enfoque, como acumulación, son muy diferentes. La primera es un número equivalente a "la cantidad de pintura necesaria" para cubrir la zona comprendida entre el eje X y la función en el intervalo [a, b] y es difícil de aplicar a cantidades que no sean área. Sin embargo, la conexión entre el segundo enfoque y el área es simplemente que si f(c) y Δx están representados por la longitud, entonces f(c)Δx da el área de un rectángulo a partir de las longitudes, pero requiere la comprensión de la medición de la acumulación de una cantidad se crea por la suma de los valores de $f(c)\Delta x,\ \ c \in [\mathrm{i}\Delta x, (\mathrm{i}\ + 1)\Delta x)$ a partir de fragmentos que son medidas de dos cantidades, f(c) y Δx, donde una de ellas a su vez es una función de la otra en el intervalo [a, b], y además, es necesario comprender que tanto $f(c)$ como Δx son medidas de cantidades (por ejemplo, la fuerza y la distancia) y $f(c)\Delta x$ es la medida derivada de una cantidad (de trabajo).

Dada esta complejidad del enfoque de acumulación, concluyen que sin un enfoque adicional en la construcción, lo que representa, y la comprensión de las sumas de Riemann, hay pocas razones para creer que los estudiantes comprendan la acumulación de funciones, que desempeñan un papel central en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Proponen un mayor énfasis en el TFC como explicación de una relación inherente entre la acumulación de pequeñas cantidades y las tasas a las que se acumula. La comprensión de esta relación implica un claro énfasis en covariación como una idea fundamental en la instrucción del Cálculo. Aunque observan que este enfoque es más complejo que el enfoque tradicionaly admiten que son necesarias más investigaciones, consideran que los beneficios son lo suficientemente importantes como para justificar el esfuerzo. (p. 129)

> *"Understanding $\int_a^b f(x)dx$ as an expression that yields the area bound by the x-axis and f(x) is efficient but not generative. It supports a superficial understanding of $\int_a^x f(t)dt$. We believe that understanding accumulation so that $\int_a^b f(x)dx$ is simply $\int_a^x f(t)dt$ evaluated at x=a, where $\int_a^x f(t)dt$ itself has a well-developed meaning, can be part of a coherent calculus that focuses on having students see connections among rates of change of quantities, accumulation of quantities, functions as models, limits, antiderivatives, pointwise and uniform convergence, and functions of two (or more) variables."* *(*Thompson & Silverman, 2007 p. 129*)*

En otra línea de trabajo, Farmaki & Paschos (2007) consideran que la relación entre la distancia cubierta y el área de la figura en el gráfico velocidad-tiempo no es evidente, hay que pasar desde la "tasa" al "total". Éste es un cambio que resultó ser un salto conceptual difícil de hacer históricamente. Fue realizado intuitivamente por Oresme, quien hizo la conexión entre los argumentos de la cinemática y la geometría euclidiana. Con esta idea original de Oresme (en la cual se representa en un mismo gráfico el tiempo, la velocidad como una línea perpendicular, cuya longitud muestra la magnitud y el área sería la distancia reorrida por tanto) plantean una propuesta didáctica para, mediante el estudio del movimiento uniforme, establecer el área bajo la curva como la distancia recorrida, iniciando de esta manera una introducción en los conceptos del cálculo y, específicamente, de la integral definida y del teorema fundamental.

Esta propuesta didáctica supone, además, establecer un vínculo entre el registro gráfico y el algebraico utilizando la gráfica velocidad-tiempo. La solución de los problemas de movimiento uniforme se basa en la geometría euclidiana, y específicamente en la igualdad de las áreas de figuras geométricas y la invarianza de estas áreas. Las transformaciones geométricas que pueden ser aplicadas a la gráfica conducen a situaciones matemáticas equivalentes, y por lo tanto a problemas de la vida real equivalentes. De esta manera, los estudiantes pueden darse cuenta de que el mismo modelo geométrico puede resolver problemas aparentemente diferentes, pero en realidad equivalentes. De hecho, este descubrimiento puede conducir a una clasificación de problemas equivalente de movimiento uniforme. (p.91) Desde esta propuesta se pueden interpretar los casos de áreas negativas como camino de retorno, pues la velocidad es negativa por la dirección del movimiento. Esta cuestión supone una gran dificultad para los estudiantes pues choca con la idea de que las áreas deben ser siempre positivas.

Por último postulan, en consonancia con el modelo de Duval (2002), que si el proceso de aprendizaje es contribuir a una comprensión real, entonces los estudiantes deben, entre otras cosas, tener la capacidad para representar a una entidad matemática en varios registros. La capacidad de identificar el mismo concepto en los sistemas de representación diferentes, y la flexibilidad para pasar de una representación a otra, permite a los estudiantes desarrollar una comprensión profunda, (p. 104) como muestra la propuesta didáctica que presentan.

Priemer y Lazarte (2008) observan que los alumnos tiene dificultad, por una parte, para conceptualizar el proceso límite de una suma, subyacente a la noción de integral definida y, por otra, identificar el proceso de limite de una suma como alternativa válida para resolver problemas, por lo que cuando se les plantean cuestiones de modelización se quedan estancados y sus respuestas se basan en pistas lingüísticas aprendidas de la práctica de tareas estándar.

Plantean una ingeniería didáctica (Artigue y Douady, 1995) para la construcción del concepto de integral definida en las carreras de ingeniería a partir de la presentación de la teoría de las integrales de Riemann. Plantean, también, actividades para trabajar las particiones, posteriormente se ensaya la suma de Riemann para funciones dadas mediante su fórmula y mediante tablas de valores para continuar con actividades que tienden a que los estudiantes lleguen a ver el proceso del límite de una suma como solución de los problemas. En el diseño de las actividades se emplearon los marcos numérico, gráfico y algebraico.

De la evaluación de la esta secuencia didáctica concluyen que los estudiantes tienen dificultades en el proceso de generalización y que “la aplicación geométrica de la integral definida como área de una figura representa un obstáculo para el empleo de este concepto para el cálculo de otras magnitudes, por ejemplo, en el cálculo de trabajo con una integral definida el resultado puede ser negativo” (p. 6), esto es, considerar que la integral definida es un área constituye un obstáculo epistemológico.

En una línea algo diferente, Lois y Milevicich (2009) estudian el impacto de las herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral pues consideran que la visualización es una fuente de inspiración y tiene un papel importante en el desarrollo de las ideas y conceptos del cálculo infinitesimal, aunque observan que hay una tendencia a creer que la matemática es no visual produciéndose la algebrización del cálculo puesta de manifiesto por diferentes autores. Postulan que los problemas con el análisis matemático están asociados o son debidos al formalismo en el desarrollo de los conceptos y la falta de asociación con la aproximación geométrica. En este sentido, consideran que la manera como se utilizan los gráficos en los libros de texto actualmente tiene dos problemas: son estáticos, con lo que no representan la naturaleza dinámica de gran parte de los conceptos, y hay pocos ejemplos, lo que provoca que el estudiante tenga una pobre visión del concepto. Así, afirman que “los estudiantes no pueden comprender el concepto de integral definida de una función como área bajo la curva porque ellos no visualizan cómo construir esta área como una suma, habitualmente conocida como suma de Riemann.” (p. 1061)

Los profesores utilizan un desarrollo narrativo para la integral definida, evitando el verdadero propósito que es obtener aproximaciones más precisas. Se utiliza habitualmente una forma simplista de abordar el concepto, separando el cálculo integral y sus aplicaciones, lo que dificulta la comprensión de los estudiantes y, por tanto, la resolución de problemas relativos al cálculo de áreas, longitudes de curvas, volúmenes de sólidos de revolución y así tratar con aplicaciones al trabajo en ingeniería, presión, fuerza hidrostática y centros de masa. Opinan que el uso de herramientas tecnológicas, y en concreto de un software prediseñado, puede facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje porque posibilita expresar la naturaleza dinámica de un concepto desde la visualización, coordinar diferentes registros de representación, así como, la creación de los medios personalizados que mejor se adapten o satisfagan los requerimientos pedagógicos del propósito.

Por todo lo anterior presentan una propuesta didáctica que ponen en práctica con 30 estudiantes de Ingeniería (eléctrica) que ya tiene ciertas ideas de cálculo integral y sus aplicaciones. En la propuesta didáctica se utiliza un software que permite abordar el cálculo integral asociando el concepto de integral con el área bajo la curva, desde el punto de vista geométrico. Se seleccionaron problemas que permitieran a los estudiantes establecer puentes entre la conceptualización de la integral y los problemas relacionados con la Ingeniería. El uso del ordenador amplía el campo de posibilidades pues la elección no está condicionada por la dificultad en el cálculo algebraico. Los alumnos usaron el software para calcular las sucesivas aproximaciones al área bajo la curva, las sucesivas aproximaciones al área bajo la curva a través del gráfico de las series las cuales representan la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación (por exceso y por defecto) y la tabla de valores correspondientes (el gráfico permite ver que cuanto más particiones del intervalo hay, las áreas por defecto aumentan, las por exceso disminuyen y ambas se van aproximando entre sí); la visualización del área entre dos curvas, permite también determinar los puntos de intersección; la representación del solido de revolución con diferentes ejes de rotación para un área determinada; la representación gráfica y numérica (a través de tablas de valores) del área bajo la curva de una integral impropia.

Como resultados muestran una mejora considerable en la comprensión de la integral definida, encontrando que las principales dificultades son obtener el sólido de revolución desde un cambio de eje de rotación y en la aplicación de las propiedades de las integrales impropias, pues aunque el 74% de los estudiantes investigados pudieron identificar integrales impropias, solamente el 43% de ellos aplicó correctamente las propiedades.

La incorporación de las nuevas tecnologías con la intención de mejorar el aprendizaje es la idea fundamental de otras dos propuestas didácticas. Así, Paralera y Martín (2009) proponen una actividad para mejorar la comprensión del uso de las integrales en los estudios de Economía que se realiza con la calculadora Classpad 300, postulando que permite un aprendizaje autónomo e individualizado. Dicha actividad está compuesta por una serie de situaciones específicas de la Economía que son una aplicación de las integrales.

Por su parte Costa, Domenicantonio y Vacchino (2010) presentan un material didáctico digital en un curso de Cálculo Integral para alumnos de primer curso de Ingeniería. Se trabaja la vinculación de los conceptos matemáticos y físicos a través del CAS (Computer Algebra System) *Maple*. “La principal función con la que fue concebido el material digital es la de ofrecer un entorno para la exploración, la experimentación, la creatividad y favorecer la comprensión y apropiación de los conceptos a partir de la visualización gráfica.” (p. 174)

Tres trabajos que se pueden considerar verdaderos antecedentes de este trabajo son Ordóñez y Contreras (2007b y 2010) y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010). En ellos se comienza un estudio de la influencia de las PAU en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida el cual se amplía y completa en esta Memoria que presentamos, utilizando como marco teórico el EOS.

De Ordóñez y Contreras (2007b y 2010) destacamos que se establecen las configuraciones epistémicas de la integral definida que constituyen el significado global de referencia de esta noción matemática de las cuales, considerando el nivel educativo en que nos encontramos y la normativa, se escogen las que se utilizan como significado de referencia y que son las siguientes: configuración epistémica geométrica (CEgeo), configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio (CErpc), configuración epistémica como inversa de la derivada (CEinvderiv), configuración epistémica como aproximación al límite (CEaproxlim) y configuración epistémica algebraica (CEalg) El análisis de las Pruebas de Acceso a la Universidad respecto de la configuración que se utiliza para la resolución de cada prueba y su comparación con el significado de referencia establecido nos permite encontrar regularidades, ausencias, etc. En el primer trabajo (2007b) se analiza el período 1999 a 2006 y se obtiene que la configuración geométrica es la que más se utiliza (un 52’08%) seguida de la algebraica (22’91%) mientras que la de aproximación al límite y resultado de un proceso de cambio no aparecen. En el segundo trabajo se amplía el estudio de las PAU hasta 2008, nuevamente se obtiene que no se utiliza la CErpc ni C-aproxlim y “a modo de resumen, podemos afirmar que la integral definida tiene una importancia notable pues aparece, en los últimos 10 años, en el 81’7% de los casos. La CE más solicitada es la geométrica (64’36% de los casos) generalmente de forma directa, esto es, solicitando explícitamente el área bajo la curva o el área entre dos curvas y utilizando el registro algebraico habitualmente. En segundo lugar, la CE más solicitada es la algebraica, esto es, cálculo algorítmico, generalmente de forma directa también. Además, podemos observar que son muy pocos los casos donde son necesarias dos CE, con lo que no se trabaja la coordinación entre ellas, y que el registro más utilizado es el algebraico” (p. 34)

Utilizando la misma clasificación que para las PAU se clasifican en este segundo trabajo, las actividades realizadas en clase por 4 profesores de este nivel educativo; obteniendo: “nuevamente la CEgeo es la más utilizada en los ejercicios seguida de la algebraica, ambas de forma directa principalmente. Hay, además, una ausencia total de las configuraciones CEaproxlim y CErpc. La coincidencia con lo encontrado en las PAU nos indica que éstas son una verdadera *restricción institucional*.” (p. 34)

En Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) también se establecen las configuraciones epistémicas anteriores, se comparan con los desarrollos realizados en cinco de los libros de texto más utilizados en Andalucía y con las PAU. Como conclusión nuevamente se obtiene que “el análisis prospectivo realizado en las secciones precedentes permite afirmar un “desequilibrio” evidente entre las configuraciones epistémicas introducidas, así como un privilegio de los procedimientos algebraicos y analíticos” (p. 378) y que comentaremos en el capítulo 5.

2.2 Investigaciones centradas en la faceta personal

Las investigaciones de Orton (1980, citado en Labraña, 2001) revelan un aceptable nivel de los alumnos ingleses en técnicas algorítmicas pero importantes dificultades en los procesos de límite subyacentes al concepto de integral. En esta línea de trabajo Orton (1983a) realiza una investigación experimental comparativa con 110 estudiantes, de los cuales, 60 son de Secundaria y 50 universitarios estudiantes para futuros profesores de Matemáticas. Realiza un cuestionario individual, proponiendo a los estudiantes que obtengan, numéricamente, diferentes aproximaciones de sumas parciales de Riemann. Observa que éstos consideran que el área se aproxima más y más pero no fueron capaces de ver que el límite coincidiría con el valor exacto del área. Asimismo, obtiene que la integración como límite de una suma constituye un auténtico obstáculo epistemológico. En su opinión, ante esta dificultad los profesores realizan una introducción a modo puramente testimonial o bien introducen la integral como simple regla de antiderivación, apuntando que constituye una postura ingenua considerar que, por medio de ciertas habilidades de cálculo con integrales estrechamente ligadas a la integral como antiderivación, se pueda llegar a la comprensión de la integración.

Además, en Orton (1983b) se consideran relevantes algunas experiencias en aproximación del concepto de límite optimizando un área aumentando el número de lados de un polígono o el número de poliedros para un volumen. Hace referencia a la propuesta de Tall de utilizar los recursos informáticos para contar cuadros cuando se quiere calcular el área de una figura irregular, discutiendo cómo se aproxima el área cuando los cuadros se hacen más pequeños hasta aproximarnos a un límite en lugar de dar directamente una regla de cálculo.

Esta disparidad entre la destreza algorítmica y la carencia de recursos en el tratamiento gráfico-geométrico, señalada por Orton, la ponen también de manifiesto Artigue y Szwed (1983, citado en Labraña) al analizar las respuestas de 89 estudiantes universitarios de primero de Matemáticas. Artigue (1989, citado en Labraña, 2001, p.76) destaca que “un análisis de la transcripción de los errores cometidos muestra que muchos estudiantes que no son capaces de trabajar directamente con gráficos intentan obtener expresiones algebraicas para *f* en cada intervalo, con el fin de poder derivarla e integrarla posteriormente. En estos casos manifiestan muchos errores. En otros casos realizan ambas tareas y, cuando los resultados obtenidos son inconsistentes con el gráfico, intentan dar explicaciones poco razonables que muestran más confianza en los cálculos que en el dibujo".

Schneider-Gilot (1988) realiza una investigación con alumnos de Humanidades y alumnos de primero de Matemáticas en Universidad. Su principal material de investigación es una serie de problemas propuestos a dichos estudiantes que se completa con entrevistas y con "recuerdos de enseñante" provenientes de sus 15 años de experiencia en la enseñanza de la integral. Resulta especialmente relevante la existencia de algunos obstáculos muy ligados al desarrollo evolutivo de la noción que dificultan el conocimiento de la integral. Por una parte, el que el área se calcule mediante un proceso infinito de suma de rectángulos y, sin embargo, el resultado que se obtiene sea un número finito. Por otra, la elección de los indivisibles como elementos intuitivos para la comprensión del área puede conducir a lo que esta investigadora denomina el *obstáculo de la heterogeneidad de las dimensiones*, ligado a situaciones en las que se toma un elemento diferencial de orden inferior a la magnitud inicial.

En esta misma línea, observa que la noción de infinitésimo presenta un obstáculo epistemológico ya que los alumnos no perciben el límite de una sucesión de sumas de áreas de rectángulos sino una unión de muchos rectángulos finos y cada vez más finos que pasarán a ver como segmentos, llegando al dilema de que un área curvilínea no puede ser cubierta por rectángulos cada vez más finos pues este proceso no tiene final. Esta dificultad proviene de su noción de infinitésimo y de la interpretación que los estudiantes dan a la relación *dy/dx*.

Por otra parte, apunta que existen importantes dificultades en cuanto al Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Tras pasar varios meses de la instrucción, los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas pero la mayoría no sabe por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas en ocasiones. También revela las dificultades para entender la noción de variación de una función cuando no depende del tiempo. La autora pone de manifiesto, a través del análisis de libros de texto y de manuales de profesores, la falta de modelización de conceptos del Análisis de las nociones de área, volumen y velocidad, es decir, los textos consideran como una verdad implícita que el cálculo de un área bajo una curva representativa de una función tienen interés por sí misma y los alumnos tienden a considerarla como un cálculo estándar sin otra justificación.

Una cuestión similar al obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones, es la expuesta por Oehrtman (2002, citado en Thompson & Silverman ,2007) que denomina "*la metáfora del colapso*". Consiste en que los estudiantes razonan que los objetos considerados se aproximan por otros objetos de una dimensión menor, ejemplo: "la tasa de variación del volumen con respecto a la altura de un cono es igual al área transversal a esa altura, porque mientras hace un incremento de menor altura, el cilindro de incremento de volumen se acerca más y más cerca a una área". Observa este autor que, aunque es falsa, esta metáfora permite al estudiante en ocasiones deducir resultados matemáticamente correctos.

Por su parte, Artigue (1991, citado en Labraña, 2001) señaló las dificultades que surgen para los estudiantes en un curso de introducción al Cálculo, destacando que en la enseñanza tradicional de dicha disciplina esto se resuelve a través de una excesiva algebrización en contraste con una frágil visión geométrica y gráfica, lo que, en el caso del Cálculo Integral, se manifiesta en el cálculo de primitivas en lugar de la búsqueda de significados para la integral. En general, se evidencia una carencia de significados para los conceptos de límite y aproximación.

Tall (1991 citado en Labraña, 2001) observa que muchos estudiantes y no pocos profesores creen que un área positiva está por encima del eje horizontal y que negativa está por debajo, y lo relaciona con el hecho constatado de que las prácticas académicas no hacen un uso flexible de las cuatro situaciones posibles, sino que la que sitúa a la función en el primer cuadrante es la dominante y las otras están subordinadas y son menos frecuentes. Apunta que la algoritmización es una de las causa del gran fracaso en Cálculo, siendo los estudiantes incapaces de reconocer la integral en situaciones donde no aparece explícitamente. Propone realizar ejercicios de antidiferenciación, como resolver algunas ecuaciones diferenciales sencillas, actividad que mostrará su independencia epistemológica de la integración, y viceversa. Además, para el Teorema Fundamental del Cálculo sugiere realizar ejercicios de comparación gráfica de una función y de la función área, intentando ver como aquella expresa la variación de ésta, los cuales se potencian con el uso de software adecuado.

El trabajo realizado por Turégano (1994) estudia la situación de partida de los estudiantes en cuanto a su intuición del infinito, y su capacidad para la visualización y la resolución de problemas de áreas, pues considera que pueden tener influencia en el aprendizaje, al ser conceptos previos. Obtiene que "la concepción del infinito potencial es el mayor obstáculo con que se encuentra un estudiante para concebir un proceso infinito como algo definido o acabado. El infinito actual se acepta en mucho menor grado, y siempre como algo que involucra una cierta indeterminación. (…) Los procesos infinitos que conducen al infinitamente pequeño son más difíciles de intuir, como tales, que los que conducen al infinitamente grande" (p. 197) Por otra parte, considera que "el procesamiento visual está a un nivel cognitivo más alto que el analítico. Ello da origen a multitud de razones por las que debiera hacerse hincapié en el razonamiento visual en el currículo a expensas del procesamiento analítico. Para Dreyfus y Eisenberg (1990), una de las razones fundamentales es que, al obtener la habilidad de pensar visualmente, el estudiante mejorará automáticamente la habilidad para pensar analíticamente" (ibíd., p.153) Asimismo, respecto al área, detecta que siempre está ligada a una fórmula y que "la imposibilidad de "ver" un área como límite de una suma de infinitesimales tiene su origen en que "pasan" al indivisible de una dimensión menos antes de sumar las áreas, y en el paso al límite "desaparece" el área. Esto pone en evidencia que el cálculo de un área bajo una curva definida por una función crearía problemas al tratar de remitir a los indivisibles de longitud *y=f(x)*" (ibíd., p. 199)

Por su parte, Thompson (1994, citado en Labraña, 2001) estudia las dificultades que tienen los estudiantes con el Teorema Fundamental del Cálculo y las atribuye a su pobre visión del concepto de función y de tasa de cambio, considerando que las imágenes mentales de los alumnos de las funciones como representaciones gráficas (dibujos) y no como una relación de co-varianza entre dos variables representa una deficiencia para entender el Cálculo. Este autor ha descrito el Teorema Fundamental del Cálculo como el significado de expresar la relación entre una acumulación de una cantidad con relación al total acumulado, que estima es la idea que motivó el desarrollo de Newton del Teorema Fundamental, ya que Newton primero determinó la tasa media de cambio de un área y determinó que el área total se puede obtener multiplicando la tasa de cambio por la acumulación de la variable independiente. Esta línea de pensamiento enfatiza la importancia de la comprensión de que la acumulación es una relación multiplicativa y que la acumulación total está hecha de incrementos infinitesimales de las cantidades compuestas multiplicativamente. Es esta relación la que permite que la relación expresada por $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$ sea apreciada y comprendida. En su propuesta reside una visión dinámica basada en la coordinación de tres elementos: acumulación (función área); razón de cambio (derivada); razón de acumulación (derivada de una función área)

Llorens y Santonja (1997) exponen, en primer lugar, las dificultades que habitualmente se detectan en los alumnos de primer curso de Universidad basándose en su propia experiencia y en diversas investigaciones. Dichas dificultades son: a) generalmente los estudiantes identifican integral con primitiva, esto es, en un proceso puramente algebraico que no implica ningún proceso de convergencia ni ningún aspecto geométrico; b) las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no puede aplicarse; c) no se integra el concepto de área con el de integral, los estudiantes han "oído" que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área pero no se produce una adecuada unión entre ambas, persistiendo una interpretación puramente algebraica y siendo frecuente que la interpretación de la integral como área sólo se utilice cuando expresamente se pida en ejercicios que típicamente empiezan con el enunciado "calcular el área encerrada por la gráfica de …", pero casi nunca espontáneamente. Esta falta de integración integral-área se manifiesta también en sentido contrario, al solicitarles a los alumnos que obtuvieran el área de una región sombreada de las que se le daba la gráfica (se forman triángulos) y la expresión algebraica (en la que aparece un valor absoluto) se observa que los alumnos p*refieren* el contexto algebraico-formal al visual-geométrico sencillamente porque no los han integrado. Atribuyen el origen de estos conflictos en primer lugar a la secuencia de contenidos observada en los libros de los niveles preuniversitarios que siempre es: "Cálculo de primitivas; métodos de integración; la integral definida. Regla de Barrow; aplicaciones de la integración: Cálculo de áreas y volúmenes. Además, la insistencia relativa que se hace en cada uno de esos epígrafes suele ser bien diferente, llevándose la palma -con mucho- los dos primeros (…) es evidente que ello responde a que el objetivo que se persigue es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de primitivas y ello a base de repetir muchos ejercicios, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destreza, por lo que se facilitan, incluso, "*trucos y recetas*" (sic) que contribuyan a ser más eficaces en la obtención del resultado, casi a costa de lo que sea (incluyendo, en no pocas ocasiones, el sacrificio del rigor)" (p.65) En segundo lugar se atribuyen los conflictos mostrados por los estudiantes a que la gran mayoría de los textos sigue abusando del *formalismo* cuando se refieren al *concepto* de integral. Finalmente observan que en todos los textos se omite una revisión del concepto de área.

Afirman "la necesidad de eliminar esos conflictos cuando se tiene como objetivo que los estudiantes *comprendan* los conceptos que manejan y, en consecuencia, puedan aplicarlos adecuadamente" (p.69) Centran los conflictos en dos aspectos. En primer lugar, el concepto de integral que equivale al cálculo de primitivas y, en segundo lugar, que la respuesta intuitiva ante una integral definida es la aplicación de la regla de Barrow y no la respuesta al problema del área, con lo que no hay una verdadera asociación integral-área, salvo forzadamente. Achacan estos conflictos, al orden de exposición de los temas y a la insistencia que se hace de ellos, respecto del primero, pues "Si al alumno se le adiestra, durante dos o tres años, en el cálculo de primitivas que, además, encabeza el estudio del cálculo integral, no podemos pretender que, después, por dedicar una escasa atención (si es que llega a hacerse) al concepto de integral y a sus aplicaciones, las cosas queden en su sitio" (p.69)

En lo que respecta a la mala asociación integral-área, consideran que se debe, entre otras cosas, a que no se hace una verdadera conexión con el concepto de área estudiada hasta el momento (habitualmente en primaria) por lo que el alumno asociará el área con lo estudiado en primaria y aplicará la regla de Barrow de forma rutinaria incluso en los casos donde tiene la posibilidad de utilizar métodos geométricos o visuales que le permiten aplicar las fórmulas geométricas conocidas.

Proponen cambiar el orden habitual de la exposición de los temas, utilizar la visualización como un primer acercamiento intentando trabajar el concepto antes de realizar desarrollos algebraicos y trabajar los conocimientos previos de los alumnos en particular el concepto de área. Para ello propone el uso de un sencillo programa de cálculo simbólico como DERIVE. Esta propuesta constatan en un estudio que resulta muy eficaz ya observan mejor comprensión en los estudiantes que la han seguido.

El objetivo del trabajo de Bezuidenhout y Olivier (2000) es estudiar la comprensión de los estudiantes en cuanto a la interpretación de los símbolos que aparecen en la suma de Riemann y la comprensión de la función integral definida de una función dada por una gráfica, analizando el *concept image* de los estudiantes de primer año de Universidad. Para ello hicieron un cuestionario preliminar lo que les permitió elaborar un cuestionario definitivo cuyo análisis se completó con la realización de entrevistas. En primer lugar se realizan un análisis a priori, utilizando la teoría APOS, indicando los niveles necesarios (proceso-objeto) para su correcta realización y comprensión.

Los resultados muestran que una de las dificultades de los alumnos proviene de los errores en el límite pues los estudiantes aplican que "el límite de una suma es la suma de los límites". Otro error proviene de una inadecuada concepción-área de la integral que está demasiado ligada al área como contexto, debido a las estrategias de enseñanza seguidas, lo que les lleva a considerar que la integral definida debe ser positiva. Por último, el error más frecuente proviene de confundir la función con la función integral.

El objetivo del trabajo de Labraña (2001) es profundizar en los conocimientos que tenemos de las dificultades de comprensión del Cálculo Integral. Para ello, plantea un estudio de evaluación sobre las concepciones de los estudiantes de COU y de 2º de Bachillerato LOGSE y de cómo se manifiestan cuando llegan a primer curso universitario de una carrera científico-técnica en el sentido del significado personal que atribuyen a los conceptos, resultados y métodos de Cálculo Integral, y cómo se realiza su transferencia a los distintos campos de problemas. Observa como la problemática de la enseñanza aprendizaje de esta materia, puesta de manifiesto en diferentes trabajos de investigación a lo largo de las últimas décadas, tiene como consecuencia una fuerte tendencia a centrar la enseñanza de las Matemáticas en un marco algebraico, en detrimento de un marco gráfico-geométrico, y que, además, limita las alusiones didácticas a situaciones-problema que recreen la fenomenología asociada, lo que provoca un proceso creciente de descontextualización y deshistorización.

Para analizar esta problemática, realiza en primer lugar un estudio de la evolución histórico-epistemológica de la integral definida poniendo el énfasis en los posibles obstáculos epistemológicos y en las repercusiones para la didáctica. Asimismo, estudia los antecedentes y el tratamiento que se hace en los libros de texto de dicho concepto. Con los datos obtenidos elaboró un instrumento de evaluación sobre el Cálculo Integral, el cual, una vez validado por expertos, sirvió para hacer un análisis cualitativo de las respuestas obtenidas de los alumnos de Secundaria y primer año de facultad, llegando a diversas conclusiones.

Concluye, por una parte, que los aspectos teóricos se exponen en los manuales de una forma poco comprensible para los estudiantes. Además, hay un sesgo importante en cuanto a considerar la integración como el cálculo de áreas, llegando a centrarse en los cálculos aritméticos. Las técnicas de cálculo de primitivas ocupan un lugar preponderante en el estudio de la integración, haciendo un uso rutinario de la regla de Barrow. Además, sólo una minoría de los textos cita otros contextos como campos de aplicación de la integral, y aún en menor medida los profesores. Por último, la ausencia generalizada de alusiones en los textos a las limitaciones del cálculo de primitivas y, por lo tanto, la necesidad de promover métodos alternativos de obtención aproximada de la integral.

En cuanto a los significados personales, se confirman que la mayoría de los estudiantes identifica integración con cálculo de áreas, pero muchos toman decisiones, a la hora de asignarles valores numéricos al área, que no se guían por una representación geométrica consciente, atribuyéndoles valores que resultan de simples cálculos aritméticos. La reciprocidad integral derivada no está asimilada por los estudiantes a pesar de ser conocida por ellos. El significado de "función integrable" constituye un obstáculo didáctico que provoca errores muy frecuentes pues no se estudian las condiciones de integrabilidad y los ejemplos provienen de funciones continuas y "regulares". Los estudiantes no son capaces de calcular el valor de una integral en contextos geométricos simplemente contando unidades por la dependencia del área del cálculo de primitivas.

Por último, este autor observa los problemas que tienen los alumnos para entender el papel de los elementos diferenciales, que proviene de diversos estudios de la derivada. Las imágenes geométricas asociadas con este concepto son débiles y se restringen a una dimensión si acaso. En Física, los resultados muestran que los elementos diferenciales oscilan entre dos polos: tienen un papel puramente formal y son una longitud ficticia, o bien, tienen un arraigado significado material que excluye cualquier otro significado. Entre ambas las más variadas posturas.

En Ordóñez y otros (2001) se hace un estudio de las distintas concepciones de la integral definida para luego detectarlas en los significados personales de los alumnos mediante un cuestionario del que se extraen distintas conclusiones respecto a estas concepciones y a las dificultades de los estudiantes. Podemos destacar que un gran número de alumnos no consideran el signo para el cálculo del área bajo la curva (imagen operativa de Turégano), que predomina la concepción de la integral de definida como área o la puramente algebraica incluso a nivel de *concept definition* y que hay concepciones que no aparecen, como es el caso de la integral como resultado de un proceso de cambio o la integral como límite de una suma (la definición de la integral de Riemann), a pesar de que esta última fue la elegida por el profesor para introducir el concepto. En cuanto a las dificultades se observan los problemas para aplicar la integral en contextos diferentes al de área y volúmenes y la importancia del denominado obstáculo del movimiento uniforme.

También Czarnocha y otros (2001) realizan un estudio acerca de la comprensión de los estudiantes universitarios de la integral definida como suma de Riemann, ampliando los estudios de Orton. Proponen una descomposición genética, según la teoría APOS, que será contrastado a través de unas entrevistas. En este sentido consideran, de acuerdo con Orton, que "debido a la dependencia de la integral de la noción de límite de una sucesión los problemas de comprensión de los límites de una sucesión crean dificultades en la comprensión de la integral definida" (p. 297)

Esto es ratificado en los resultados pues obtienen, por una parte, que el límite de la suma de Riemann es visto como la suma infinita de rectángulos de anchura pequeña, con lo que no se alcanza el límite. Por otra parte, el límite de la suma de Riemann es visto como la suma de líneas, es decir, como la suma de infinitos rectángulos de anchura cero, es decir, más que el límite de la suma de áreas de n rectángulos, los estudiantes lo declaran o ven como la suma del límite de las áreas de los rectángulos (las líneas). Además tienen en cuenta las investigaciones de Orton quien observa que los estudiantes obtienen unos términos de una sucesión asociada a una partición que aproxima el área y ven que se puede mejorar más y más. Sin embargo, no fueron capaces de ver que el límite coincidiría con el valor exacto. Ambas dificultades parecen estar fundadas en la incapacidad para separar el concepto de límite del último término de una sucesión.

A la luz de los resultados obtenido realizan una nueva descomposición genética que será utilizada como propuesta didáctica. Su propuesta está en la dirección de mejorar la comprensión de los alumnos en cuanto al límite de una sucesión, trabajar la distancia entre dos términos y la noción de medida y de medida de la distancia.

Rasslan y Tall (2002) pretenden explorar las definiciones e imágenes de 41 estudiantes de Secundaria acerca de la integral definida, para lo que se diseñó un cuestionario de 6 preguntas. Las cinco primeras intentan explorar los *concept images* a través de las acciones efectuadas para calcular la integral definida de diversas funciones: que llegan a ser infinitas (integrales impropias), con parte positiva y negativa y funciones que no están dadas por una única fórmula. La sexta cuestión tiene el objetivo de explorar la definición. Estos estudiantes siguen un libro de texto (SMP, 1997) donde la integración se introduce a través de actividades para calcular el área entre una gráfica y el eje de las abscisas usando métodos numéricos y gráficos para, posteriormente, trabajar ampliamente la integración numérica.

En cuanto a los resultados observan que los estudiantes tienen dificultades con la comunicación, saben qué hacer pero no saben explicarlo a un nivel general. Además, la mayoría no conoce las integrales impropias, y gran parte tiene dificultades con las funciones con signo positivo y negativo, y con la función valor absoluto. Por último, observan que los estudiantes de la muestra tienen un razonamiento visual muy pobre.

Apuntan, finalmente, dos indicaciones importantes: la “colección” de ejemplos introducidos a los estudiantes debería incluir una variedad de ejemplos y a los estudiantes se les animaría a expresar sus ideas de la forma que se puede ayudarles a construir mejor el concepto. Además, las técnicas procedimentales que aprenden en Secundaria, pueden incluso ser perjudiciales para posteriores desarrollos en la Facultad (Ferrini-Mundy and Guardard, 1992 p. 4-96)

También Carlson, Persson y Smith (2003) realizan un estudio con 24 alumnos a los que proponen unos materiales curriculares desarrollados para el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo. Se basan en el estudio de Thompson (1994) del que realizan un refinamiento. De esta forma, perfeccionando un trabajo de Carlson, Jacobs, Coe, Lasen and Hsu (2002) consideran lo que denominan pensamiento covariacional, que se refiere a la coordinación de una imagen de dos cantidades variando, mientras se atiende cómo cambia una en relación con la otra. Inicialmente se trabaja la noción de función, como relación entre dos variables, y la tasa de cambio, ya que son considerados conceptos previos al Teorema Fundamental del Cálculo, así como, la interpretación del área como la relación multiplicativa que representa el aumento de cambio en un intervalo.

Posteriormente, estudian la acumulación para, por último, obtener que el área acumulada bajo la curva de *f* desde *a* hasta *b* es igual al cambio total en *F* desde *a* hasta *b:* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, y que la tasa de cambio instantáneo de la función acumulación en *x* es igual al valor de la tasa de cambio de la función tasa de cambio en *x*: $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$.

En el desarrollo de estos materiales se buscó un equilibrio entre el desarrollo conceptual, adquisición de la comprensión notacional, acciones y procedimientos, y el desarrollo de las prácticas matemáticas de los estudiantes y conductas de resolución de problemas.

Esta propuesta es evaluada mediante unos cuestionarios que se completan con entrevistas. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes que completaron el curso son capaces de usar y entender los aspectos notacionales de Teorema Fundamental del Cálculo y que estos estudiantes fueron capaces de aplicar razonamiento covariacional con cuestiones de acumulación. Sin embargo, se observó alguna debilidad en la comprensión del enunciado y las relaciones expresadas en el Teorema Fundamental del Cálculo, aunque fue relativamente bueno si uno compara con lo demostrado hasta ahora por otros investigadores.

Berry y Nyman (2003) realizan un estudio en el que se analiza el razonamiento de los estudiantes en las conexiones entre el gráfico de una función derivada y la de la original, utilizando el APOS y, en concreto, la noción de reversibilidad. Se proponen una serie de situaciones a estudiantes universitarios los cuales disponen de una calculadora gráfica y un programa que toma nota del movimiento de un cuerpo en un determinado intervalo de tiempo, lo que les permite experimentar para resolver las situaciones propuestas.

Para estos autores las numerosas investigaciones acerca de la comprensión de los conceptos del Cálculo informan, por ejemplo, de la limitada visión del concepto de función que tienen los estudiantes y que les hace depender de fórmulas algebraicas. Por otra parte, consideran que uno de los problemas es que, durante la Educación Secundaria, dichos estudiantes han tenido una enseñanza muy centrada en las reglas algorítmicas, que son las que necesitan para pasar exámenes como las PAU. Estas evaluaciones externas se centran en el hacer y bastante menos en la comprensión de los conceptos. “Estos problemas se agravan con frecuencia, por unas cuestiones de evaluación típicas que piden “resolver, esbozar, encontrar, hacer la gráfica, evaluar, determinar, diferenciar, integrar,” etc.” (p. 482) En este sentido, aportan una investigación de Koirala (1997) acerca de la comprensión instrumental (basada en reglas y problemas rutinarios) y la relacional en la que obtiene que los profesores que desarrollan una enseñanza relacional consiguen, no sólo que sus alumnos sepan qué hacer y cómo, sino que sepan explicar qué están haciendo y por qué.

En lo que respecta a la integración, ésta es vista como el opuesto de la diferenciación y muchos estudiantes se quedan con la impresión de que la única aplicación de la integral definida es el área bajo la curva y algunos volúmenes. Citan el trabajo de Schwalbach y Dosemage (2000) donde se hace un estudio de la comprensión de los estudiantes a través de problemas de Física consiguiendo entorno totalmente contextualizado para explorar la abstracción del Cálculo, y en el que se obtiene que si los estudiantes realizan conexiones entre distintas disciplinas pueden desarrollar una comprensión más rica tanto del conocimiento semántico como procedimental. En las situaciones propuestas por Berry y Nyman además, dado que los estudiantes pueden experimentar con el gráfico tiempo-desplazamiento asociado a través de la tecnología, están extendiendo su comprensión de los conceptos del Cálculo desde la representación simbólica a la representación gráfica y desarrollando un "sentido físico" para el Cálculo. Muy en la línea de la propuesta didáctica de Labraña (2001) que comienza con situaciones de la Física.

Basándose en todo esto, los autores de este trabajo consideran que realizando conexiones de las propiedades de las gráficas y especialmente de la gráfica de la derivada a la gráfica de la función se construye una comprensión mejor de los conceptos gráficos subyacentes del Cálculo, lo que mejora la comprensión general en esta materia más que una larga lista de algoritmos y reglas.

Así, su estudio muestra que "el uso de la tecnología disponible y las discusiones en grupo pareció tener como resultado el cambio desde una comprensión instrumental del Cálculo como un proceso algorítmico hacia una comprensión relacional de las conexiones gráficas entre la derivada de una función y la propia función." (p. 494), muy en la línea de la metacognición de Hegedus anteriormente comentada. Hay que tener en cuenta que la tecnología centra a los estudiantes en los conceptos e ideas que están en la base del Cálculo más que en los algoritmos y que uno de los papeles que tiene en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es apoyar los esfuerzos de los estudiantes para conectar los nuevos conocimientos con los ya existentes.

La principal recomendación de esta investigación es incluir cuestiones del tipo descrito cuando los estudiantes están desarrollando su comprensión de las propiedades de las gráficas y mayor énfasis en los currículos de Matemáticas del sentido gráfico para que los estudiantes desarrollen su intuición para el Cálculo tanto como las reglas. De acuerdo con Koirala (1997) un curso de Cálculo introductorio debería ser informal, intuitivo y conceptualmente basado principalmente en gráficas y funciones… Fórmulas y reglas no deberían darse como admitidas sino que deberían ser cuidadosamente desarrolladas intuitivamente en la base del trabajo previo de los estudiantes en Matemáticas y Ciencias. (p. 495)

También Paschos y Farmaki (2006) utilizan situaciones de movimiento para mejorar la comprensión de la integral definida. En este caso, a través de situaciones de movimiento no uniformemente acelerado, en concreto analizando un caso de una estudiante de primer curso de universidad. Destacamos una cuestión ya observada en diferentes trabajos, la necesidad que plantea esta alumna de calcular la expresión algebraica de la función para poder calcular el área bajo la curva, aunque tiene el gráfico y el hecho de que asocia la curva a una función conocida, una parábola, cuya gráfica se parece aunque no hay nada en el enunciado de la cuestión que le indique este hecho.

Por su parte Tsamir (2007) estudia los errores de los estudiantes en el cálculo de áreas y de volúmenes de revolución. Para ello analiza el trabajo de clase (con 25-28 estudiantes) de 12 grado que discuten sobre cinco problemas propuestos que tratan de cálculo de un área y del volumen de revolución asociado mediante integrales definidas. Obtiene que repetidamente los alumnos aplican el esquema *igual A* - *igual B* en sus formas: misma área-mismo volumen; mismo valor de “a” para el área máxima-mismo valor de “a” para el volumen máximo; misma función-mismo intervalo-mismo área (por lo que la misma función con diferentes límites de integración debe dar lugar a resultados distintos). Considera que los alumnos tienden a hacer este tipo de comparaciones aunque no se les haya enseñado así en clase y que éstas tiene un extraordinario poder pues no las cuestionan, lo dan por cierto sin ningún lugar a dudas.

También encuentra una tendencia de los estudiantes a usar lo estudiado anteriormente aunque no sea especialmente relevante, se ignoran las condiciones matemáticas específicas para las que se demostraron los algoritmos, así la nueva implementación de los algoritmos resulta errónea y da lugar a nuevos algoritmos falsos apareciendo las *pseudo fórmulas* (Vinner, 1997, citado en Tsamir, 2007) y otros errores en las fórmulas de integración o la no consideración de los puntos de corte con el eje de las abscisas en el cálculo del área al identificarla directamente con la integral definida.

En Camacho, Depool y Garbín (2008) se muestran las características de las respuestas de un grupo de estudiantes que utilizaron, para el aprendizaje del concepto de integral definida, el CAS (Computer Algebra System) *Derive* pues consideran que su uso genera y opera distintas representaciones del concepto que pueden ayudar a su comprensión: “El uso de CAS ofrece a los estudiantes la oportunidad de representar gráficamente la información y establecer relaciones para resolver los problemas en términos de sus aproximaciones visuales, numéricas y algebraicas” (p. 36)

Se plantean estudiar la manera en la que el uso del CAS ayuda a identificar aspectos importantes al resolver problemas en distintos contextos donde interviene la integral definida, así como analizar cómo influye la interpretación como área para la resolución de tales problemas encontrando que la idea de integral definida asociada al área de una región plana está relacionada con algunos de los errores encontrados.

Encuentran, en el análisis de los resultados, que los estudiantes no muestran dificultades al calcular integrales de funciones continuas, interpretándolas como el área bajo la gráfica de una función, pero sí las tiene cuando las funciones son solamente continuas a trozos. Así "cuando tienen que utilizar como límites de integración puntos en los que la función no es continua, cometen errores relacionados con una comprensión parcial del concepto de continuidad" (p.55) y extrapolan directamente el procedimiento utilizado para el caso de una función no definida a trozos. Además, cuando se trata de integrales que provienen de otro contexto diferente al contexto matemático consideran que "al introducir el concepto con un fuerte componente geométrico (…), se presentan grandes dificultades para interpretar la integral definida como un valor que puede medir longitudes (desplazamientos, arcos de curva, etc." (p.55) Por último afirman que el uso del CAS contribuye eficientemente a promover la construcción del concepto de integral definida asociada al cálculo del área, pero en otros contextos distintos al matemático, se muestra insuficiente pues solamente es un elemento para el cálculo.

El objeto de estudio del trabajo de Boigues (2010) es la comprensión de estudiantes universitarios acerca de la integral vista como límite de una sucesión de sumas de Riemann en la línea del trabajo de Bezuidenhout y Olivier (2000) comentado. Para ello, utilizando la teoría APOS, realiza una descomposición genética consistente en un esquema de partición del intervalo, posteriormente un esquema de suma de Riemann y, por último, un esquema de integral definida como límite de una sucesión de sumas de Riemann.

Siguiendo esta descomposición genética, realiza dos cuestionarios, un piloto y un definitivo, que complementa con una serie de entrevistas. De entre los que realizan el cuestionario piloto escoge a 40 alumnos, muestra representativa, que realizan el cuestionario definitivo. Además, entre ellos, una muestra ha seguido "una experiencia de enseñanza en la que se propusieron ciertas actividades con ordenador, que fueron diseñadas según la teoría APOS y estaban destinadas a favorecer la construcción de determinados elementos cognitivos sobre la integral y, por tanto, dicho grupo podría aportar algún elemento diferenciador en la comprensión de la integral." (p. 86)

Con estos cuestionarios, utiliza la teoría de los conjuntos borrosos como instrumento para medir el grado de pertenencia a un determinado nivel de comprensión del esquema de integral definida. En concreto calcula la medida fuzzy para cada estudiante, que mide su comprensión.

Como resultados obtiene que los estudiantes muestran una buena comprensión de la partición de un intervalo. Sin embargo, esto no sucede en el esquema de suma de Riemann ni en el de integral definida. En ellos observa que “los estudiantes se sienten más cómodos en el registro gráfico respecto del analítico” (p. 169) y muestran dificultades a la hora de ver el límite como solución al problema del área y no tanto en establecer las sumas de Riemann. Por comparación de los resultados del grupo de control afirma que la asociación del límite cuando la amplitud de los subintervalos tiende a cero con el área bajo la curva se potencia con el uso de un asistente matemático, un CAS, como el utilizado en las actividades diseñadas.

En lo que respecta a las cuestiones de tematización de la integral definida, obtiene que un tanto por ciento bajísimo tiene una valoración mínima adecuada por lo que dichos problemas se pueden considerar una dificultad importante encontrando nuevamente que la gran mayoría de los estudiantes muestran en estas respuestas “su incapacidad para manejarse en el terreno algebraico, una vez más se observa cómo los estudiantes se sienten más cómodos a nivel gráfico en la resolución de las cuestiones” (p. 177)

Por último, señala que “es curioso que, en general, exista la tendencia a crear rectángulos que aproximan el área más por defecto que por exceso” (p. 189)

Capítulo 3

Fundamentos

En los capítulos anteriores hemos expuesto la situación de la integral definida tanto a nivel institucional como de investigación en Educación Matemática, ya que, por un lado hemos analizado lo que propone el currículum oficial y las PAU respecto de este objeto y, por otro lado, los diferentes trabajos sobre su enseñanza y aprendizaje.

Nos proponemos en este capítulo desarrollar los fundamentos teóricos en los que se ha basado nuestro trabajo. Corresponde, por tanto, exponer el marco conceptual utilizado, lo que nos permitirá, junto con el trabajado realizado anteriormente, plantear los objetivos e hipótesis que han de guiar la investigación. La última parte corresponde a la metodología empleada.

3.1 Marco teórico

Nuestro objetivo primario es estudiar los fenómenos que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular de la noción de integral definida. Para ello adoptamos como marco teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS en adelante) propuesto por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009, prinicipalmente), el cual desarrolla herramientas para un estudio unificado de los fenómenos y procesos que acontecen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La primera cuestión que plantea el EOS es de tipo ontológico. Establece la noción de práctica como noción primitiva: “Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994 p. 334) Ésta es una noción clave pues, como señala Godino (2002), “como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos ‘los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas’” (p. 242), lo que permite considerar los objetos matemáticos como emergentes de dichos sistemas de prácticas y, por tanto, derivados de ellas. Así, adoptando presupuestos antropológicos, los objetos matemáticos se consideran una construcción humana que se va construyendo y enriqueciendo a través de la actividad reflexiva.

Es claro que esta emergencia progresiva en los sujetos dará lugar a objetos personales. Sin embargo, no podemos olvidar que estas prácticas se realizan en el seno de las instituciones, donde han sido estructuradas y organizadas, y, por tanto, están mediatizadas por ellas. Esto nos lleva a considerar los objetos matemáticos desde las facetas interdependientes personal e institucional.

En concreto, los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994), son: "emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas" (p. 339) Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje motivado por la propia práctica. Unido a este término tenemos el significado personal de un objeto que "es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado." (p. 341) Conviene observar que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares. Desde esta perspectiva, el objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas.

Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Godino y Batanero (1994), definen el objeto institucional como "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 338) Por otra parte, las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, lo que nos lleva a conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Estos autores también recurren a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional: "Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 340).

Teniendo en cuenta su utilización en el análisis didáctico se realizan una tipología básica de significados. Así, para los significados institucionales se proponen: implementado (sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico), evaluado (subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes), pretendido (sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio) y referencial (sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido). Este significado de referencia será parte del significado global del objeto matemático escogida en función de la institución concreta.

Para los significados personales la tipología es: global (corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencial el sujeto relativas a un objeto matemático), declarado (prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas), logrado (prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida).

Todo lo cual se resume en la figura 1, donde además se expresan las relaciones entre enseñanza y aprendizaje como el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. (Godino y Font, 2007 a, pp.2-3)

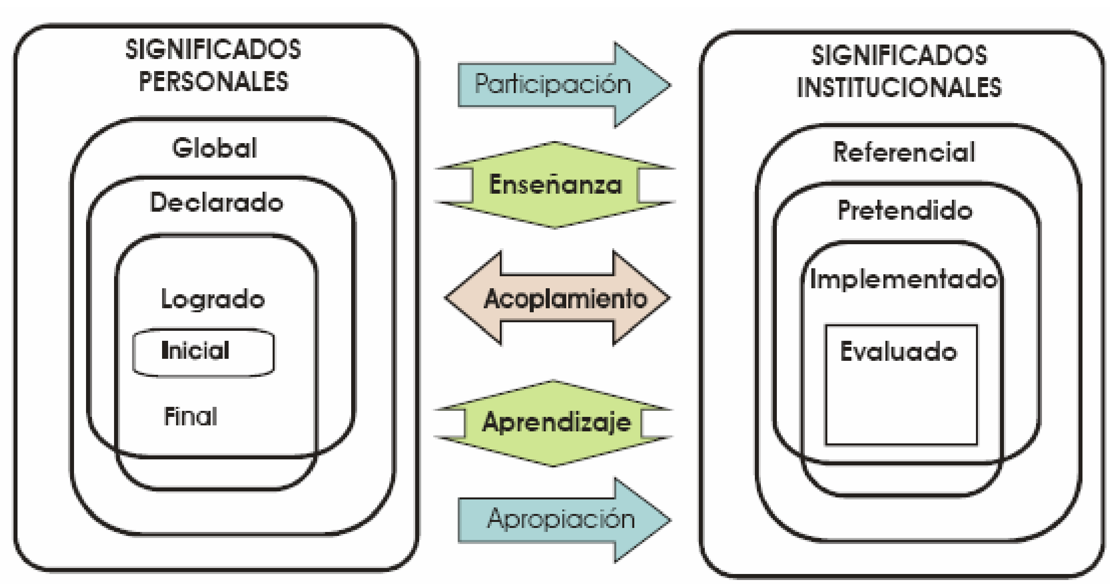


Figura 3.1: Tipos de significados institucionales y personales

Esta manera de interpretar el significado desde la dualidad institucional-personal lleva a concebir la comprensión como un proceso social y no como proceso mental. Se interpreta como la correspondencia entre los significados personales y los institucionales. Como consecuencia, está ligada y condicionada por los contextos institucionales, ya que es en ellos donde se determinan los objetos a enseñar, así como su estructura y organización y, por tanto, qué prácticas son adecuadas. Pero es claro que en cualquier proceso de instrucción se puede producir la comprensión o no. Esta forma de entender la comprensión nos proporciona una interpretación de la no comprensión entendida, ahora, como una discrepancia entre los significados personales y los propuestos por la institución. En esta línea, en Godino (2002), se entienden las dificultades y errores en términos de *conflictos* *semióticos*, concebidos como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.” (p. 258)

Elementos del significado. Dimensiones duales. Configuraciones

En estas prácticas (operativas y discursivas) de las que emergen los objetos matemáticos y, por tanto, sus significados es necesario interpretar, entre otras, las situaciones-problema, las entidades conceptuales y los propios medios expresivos. Por este motivo, y con la intención de progresar en una ontología y una semiótica de dichos objetos matemáticos que permita una mejor descripción y análisis de la actividad matemática y de sus procesos de comunicación, interesa descomponer el significado en entidades más elementales, operativizando estos constructos. El EOS propone una primera clasificación atendiendo a la función que desempeñan en la actividad matemática, proponiendo como objetos matemáticos primarios: elementos lingüísticos (lenguajes) y que se refiera a términos, expresiones, notaciones, gráficos,... en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...); situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...); *conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones); proposiciones (enunciados sobre conceptos,...); procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos). Hay que resaltar que el lenguaje es una entidad que desempeña un doble papel. Por un lado, es representacional ya que se pone en lugar de otras entidades a las que representa. Sin embargo, también hay que tener en cuenta que desempeña un papel instrumental.

Estos seis tipos de elementos se consideran las entidades primarias, las cuales se unen y organizan para formar otras entidades más complejas, componiendo, entre todas, la actividad matemática. Así, si se refieren a significados institucionales cada una de las diferentes organizaciones dará lugar a *configuraciones epistémicas,* y *configuraciones cognitivas* si se refieren a los significados personales. Están definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, como se expresa en la figura 2.

“Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones – problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama configuración. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional (…) La introducción de la noción de configuración permite matizar y operativizar la idea de que el significado de un objeto matemático conceptual es el sistema de prácticas. Ahora podemos decir que el significado de un concepto matemático es el par "Configuración epistémica / prácticas que posibilita"" (Godino y Font, 2007b, pp. 4-5) Por otra parte, "cada par se puede considerar como diferentes "sentidos" del concepto, mientras que el "significado" del concepto será el conjunto de todos los pares "Configuración epistémica /prácticas que posibilita"" (ibdí. p. 6)

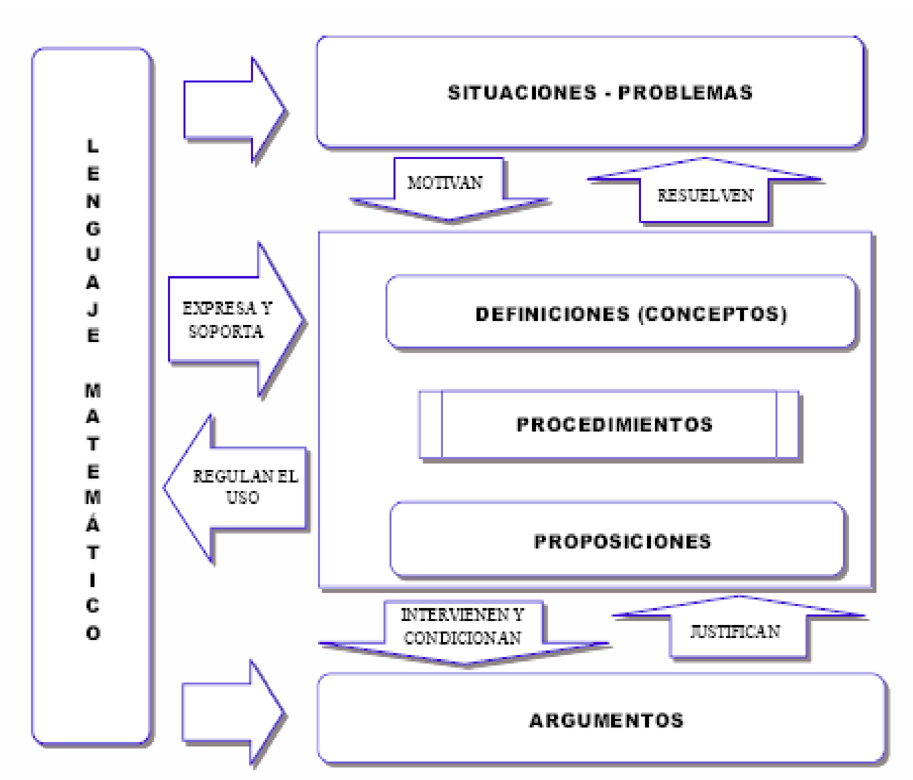


Figura 3.2: Configuración de objetos primarios

Las configuraciones epistémicas nos permiten llegar a la noción de *significado global* entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso, incluyendo el formal-estructural. Es decir, cada cambio significativo en algún elemento del significado producirá un nuevo tipo de tareas que activarán una parte del significado y, por tanto, una nueva configuración epistémica. Todas estas configuraciones y sus relaciones darán lugar al significado global.

Por otra parte, los objetos matemáticos se pueden considerar desde dimensiones duales dependiendo del juego de lenguaje en que participan. Según Godino (2002) estas facetas son: personal-institucional; ostensiva-no ostensiva; intensiva-extensiva; expresión-contenido; elemental-sistémica.

La dimensión *personal-institucional* ya ha sido comentada anteriormente, por lo que a continuación se efectuará sólo una breve aclaración de las otras cuatro dimensiones.

Ostensiva-no ostensiva: Los objetos personales y los institucionales se pueden considerar como objetos no-ostensivos en tanto que no son materiales. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados. Las expresiones simbólicas, el texto, las figuras, las gráficas, los gestos, etc. que se usan en las prácticas públicas son ostensivos (escritos, orales o gestuales).

Intensiva-extensiva/ Ejemplar-tipo: El EOS interpreta la distinción entre extensivo-intensivo en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos difuso de objetos). “Consideramos que puede ser una noción útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático derivados de la confusión entre ejemplar y tipo” (Godino, 2002, p. 251)

Elemental-sistémica: Los conceptos pueden ser considerados en un momento dado como entidades compuestas, con una cierta organización, pero, en otro momento, nos referimos a ellos como una unidad elemental indescomponible. La dialéctica elemental-sistémica comporta que los objetos (personales o institucionales) tengan que ser considerados como nudos de una red. Estos nuevos objetos a su vez se pueden entender de manera sistémica. De esta manera, tenemos una red de nudos, los cuales a su vez son redes de nudos y así sucesivamente.

Expresión-contenido: Hjelmslev (1943) en su teoría del lenguaje usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia. También establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra semiótica.

<table>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
</table>

Los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras. La distinción entre expresión y contenido y su correspondencia por medio de una función semiótica nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La *función semiótica* se entiende como la correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

En la figura 3 no sólo se recogen las entidades primarias y las diferentes facetas sino procesos matemáticos. La emergencia de los objetos de una configuración tiene lugar mediante los procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización. Otros procesos matemáticos aparecen con la consideración de las facetas duales, tal es el caso de la generalización/ particularización (faceta intensivo/extensivo), idealización/materialización (faceta no ostensivo/ostensivo), etc.

"Nuestra manera de interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, nos proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios, de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación (…) tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones son relativas y dependientes de los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje." (Godino y Font, 2007a, p. 5)

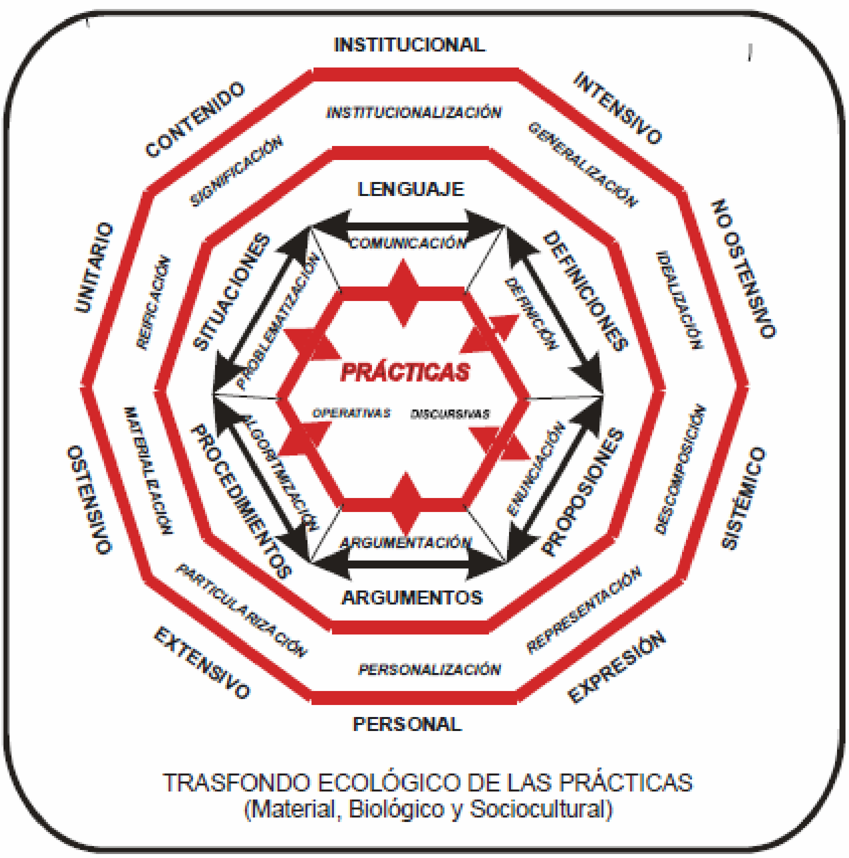


Figura 3.3: Objetos primarios, facetas duales y procesos de la actividad matemática

Análisis didáctico

Las herramientas anteriores son útiles para abordar los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pues modelizan el conocimiento matemático a enseñar (dimensión epistemológica) y los aprendizajes de los estudiantes (dimensión cognitiva) Sin embargo, para el análisis de cualquier proceso de instrucción es necesario tener en cuenta también las interacciones en el aula. Es necesario abordar cuestiones descriptivas y explicativas, pero además este enfoque plantea ir más allá, éste análisis deberá permitir emitir juicios de adaptación, pertinencia o eficacia que orienten en el diseño e implementación de los procesos de instrucción con el objetivo de mejorar y optimizar el aprendizaje matemático.

El EOS modeliza la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un proceso estiocástico compuesto de seis subprocesos o dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), cognitiva (significados personales), interacional (interacciones entre profesor y estudiantes), mediacional (recursos materiales), emocional (sentimientos y afectos) y ecológica (relaciones con el entorno social, político, económico, etc) que estructura en configuraciones de procesos, objetos y relaciones. Además para cada dimensión propone una categorización de sus estados posibles, con lo que cada realización de un proceso de instrucción supondrá poner en juego a lo largo de un tiempo una serie de elementos concretos o específicos de cada una de estas dimensiones dando lugar a las diferentes trayectorias.

"Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados (…) es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su implementación. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor fundamentado sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática y elaborar criterios para el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje matemático." (Godino, Contreras y Font, 2006, pp. 44-45)

Sin embargo, hemos de tener en cuenta que cualquier proceso de instrucción, como actividad social que es, viene regido e influeciado por unas normas sociales, muchas veces no explícitas. El EOS propone nuevamente una categorización, teniendo en cuenta las seis facetas consideradas, con lo que tenemos normas epistémicas (determinan las configuraciones epistémicas y las actividades que posibilitan), normas cognitivas (permiten conseguir que los sujetos aprendan), normas interactivas (regulan los modos de interacción entre los intervinientes), normas mediacionales (sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales), normas afectivas (entre ellas están la motivación a través de situaciones matemáticas ricas y dentro del campo de interés de los estudiantes, adaptadas para que el estudiante acepte la responsabilidad de resolverlas. Pero hay otros factores condicionantes como la sociedad, la familia, la administración) y normas ecológicas (tienen como objetivo conseguir educar a los estudiantes y comprometerlos con la comunidad y una formación inicial de profesionales competentes para un futuro ejercicio profesional)

Con esta herramientas se propone un análisis didáctico de los procesos de estudio Hay que tener en cuenta que estas herramientas “se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006, p.8) Los niveles de análisis considerados, extraidos de Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009, p.63), son:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, pues como primer paso se plantea el análisis de la actividad matemática desde la ontología propuesta por el marco teórico.

2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, con el fin de describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas, así como describir y explicar conflictos semióticos que se producen o pueden producirse en un proceso de instrucción.

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas para analizar las interacciones. Cada proceso de estudio se modeliza como un proceso estocástico sus respectivos espacios de estado y trayectorias. Considerando las seis dimensiones de cualquier proceso de instrucción, se tienen seis trayectorias: e*pistémica*: distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos); *cognitiva*: desarrollo de los significados personales (aprendizajes); *mediacional*: distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos; *interaccional*: secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados; *afectiva*: distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido; *ecológica*: sistema de relaciones con el entorno social, político, económico… que soporta y condiciona el proceso de estudio. (Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2006, pp.3-4) Cada uno de los estados dará lugar a una configuración (epistémica, cognitiva,…) La interacción entre los distintos estados y trayectorias se describe mediante las nociones de *configuración didáctica* y *trayectoria didáctica,* que nos proporcionan herramientas para identificar los patrones de interacción de una manera sistemática.

4) Identificación del sistema de normas y metanormas que rigen los fenómenos de índole social que acontecen en la enseñanza y aprendizaje. Sirven para valorar la pertinencia de las intervenciones de los profesores y estudiantes y sugerir cambios en las normas buscando optimizar el aprendizaje.

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio, entendida como "criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006, p.5) Dado este carácter sistémico esta idoneidad supone la articulación de las siguientes idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica que se sintetizan en la figura 4.

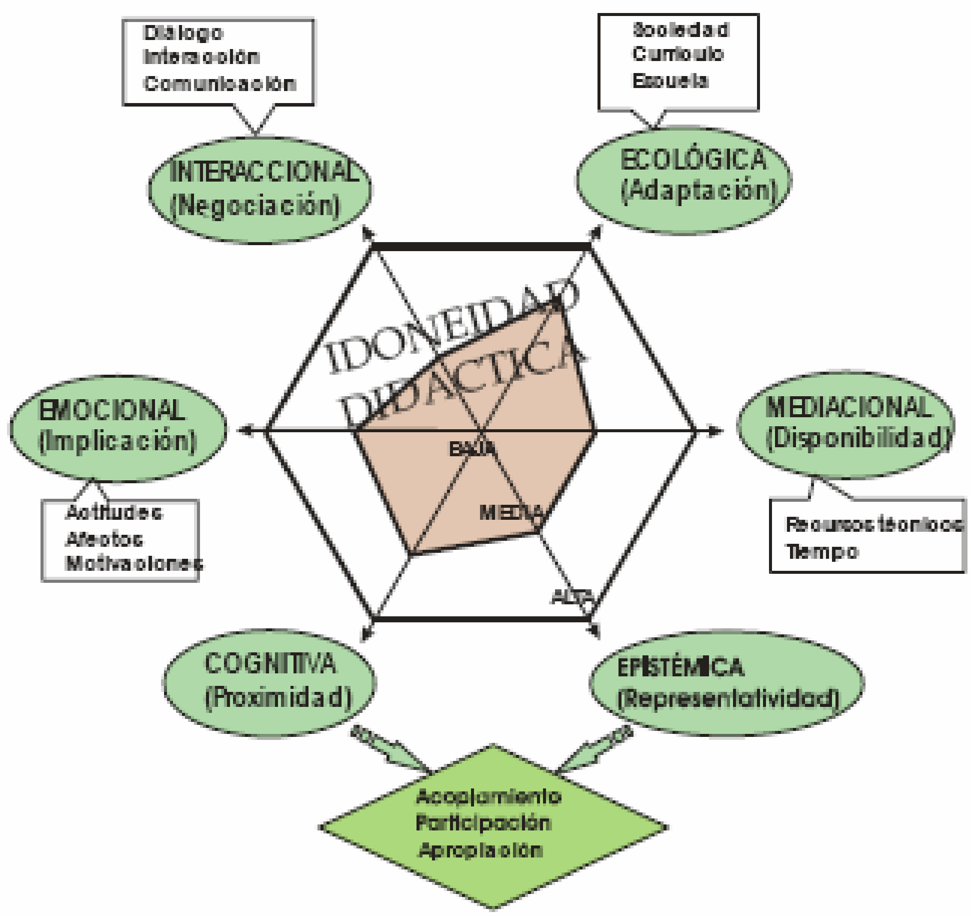


Figura 3.4: Componentes de la idoneidad didáctica

Es importante observar que en la base de esta figura están las idoneidades epistémica y cognitivas ya que todo proceso de estudio gira en torno al desarrollo de unos conocimientos matemáticos específicos.

En este trabajo nos centramos en los niveles de análisis 1 y 2, principalmente. Describiremos las componentes del significado global del objeto integral definida para poder compararlo con los significados que emanan de las PAU y acercarnos al significado implementado en cuatro grupos, considerados estándar, de 2º de Bachillerato mediante los apuntes de clase. En cada caso observaremos si existen regularidades significativas.

Aunque somos conscientes de la complejidad y, por ello, la necesidad de utilizar diferentes herramientas para obtener las configuraciones cognitivas, pretendemos dar una muestra de ellas a través de un cuestionario. De esta manera observaremos conflictos semiótico, lagunas de significado que pretendemos explicar desde el análisis anterior.

Las herramientas del EOS aportaran elementos para, a falta de otras investigaciones que corroboren nuestros resultados, indicar pautas para una mejora en la implementación de la integral definida en 2º de bachillerato teniendo como objetivo la idoneidad didáctica.

3.2 Objetivos

Esta Memoria de investigación tiene como objetivo general identificar, describir y explicar los factores relacionados con los fenómenos didácticos de renuncia al aprendizaje del objeto integral definida y de algebraización del Cálculo Integral, así como la influencia que las restricciones institucionales relacionadas con las Pruebas de Acceso a la Universidad puedan tener en los fenómenos anteriores, todo ello según el marco teórico que hemos expuesto anteriormente.

Este objetivo general se desarrolla según los siguientes objetivos específicos de acuerdo con los dos niveles del análisis didáctico que acabamos de exponer. Nuestra investigación se centra principalmente en los dos primeros niveles como hemos apuntado anteriormente, esto es, caracterización de los significados y de las configuraciones lo que permitirá poderlas comparar.

Los objetivos específicos son:

i. Análisis del desarrollo epistemológico-evolutivo del objeto integral definida, según los significados institucionales y los conflictos semióticos, en las diversas instituciones de la matemática sabia, a fin de poder detectar y caracterizar la emergencia de dicho objeto a través de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas.

Planteamos este primer objetivo porque consideramos que la determinación del significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución de nuestro objeto de estudio. De esta manera será posible detectar las situaciones que dieron origen al concepto, las dificultades que fue necesario superar y cómo se superaron hasta llegar a la situación actual, lo que nos informará sobre puntos conflictivos, conflictos semióticos potenciales, situaciones motivadoras, los diversos campos de aplicación, etc.

ii. Establecer el significado global teniendo en cuenta la adaptación de los significados institucionales históricos y, de esta manera, las configuraciones epistémicas que utilizaremos como significado de referencia.

Para este significado global y las diversas configuraciones epistémicas que lo conforman es necesario considerar la institución en la que nos encontramos. En nuestro caso, es el momento del primer encuentro con la integral definida y, como vimos en el capítulo 1, su estudio se plantea como un inicio a estudios superiores donde se aplicará a otras ciencias, según los estudios que realice cada estudiante.

iii. Análisis del significado institucional pretendido en 2º de Bachillerato, en cuanto al objeto integral definida, determinado por los desarrollos curriculares que establece la administración educativa, comparándolo, por medio de las configuraciones epistémicas, con el significado institucional de referencia.

Por una parte, la comparación entre significados permitirá observar si hay sesgos en el significado pretendido, pero además, observar los objetivos que se pretenden alcanzar con dicho significado desde las herramientas que ofrece el EOS nos permitirá un acercamiento a la idoneidad de este significado no solo epistémica sino también ecológica.

iv. Estudio del papel que juegan tanto el documento de orientación para las Pruebas de Acceso a la Universidad que propone la ponencia de Matemáticas II de Andalucía, como las propias pruebas como factores condicionantes del proceso de elección, por parte del profesor, del significado pretendido y su efecto en el aprendizaje.

Tanto en este objetivo como en el anterior apuntamos, de acuerdo con Godino (2002), “la comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por dos instituciones o por una persona y un referente institucional nos permite identificar conflictos semióticos entre dichos agentes” (p. 258).

v. Análisis de la enseñanza institucional escolar implementada de la noción de integral definida en un contexto institucional determinado, por medio del análisis de los apuntes de clase.

Intentamos de esta manera un acercamiento al significado implementado. Somos conscientes de que serían necesarios otros elementos de recogida de datos como grabaciones de clase, por ejemplo, para poder obtener el verdadero significado implementado. Sin embargo, nuestro objetivo no es este significado en sí sino determinar si la trayectoria epistémica que se puede deducir es coincidente en sesgos y lagunas de significado con el significado emanado de las PAU y, así inferir la influencia de dichas pruebas en el significado efectivamente implementado.

vi. Caracterización de los significados personales logrados por los alumnos tras la implementación de la enseñanza, mediante la elaboración y aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas tras su corrección.

Tras la caracterización de los significados institucionales de la integral en 2º de bachillerato y los posibles conflictos semióticos detectados en la comparación con el significado de referencia abordamos sus consecuencias en el aprendizaje, esto es, observaremos las configuraciones cognitivas o parte de ellas. En el capítulo anterior hemos dado cuenta de diferentes dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la integral definida. El EOS nos permitirá reformularlas, explicarlas y asociarlas a fenómenos del proceso de instrucción seguido por estos alumnos. Nos proponemos, pues, describir características de las configuraciones cognitivas de estos estudiantes.

vii. Con la información obtenida de los resultados emanados del desarrollo de los objetivos anteriores, establecer unas orientaciones curriculares, conclusiones de tipo orientativo de cara a la enseñanza de la integral definida en la asignatura de Matemáticas II 2º de Bachillerato en Andalucía.

Ya hemos comentado que el EOS propone establecer herramientas para determinar la idoneidad de un proceso de estudio y hemos observado también las indicaciones de diversos trabajos de investigación sobre la integral. Nos marcamos como objetivo a través del EOS, establecer algunas pautas para la implementación de la integral definida. Serán pautas abiertas a nuevas investigaciones pues la valoración de la idoneidad es un proceso complejo que incluye muchas dimensiones y factores. Aún así, las consideramos indicativas de un camino a seguir y, sobre todo, determinar puntos verdaderamente conflictivos o infructuosos en la enseñanza de este objeto matemático.

3.3 Hipótesis

Los anteriores objetivos nos han llevado a formular unas hipótesis de trabajo que esperamos contrastar en esta Memoria. Dado que hemos adoptado el marco teórico del EOS la hipótesis inicial (básica) nos relaciona el objetivo general con dicho marco teórico al considerar éste como una potente herramienta capaz de sacar a la luz, describir y explicar los fenómenos didácticos que se producen en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida, que es el objeto de este trabajo, y más concretamente la algebraización del Cálculo Integral expuesta por diversos autores. Además ofrece pautas para la mejora de la enseñanza de este objeto con vistas a optimizar los aprendizajes logrados.

Esta hipótesis inicial subyacente en todo el trabajo se concreta en las siguientes hipótesis de trabajo:

H_1: En el análisis del desarrollo epistemológico-evolutivo del concepto de integral definida se detectan varios significados institucionales y conflictos semióticos que, adaptados, establecen el significado institucional de referencia actual de dicho objeto matemático, las diferentes configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales.

H_2: La comparación del significado institucional actual con el currículum oficial de la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato de Andalucía permite establecer sesgos en la elección del significado pretendido por parte de las diversas instituciones implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida.

H_3: El análisis de las orientaciones y, sobre todo, de las Pruebas de Acceso a la Universidad informa de que éstas son una nueva restricción para el significado pretendido y, por tanto, para el implementado.

H_4: Las anteriores restricciones provocan un significado implementado muy sesgado a determinadas configuraciones epistémicas, olvidando o relegando otras, ofreciendo así un significado muy parcial y, sobre todo, enfocado hacia elementos de tipo algebraico.

H_5: El estudio de los significados personales declarados determina características en las configuraciones cognitivas que indican que las restricciones anteriores producen unos significados personales logrados incompletos y sin una adecuada contextualización.

H_6: Los resultados obtenidos y las herramientas del marco teórico nos permitirán realizar orientaciones curriculares para la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato de Andalucía en cuanto a la integral definida.

3.4 Metodología

El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática presenta unas características metodológicas propias que se puede resumir en los cinco niveles de análisis didáctico propuestos y que marcan nuestra línea.

Dada la complejidad de cualquier proceso de instrucción y la multiplicidad de dimensiones que es necesario considerar hemos considerado centrar nuestro estudio en las dimensiones epistemológica y cognitiva principalmente pues son la base para cualquier programa de estudio, el cual siempre gira en torno a unos conocimientos matemáticos que deben ser enseñados y aprendidos en el seno de una institución por lo que la dimensión instruccional estará también presente. Como señala Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) "El centro de atención del análisis didáctico debiera progresar desde la situación – problema (o del concepto/ estructura conceptual) a la configuración epistémica/cognitiva, y de ésta hacia la configuración didáctica –que incluye no sólo el saber y los sujetos sino también el papel del profesor, los recursos y las interacciones entre los diversos componentes." (p.8)

Este trabajo reúne las condiciones de una investigación epistémica, al estudiarse significados institucionales. Además es cognitiva, en el sentido de cognición individual, al tratar con significados personales. Por último, es instruccional al tratar de establecerse las interacciones entre significados institucionales y personales. Con esto, podemos afirmar, observando el foco de la investigación, que analizamos cuestiones de las tres dimensiones que podemos considerar en cualquier proceso de instrucción matemática, poniendo de manifiesto la interrelación que existe entre ellas, aunque centrándonos en el análisis de significados (niveles 1 y 2 del análisis didáctico). Esto es, fijándonos en el fin perseguido, podemos decir que se trata de una investigación de carácter semiométrico o de caracterización de significados, puesto que se caracterizan significados institucionales y personales. Es también una investigación de tipo ecológico, al buscarse relaciones entre significados.

Hay que tener en cuenta que, como se señala en Godino y Batanero (1998), la semiometría o caracterización de significados puede describirse como estática de significados. Por tanto, la medida de los sistemas de prácticas o significados tiene un carácter cualitativo y se referirá a una persona o a una institución. En dicha medición se contemplan las seis entidades primarias correspondientes al significado sistémico del objeto matemático, es decir, la medida no debe concebirse en un sentido psicométrico o matemático estricto, sino en una vertiente más general, esto es, como categorización de valores de variables cualitativas.

3.4.1 Organización y fases en el diseño de la investigación. Instrumentos

Nuestra investigación tiene dos partes interdependientes pero bien diferenciadas ya que se estudian distintos componentes del sistema didáctico. En primer lugar, un estudio epistemológico, como inicio y base de toda la investigación, y, posteriormente, un estudio cognitivo (en el sentido de cognición individual) Cada una de estas partes posee un fin en sí misma y se corresponden con los objetivos de nuestra investigación. Esto implica, además, que por sus especiales características deberán ser abordadas de forma distinta y con diferentes instrumentos de análisis y medida.

Más concretamente, para la primera parte, estudio epistemológico, se utilizará un análisis epistemológico-histórico (que se centra en la naturaleza de las diversas componentes del conocimiento matemático identificadas a lo largo de la historia, respecto al concepto estudiado y que corresponde a la fase 1ª). Tras una revisión de los principales acontecimientos de la época, se recogen los significados institucionales de la integral definida del momento en una tabla resumen donde exponen las seis entidades primarias de la actividad matemática (situaciones, lenguaje; procedimientos, definiciones; proposiciones y argumentos), así como los conflictos semióticos potenciales asociados. Además, cada periodo histórico debe ser considerado con sus circunstancias y condicionamientos propios, esto es el trabajo matemático está unido a un determinado tiempo (momento histórico) y es, por tanto, "producto" de ese momento y está influido por él: *"Se plantea un problema cuya solución va a venir condicionada por unos intereses no intrínsecos al hacer matemático, sino condicionada por otras zonas de interés –religiosas, morales, políticas, sociológicas, económicas…- de tal manera que permita utilizar el producto de la práctica teórica como justificación de dichas zonas"* (De Lorenzo, 1977, p. 13). Por este motivo hemos considerado también en cada periodo elementos de las trayectorias emocionales o afectivas y mediacionales[4]. El cambio ha venido determinado por un cambio importante en la perspectiva que determinó un nuevo enfoque o nuevas maneras de hacer en la matemática, esto es, una ruptura epistemológica que De Lorenzo (1977) define:

> "Todo ello implica aceptar la existencia de unos marcos de validez de la práctica matemática, de los objetos con los cuales se trabaja, del producto de ese trabajo. Marcos delimitadores tanto del hacer intrínseco como de la ideología que lo posibilita (…). Se hace cuestionable, igualmente, la mutación de dichos marcos, y su aceptación lleva a la admisión de que en el interior de cada marco rige un rigor, una verdad que no son el rigor o la verdad para otros marcos, aunque los conceptos que se manejen en uno parezcan quedar incorporados en la práctica propia de otro de los marcos. Incorporación que conlleva un cambio de significado, en el uso de los mismos. El problema de validez se centraría, entonces, en el hecho de que el objeto de conocimiento puede seguir siendo el mismo, pero cambia el enfoque de su visión, de su manejo ante la necesidad de resolver nuevos problemas, nuevos para el marco en el que se encontraba. Y de esa necesidad, interna, se llega o bien a ampliar el objeto y, con él, a un desarrollo teórico interno, o bien a enfocarlo desde una nueva perspectiva y, por tanto, a una ruptura epistemológica. Cabe observar, además, que la ampliación o desarrollo teórico de unos temas conlleva, necesariamente, la ruptura en cuanto a que ese desarrollo terminará manifestando los límites inherentes al problema considerado, imposible de resolver con el enfoque interior del marco con el que está planteado" (p. 15)

Por ello en cada momento histórico habrá un enfoque que limite el avance de la matemática y que será resuelto en la siguiente etapa. Es lo que denominamos respectivamente fronteras y rupturas epistemiológicas.

Este análisis permitirá caracterizar el significado institucional de cada momento histórico. Dichos significados se estudian por medio de la exploración de textos escritos de

[4] Consideramos estas trayectorias en el sentido que se da en los estudios de un proceso de instrucción expuesto por Godino, Contreras y Font (2006). Así, la trayectoria mediacional, representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados y trayectoria emocional los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) con relación a los objetos matemáticos del momento.

una cierta época, lo cual exige, según las recomendaciones dadas por Waldegg (1997), que, siempre que sea posible, las consultas sean realizadas en función del contexto y de las matemáticas de dicha época.

Este estudio nos servirá para establecer las configuraciones epistémicas de la integral definida que, teniendo en cuenta la institución en la que realizamos la investigación, constituirán el significado de referencia que aparece detallado en el capítulo cuatro de esta Memoria.

Utilizando las configuraciones epistémicas como instrumento, podremos analizar los significados institucionales pretendidos por la administración y en el documento de orientación para las PAU mediante un análisis del tipo de configuración propuesta, comparándolos con el significado de referencia.

Un estudio cualitativo-cuantitativo de las configuraciones epistémicas que se utilizan para resolver las situaciones de las Pruebas de Acceso a la Universidad en cuanto a la integral definida y su comparación con el significado de referencia nos permite documentar sistemáticamente el significado institucional que emana de ellas y que consideramos un referente para el profesor en la elaboración del significado pretendido. Todo ello recogido en el capítulo 5.

Una vez determinados los significados pretendidos nos propusimos analizar la influencia en la enseñanza-aprendizaje. Por ello escogimos 4 grupos de 2º de Bachillerato que consideramos estándar en los que analizarla desde dos perspectivas: el significado implementado, en cuanto a la trayectoria epistemológica seguida por el profesor, principalmente, y los significados logrados por los estudiantes que han recibido esta instrucción, dando características de sus configuraciones cognitivas.

El estudio de la trayectoria epistemológica del significado implementado se realizó mediante el análisis de los apuntes de estudiantes de los grupos escogidos. Para ello se ha elaborado una plantilla de análisis teniendo en cuenta el estudio sobre análisis de manuales basado en el EOS realizado por Contreras y Ordóñez (2005a), el cual ha sido ampliado y adaptado para el caso de los apuntes de clase. Esta plantilla se ha completado, por una parte, con un estudio del tratamiento de las configuraciones epistémicas en cada texto (ambos permiten una completa comparación con el significado de referencia) y, por otra, por una clasificación de las situaciones trabajadas en cada grupo según la clasificación realizada para las PAU, lo que permite comparar ambos significados. Todo esto se detalla en el capítulo 5.

Para la evaluación de los significados personales, se elaboró un cuestionario piloto sobre los significados institucionales de referencia, cuyas respuestas fueron corregidas, extrayéndose las conclusiones pertinentes que orientarían los ítems del cuestionario definitivo. Previamente, se realizó un proceso de selección de ítems para el cuestionario piloto elaborando un banco de ítems, de los que se fueron eligiendo aquellos que resultaron idóneos para los objetivos de la investigación. Posteriormente, el cuestionario piloto fue sometido a un juicio de expertos. Como señalan Batanero y Díaz (2004): “Millman y Greene (1989) indican que el “experto” lo define el propósito del instrumento y que el grupo elegido de expertos ha de representar una diversidad relevante de puntos de vista.” (p. 7)

En nuestro caso, se seleccionaron tres expertos. En todos los casos, se tuvo en cuenta que hubieran tenido o tuvieran experiencia en educación secundaria, concretamente en bachillerato. Uno de los expertos pertenece al Área de Didáctica de las Matemáticas, ha tenido una experiencia dilatada en bachillerato y es autor de numerosos libros de texto. Otro de ellos, ejerce su actividad en educación secundaria y conoce con profundidad la Didáctica de las Matemáticas. Por último, la tercera, desarrolla su labor en un departamento universitario de matemáticas, ha tenido experiencia con educación secundaria y es conocedora de las pruebas de acceso a la universidad.

El capítulo 6 recoge los detalles la elaboración de los cuestionarios, el análisis a priori que se realizó de cada uno de ellos y que fue utilizado para la corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes. De esta manera fue posible cuantificar variable y así obtener resultados numéricos y regularidades que nos permitieran establecer el índice de ocurrencia de un fenómeno y poder establecerlo como una característica de las configuraciones cognitivas de los estudiantes de los grupos que siguieron esta instrucción.

Una última parte de esta Memoria está destina a realizar una valoración de la idoneidad del tratamiento de la integral definida en 2º de bachillerato. Somos conscientes de que no será la idoneidad didáctica pues no hemos analizado las distintas dimensiones o facetas, sin embargo, estimamos que a través de las diferentes idoneidades podremos aproximarnos a ella y establecer, explicar y describir, puntos conflictivos o infructuosos en el tratamiento actual de este objeto matemático en la institución considerada.

La correspondencia entre las diversas fases que componen nuestra investigación, los objetivos específicos en los que desglosamos nuestro objetivo principal y los instrumentos utilizados en cada una de las fases según las características específicas de cada una de ellas se reflejan en la tabla 3.1, donde, además, hemos considerado la principal dimensión que se trabaja en cada fase.

Fases investigación		Objetivos específicos	Instrumento
Dimensión epistemológica	1ª fase (a): Análisis epistemológico-histórico de los significados institucionales de la integral definida.	O_1: Análisis del desarrollo epistemológico-evolutivo del objeto integral definida en las diversas instituciones de la matemática sabia, a fin de poder detectar y caracterizar la emergencia de dicho objeto a través de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas.	Tabla resumen con las entidades primarias, la trayectoria emocional y mediacional, conflictos semióticos y fronteras y rupturas epistemológicas.
	1ª fase (b): Significado de referencia.	O_2: Establecer el significado global teniendo en cuenta la adaptación de los significados institucionales históricos y las configuraciones epistémicas.	Configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales.
	2ª fase (a): Significado institucional pretendido correspondiente a la administración educativa y el documento de orientación para las PAU en la Comunidad Autónoma de Andalucía. 2ª fase (b): Análisis de las PAU. Significado que emana de ellas.	O_3: Análisis del significado institucional pretendido en 2º de Bachillerato, que establece la administración educativa, comparándolo, con el significado institucional de referencia. O_4: Estudio del papel que juegan tanto el documento de orientación para las PAU como las propias pruebas como factor condicionante del proceso de elección del significado pretendido.	Configuraciones epistémicas.
	2ª fase (c): Análisis del significado institucional implementado.	O_5: Análisis de la enseñanza institucional escolar implementada por medio del análisis de los apuntes de clase.	Plantilla de análisis de apuntes y configuraciones epistémicas.
Dimensión cognitiva	3º fase: Análisis de los significados personales. Características de las configuraciones cognitivas.	O_6: Caracterización de los significados personales logrados por los alumnos	Cuestionario y entrevistas. Plantilla de análisis. Entidades primarias, funciones semióticas y conflictos semióticos
Dimensión instruccional	4ª fase: Valoración de la idoneidad.	O_7: Con la información obtenida de los resultados emanados del desarrollo de los objetivos anteriores, establecer unas orientaciones curriculares, conclusiones de tipo orientativo de cara a la enseñanza de la integral definida en la asignatura de Matemáticas II 2º de Bachillerato en Andalucía	Idoneidades

Tabla 3.1: Fases, objetivos e instrumentos de la investigación.

3.4.2 Población y muestras

Utilizando la terminología de Azorín y Sánchez Crespo (1986) el universo de nuestro estudio se centra, por un lado, en los ejercicios sobre integral definida propuestos en las PAU de la Comunidad Autónoma de Andalucía en los últimos 10 años. Los ponentes, en las reuniones de coordinación, entregan las pruebas pertenecientes al año anterior a los profesores que imparten la asignatura los cuales son convocados regularmente. Además, dichas pruebas pueden obtenerse fácilmente, por ejemplo, en la página web de las Universidades de las Comunidad.

Por otro lado, la población de estudiantes sobre la que se centra nuestra investigación está constituida por los estudiantes de 2º de bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía, ya que la enseñanza del concepto de integral definida pertenece a este nivel educativo. La población objetivo, de la que se han tomado las muestras son los estudiantes de Jaén. Se ha restringido la población por razones de operatividad y porque las PAU están armonizadas en toda la Comunidad Autónoma, por lo que las características pueden ser similares para cualquier provincia.

De esta población se han tomado muestras intencionales (Ghiglione y Mataron, 1989), buscando que fuesen representativas del tipo de centro y del entorno social del alumnado. Así para el cuestionario piloto se escogieron 16 alumnos que de dos centros de Jaén y de entre ellos 5 fueron los entrevistados. Para el cuestionario definitivo se escogieron 48 alumnos de tres centros de Jaén y que habían recibido clase de 4 profesores que consideramos estándar y que no tuvieron ningún tipo de condicionante, esto es, los estudiantes recibieron la clase sin tener en cuenta que eran objeto de investigación, buscando que se ajustase a lo que realizan de forma habitual.

3.4.3 Técnicas de análisis de datos

Se han empleado diversas técnicas básicamente cualitativas, dependiendo de las fases de la investigación. Se trata de una metodología más compleja que la cuantitativa al estar menos estandarizada. Hemos seguido las recomendaciones de Miles y Huberman (1984, 1994) y Gil Flores (1994).

En el análisis epistemológico-histórico de los significados institucionales de la integral definida se ha utilizado un análisis de contenido, según las variables ya descritas, categorizando los diversos significados emergentes del estudio.

Para el estudio de las pruebas de acceso y de los apuntes de clase, se han identificando los elementos de significado y realizando un análisis de contenido. Fox (1981) indica que el análisis de contenido comienza por elegir la unidad de contenido a analizar. Luego se elabora un conjunto de categorías, junto con un fundamento lógico que sirva para asignar las unidades a estas categorías. En los programas de investigación cualitativa, el análisis de datos implica un proceso en varías etapas en el que el fenómeno global es dividido en unidades, éstas son clasificadas en categorías ya continuación ensambladas y relacionadas para conseguir un todo coherente (Goetz y Lecompte, 1988). En nuestro caso, el haberse basado en las entidades primarias de la actividad matemática, se simplifica el análisis, al disponer de las categorías.

Para el análisis de respuestas de los cuestionarios se han considerado tres etapas. Un análisis a priori de las posibles respuestas, la experimentación y un análisis a posteriori. Las variables obtenidas del cuestionario se han analizado con técnicas estadísticas utilizando el programa SPSS. El estudio descriptivo comprende la obtención de tablas de frecuencia de respuestas obtenidas y tantos por ciento para cada uno de los ítems.

Capítulo 4

Significado institucional de referencia

Hay un momento para todo y un tiempo para cada cosa bajo el sol: un tiempo para nacer y un tiempo para morir, un tiempo para plantar y un tiempo para arrancar lo plantado

Nos proponemos en este capítulo reconstruir la parte del significado global de la integral definida que utilizaremos como significado institucional de referencia y con el que compararemos los distintos significados (institucionales y personales). De esta manera podremos hacer una valoración del carácter más o menos completo de los significados institucionales determinados por la administración educativa y por las PAU, que es nuestro objeto de estudio, así como obtener puntos críticos en un proceso de estudio sobre la integral definida, pues "la comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por dos instituciones o por una persona y un referente institucional nos permite identificar conflictos semióticos entre dichos agentes" (Godino, 2002, p. 258)

Dicho significado global estará constituido por diferentes pares "*configuración epistémica/prácticas que posibilita*" y que el EOS interpreta como diferentes sentidos del concepto. Es, por tanto, nuestro objetivo determinar dichas configuraciones epistémicas sin perder de vista que el significado de referencia es relativo a la institución y al contexto de uso. En nuestro caso, dicha institución se refiere a 2º de bachillerato en la comunidad de Andalucía y el marco legal comentado en el primer capítulo, de donde destacamos que es el momento del primer encuentro de los estudiantes con la integral definida y el carácter preparatorio para otros estudios que comentamos.

Por otra parte, como señala Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) "en una institución de enseñanza concreta el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto" (p.10) Por este motivo, abordamos el estudio histórico en primer lugar considerando que tras la oportuna e imprescindible adaptación, examinando el momento actual y teniendo en cuenta el nivel (introducción al concepto) que vamos a considerar en nuestro estudio, podremos determinar las distintas configuraciones epistémicas que formarán el significado de referencia de la integral definida que utilizaremos en el trabajo, así como algunos conflictos semióticos que podríamos denominar epistemológicos.

Consideramos, de acuerdo con Waldegg (1997), que "la historia, en tanto que anécdota, en tanto que narración de hechos pasados o como una crónica no ofrece interés a la investigación didáctica que se ocupa de aspectos cognitivos. Esta faceta de la historia está ligada, ante todo, a la motivación en las aulas (…) Es, por tanto, la historia como "laboratorio epistemológico" la que nos interesa. Es decir, una historia que podamos interrogar a propósito de las condiciones de la construcción de los saberes, de la transformación de las nociones, de la evolución de la ontología de los objetos matemáticos, de la relación entre conocimientos y realidad en el curso del tiempo" (p. 44) Además, como plantean Farmaki y Paschos (2007) "por lo general, estamos de acuerdo con la opinión de Vygotsky que lo que sucedió en el pasado y lo que es probable que ocurra en las aulas son dos fenómenos diferentes, con base en muy diversos ambientes culturales, sociológicos, psicológicos y didácticos. Por lo tanto, sería una simplificación excesiva creer que podemos determinar una trayectoria hipotética de aprendizaje para los individuos guiados únicamente por el estudio histórico y un análisis evolutivo del pensamiento matemático. (…) En nuestro enfoque, el análisis histórico tiene por objeto presentar tanto los obstáculos encontrados en el desarrollo de diversos conceptos y las ideas y los métodos por los que estos obstáculos se han superado históricamente. Convenientemente reconstruido, este fondo histórico puede ser útil en el diseño de actividades de enseñanza que ayuden a los alumnos a superar las dificultades (que es razonable esperar que tengan alguna relación con los encontrados en el pasado), y por lo tanto ofrecer un marco propicio para el aprendizaje de estos conceptos matemáticos."(pp. 86-87)

4.1 Significados Histórico-Epistemológicos: Configuraciones Epistémicas a lo largo de la Historia

Para el estudio de los distintos significados que se relacionan a continuación se han utilizado diversas fuentes bibliográficas (en la mayoría de los casos hay citas explícitas y en otros solamente han servido de referencia): Bessot et als. (1999); Guichard (2000); Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986); Montucla (1986) González (1992); Mnemosyne n^{os} 1, 2, 6, 13; Gaud et als (1998); Grattan-Guinness (1980), los cuales nos ha permitido conocer los principales acontecimientos de cada época poniendo atención a los cambios importantes, cuales fueron y cómo se superaron las dificultades, etc., buscando comprender y tener una amplia visión de la situación actual de la integral definida y sus diferentes posibilidades. Tal como se señala en Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005):

> "En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas.
>
> Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria" (p.131)

Como expusimos en el capítulo anterior, tras una breve exposición de los acontecimientos de la época hemos realizado una tabla en la que se recogen en primer lugar las entidades primarias. Hemos considerado las facetas (sobre todo extensiva/intensiva) que predominaban en un determinado momento pues, en ocasiones, el tratamiento intensivo de las situaciones ha supuesto un importante cambio en la matemática que hasta ese momento no generalizaba.

En las tablas hemos considerado, por último lo elementos emocionales y mediacionales que han posibilitado la matemática de cada época y su avance y las rupturas y fronteras epistemológicas como momentos clave cuando aportan información relevante de una etapa a las siguientes. En este sentido hemos considerado la ruptura epistemológica, ya que aporta los "incrementos" que posibilitan y explican el desarrollo de una noción a lo largo de su evolución histórica, donde encontramos que "hay cortes, rupturas que conducen, desde la estructura dada a nuevos haceres provocando la variación de los cuadros de validez, y de tiempo en que una determinada matemática es adecuada. Rupturas que no se centran por modo exclusivo en el manejo de nuevos objetos matemáticos, sino en una nueva manera de manejarlos, de plantearlos como problemas; enfoque que conlleva su cohorte de perspectiva epistemológicos y ontológicos distintos y que da paso a otros tipos de hacer a otras matemáticas" (De Lorenzo, 1977, p.37)

4.1.1. Significado institucional de la integral definida en la cultura griega

Los griegos, principalmente al estudiar la composición de los entes geométricos, mostraron gran intuición respecto a las nociones del continuo, del infinito matemático y del límite. Sin embargo, tuvieron grandes dificultades para formular dichas nociones de modo explícito, por lo que intentaron eludirlos y/o camuflarlos en sus significados.

Inicialmente, los pitagóricos (585-400 a.C.) establecieron un paralelismo entre la Geometría y la Aritmética, considerando los números como puntos geométricos, y las figuras geométricas como conjunto de puntos. Se trataba de encontrar una unidad suficientemente pequeña que permitiera escribir las medidas y magnitudes como múltiplos enteros de ellas, es decir, cada número sería una cantidad discreta de unidades. Hay que tener en cuenta que su estudio se limitaba a los números enteros y positivos.

Con este significado de número, toda magnitud continua (línea, superficie, cuerpo...) se identificaba con un número, un quantum (longitud, área, volumen,...), y, dado que la unidad es la medida común a los números enteros, debían tener una unidad de medida común (ser conmensurables). Así a cada magnitud se le identificaba con el número entero de unidades que la componían. Lógicamente, este intento de identificar los números enteros y las magnitudes continuas, de interpretar el continuo en términos de lo discreto, fracasó.

El descubrimiento de los números irracionales puso en evidencia lo absurdo de poner en correspondencia las magnitudes y los números, porque si bien dado cualquier número siempre hay una longitud que le corresponde, ¿qué número le corresponde a las magnitudes inconmensurables? Hoy en día la respuesta es clara, a las magnitudes inconmensurables le corresponden los números irracionales.

Es posible que los griegos, buscando una unidad de medida común a todas las magnitudes, quizás consideraran las magnitudes como divisibles hasta el infinito, pero la idea del infinito les conducía a un profundo desconcierto, por lo que trataran de evitar y evadirse del infinito en sus teorizaciones matemáticas y por lo tanto en los significados institucionales que establecen y utilizan.

Las dificultades para explicar las nociones abstractas de infinito y del continuo, opuestas a lo finito y a lo discreto, se expresan, de un modo destacado, en las aporías de Zenón de Elea. Éstas no son más que situaciones y argumentaciones que ponen de manifiesto los conflictos semióticos a los que conducen los significados que se consideran en ese momento.

Obviamente, se enfrentaban dos significados bien distintos sobre la ontología matemática: el *significado continuista*, que considera al número, al espacio, al tiempo y a la materia como divisibles infinitamente; y el *significado atomista*, que preconiza la existencia de elementos primarios indivisibles.

En “la tortuga y Aquiles”, Zenón se opone a la divisibilidad infinita del espacio y del tiempo. Si el espacio fuera divisible infinitamente, entonces Aquiles no podría jamás alcanzar a la tortuga. Es decir, lo que se pone en juego en esta paradoja es la dificultad de sumar una infinidad de cantidades cada vez más pequeñas a la vez que concebir intuitivamente que dicha suma pueda llegar a ser igual a una cantidad finita. Hoy en día las nociones de límite y de convergencia de una serie nos permiten afirmar que, a partir de un cierto lugar, la diferencia entre Aquiles y la tortuga es inferior a cualquier épsilon.

Por otra parte, en la “paradoja de la flecha” se supone que el espacio y el tiempo están compuestos por partes indivisibles (puntos e instantes), de tal modo que, en un instante de su vuelo, una flecha ocupa un punto del espacio y estará, por tanto, en reposo. Si esto es cierto, en cada instante de su vuelo la flecha no puede estar en movimiento. Entra en juego aquí la noción de velocidad instantánea, puesto que ¿qué valor atribuir a la relación $\Delta x/\Delta t$ de la distancia recorrida Δx en el intervalo de tiempo Δt si esta cantidad llega a ser muy pequeña? Incapaces de imaginar un mínimo no nulo, los griegos le asignaban el valor cero. Actualmente, la noción de límite proporciona una buena respuesta: la velocidad instantánea es el límite del cociente anterior cuando Δt tiende a cero.

Zenón, mediante sus aporías, muestra que ambas hipótesis conducen a un “callejón sin salida”, esto es, a conflictos semióticos que deben ser resueltos modificando los significados institucionales del momento. Como consecuencia se separa definitivamente la Geometría de la Aritmética y se acentúa el “horror al infinito” que caracteriza la Matemática de esta época.

En este contexto surge Eudoxio de Cnido, introduciendo el concepto de “tan pequeño como se quiera”. Además elimina la imposibilidad de expresar la razón entre dos cantidades inconmensurables definiendo la igualdad de razones (proporciones). Así, Eudoxio, con su teoría de las proporciones, intentó dotar de sentido a las magnitudes inconmensurables y, en cierto, modo admitir a los números irracionales en el campo de la matemática griega. En el libro V de los Elementos expone la teoría de las proporciones que es la base para el método de exhausción, el cual permite resolver problemas –cálculo de longitudes de curvas, de áreas, de volúmenes... – que más tarde se revelaron del Cálculo Infinitesimal. La fundamentación del método reside en el axioma de Arquímedes (libro X de los Elementos): “Sustrayendo de la mayor de dos magnitudes su mitad, del resto su mitad... se puede llegar a una magnitud menor que la menor”, que traducido a la actualidad es: Si $a > b$, números reales, entonces existe siempre un número m tal que $mb > a$. De esta manera, Eudoxio, prescindiendo de los números irracionales, opera con cantidades que se pueden hacer menor que un número arbitrariamente prefijado.

¿Qué significa, entonces, medir para los griegos?, los griegos incapaces de encontrar una unidad de medida común a las magnitudes inconmensurables, no miden las magnitudes geométricas sino que las comparan entre ellas calculando sus relaciones. Así, por ejemplo, comparan las longitudes de curvas con las rectilíneas –lo que se denomina rectificación de las curvas–, las áreas curvilíneas con las rectilíneas. Es decir, calcular el área de una superficie es un falso problema para los griegos, pero determinar la relación de las áreas a estudiar con otras conocidas es un problema susceptible de ser resuelto en el marco de sus matemáticas. El método de exhausción les permite comparar el área de una superficie como la de un segmento de parábola con el área de una superficie conocida, de un cuadrado. En este contexto toman sentido las cuadraturas y cubaturas aunque teniendo en cuenta que las aplicaciones se dejan en un segundo plano por considerarlas degradantes. Como afirma González (1992) "si los científicos griegos no idearon un sistema de numeración manejable, mal podrían prestar atención a las cuestiones calculísticas" (p.29)

El mayor artífice de la matemática griega es Arquímedes que como griego que era emplea el método de exhausción, el cual utiliza como argumentación la doble reducción al absurdo, para sus demostraciones. Sin embargo este método sufre una evolución con Arquímedes ya que pasa de los procesos puramente geométricos a otros más numéricos. Así, por ejemplo, aplicando el método de exhausción, realiza la cuadratura de la parábola. Establece la hipótesis de que el área S de dicho segmento parabólico es $4/3A$ (A es el área del triángulo inscrito). Después, inscribe en el segmento parabólico un polígono de área U menor que S y mayor que A. Ahora compara S y $4/3A$ utilizando la doble reducción al absurdo; usa U como elemento accesorio y llega a que $S>4/3A$ es absurdo y que $S<4/3A$ también es absurdo, lo que conduce a la igualdad de la conjetura. "En manos de Arquímedes el método de exhausción, conjugado con su genial y heurístico método mecánico de descubrimiento ("método de la palanca"), se convierte se convierte en un poderoso instrumento infinitesimal rigurosamente lógico que le permite alumbrar intuitivamente y convalidar apodícticamente numerosos resultados" (ibíd., p.32) Con el método de la palanca Arquímedes descubre e investiga cuestiones geométricas con la ayuda de nociones y consideraciones mecánicas y que demostrará posteriormente de forma rigurosa a través del método de exhausción. "La comparación con las técnicas infinitesimales desplegadas en el siglo XVII arroja una sorprendente similitud entre los usos metodológicos de esta época y la técnica del método mecánico del *Método* de Arquímedes. Evidentemente en este asunto no se puede hablar de influencia directa del Método de Arquímedes, toda vez que en el siglo XVII no se dispuso de esta obra, (…) En toda la parafernalia de técnicas y métodos infinitesimales desarrolladas en este siglo, con indivisibles o infinitamente pequeños, se recorren nuevamente los caminos abiertos por Arquímedes y no sólo en cuanto a los elementos infinitesimales utilizados, sino que también se redescubre el procedimiento inventivo" (ibíd., pp.38-39)

Este tipo de doble razonamiento por reducción al absurdo evita de modo ingenioso cualquier consideración infinitesimal, aún cuando las acciones subyacentes constituyen una investigación infinitesimal. Es decir, no se puede negar la presencia de la idea del límite, aunque nunca se hace explícito, puesto que una definición rigurosa hubiera constituido una teoría general de los números irracionales. En todos los casos tratados, los griegos demuestran que la diferencia de las áreas es tan pequeña como se quiera (en términos modernos que el área es el límite de las magnitudes que aparecen), pero repiten la misma forma de demostración en cada caso particular ignorando la analogía de todos estos problemas. No pudieron extraer ningún método general.

Aunque Arquímedes se podría considerar como el fundador del Cálculo infinitesimal hay que tener en cuenta que soslaya el paso al infinito, no generaliza sino que repite el proceso para cada caso concreto sin clasificar problemas y, además, no encuentra ninguna relación entre las cuadraturas y las tangentes.

En la tabla 4.1 recogemos las entidades primarias, las facetas, los elementos emocionales y mediacionales más relevantes que consideramos en este momento histórico. Los conflictos semióticos y las rupturas y fronteras epistemológicas nos informan de las dificultades superadas y de las que se deberán superar en las siguientes etapas.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL EN LA CULTURA GRIEGA**
Situaciones	- Estudio la composición de los entes geométricos - Identificación de números y magnitudes - Aporías de Zenón - Medida indirecta de magnitudes, a través de la comparación con otras conocidas (cuadraturas y cubaturas)
Lenguaje	- Geométrico - Aritmético-geometrizado
Procedimientos	- Identificación de números con medidas de magnitudes discretas - Medir, por medio de la comparación de magnitudes geométricas - Cambios entre lenguaje geométrico y numérico no simbolizado - Acciones (de carácter preinfinitesimal) propias de la demostración por la doble reducción al absurdo -Método mecánico
Definiciones	- Conceptos implícitos del continuo, el infinito matemático y el límite - El número se asocia al punto geométrico, figuras a conjunto de puntos... - Magnitudes inconmensurables - Elemento tan pequeño como se quiera - La medida de magnitudes a través de la comparación con otra conocidas
Proposiciones	- Dado cualquier número siempre hay una longitud que le corresponde - Si se acepta el infinito potencial, se llega a una contradicción (Aquiles y la tortuga, Zenón) - Si se suponen el tiempo y el espacio están compuestos por indivisibles, entonces se llega a una contradicción (paradoja de la flecha, Zenón) - Propiedades de las razones - Axioma de Arquímedes - Método de exhausción
Argumentaciones	- Por pequeña que se tome la unidad de medida, existen magnitudes a las que no les corresponde un número entero de unidades - La reducción al absurdo de las aporías - La doble reducción al absurdo del método de exhausción que evita cualquier consideración a lo infinitesimal - Método mecánico
Facetas	- Uso del extensivo en la formulación y resolución de problemas, en

	detrimento del intensivo, ya que no hay generalización ni clasificación de problemas
Elementos emocionales	- Desconcierto ante la constatación de la existencia de magnitudes de carácter inconmensurable - Eludir el infinito actual utilizando el infinito potencial
Elementos mediacionales	- Gnomon, regla y compás - Elementos físicos correspondientes al método mecánico de descubrimiento de Arquímedes
Conflictos semióticos	- No toda magnitud puede medirse por medio de un número entero de unidades por pequeña que ésta se tome - Aporías de Zenon - Horror al infinito
Rupturas epistemológicas	- A partir de la constatación de la existencia de magnitudes de carácter inconmensurable y para eludir el infinito, se crean los métodos de exhausción y teoría de las razones entre magnitudes, con la doble reducción al absurdo
Fronteras epistemológicas	- Delimitan su saber matemático, al no utilizar los intensivos en la generalización y clasificación de problemas - No utilización de procesos infinitos

Tabla 4.1 Significado Institucional en la Cultura Griega.

4.1.2. Significado institucional de la integral definida en la Edad Media

En la Edad Media hay una superación del "horror al infinito" de la época griega, por lo que la Escolástica de la baja Edad Media realiza con frecuencia especulaciones sobre el infinito (se estudian y utilizan por primera vez series infinitas). Sin embargo, el cambio más importante viene dado por el conjunto de situaciones objeto de estudio. Tomando como punto de partida la "Física" de Aristóteles y la "Estática" de Arquímedes, abordan el estudio del cambio y el movimiento, que se convierte en el tópico de la especulación filosófica medieval, lo que supone un gran desarrollo de la Cinemática. Destacan durante el siglo XIV las Universidades de Oxford y París Por ejemplo los filósofos del Colegio de Merton estudian la tasa uniforme de cambio. Estas dos escuelas consideran las Matemáticas como instrumento privilegiado del conocimiento de fenómenos naturales. Cuantificaron ciertas cualidades o fenómenos como densidad, calor, velocidad... ayudándose de la idea de que los grados de intensidad podían variar continuamente dentro de ciertos límites.

Bradwardine (1290-1349) se opuso a toda forma de atomismo, estudió la naturaleza del continuo y afirmó que las magnitudes continuas están constituidas por un número infinito de indivisibles, que no son átomos, sino continuos de la misma especie. "En torno al continuo, Brawardine distingue el continuo fijo (*continuum permanens*), que se manifiesta en las líneas, superficies y volúmenes, del continuo progresivo (*continuum succesivum*) que acontece en el tiempo y el movimiento" (González, 1992, p.41) Además, Swineshead o Calculator (siglo XIV) estudió la naturaleza del infinito y discutió la distinción aristotélica del infinito actual y potencial.

La filosofía escolástica se interesó ampliamente por los fenómenos naturales de intensidad medible, utilizando para ello el concepto de "forma". Se estudian principalmente las variaciones de las intensidades a través del tiempo, que es el prototipo del continuo. En esta línea Oresme (1323-1382) realiza el mayor progreso teórico de la Edad Media al estudiar la variabilidad cuantitativa desde un punto de vista mucho más geométrico que sus contemporáneos. La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de las figuras geométricas.

Oresme estudia ampliamente lo que él llama la *latitud de las formas* o *intensidad de las cualidades*, una representación gráfica que le ayuda a explicar la variación. En ella que toma como *longitud* (abscisa) el tiempo y a cada punto le asigna un segmento, *latitud* (ordenada), cuya extensión es la intensidad o amplitud del fenómeno. En esta representación gráfica, la variación de un fenómeno a lo largo del tiempo viene representada por la figura total, es decir, el área y que llama "figura". Como afirma: *cada cosa medible, a excepción de los números, es imaginada como una cantidad continua*.

Oresme estudia diversas formas, principalmente asociadas a fenómenos de movimiento. En particular, al estudiar la *figura* de la velocidad respecto del tiempo en un movimiento uniformemente acelerado, asocia el área con la distancia recorrida aunque no da una justificación de este hecho.

Sin embargo, Oresme no se interesa en el estudio analítico de la curva sino que centra sus estudios en la variación de las *formas* (curvas) y de las *figuras* (áreas), lo que hoy consideramos aspectos diferenciales e integrales, obteniendo diversos resultados de índole infinitesimal.

Por último, señalar que se estudian los métodos de Arquímedes, aunque se separan de éste y buscan métodos que mejoren el de exhausción, al que consideran demasiado pesado. Además se utiliza el infinito de forma intuitiva lo que facilitará el camino al desarrollo de las técnicas infinitesimales del siglo XVII. Podemos afirmar que las especulaciones escolásticas sobre el infinito, el infinitamente pequeño y la naturaleza del continuo revivieron el interés por el problema del infinito y preparan la aceptación de las consideraciones infinitesimales al siglo XVII.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL EN LA EDAD MEDIA**
Situaciones	- Estudio incipiente de series infinitas - Estudio del cambio y el movimiento - Cuantificación de cualidades o fenómenos de intensidad medible (densidad, calor, velocidad...) - Estudio de la naturaleza del continuo

	- Estudio de la distinción aristotélica del infinito actual y potencial
Lenguaje	- Geométrico (escuela de París) - Aritmético (escuela de Oxford)
Procedimientos	- Asignación de un segmento que representa la intensidad a cada punto que representa el tiempo. Construcción de la *figura* - Cambios de representaciones vernáculas de conceptos físicos a los números y figuras.
Definiciones	- Cualidades como la densidad, calor y velocidad - Tasa uniforme de cambio - Forma y latitud de las formas - Longitud, latitud y figura - Grado de intensidad
Proposiciones	- Principio de Oresme - El área es la distancia recorrida en la figura de la velocidad respecto del tiempo (Oresme)
Argumentaciones	- Métodos intuitivos que buscan mejorar el de exhausción - Uso intuitivo del infinito - Métodos geométricos
Facetas	- En general, uso del extensivo en la formulación de problemas - Utilizan intensivos al considerar el grado de intensidad como explicativo de distintos fenómenos. - Intuyen a las Matemáticas como intensivo en la explicación de problemas de la realidad
Elementos emocionales	- Superación del horror al infinito - Menor interés por el rigor - Intuición
Elementos mediacionales	- Uso de las formas y figuras
Rupturas epistemológicas	-Consideración incipiente de magnitudes continuas compuestas por un número infinito de indivisibles, que son continuos de la misma especie
Fronteras epistemológicas	- Aunque se efectúan representaciones gráficas, no hay un interés por el estudio analítico - La naturaleza del continuo aún es poco clara, basada en la intuición

Tabla 4.2 Significado Institucional en la Edad Media.

4.1.3. Significado institucional de la integral definida en la etapa del uso explícito de los procesos infinitos

En la época del Renacimiento se produce una recuperación de la cultura clásica. Se traducen las principales obras de los clásicos, aunque enriqueciéndolas con la extensión de los resultados y métodos. En este sentido será fundamental la naciente Álgebra Simbólica. Sin embargo, el progreso continuado de las ciencias y las artes, del momento, plantea nuevos problemas geométricos y mecánicos que no pueden ser resueltos por procedimientos antiguos como es el método de exhausción.

En el estudio del movimiento, que había comenzado en la Edad Media, es necesaria la noción de velocidad instantánea (velocidad de un proyectil en un instante de su vuelo) o tangente (dirección de un cuerpo en un punto de su trayectoria) En la observación de la curva que describe un proyectil o el movimiento de los planetas surgen cuestiones relacionadas con máximos y mínimos. Asimismo, en la mecánica celeste es necesaria la rectificación de curvas para calcular la longitud de las trayectorias de los planetas. Por último, al estudiar en óptica el paso de la luz a través de una lente, necesitamos la noción de normal. Todas ellas, son nociones dependientes del Cálculo Infinitesimal. Es decir, tal y como afirma González (1992), podemos asegurar que en el siglo XVII nos encontramos con un grupo de matemáticos que desarrolla lo que hoy llamaríamos Matemática Aplicada al dirigir su actividad creativa a responder necesidades del momento como técnicas de navegación, estudios topográficos y cartográficos, fortificaciones, puertos… e imponiéndole un carácter eminentemente práctico e instrumental. (pp. 256-257)

Por otra parte es importante observar que el método de exhausción no es un método heurístico, esto es, es necesario conocer previamente el resultado que se quiere probar (hay que tener en cuenta que el Método de Arquímedes nos se conocerá hasta 1906) Por todo lo anterior, los matemáticos del momento necesitan desarrollar nuevas herramientas que permitan el avance de las Matemáticas aunque para ello se pierda el rigor. Así, se da un paso fundamental, un cambio de mentalidad, al romper con el rigor dejando paso a la intuición en pos de un método heurístico que permita resolver problemas (ibíd., pp.256-257), aunque ello planteará problemas de fundamentación que tardarán siglos en resolverse siendo la continuidad uno de los problemas más importantes.

En resumen, podemos afirmar que “no es una casualidad que las investigaciones infinitesimales se multiplicaran al comienzo del siglo XVII. Bien al contrario, las técnicas que utilizan los infinitamente pequeños se ponen a punto para resolver los problemas de la vida ordinaria.” (Dahan-Dalmedico y Peiffer, 1986, p.181)

Con Stevin y Valerio se libera al método de exhausción de la doble reducción al absurdo, pasando a calcular un área por la suma de una serie potencialmente infinita de términos. Los métodos de Fermat y Pascal perfeccionarán los métodos de sus predecesores. Fermat encuentra un procedimiento general para “cuadrar por medio de una progresión geométrica” todas las parábolas e hipérbolas salvo una. Progresivamente, los métodos de Arquímedes y en concreto el método de exhausción se va liberando de las trabas iniciales de la doble reducción al absurdo, lo que prepara su utilización como procedimiento infinito. Es en los trabajos de Grégorie de Saint Vicent (1584-1667) que se identifica explícitamente un área con la suma de una infinidad de elementos infinitesimales. (Guichard, 2000, pp.76-79)

Stevin (1548-1620), conocido por sus trabajos en hidrostática, astronomía, navegación, etc., utiliza los métodos de Arquímedes, por ejemplo, para calcular los centros de gravedad de figuras curvilíneas planas. Pero, mientras Arquímedes se detiene en el término n-ésimo para añadir un resto, Stevin considera series infinitas, en el sentido escolástico heredado de Aristóteles del infinito potencial, es decir, que la serie puede ser prolongada hasta que la diferencia entre la figura curvilínea y la rectilínea sea tan pequeña como se quiera. Stevin juzga esta parte de la demostración como suficiente para establecer la validez del teorema y omite –aunque tomando ciertas precauciones– la doble reducción al absurdo. Es decir, el método de exhausción queda considerablemente aligerado.

Valerio (1552-1618), llega más allá al tomar a la doble reducción al absurdo como un teorema general que basta citar, sin necesidad de efectuar la demostración en todos sus detalles.

Kepler (1571-1630), abandona los procedimientos clásicos y recurre a métodos más intuitivos salvando la barrera entre lo rectilíneo y lo curvilíneo, lo finito y lo infinito, lo discreto y lo continuo. En efecto, realiza encubiertamente el paso al límite, identificando una curva con una suma de segmentos infinitamente pequeños, asemeja el círculo a un polígono regular de un número infinito de lados y calcula su área sumando los triángulos infinitesimales de base los lados del polígono y centrado en el centro del círculo. También desarrolla gran cantidad de cubaturas al buscar las proporciones idóneas de los barriles de vino. Sin embargo hay que resaltar que si bien al operar descompone las superficies en una infinidad de elementos infinitesimales de la misma dimensión, a la vez emplea el lenguaje de los indivisibles. No distingue un área infinitesimal de una línea, ni un círculo de un polígono de una infinidad de lados.

Por su parte, Cavalieri (1598-1647) intenta mediante artificios geométricos evitar la rigidez del método de exhausción, consiguiendo, además, un método heurístico de rápido descubrimiento. En esta línea, consideraría que las figuras eran engendradas por el movimiento de una línea. Desgraciadamente en el análisis, en ese momento, sólo se trabaja con cantidades extensivas (no irracionales) con lo que funda su método de los indivisibles considerando una figura plana como un conjunto de líneas y al sólido compuesto de un número indefinido de planos paralelos. En este sentido podemos afirmar que en las metáforas que utiliza sigue la teoría atomista al señalar que una línea está formada por puntos como un collar por perlas, que una superficie por líneas como un tejido por hilos y que un volumen está constituido por planos como un libro por páginas.

Al igual que los griegos Cavalieri compara figuras mediante razones. Así, evita calcular el área de la superficie como suma de todos los indivisibles que lo constituyen, pasando a determinar la relación de las áreas de figuras cuyos indivisibles están en una razón constante. El objetivo de Cavalieri no es componer una superficie con líneas, él no toma posición sobre la composición del continuo. El de los indivisibles es solamente un método que no calcula el área mediante una suma de infinitos indivisibles sino que le permite establecer la relación entre dos áreas cuyos indivisibles están en relación constante (Guichard, 2000, pp.76-79)

Este principio de los indivisibles será fructífero en la búsqueda de resultados. Podemos citar como ejemplo a Galileo el cual, retomando la idea de Oresme, demuestra, utilizando los indivisibles, que el espacio recorrido es el área bajo la curva velocidad-tiempo. También determina la trayectoria de un móvil, asocia la tangente a la trayectoria con la dirección del movimiento y la velocidad con la pendiente de la tangente. Sin embargo, planteó grandes problemas de fundamentación ya que contradice el principio de homogeneidad.

Roberval (1602-1675), contrariamente a Cavalieri, señala que una superficie está compuesta por superficies, de tal modo que la infinidad de líneas representa la infinidad de pequeñas superficies que componen la superficie total. Es decir, está tomando elementos infinitesimales del mismo orden. Los resultados que se obtenían no variaban de los obtenidos por el método de los indivisibles, pero la importancia deriva del hecho de introducir una cantidad arbitrariamente pequeña, es decir, un *infinitamente pequeño homogéneo*.

Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667) concibe una infinidad de figuras rectilíneas que rellenan exhaustivamente la figura curvilínea dada, contrariamente a sus predecesores que aumentaban el número de lados de los polígonos inscritos o circunscritos hasta que la diferencia sea inferior a una cantidad dada. Es probablemente el primero en enunciar explícitamente que una serie infinita define una magnitud, un término (infinito actual). Es en los trabajos de Grégorie de Saint Vicent que se identifica explícitamente un área con la suma de una infinidad de elementos infinitesimales (Guichard, 2000, pp. 76-79)

Además, mientras los antiguos aproximaban las figuras curvilíneas por los polígonos cualesquiera, en esta fase de ruptura los matemáticos comienzan por inscribir sistemáticamente rectángulos.

Por otra parte, al disponer del recurso del álgebra Vieta (1540-1603) inicia una cierta generalización de los problemas según la naturaleza de la integral subyacente. Obtiene resultados equivalentes a la curvatura básica $\int_0^a x^n dx$ para n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 9.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL ETAPA DEL USO DE LOS PROCESOS INFINITOS**
Situaciones	- Problemas geométricos relacionados con el desarrollo de las ciencias y las artes. -Estudio del movimiento, mecánica celeste, óptica, técnicas de navegación, etc. - Cálculo de centros de gravedad (Stevin, Roberval) - Cálculo del área del círculo (Kepler) -Cuadraturas y cálculo de volúmenes (Kepler, Cavalieri, Roberval, Grégoire)
Lenguaje	- Algebraico

	- Los indivisibles - Los infinitamente pequeños
Procedimientos	- Descomponer la superficie en una infinidad de elementos infinitesimales de distinta o igual dimensión (Cavalieri, Kepler, Roberval) - Superficie engendrada por el movimiento de una línea (Cavalieri) - Comparación de magnitudes - Rellenar exhaustivamente una figura curvilínea con una infinidad de figuras rectilíneas.
Definiciones	- Series infinitas - Una serie infinita define una magnitud, es decir, un término (Saint-Vicent)
Proposiciones	- Que la serie se prolonga hasta que la diferencia entre la figura curvilínea y la rectilínea sea tan pequeña como se quiera (Stevin) - Método de exhausción en el que se omite la doble reducción al absurdo (Stevin) o sólo se cita (Valerio) - El indivisible está formado por términos infinitesimales de orden una unidad menor (Cavalieri) o del mismo orden (Roberval)
Argumentaciones	- Uso del término "tan pequeño como se quiera" - La doble reducción al absurdo, de modo implícito - Uso de métodos intuitivos, alejándose del rigor clásico - Empleo de los indivisibles y de elementos infinitesimales del mismo orden - Inscripción sistemática de rectángulos para las cuadraturas
Facetas	- Incipiente uso de intensivos en los métodos de cálculo
Elementos emocionales	- Búsqueda de nuevos objetos matemáticos conducen a que la intuición sea privilegiada frente al rigor clásico - Búsqueda de elementos que permitan fundamentar los métodos utilizados
Elementos mediacionales	- La naciente álgebra simbólica - Indivisibles e infinitesimales
Conflictos semióticos	- Indivisible, heterogeneidad de las dimensiones
Rupturas epistemológicas	- Consideración de series infinitas, superando la finitud de añadir un resto al término n-ésimo de Arquímedes, usando el "tan pequeño como se quiera" - Al considerar indivisibles homogéneos (Roberval), se superan los heterogéneos - Admitir el infinito actual (Saint-Vicent)
Fronteras epistemológicas	- Ausencia del uso generalizado del álgebra en el desarrollo de los cálculos - Falta el concepto de límite

Tabla 4.3 Significado Institucional en la Etapa del uso de los Procesos Infinitos.

4.1.4. Significado institucional de la integral definida en la etapa de generalización de los métodos infinitesimales

Vieta había emprendido la recuperación del análisis geométrico de los griegos pero aplicándole la nueva Álgebra, en la creencia de que el carácter algorítmico de ésta podría mejorar la capacidad heurística de aquél y preparando así el camino hacia la Geometría Analítica que desarrollaron Fermat y Descartes. De hecho "*la gran visión que tuvieron Descartes y Fermat y fue la de apreciar que la aplicación del Álgebra como instrumento algorítmico por excelencia incrementaría aún más la capacidad heurística del Análisis*"

(González, 1992, p. 57) En particular, la geometría analítica de Fermat será la base de sus magníficas contribuciones al Cálculo infinitesimal, tanto porque aplica sus métodos a las nuevas curvas que él construye como porque esta geometría es un instrumento algorítmico de primer orden.

En principio, fruto de esta aplicación del Álgebra al Cálculo infinitesimal surgen los intentos de aritmetización del método de exhausción de los griegos. En concreto, tomando como base la cuadratura de la espiral de Arquímedes, que se basa en fórmulas obtenidas para la suma de los cuadrados de enteros consecutivos, Fermat y Pascal desarrollan métodos de cuadraturas aritméticas buscando fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros y usando para ello métodos de inducción completa e incompleta. En concreto Fermat utiliza resultados sobre números poligonales y Pascal estudia las propiedades del triángulo aritmético.

Más concretamente, Pascal (1623-1662), reemplaza los argumentos intuitivos de Cavalieri por razonamientos aritméticos sobre las series. El ignorar términos del tipo $n^2/2 + n/6$, frente a $n^3/3$ (que tiene su fundamento en las conversiones que Pascal establece entre el registro geométrico y el numérico y que le hace comparar el indivisible geométrico al cero aritmético), llegará a ser un modo sistemático de proceder en los métodos infinitesimales de la segunda mitad del siglo XVII.

Por su parte, Fermat (1601-1665), utiliza un método *uniforme y constante* que le permite cuadrar, por medio de una progresión geométrica, las parábolas e hipérbolas.

Cuadra la parábola $y^2 = x$, llegando al área. En notación actual el resultado es: $\int_0^x \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}x$

Si bien en la primera mitad del siglo XVII, Cavalieri, Torricelli y Roberval habían establecido por métodos diversos el equivalente al resultado $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, para n racional diferente de –1 (resultado conocido por Arquímedes para n = 1 y 2 y por los árabes para n= ½ y 4) el método de Fermat es más general y contiene los elementos esenciales de la definición de la integral definida para funciones continuas, salvo que no reconoce la operación integral y salvo que hace el cálculo para un área particular. “Fermat no estudia la variación de la cuadratura de una curva respecto a una abscisa variable, luego no aprecia el hecho de que tal cuadratura genera otra curva, que es el germen del Cálculo integral, como muestra el trabajo de Newton con su estudio de la razón de cambio de esta nueva curva” (González, 1992, p.272) Además “él no piensa explícitamente en términos de límites aun cuando la suma de las áreas de una infinidad de rectángulos equivaldría a un paso al límite”

(Dahan-Dalmedico y Peiffer, 1986, p. 184) Sus métodos se basan en conceptos algebraicos puramente finitos, derivados de la teoría de las ecuaciones de Vieta.

Precisamente aplicando esta teoría de las ecuaciones Fermat intenta plantear los problemas de cuadratura bajo forma algebraica, lo que dota a sus procedimientos un carácter más general y le permite desarrollar el lado algorítmico del análisis infinitesimal. Fue el primero en considerar infinitamente pequeños aritméticos y no geométricos y, en lugar de hacerlos tender a cero, los hizo cero directamente (adegalisation, adigualdad).

Descartes fue crítico con el uso excesivamente libre que Fermat hacía de los infinitesimales, lo que estimuló a éste a justificar y extender su método. Establecer el principio general de equivalencia de los dos infinitamente pequeños, elemento de arco y elemento de la tangente, le permitió trazar la tangente a numerosas curvas, tanto algebraicas como trascendentes, caso de la cicloide.

En Inglaterra, donde el uso de las series infinitas estaba muy extendido, la influencia de Fermat y Descartes fue notable. Esto originó una fuerte tendencia a la aritmetización, que desarrollaron fundamentalmente Wallis (1616-1703) y en James Gregory (1638-1675)

Admitiendo un abuso del lenguaje, puede considerarse que Wallis, al efectuar la cuadratura de $y=x^k$, construye una integral definida. Sin embargo, dadas las limitaciones ontológicas y de generalización, solamente podemos hablar de “integral” en el seno de un contexto pre-infinitesimal. Wallis fue parco en rigor, mediante inducción incompleta y basándose en lo métodos algebraicos introducidos y los avances en métodos de cálculo numérico realizados por Napier y Briggs con relación a desarrollos logarítmicos, obtiene resultados sobre series numéricas, que le permitirán sustituir los indivisibles geométricos por aritméticos. El tratamiento que hace Wallis de la integral se apoya en la idea de altura promedio, es decir, la integral se interpreta como “un promedio aritmético”.

Aunque J. Gregory puso de manifiesto la relación entre el problema de cuadratura y el de las tangentes, su obra fue muy poco difundida.

Como reacción a esta tendencia aritmética de Wallis y a los métodos algebraicos de la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, Barrow (1630-1677), muy preocupado por las cuestiones filosóficas que afectaban a las Matemáticas del momento, a la vez que era un gran conocedor de la matemática griega, reivindica una vuelta al punto de vista geométrico y al rigor euclidiano. Esto le obliga a trabajar en un lenguaje poco claro y con frecuencia muy confuso, ocultando, de esta manera, el verdadero valor de sus resultados. “*Se puede aventurar que fue la forma geométrica de trabajar lo que le impidió a Barrow, a pesar de sus magníficos resultados de anticipación, desarrollar el enfoque algorítmico que es el ingrediente esencial de Cálculo, pues su obra padece de una total limitación operacional*” (González, 1992, p.204). En la línea de la tradición escolástica la variable tiempo jugará un papel fundamental en sus especulaciones sobre el continuo aunque adopta diferentes puntos de vista tanto infinitesimales y como atomísticos.

Utilizando el triángulo característico desarrolla un método de trazado de tangentes más general que el de Fermat, con métodos parecidos a los actuales (Dahan-Dalmedico y Peiffer, 1986, pp. 187-188)

A Barrow se le considera como el primero en reconocer claramente que el problema de las tangentes y el de las cuadraturas son inversos. Esto permite calcular integrales (límites de sumas) buscando primitiva, es decir, invirtiendo los problemas de derivación. Construye para una función $f(x)$ de la que conoce en cada punto su tangente (derivada) una función $Y = \int_0^x f$ que es la suma. Desde las definidas construye la indefinida como una suma = acumulación. Sin embargo, no realiza el camino inverso, esto es, no construye definidas a partir de las indefinidas quizás porque al no disponer de un método general para la obtención de derivas y tangentes, no vio la importancia de este camino inverso. La equivalencia de este teorema se encuentra en Barrow, aunque su pesado y confuso desarrollo geométrico le convierte en totalmente inoperante. A pesar de todo, todas estas múltiples anticipaciones a la noción de límite permitieron, en todo caso, acumular numerosos resultados del cálculo integral y diferencial.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL ETAPA DE GENERALIZACIÓN DE LOS MÉTODOS INFINITESIMALES**
Situaciones	- Cuadrar por medio de progresiones geométricas parábolas y hipérbolas - Trazado de la tangente a numerosas curvas tanto algebraicas como trascendentes (cicliode) (Fermat) - Cuadratura de $y=x^k$ (Wallis) - Trazado de tangentes a curvas mediante el triángulo característico (Barrow) - Cálculo de integrales indefinidas a partir de las definidas
Lenguaje	- Uso del lenguaje algebraico para expresar curvas y sus cuadraturas. - Lenguaje aritmético. -Lenguaje geométrico euclídeo
Procedimientos	-Procedimientos basados en el uso de las progresiones geométricas - Desarrollos numérico en la obtención de la “integral” de Wallis - Trazado de tangentes (Barrow) - Procedimientos parecidos a los actuales en el trazado de tangentes usando el triángulo característico
Definiciones	- Definición de sumas infinitas para funciones continuas (Fermat) - Altura promedio (Wallis) - El triángulo característico - La integral indefinida como una suma = acumulación a partir de la definida (Barrow)
Proposiciones	- Principio general de equivalencia de los infinitamente pequeños (Fermat) - Método de adigualdad (Fermat)

	- Es posible ignorar términos del tipo $n^2/2$ y $n/6$ frente a $n^3/3$ -Uso del método inductivo en la integral de Wallis -Los problemas de tangentes y cuadraturas son inversos uno de otro
Argumentaciones	- Hacer tender a cero directamente los infinitamente pequeños aritméticos o hacer directamente cero (Fermat) - Uso del rigor geométrico euclideano (Barrow) - Intuiciones basadas en el método inductivo
Facetas	- Desarrollo de la faceta intensiva, por medio del uso del Álgebra en los métodos infinitesimales - Uso de la intensividad en la suma de series infinitas (Fermat)
Elementos emocionales	-Crítica a los elementos intutitivos lo que conduce a un rigor clásico basado en confusos desarrollos geométricos que hacen inoperantes ideas importantes del Cálculo (Barrow)
Elementos mediacionales	-Utilización de la nueva álgebra simbólica y de métodos más aritméticos - Vuelta a los métodos geométricos clásicos
Conflictos semióticos	- Falta de rigor o justificación formal de los infinitesimales (Barrow)
Rupturas epistemológicas	-Uso de métodos algebraicos que permiten generalizar los problemas - Consideración de infinitamente pequeños aritméticos y no geométricos - Intento de sustitución de los métodos intutitivos algebraicos por los geométricos clásicos
Fronteras epistemológicas	- No se dispone de un lenguaje generalizado para el Cálculo - No hay reconocimiento explícito de relaciones entre problemas, lo que conduce a que estos queden aparentemente aislados - Lenguaje geométrico complicado que impide ver la trascendencia de los resultados obtenidos - Falta el concepto de límite

Tabla 4.4 Significado Institucional en la Etapa Generalización De Los Métodos Infinitesimales.

4.1.5. Significado institucional de integral como inversa de la derivada

La amalgama de problemas aislados relativos a las cuadraturas y tangentes son unificados y controlados por Newton y Leibniz. En la medida en que la generalidad de sus métodos y de sus técnicas hacen del análisis infinitesimal un campo autónomo, independiente de la geometría, es como pueden considerarse a ambos los fundadores del cálculo diferencial e integral.

Influenciado por las obras de Descartes, Fermat, Galileo, Wallis y Barrow, Newton (1643-1727) muestra tres significados distintos del cálculo infinitesimal, como se señala en Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986). En el primero, *significado infinitesimal*, opera con cantidades infinitamente pequeñas que denomina *momentos* y que son equivalentes a los crecimientos infinitesimales de Fermat. Utiliza igualmente momentos de área de los que hace depender su método de cuadratura. Considera el crecimiento *oy* de área cuando la abscisa crece una cantidad infinitesimal que se denota por *o*. Calcula la tasa de variación instantánea del área en el punto de abscisa *x*, es decir la derivada, y constata que es igual a la ordenada *y* del punto de abscisa *x* de la curva. De esta forma, si el área se expresa por: $z = \frac{n}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$, su tasa de cambio, su derivada, será: $y = x^{\frac{m}{n}}$. Inversamente, Newton calcula el área bajo la curva cuya ecuación $y=f(x)$ está dada, invirtiendo las operaciones de derivación, es decir, calculando la integral indefinida de *f*, esto es, a partir de $\int f(x)dx$ calcula *f*(*x*). "Newton vio claramente que los problemas de cuadraturas tenían que enfocarse de esta manera inversa: si se calcula la *y* para cada función algebraica *z*, se podrían determinar todos los tipos de curvas (*x*,*y*) que se pueden cuadrar. Y de hecho, determinó muchas de tales cuadrables, coleccionándolas en largas listas que constituyen así nada menos que las primeras tablas de integrales" (Grattan-Guinness, 1980, pp.79-80) Newton no adiciona más superficies infinitesimales como sus predecesores, sino que toma la derivada como centro de su desarrollo. Desde 1669, la relación entre las cuadraturas y las derivadas se establece claramente. Por tanto, privilegia la integral indefinida en detrimento de la definida.

El segundo de los significados, conocido como *método de las fluxiones*, lo introduce en su obra *Métodos de las fluxiones y de las series infinitas*. Considera las cantidades matemáticas como engendradas por un aumento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento, que, por tanto fluyen o varían y a las que llamará *fluentes*. Así mismo, imagina las velocidades de los movimientos que engendran estas que llamará *fluxiones*. Como indica Grattan-Guinness (1980) "los términos «fluentes» y «fluxiones» indican la concepción por parte de Newton de las cantidades variables en su geometría analítica (…) *cantidades que varían respecto con respecto al tiempo* "(p. 80) Para fundamentar su método, se inspira en el modelo de la mecánica teórica e introduce el tiempo como variable universal de toda correspondencia funcional, probablemente por la influencia de Barrow, ya que como afirma González (1992) "Como además el influjo de Barrow sobre Newton fue decisivo, probablemente contribuyó a que éste evitara la noción aritmética de límite y se guiara en su gestación del Cálculo por la noción de variación continua de cantidades en el movimiento y en la Geometría" (p.202) No se interesa por el tiempo como tal, sino por su discurrir uniforme. Las fluentes las nombra por x y las fluxiones por $\dot{x}$. Si o es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, $\dot{x}o$ y $\dot{y}\,o$ serán los crecimientos infinitamente pequeños de x y de y entonces sustituye en la ecuación de la curva la y por $y+\dot{y}$o y x por $x+\dot{x}o$. Para encontrar la relación entre $\dot{x}$ e $\dot{y}$ que es lo que realmente le interesa realiza diversas operaciones y finalmente elimina todos los términos que contienen a o. La introducción de la noción de fluxión modifica muy poco el significado infinitesimal anterior. Mediante esta idea de considerar cantidades que se mueven en el tiempo pensaba Newton que podría resolver las dificultades de fundamentación que planteaba el uso de incrementos "pequeños" de las respectivas variables, los cuales son tan pequeños que los podemos despreciar, y sin embargo obviamente no son nulos, ya que necesitamos poder dividir por ellos.

En su obra Quadratura curvarum, Newton trata de eliminar toda huella de los infinitamente pequeños, primeramente no considerando más que sus relaciones, después concibiendo lo que fue su tercer método, el *método de las primeras y últimas razones*. Procede como anteriormente con las notaciones, pero en lugar de obviar sin una justificación aceptable los términos que contienen *o*, forma la relación de la variación de *x* con respecto a *y*, después deja a *o* desvanecerse (eliminarse) en la relación. El resultado −la relación de *1* a nx^{n-1}, por ejemplo − es lo que Newton llamó la *última razón de las variaciones evanescentes*; plantea igualmente la relación de la primera razón de las variaciones nacientes, y es la relación de las fluxiones. “Es por medio de estas concepciones que llega a estar muy cerca de lo que sería una fundamentación del cálculo basada en el concepto de límite” (Grattan-Guinness, 1980, p. 81)

Las diferentes etapas del procedimiento corresponden a la formación de la derivada:

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El pasaje siguiente, extraído de los Principia, clarifica la aproximación entre el método newtoniano y el significado actual de la derivada: *Las últimas razones en las cuales desaparecen las cantidades no son realmente las razones de las últimas cantidades, sino los límites hacia los que las razones de cantidades, decreciendo sin límite, se aproximan siempre; y hacia las que se pueden aproximar tanto como toda diferencia dada, pero no pueden adelantarlas o alcanzarlas antes de que las cantidades hayan disminuido indefinidamente*.

“Mediante el uso de estos algoritmos y de otras finuras (…), consiguió Newton resolver lo que él mismo formulaba como uno de los dos problemas fundamentales del cálculo infinitesimal: dadas las fluentes y sus relaciones, hallar las fluxiones correspondientes.

El otro problema es el recíproco de éste: dada la relación entre las fluxiones, hallar la relación entre las fluentes. Formulado en terminología moderna esto significa: dada una ecuación diferencial, hallar su solución. Este segundo problema es, desde luego, mucho más difícil que el primero; Newton hizo mucho más que formular este problema; sus tablas de integrales, que ya hemos mencionado, constituyen un primer intento de solución, y también estudió varias ecuaciones diferenciales particulares(o, mejor, ecuaciones fluxionales)” (Grattan-Guinness, 1980, p. 82)

Tanto el método de las fluxiones como el de las primeras y últimas razones son insuficientes para poner al cálculo diferencial sobre bases rigurosas. Éste es siempre tributario de otro método, ya sea el de los infinitamente pequeños, ya sea el de los límites.

Newton innova haciendo del uso de las series infinitas un método general y una técnica de integración. Desarrolla las funciones en series infinitas e integra término a término, extendiendo la validez de la integración término a término a las sumas infinitas lo cual sólo se había visto para las sumas finitas.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL COMO INVERSA DE LA DERIVADA**
Situaciones	-Cuadraturas y tangentes
Lenguaje	-Uso del lenguaje algebraico independizando el análisis de la geometría
Procedimientos	-Considera un crecimiento infinitesimal y opera con cantidades infinitamente pequeñas -Cálculo de la tasa de variación instantánea -Cálculo del área bajo la curva de ecuación $y=f(x)$, invirtiendo las operaciones de derivación, integral indefinida. -Estudio de la relación de la variación de x con respecto a y, dejando el incremento infinitamente pequeño desvanecerse
Definiciones	-Significado infinitesimal, momentos que son cantidades infinitamente pequeñas - Las cantidades matemáticas como engendradas por un aumento continuo, siendo el tiempo la variable universal de toda correspondencia funcional -Fluxiones-fluentes -Primera y últimas razones
Proposiciones	- La ordenada y del punto de abscisa x de la curva es la tasa de variación instantánea del área en el punto x. -La derivada es el centro de los desarrollos. -Las cuadraturas y las derivadas están relacionadas - Tabla de integrales - El tiempo es la variable universal de toda correspondencia funcional.
Argumentaciones	-Aplicación del modelo de la mecánica teórica, considerando el tiempo la variable universal
Facetas	- Intensiva: generalización de problemas
Elementos emocionales	-Intento de eliminar toda huella de los infinitamente pequeños.
Elementos mediacionales	- Utilización del álgebra - El tiempo: variable universal de toda correspondencia funcional - Fluentes-fluxiones - Infinitamente pequeños - Método de los límites: primeras y últimas razones
Conflictos semióticos	-No están definidos los infinitamente pequeños - Falta una definición de límite rigurosa.
Rupturas epistemológicas	-Utilización de las relaciones entre cantidades en lugar de los infinitamente pequeños - El tiempo y su variar continuo permiten el tratar cuestiones infinitesimales -Integración y derivación se establecen como procesos inversos
Fronteras epistemológicas	- Falta de fundamentación adecuada -Noción de límite sin establecer rigurosamente

Tabla 4.5 Significado institucional como inversa de la derivada.

4.1.6. Significado institucional de la integral definida como suma de elementos infinitesimales

Como se afirma en Guichard (2000) en la época de Leibniz (1646-1716) las preocupaciones metafísicas, que surgen de forma paralela a los trabajos en Física sobre el movimiento, centran la reflexión sobre la sustancia. El cuerpo, la materia, el movimiento no se puede comprender sin ella. El continuo se concibe como una evolución de variaciones insensibles sin rupturas, las percepciones no conscientes o insensibles son pequeñas percepciones o percepciones infinitamente pequeñas, infinitesimales (p. 108) Para Leibniz el primer elemento constituyente de todo es la *monada*, elemento que compone todas las cosas, pero no es un átomo físico o material sino un punto metafísico (Ibíd., p. 112) Las pequeñas percepciones o percepciones infinitamente pequeñas son manifestaciones cualitativas de la monada cuya expresión matemática será el concepto de diferencial: *dx*, instrumento del «cálculo del infinito». Esta concepción metafísica del infinito junto a la eficacia operatoria bastarán a Leibniz para fundamentar y justificar dicho concepto que no será para él más que un valioso útil.

Sin embargo, las primeras preocupaciones de Leibniz se centraron en la combinatoria y en su observación de las series de números, lo que le llevó a enunciar que "la suma de las diferencias entre términos consecutivos es igual a la diferencia entre los dos extremos", esto es:

$$\begin{array}{c} A-A+B-B+C-C+D-D+E-E=0 \\ \quad +L \quad +M \quad +N \quad +P \\ \text{por lo que } L+M+N+P=E-A \end{array}$$

Pero va más allá al observar que se anulan las diferencias segundas de naturales, que se anulan las diferencias terceras de los cuadrados obtenidos a partir de números naturales, las diferencias cuartas de cubos y así sucesivamente… "(Guichard, 2000, pp.126-127)

Las cuestiones en las que Leibniz centra su atención en un principio se pueden resumir en las dos siguientes:

i) El estudio de las propiedades combinatorias, en la creencia de que el verdadero arte combinatorio proporciona un medio para calcular todas las posibles combinaciones mostrando relaciones o propiedades no sospechadas.

ii) Crear un buen sistema de símbolos que se puedan utilizar sin riesgo de errores de denominación o comprensión y que en la propia notación muestre las relaciones que simbolizan (ibíd., p.128)

Así pues, pretende crear un buen sistema de símbolos que permita la operatividad a la vez que obtener nuevas propiedades que de otro modo serían difíciles de vislumbrar.

En estos contextos se introduce en la geometría, estudiando los problemas de cuadraturas, principalmente a través de los trabajos de Cavalieri aunque sin considerar inicialmente el vínculo entre la combinatoria y la geometría.

Para establecer el enlace con el cálculo infinitesimal, interpreta la sucesión de números como un conjunto de valores de una función y la diferencia entre dos números como la diferencia entre dos valores cercanos de la función; diferencia que el denota por *l*. Abrevia la palabra latina omnia, utilizando *omn.* para denotar la suma. Por analogía con el cálculo de diferencias y el cálculo de sumatorias para las cantidades descritas, el carácter recíproco de ambos símbolos aparece de forma natural, bajo un aspecto muy formal, fuera de toda consideración geométrica. La propiedad anterior se escribe entonces por *omn.* $l = y$. Ahora bien, Leibniz preferirá dy a l y $\int$, una S de suma estilizada, a *omn.* La relación anterior queda $\int dy = y$. Esta notación elegante y cómoda, que se ha conservado hasta hoy, le permite elaborar un método formal para calcular sumas y diferencias de infinitesimales.

Inspirado en la lectura de la obra de Pascal sobre el triángulo característico, observa que la búsqueda de la tangente a la curva depende de las razones de las diferencias entre ordenadas y abscisas cuando llegan a ser infinitamente pequeñas y que la cuadratura depende de la suma de las ordenadas o rectángulos infinitamente finos elevados sobre los intervalos infinitesimales del eje de abscisas. Como problema inverso al de las tangentes identifica el de las cuadraturas.

Relativo al problema de las tangentes Leibniz considera el triángulo característico que estará formado por una parte infinitamente pequeña de la tangente y por los dos lados infinitamente pequeños paralelos a las abscisas y ordenadas. Esto le permitirá asignar un valor a la relación dy/dx, incluso si ambos son arbitrariamente pequeños, al ser proporcional a otro triángulo. De esta manera podrá dar una definición de diferencial dy aunque basada en la subtangente. Además, con respecto al triángulo característico Leibniz comenta: *Parece siempre posible asignar triángulos semejantes a este triángulo característico, aunque inasignables o infinitamente pequeños...* Esta frase pone en evidencia la diferencia esencial entre Newton y Leibniz. En el método de las razones de Newton, cuando el tiempo fluye, el triángulo desaparece, se guarda una huella finita de un triángulo finito fijo. El punto de vista de Leibniz es muy diferente: admite infinitamente pequeños. El triángulo característico es inasignable o infinitamente pequeño -en 1680, la expresión inasignable la reemplaza por la del infinitamente pequeño: ahora dx y dy se toman infinitamente pequeños, los dos puntos de la curva deben considerarse como que la distancia de uno a otro es inferior a toda cantidad dada-. Con esta frase Leibniz rompe con la Geometría euclídea, el paso decisivo está franqueado; no habrá más recursos al razonamiento de los griegos. Los infinitamente pequeños tienen un estatus actual. Los infinitamente pequeños se prestan a razonamientos geométricos, pueden compararse con otros triángulos, por semejanza. Son *actuales* que intervienen de manera explícita en los razonamientos

Leibniz llamará dy al crecimiento momentáneo de y. Identifica un arco de curva con un lado de un polígono de una infinidad de lados. Para obtener el área bajo una curva, suma las áreas de los rectángulos, ya que: "se pueden ignorar los triángulos puesto que son infinitamente pequeños y, por tanto, represento en mi cálculo el área por $\int ydx$."

Creará una auténtica álgebra de infinitamente pequeños al obtener reglas de cálculo y definiendo su cálculo como *un tipo nuevo de notación*. Todo ello le permitirá trabajar con ellos y utilizarlos en múltiples problemas. Adquieren un gran auge debido a su simplicidad, su notación elegante y su formalismo, pero también por la fecundidad del mismo, en particular en el estudio de fenómenos físicos y mecánicos, fecundidad reconocible en el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas: ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones, geometría diferencial" (Guichard, 2000, p.148). Con esto lleva a cabo la algebraización de la geometría comenzada por Vieta y Descartes.

Leibniz insiste en el carácter general del Algoritmo del Cálculo, que hace que nada, podría decirse, se le resista y él prosigue poniendo en evidencia su potencia operatoria que hace que cada método conocido hasta ahora no le iguale, y es la aplicación a las curvas trascendentes, que no se puede reducir a ningún cálculo algebraico lo que constituye, aquí también, su principal argumento. (ibíd., p.138)

La importancia del cálculo consiste en esta relación de diferencias infinitesimales que pueden siempre ser determinadas a partir de la ecuación de la curva, y por la aplicación de las reglas de diferenciación, es decir, por un procedimiento algorítmico (ibíd., p.140).

El cálculo de diferenciales es la operación fundamental del cálculo de Leibniz. La sumatoria es la operación inversa y, a la vez, se puede, por simple lectura, deducir una tabla de integrales de una tabla de diferenciales. Piensa las áreas y los volúmenes como sumas invirtiendo las operaciones de derivación. Contrariamente a Newton, quien considera la integral indefinida y calcula las áreas y los volúmenes a partir de su tasa de variación, Leibniz introduce la integral definida, interpretando las áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros, respectivamente. Estos dos significados de la integral son, por otra parte, los que se conservan en el cálculo integral elemental.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL COMO SUMA DE ELEMENTOS INFINITESIMALES**
Situaciones	- La cuadratura como suma de ordenadas o rectángulos infinitamente finos, elevados sobre intervalos infinitesimales del eje de abscisas. - La cuadratura como problema inverso de las tangentes. -Creación un buen sistema de símbolos que permita la operatividad y

	obtener nuevas propiedades
Lenguaje	- Geométrico, algebraico y numérico - La mónada primer elemento constituyente de todo: *dx*. - Diferenciales
Procedimientos	- Uso de la sumatoria como operación inversa del cálculo de diferenciales. - La igualdad $\int dy = y$ permitió elaborar un método formal para el cálculo la suma y diferencia de infinitésimos. - Operaciones con infinitésimos - Interpretar áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros
Definiciones	-Definición del triángulo característico. - Definición de los infinitamente pequeños. - Definición de *dy* - La búsqueda de la tangente a la curva depende de las razones de las diferencias entre ordenadas y abscisas cuando llegan a ser infinitamente pequeñas y la cuadratura depende de la suma de las ordenadas o rectángulos infinitamente finos elevados sobre los intervalos infinitesimales del eje de abscisas
Proposiciones	- La igualdad $\int dy = y$ - Si *dx* y *dy* se toman infinitamente pequeños, los dos puntos de la curva, debe considerarse como que la distancia de uno a otro es inferior a toda cantidad dada. - Para obtener el área encerrada por una curva, se pueden sumar las áreas de los rectángulos, puesto que se pueden ignorar los triángulos ya que son infinitamente pequeños. - Tabla de integrales
Argumentaciones	- La mónada elemento - Se realizan por medio de los infinitésimos y los algoritmos de cálculo. - Las reglas de cálculo dan validez a los resultados obtenidos
Facetas	- Intensiva: generalización de problemas
Elementos emocionales	- Intención de crear un buen sistema de símbolos que permita la operatividad a la vez que obtener nuevas propiedades que de otro modo serían difíciles de vislumbrar - Intento de justificarlos infinitamente pequeños a través de la mónada.
Elementos mediacionales	-Utilización del algebra y de la combinatoria - La diferencial: *dx* - Los infinitamente pequeños como elementos de cálculo a la vez que heurísticos. - Álgebra de los infinitamente pequeños. - Suma y resta como operaciones inversas que dan lugar a la diferenciación e integración como inversas - Triángulo característico. -Rectángulos para calcular áreas.
Conflictos semióticos	- Falta una definición de límite rigurosa.
Rupturas epistemológicas	- Introduce la integral definida, interpretando las áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros. - Convierte a los infinitamente pequeños en *actuales* y los hace intervenir de manera explícita en los razonamientos. - Los resultados no se expresan sólo de modo geométrico, sino que también están dotados de un simbolismo formal. - Invención de algoritmo que dio paso a un gran desarrollo del Cálculo. -Integración y derivación se establecen como procesos inversos
Fronteras epistemológicas	- Falta de fundamentación adecuada -Noción de límite sin establecer rigurosamente

Tabla 4.6 Significado institucional como suma de elementos infinitesimales.

4.1.7. Significado institucional de la integral definida como límite de una suma

Debido a la naturaleza, aún poco clara de la integral definida, matemáticos como Lagrange intentan desarrollar una matemática sin utilizar los infinitésimos. Además, como afirma De Lorenzo (1977) en esta época el análisis se encontraba muy limitado, enfocado a meros desarrollos algorítmicos en función de la mecánica celeste o problemas físicos. Por otra parte, los matemáticos de la época se ven obligados a enseñar debido a la importancia que adquieren, después de la Revolución francesa, las Universidades como es el caso de la Politécnica de París, a la vez empiezan a aparecer revistas dedicadas a la matemática. Estos elementos obligan a fundamentar la matemática. (p.39)

Todo esto conduce a un cambio de mentalidad en el hacer matemático del siglo XIX, se produce una inversión. La matemática ha alcanzado unos límites que no le permiten resolver algunos problemas nuevos, sin poder explicar los motivos. La inversión consistirá en cuestionar los propios fundamentos buscando afrontar los mismos problemas desde una perspectiva más general y que permita explicar los motivos de estas limitaciones a la vez que resolver los problemas surgidos.

El principal artífice de este proceso de inversión en el análisis es Cauchy que, como se señala en Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986), fue el principal artífice de la introducción del rigor en el cálculo infinitesimal, al lograr superar y eludir los aspectos de tipo metafísico. Cuestiona la noción de continuidad y hasta la misma noción de función, que eran conceptos aceptados hasta el momento de forma intuitiva. Observa que conceptos fundamentales como la derivación e integración dependen del paso al límite por lo que se propone clarificarlo, estableciéndolo como la noción central para la construcción de los conceptos del análisis matemático. Intenta además justificar los infinitésimos y los métodos puramente mecánicos que se estaban utilizando en ese momento (de Lorenzo, 1977, p.45)

Utiliza el concepto de límite de D'Alembert que, a su vez, se basa en una modificación del método de Newton de las primeras y últimas razones. Prescinde de la geometría, esto es, rompe definitivamente con el significado geométrico que subyacía en el límite y hace de él una noción aritmética aunque aún imprecisa.

Valiéndose de este concepto y de la varibilidad de la función, clarifica la noción de infinitésimo, que no es más que una sucesión convergente que tiene por límite cero. Cauchy también clarifica la derivada de una función continua, la definirla en términos de los límites, aunque las relaciones entre ambas nociones no se clarificaron hasta Dirichlet con el desarrollo de las funciones en series trigonométricas.

Por último será Weierstrass (1815-1897) quien aritmetiza el análisis con una construcción precisa del número real lo que permite dar una definición estática del concepto de límite. Con ello depura la definición dada por Cauchy pues elimina la subjetividad del término "*se acerca*" que sugiere una idea movimiento y de tiempo. Ha establecido la formulación actual.

En lo que respecta a la integral definida, Cauchy es quien dio la primera definición precisa apoyándose en el significado atribuido a la misma por Leibniz. Retoma el significado de Leibniz sobre la integral definida, el cual tomó las áreas y los volúmenes como suma de rectángulos y cilindros, da una definición precisa de integral definida, centrándose en dar las condiciones de su existencia antes de definir propiedades de la misma. "En la integral de Cauchy (1882) hallamos un contexto nuevo, *función y continuidad*, donde el procedimiento que se deriva consiste en mirar el dominio de la función" (Cordero, 2005, p. 272)

Toma, como punto de partida, una función real, continua en un intervalo cerrado $[x_0,X]$. Los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=X$ del intervalo lo subdividen en n subintervalos. Entonces se forma la suma:

$$S = (x_1-x_0)f(x_0) + (x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+ (X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Demuestra que el límite de S, cuando la longitud del mayor subintervalo tiende a cero, existe si f es continua en el intervalo dado. Además, dicho límite sólo depende de la propia función $f(x)$ y de los extremos del intervalo. Precisamente, a este límite es a lo que Cauchy denominó integral definida.

Cauchy tomó la notación de $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, atribuida a Fourier. La integral se extiende a funciones continuas a trozos o con un número finito de puntos de discontinuidad.

Una de las aplicaciones de la integral definida de Cauchy fue la demostración de la fórmula de Taylor.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL COMO LÍMITE DE UNA SUMA**
Situaciones	-Necesidad de adoptar un lenguaje unificado por medio de una formalización conveniente
Lenguaje	- Algebraico-aritmético - Notación de $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$
Procedimientos	-Definición de límite e infinitésimo -Adopción del límite como eje central del proceso de formalización del análisis - Clarifica la noción de derivada -Definición de integral definida como límite de una suma. -Demostración del fórmula de Taylor -Desarrollo de una teoría de integración más general, disminuyendo las condiciones de continuidad de la función
Definiciones	-Límite e infinitésimo - Noción de derivada -Variabilidad de una función -Integral definida (Cauchy)

Proposiciones	- Si f es una función continua la suma $S = (x_1\text{-}x_0)f(x_0) + \ldots + (X\text{-}x_{n-1})f(x_{n-1})$ para una partición existe cuando la longitud del mayor subintervalo tiende a cero. - El límite no depende más que de la función y de los extremos del intervalo. -Condiciones de existencia de la integral definida.
Argumentaciones	- Basadas en el concepto de límite -Utilización del lenguaje algebraico-aritmético para independizarse del geométrico
Rupturas epistemológicas	- Inversión en el objeto de estudio de la matemática del momento, considerando básica la clarificación de conceptos utilizados. -Se estudia el límite y se establece como noción central en el estudio del análisis -Estudio de las condiciones de integrabilidad
Fronteras epistemológicas	- Restrictivas condiciones de integrabilidad que reduce el campo de las funciones integrables.

Tabla 4.7 Significado institucional como límite de una suma.

4.1.8. Significado institucional de la integral definida formalizada o extendida a funciones discontinuas

Como consecuencia del gran avance que tuvieron las matemáticas en el siglo XIX los matemáticos van a centrar sus esfuerzos, respecto de la integral definida, en encontrar las condiciones mínimas que debe cumplir una función para poder ser integrable sin perder de vista la formalización que, en estos momentos, ya se ha impuesto en la matemática para fundamentarla sobre bases sólidas.

Riemann (1826-1866) va a desarrollar una teoría de la integración más general que la de Cauchy para poder representar por medio de las series de Fourier funciones que tienen una infinidad de discontinuidades. Da un ejemplo de una función acotada con una infinidad numerable de discontinuidades e integrable según su teoría de integración. En su artículo sobre funciones trigonométricas en 1854, generaliza la integral para funciones definidas y acotadas en un intervalo cerrado. Utiliza funciones con discontinuidades aisladas y también aquellas que tienen un conjunto denso de puntos de discontinuidad. “Por el contexto y el procedimiento se da una ruptura en la estructura de la integral” (Cordero, 2005, p. 272)

Según se expresa en Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005) la integral de Riemann constituyó el marco para la entrada de las matemáticas en el mundo de las funciones discontinuas; esto se produjo tras las publicaciones de su memoria (*post mortem*) en 1867 en alemán y en 1873 traducida al francés.

Este hecho propició el desarrollo simultánea aunque independientemente en 1875, de distintos trabajos relacionados con las sumas superiores e inferiores de la partición de un intervalo, (Thomae, Ascoli, Smith, Darboux) para demostrar que la siguiente condición de Riemann era necesaria y suficiente para la unicidad del límite de las sumas integrales: “*Para que una función acotada sea integrable (R) en [a, b], es necesario y suficiente que* *para cada par de números, $\omega > 0, \varepsilon > 0$, exista una partición tal que sea $< \varepsilon$ la suma de subintervalos donde la oscilación supera a ω*"(Rey Pastor y col., 1969, p. 686).

Por su parte, Darboux (1842-1917) que es reconocido en análisis por su trabajo relacionado con la integral de Riemann aunque sus principales contribuciones a las matemáticas se realizaron en geometría diferencial, en su "Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues" desarrolló un estudio exhaustivo de las funciones discontinuas, además, "*demostró las proposiciones básicas de la teoría de funciones e ilustró, con gran claridad de ejemplos, la necesidad de las hipótesis para la validez de los teoremas. Entre otras cuestiones, justificó, para series que convergían uniformemente, la integración término a término y el hecho de que esta propiedad no es válida sin hipótesis adicionales*" (Sánchez y Valdés, 2004, p.177).

Darboux demuestra que una función acotada es integrable sobre $[a,b]$ si y solo si las discontinuidades de $f(x)$ constituyen un conjunto de medida cero. Define las sumas superiores e inferiores: $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ y $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ aunque estos símbolos correspondan a Volterra.

También demostró que el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple para funciones integrables en sentido amplio, esto es, $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ cuando f' es integrable en el sentido de Riemann-Darboux.

Para llegar a esta fórmula Darboux se apoyó en que $f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1})$ y para el Teorema del Valor Medio en $\sum f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$ con $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$

Si el máximo de los $\Delta_i \to 0$ entonces $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA FORMALIZADA**
Situaciones	-Encontrar las condiciones mínimas que debe cumplir una función para poder ser integrable sin perder de vista la formalización. - Condiciones de integrabilidad para series de funciones
Lenguaje	- Algebraico y aritmético. - A través del lenguaje analítico y la noción de límite.
Procedimientos	-Demostración de la condición (de Riemann) necesaria y suficiente para la unicidad del límite de las sumas integrables. - Reducción de las condiciones para la integración. - Demostración tanto del teorema fundamental del cálculo para funciones integrables en el sentido amplio, como del teorema del valor medio
Definiciones	- Las funciones con un conjunto denso de discontinuidades se pueden integrar. - Series de Fourier. - Sumas superiores e inferiores de la partición de un intervalo. - La intregral definida es el límite de las sumas integrales que existe y es

	único.
Proposiciones	- Condición de Riemann necesaria y suficiente para la unicidad del límite de las sumas integrables. - La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$ si sus discontinuidades constituyen un conjunto de medida cero; - La integración término a término es posible si la serie converge uniformemente. - $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ cuando f es integrable en sentido de Riemann-Darboux; - El teorema fundamental del cálculo y del valor medio extendido para el nuevo campo de funciones integrables.
Argumentaciones	- A través del lenguaje analítico. - Basadas en el concepto de límite y de función. - Condiciones de convergencia de series
Rupturas epistemológicas	- Se amplía el campo de las funciones integrables considerando funciones con un conjunto de discontinuidades de medida cero.
Fronteras epistemológicas	- Integración de funciones muy irregulares - Condiciones para tomar límites en la integración

Tabla 4.8 Significado institucional de la integral definida formalizada.

4.1.9. Significado institucional de la integral definida generalizada

Desarrollos como la Teoría de las Probabilidades, la cual avanza notablemente desde mediados del siglo XIX (debido a nuevos problemas como la genética y la teoría del movimiento browniano o la mecánica estadística), exigen una definición de integral que incluya un campo de funciones más amplio, funciones más irregulares. Además, con la integral de Riemann es complicado analizar cuando es posible tomar límites bajo el signo integral, cuestión de gran importancia en el estudio de las series de Fourier o la transformada de Fourier, por ejemplo. En este sentido, la integral de Lebesgue mejorará a la de Riemann ya que permite integrar una clase de funciones más amplia y analizar las condiciones y los modos de tomar límite dentro de la integral, contestando a cuestiones como por ejemplo, cuándo se produce la convergencia de sucesiones de funciones integrables. Así, podemos decir que la integral de Lebesgue es más flexible y mejor para tratar procesos de límites.

La generalización de la integral de Riemann proviene de generalizar la noción de medida. Como señala Cordero (2005) "Con Lebesgue (1926) se subsana en parte la ruptura, el concepto de medida cero (nuevo contexto) cambia la manera de mirar los puntos de discontinuidad" (p. 272) La integral de Riemann usa implícitamente el concepto de longitud del intervalo de la recta real y de área de los rectángulos en su desarrollo. En este sentido, surge el problema "¿cuál es la clase de funciones para las cuales el concepto de *área bajo la curva* tiene sentido?" cuestión a la que dará respuesta la teoría de la medida. Ésta se desarrolla al querer fundamentar y cuestionarse la noción de longitud de los subconjuntos de puntos de la recta real y el área y volumen de subconjuntos de espacios euclídeos. En 1883 Cantor (1845-1918) dio la primera definición de medida de un subconjunto de R^n seguida por las definiciones equivalentes para la recta real de Stolz en 1884 y Hannarck en 1885. Estas definiciones fueron mejoradas por Peano (1858-1932) que fue el primero en analizar qué conjuntos son medibles y dar, en 1887, una definición de medida y de conjunto medible. Además, explicó la relación entre medida e integración. "*Peano tiene el mérito doble de relacionar el problema de la medida del área con la integral y de llamar la atención sobre la importancia que tiene las ideas conjuntistas de Cantor para estas cuestiones*" (Sánchez y Valdés, 2004, p.181) Peano demostró que una función f positiva y acotada en un intervalo $[a,b]$ es Riemann integrable si sólo si el conjunto E de R^2 limitado por la gráfica de f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje de las abscisas es medible, en cuyo caso, además, $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual a la medida de E.

Posteriormente Jordan (1838-1922) utilizando una malla de cuadrados de igual lado, en lugar de polígonos, simplificó y mejoró la definición de Peano en 1892. Por último Borel (1871-1956), en su doctorado de 1894, mejoró las anteriores definiciones, al considerar la numerable aditividad para las medidas. Ésta fue una propiedad básica para que Lebesgue (1875-1941) desarrollara una teoría de la integración a partir de su tesis "*Intégrale, longueur, aire*" presentada en 1902 en la Universidad de Nancy. Como afirma Faro (2010): "*La numerable aditividad y la integración están muy relacionadas, de hecho la originalidad de Lebesgue no reside tanto en haber extendido la integral de Riemann, como en su descubrimiento -obtenido independientemente por W.H.Young para funciones semicontinuas- del teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral, que se obtiene como consecuencia de ser la medida numerablemente aditiva*" (p.4)

La definición de la integral definida, según Lebesgue, se realizó en dos momentos específicos. Inicialmente consistía en la generalización de la idea de área bajo la curva (definición geométrica): *"si f es acotada en [a, b] y positiva, entonces la integral puede definirse como la medida del conjunto E_f de puntos del plano tales que* $0 \leq y \leq f(x)$*, con* $x \epsilon [a,b]$*, siempre que este conjunto sea medible"* (Sánchez y Valdés, 2004, p. 188). Posteriormente, definió la integral analíticamente mediante la división del conjunto imagen de f en particiones cada vez más finas (definición analítica): Sea $f(x)$ acotada y medible en E medible contenido en $[a,b]$. Sean A y B los extremos inferior y superior de $f(x)$ en E. Se divide el intervalo $[A, B]$ del eje OY en $[A, I_1]$, $[I_1, I_2]$,…, $[I_{n-1}, B]$. Sea e_r el conjunto de puntos de E para los que $I_{r-1} \leq f(x) \leq I_r$. Entonces, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son conjuntos medibles. Se construyen: $S = \sum_1^n I_r m(e_r)$, $s = \sum_1^n I_{r-1} m(e_r)$. S tiene un extremo inferior J y s un extremo superior I.

Lebesgue demuestra que para toda función acotada medible $I=J$ y a este valor común se le llama integral de Lebesgue de $f(x)$ sobre E**,** y se representa por: $I = \int_E f(x)dx$ (Ordóñez y Contreras, 2003)

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA GENERALIZADA**
Situaciones	- Ampliación del concepto a funciones irregulares. - Compatibilidad límite-integral. - Generalización de la noción de medida: determinación del tipo de funciones para las que tiene sentido el concepto de "*área bajo la curva*"
Lenguaje	-Fundamentalmente analítico, basado en lenguaje conjuntista y topológico. - Elementos de la teoría de la medida.
Procedimientos	- Definir medida y conjunto medible: generalizar la noción de medida. - Relacionar la medida con la integración para extender el conjunto de funciones integrables. - Nueva definición de integral. Aplicar la numerable aditividad para estudiar el paso al límite de la integral.
Definiciones	- Medida, conjunto medible, función medible. -Definiciones de la integral definida, según Lebesgue, geométrica y analítica para funciones medibles sobre un conjunto medible.
Proposiciones	- Relación entre medida de un área y la integral definida - La integral de una función acotada en un intervalo cerrado coincide con la medida del área bajo la curva. - La nueva medida es numerablemente aditiva. - Teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral
Argumentaciones	- Lebesgue hace una rigurosa y deductiva fundamentación de la integral definida, basada en la teoría de la medida.
Rupturas epistemológicas	- Ampliación de la noción de medida de un conjunto y, por tanto, de la noción de área. - Extensión de la clase de funciones integrables. - Teorema fundamental sobre el paso al límite de la integral.

Tabla 4.9 Significado institucional de la integral definida generalizada.

4.2 Configuraciones Epistémicas actuales y Conflictos Semióticos inherentes a la integral definida

La evolución histórica nos ha mostrado las diferentes formas o maneras de interpretar la integral definida, así como los distintos campos de aplicación. Hemos analizado cuales han sido los diferentes problemas que motivaron un nuevo significado, intentando localizar a qué nuevos campos de problemas da respuesta este nuevo significado, qué lo motivó y qué dificultades tenía el anterior. Así mismo, hemos buscado aquellos puntos conflictivos en el desarrollo de la integral definida y cómo se superaron lo que nos dará información (en consonancia con el método genético) de las dificultades de los estudiantes en la enseñanza-aprendizaje de la integral definida. Sin embargo, es claro que todos estos elementos habrá que verlos desde la perspectiva actual pues "*no pretendemos enseñar matemáticas como en los siglos anteriores; nuestro contexto es totalmente distinto, y por ende, nuestras* *estrategias educativas. Reconocemos en el hecho histórico aquellos puntos neurálgicos que nos permitan conducir nuestra labor educativa y adaptamos ésta al momento histórico presente. Nuestra línea de investigación (...) se nutre de una concepción del aprendizaje sugerida por la sociología genética.*" (Farfán, 1997, p. 3) Es posible que algunos elementos hayan perdido su sentido con la introducción de otros lo que les hará obsoletos, sin embargo, aportarán información interesante, en tanto que se utilizaban con las restricciones del momento y, en tanto que muestran o ponen en evidencia las propiedades de los que los superaron.

De esta manera podemos establecer, en la época actual, las diferentes configuraciones epistémicas que conformarán el significado de referencia de la integral definida así como conflictos semióticos inherentes a este objeto matemático. Para determinar una configuración epistémica nos parece fundamental el tipo de situación problema que resuelve ya que estimamos que movilizará unos determinados elementos de significados distintivos y por tanto un significado parcial. Además, no diferenciar entre ellos o no movilizarlos en los diferentes momentos que se suceden en la resolución de situaciones-problema complejas lleva a conflictos semióticos. Es claro que en cada una de ellas se podrán utilizar diferentes métodos de cálculo integral que han surgido a lo largo del desarrollo de la noción y que sólo nos han parecido determinantes de otra configuración epistémica si sobrepasan su función de elementos necesarios para el cálculo.

En este recorrido histórico podemos destacar, en los orígenes de la integral definida, dos tipos de situaciones objeto de estudio. Por una parte, en la época de los griegos, el interés se centraba en cuestiones geométricas principalmente. Calculan áreas, longitudes de arco y volúmenes. Por otra parte, en la época medieval se aborda el estudio del cambio y del movimiento, las matemáticas se muestran como un instrumento privilegiado del conocimiento de fenómenos naturales. A la vez el movimiento y el tiempo se mostraran como una eficaz herramienta para trabajar con cuestiones infinitesimales intuitivamente. Estas dos formas de ver la integral definida perduraron a lo largo de la historia y estuvieron presentes en la invención del cálculo por parte de Newton y Leibniz. Newton, con la idea de resolver los problemas de fundamentación intenta eliminar los infinitamente pequeños considerando las cantidades como engendradas por un aumento continuo, variando a lo largo del tiempo, esto es, considera la noción de movimiento como central. Por su parte, Leibniz considera la integral interpretando las áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros a la vez que introduce la diferencial que será un eficaz instrumento para trabajar con cuestiones infinitesimales.

Así, como asegura Labraña (2001), que hay dos tipologías de problemas de integración que "*responde a dos percepciones psicológicamente diferentes. Una estática, una densidad: densidad, presión (fuerza/superficie), intensidad de campo (cantidad de flujo/superficie),… que se conecta fácilmente con la idea de suma de todas las pequeñas cantidades f(x)/dx, que constituyen la integral definida. Otra dinámica, una tasa de variación instantánea: velocidad, tasa de crecimiento de una población, ingreso marginal (ingreso/producción),…que permite conectar con la idea de antiderivación*" (p. 290) Esta doble tipología es la base de dos configuraciones epistémicas: la configuración epistémica geométrica y la configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio que recoge el significado de acumulación de la integral definida necesario en Física, por ejemplo.

Kaput (1994, citado en Farmaki y Paschos, 2007), afirma, en una línea similar, que "el desarrollo histórico del cálculo constituye una sucesión de tres períodos y / o raíces: (1) problemas geométricos relacionados con cálculos de áreas, volúmenes y tangentes; (2) una mezcla de interés práctico y teórico con la caracterización y explotación teórica de la variación continua de cantidades físicas, y (3) preocupaciones teóricas inherentemente a las bases del Cálculo". Las tres primeras líneas dan lugar a las dos configuraciones que hemos mencionado. La tercera es la raíz de nuevas configuraciones. Así, observamos en la historia que el desarrollo de las ciencias necesita el avance de las matemáticas y, a la vez, ha sido el gran motor en diversos momentos. Sin embargo, la matemática aplicada debe estar bien fundamentada para poder continuar su avance. Se hace necesario buscar métodos heurísticos que produzcan nuevos resultados pero también cuestionar los propios fundamentos para generalizar las nociones y los resultados, y avanzar resolviendo las nuevas cuestiones que van surgiendo. Hemos encontrado esta cuestión a lo largo de toda la historia pero nos parece que produce significados diferentes en dos momentos bien distintos. Por una parte en el momento en que Cauchy establece el límite como noción central del cálculo infinitesimal lo que proporciona una nueva manera de interpretar la integral, lo que nos da la configuración epistémica como aproximación al límite. Las diferentes ampliaciones del campo de funciones integrables realizadas por Riemann y Darboux que no cambian significativamente este significado. Por otra parte, la necesidad de ampliar el campo de funciones integrables obliga nuevamente a un cambio importante cuestionando las nociones de medida, generalizándolas y obteniendo un nuevo significado de integral, la integral de Lebesgue, que determina otra nueva configuración epistémica, configuración epistémica generalizada.

También hemos observado en el desarrollo histórico como un cambio importante se produce en el momento en que se establecen la derivación y la integración como procesos inversos apareciendo resultados como el teorema fundamental del cálculo. Este hecho aporta un nuevo significado a la integral ya que permite además observarla de esta forma por lo que consideramos otra configuración que es la configuración epistémica como inversa de la derivada.

Pero todo este desarrollo ha venido acompañado de dificultades que han debido ser superadas para avanzar. En ocasiones los matemáticos del momento se han visto en encrucijadas y han debido hacer una ruptura obteniendo un nuevo significado, el cual resuelve, al menos parcialmente, los conflictos que generaba el existente hasta ese momento. Estos puntos conflictivos nos parecen interesantes pues pueden darnos información de los conflictos semióticos potenciales que son inherentes a la integral definida y que han sido estudiados o puestos de manifiesto en diferentes investigaciones, como ya desarrollamos en el capítulo 2, por lo que ahora solamente citaremos las que nos parecen más relevantes.

Una de las cuestiones fundamentales en el cálculo infinitesimal es la idea de infinito, la cual subyace en el estudio de la naturaleza del continuo planteado por los griegos. Esta noción ha sido fuente de grandes conflictos y motor de múltiples investigaciones y avances en la matemática proporcionando diferentes resultados y, a la vez, planteando nuevos problemas. Las distintas maneras en que los matemáticos se han enfrentado a él y han resuelto los problemas del momento han dado lugar a múltiples métodos de trabajo. Además, por una parte admite un tratamiento intuitivo fácil y heurístico pero, por otra parte, su conceptualización choca con la intuición, suponiendo un verdadero conflicto semiótico. Esta idea de infinito da lugar a distintos conflictos semióticos como pone de manifiesto Schneider-Gilot (1988) que encuentra la existencia de algunos obstáculos muy ligados al desarrollo evolutivo de la integral relacionados con el infinito.

En principio encontramos las dificultades de los griegos para entender la naturaleza del continuo y cómo el tiempo, convirtiéndose en prototipo del continuo, permite aceptar y trabajar con el infinito de forma intuitiva desde la época de la Edad Media en adelante. Sin embargo, una de las grandes dificultades es la distinción entre el infinito actual y el infinito potencial que genera lo que hemos llamado el conflicto semiótico del valor aproximado del área (CSVAA) "*Consiste en considerar que el área sólo puede tomar un valor aproximado y no fijo. Se asocia a la fuerte dependencia del infinito potencial frente al actual*" (Contreras y Ordóñez, 2005a) y que corresponde con lo encontrado por Schneider-Gilot (1988) para quien el hecho de que el área se calcule mediante un proceso infinito mientras que el resultado sea finito supone un verdadero obstáculo para los alumnos. En la misma línea encontramos las investigaciones de Orton (1980 y 1983a) que observa que los estudiantes consideran que el área se aproxima más y más pero no ven que el límite coincida con el valor exacto. Por su parte Turégano (1994), que hace un estudio del límite como concepto previo, señala que "predomina en estos estudiantes la idea de infinito potencial y, como consecuencia de ello, la imposibilidad de considerar un proceso infinito como algo definido o acabado (…), la idea de infinito potencial es un obstáculo para la comprensión del infinito actual" (p. 147) Otros investigadores como Labraña (2001), Czarnocha, B. y otros (2001) y más recientemente Boigues (2010) han obtenido resultados en la misma línea. Por su parte Artigue (1991, citado en Labraña, 2001) observa la carencia de significado para los estudiantes de las nociones límite y aproximación.

Además, retomando el desarrollo histórico observamos que los desarrollos intuitivos con el infinito y la necesidad de buscar métodos heurísticos y prácticos dieron lugar a la aparición de los indivisibles y de los infinitesimales. En cuanto a los primeros, Schneider-Gilot (1988) y Artigue (1998 y 2003) han realizado diferentes trabajos donde se pone de manifiesto el denominado *obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones*, similar a lo que Oerttman (2000) denomina *metáfora del colapso,* y que es el antecedente de lo que en Contreras y Ordóñez (2005a) hemos denominamos conflicto semiótico de la discordancia dimensional (CSDD) "*Una cierta percepción de las magnitudes se inmiscuye en los cálculos de las áreas y de los volúmenes de manera que magnitudes de dimensiones distintas se entremezclan, lo que puede conducir al error*" de forma general o el conflicto semiótico de la consideración geométrica del límite (CSGL): *"Se efectúa el paso al límite en el nivel de la imaginación visual de las magnitudes, donde los rectángulos se estrecharan hasta llegar a ser efectivamente segmentos"*, si nos centramos en el caso de las áreas que se aproximan por rectángulos dentro del registro geométrico a un nivel más elemental.

En cuanto a los elementos infinitesimales que, en el caso de Leibniz, dieron lugar a la diferencial hemos visto como en un principio tenían un carácter metafísico y fueron aceptados como meros instrumentos para el cálculo del infinito y debido a su carácter práctico. Hubo que esperar hasta el desarrollo de la noción de límite para darles un sentido formal. En la actualidad Turégano (1994) y Labraña (2001) observaron como los alumnos tienen problemas para entender el papel de los elementos diferenciales y que las imágenes geométricas asociadas con este concepto son débiles y se restringen a una dimensión si acaso. Además Artigue (1998 y 2003) y Schneider-Gilot (1988) observan el hecho de que los símbolos diferenciales sólo se interpretan como simples marcadores de integración y hay dificultades para dotarles de significado. Denominamos a este conflicto: conflicto semiótico de la diferencial (CSdx).

Por estos motivos, algunos de estos investigadores, por ejemplo Orton (1983a), afirman que la integración como límite de una suma constituye un auténtico obstáculo epistemológico.

Históricamente la relación integral-derivada y el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) también se presentan como una cuestión conflictiva. Estas dificultades han sido puestas de manifiesto en las investigaciones de Schneider-Gilot (1988) o Labraña (2001). Este último apunta que en su investigación Thompson (1994) atribuye esta dificultad al pobre concepto que los estudiantes tienen de la noción de función y tasa de cambio. En el mismo sentido se expresan Carlson, Person y Smith (2003), que observan las dificultades en la comprensión del enunciado y relaciones en el TFC, y Thompson y Silverman (2007) que considera que los estudiantes ven las funciones como gráficas, pero no como una relación de co-variación entre dos variables lo que dificulta la comprensión de las relaciones que establece el TFC. Por su parte, Berry y Nyman (2003) afirman el tipo de instrucción seguido potencia estas dificultades.

Otra de las cuestiones fundamentales es el tipo de lenguajes utilizados y las herramientas o medios disponibles en cada momento. En este sentido, observamos como desde la identificación geometría-aritmética en la época griega se pasa a un uso casi exclusivo de la geometría, debido a la carencia de los números irracionales, y los problemas que genera el continuo. La geometría y las distintas representaciones serán fuente de grandes resultados en estas etapas. Ahora bien, la introducción del álgebra supone una gran revolución en el cálculo infinitesimal debido a la posibilidad de generalizar problemas, usar el intensivo, establecer métodos algorítmicos y a su carácter eminentemente práctico e instrumental. Sin embargo, plantea el problema de que se separa de la intuición y algoritmiza el cálculo impidiendo una visión general de los resultados y los cambios de registro. Lo que provoca la disparidad entre la destreza algorítmica y la carencia de recursos en el tratamiento gráfico-geométrico señalada por Artigue y Szwed (1983, citado en Labraña, 2001) manifestada, por ejemplo, en la incapacidad de trabajar directamente con gráficos por lo que los alumnos intentan obtener la expresión de la función para poder derivarla o integrarla o que los estudiantes muestran más confianza en los cálculos algebraicos que en el dibujo, cuestiones puestas de manifiesto en los trabajos de Labraña (2001), Llorens y Santonja (1997), Rasslan y Tall (2002), Paschos y Farmaki (2006) y Boigues (2010) que paradójicamente encuentra que los alumnos se sienten más cómodos en el registro gráfico que en el algebraico por lo que consideramos muy clarificadora la afirmación de Berry y Nyman (2003) de que esta carencia se puede atribuir a una enseñanza muy centrada en las reglas algorítmicas que son las necesarias para las PAU.

Describimos a continuación cada una de las configuraciones actuales que conformaran el significado de referencia atendiendo a las entidades primarias que se ponen en juego principalmente y que las caracterizan.

4.2.1 Configuración epistémica geométrica

El tipo de situaciones que se estudian son cálculos de áreas, volúmenes, longitudes. Es decir, situaciones que hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento.

Podemos situar su origen en las situaciones abordadas por los griegos, como eran cuadraturas, cubaturas y rectificaciones de curvas. Este tipo de problemas se retoman en el renacimiento, que supone una vuelta al mundo clásico desde la nueva óptica del álgebra y también del tratamiento del infinito desde un punto de vista intuitivo, pero práctico. Es en esta etapa del Renacimiento que surgen los indivisibles.

En las siguientes etapas el objetivo será conseguir un mayor rigor para las situaciones que se plantean, así surgen los infinitamente pequeños y la diferencial En este sentido, desde la perspectiva actual, nos podemos situar el desarrollo de Leibniz considerando la integral definida como suma de elementos infinitesimales aunque con la noción de límite como central en el desarrollo. Sin embargo, los métodos actuales han desligado el cálculo del área bajo la curva del cálculo del límite, centrándose en la aplicación de la regla de Barrow. Es en este sentido que consideramos la *configuración epistémica geométrica*, asociada al cálculo de áreas, volúmenes, etc

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**CEgeo**
Situaciones	Cálculo de áreas y volúmenes
Lenguaje	Gráfico, algebraico, numérico.
Procedimientos	Cálculo de puntos de corte Representación gráfica de la función Cálculo de las integrales definidas Asignación de un valor al área o volumen
Definiciones	CRárea
Proposiciones	Regla de Barrow Métodos de integración
Argumentaciones	Retórica y heurística
Conflictos semióticos asociados a esta CE	No diferenciar entre integral definida y área. La integral debe ser un área, entonces positiva. Si la integral es cero entonces la función coincide en ese tramo con OX. Es imprescindible el valor absoluto para calcular la integral. Considerar que a igual área, igual volumen[5]

Tabla 4.10 Configuración epistémica geométrica.

[5] En consonancia con lo observado por Tsamir (2007) que encuentra que repetidamente los alumnos aplican la regla intuitiva de que misma área-mismo volumen.

Estos conflictos semióticos provienen de una excesiva identificación de la integral con el área como han encontrado, por ejemplo, Bezuidenhout y Olivier (2000) que observan que en muchos casos los estudiantes consideran que la integral debe ser positiva debido a una excesiva identificación integral definida-área.

4.2.2. Configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio

Esta configuración epistémica supone un cambio sustancial en cuanto a las situaciones que se estudian. Ello implicará poner en juego un significado diferente de la integral con diferentes matices que deben ser tenidos en cuenta, como es el caso de resultados negativos que tendrán un sentido dentro del contexto. Estamos considerando la idea de acumulación que subyace en la integral y que corresponde con la segunda de las raíces o períodos del desarrollo histórico del Cálculo que considera Kaput (1994, citado en Farmaki y Paschos, 2007) y que hemos comentado anteriormente.

Podemos situar el inicio en la época en la que la Escolástica medieval comienza a interesarse por las cuestiones del cambio, considerando el tiempo como prototipo del continuo. Sin embargo, el avance de las ciencias y las artes de siglos posteriores se revelan como motores del desarrollo del concepto e integral, unas veces en cuanto a métodos de cálculo y otras mediante las nuevas formulaciones que se hacen necesarias para ampliar el campo de problemas considerados en la matemática del momento. Newton es un gran propulsor de este significado.

En la actualidad hemos observado como diversos autores postulan el significado de la integral como resultado de un proceso de cambio (Wenzelburger, 1993 y 1994) o como un proceso de acumulación (Carlson, Persson y Smith, 2003, Cordero, 2005 y Thompson y Silverman, 2007) y la importancia que tiene para la aplicación de la integral definida a otras ciencias. No es una cuestión de aplicación de la integral definida solamente, es mucho más, pues estas investigaciones muestran que este significado puede establecerse desde un punto de vista intuitivo y que está en la base de multitud de fenómenos de la vida cotidiana, a la vez que dota de sentido la relación derivada-integral de forma natural. Como asegura Tall (1997) "uno de los propósitos de la función es representar cómo cambian las cosas. Con este significado es natural considerar los conceptos del Cálculo de la tasa de cambio (diferenciación) y el crecimiento acumulado (integración), junto con el importante teorema fundamental del cálculo que establece la diferenciación y la integración como procesos esencialmente inversos" (p.289) Además, como apuntan Thompson y Silverman (2007) "cuando algo cambia, algo se acumula. Cuando algo se acumula, se acumula con una tasa.

Entender la tasa de cambio, entonces, significa que uno ve la acumulación y la tasa de cambio como las dos caras de una misma moneda." (p. 127)

Por último apuntamos que este significado será el utilizado en los problemas de modelización donde la integral definida es una herramienta para la resolución, pero que es necesario reconocer la necesidad de utilizarla, reconocer que estamos ante un problema de integración. Son situaciones donde se trata la variación y el cambio

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**CErpc**
Situaciones	Situaciones de acumulación Situaciones de otras ciencias, de modelización.
Lenguaje	Gráfico, algebraico, numérico.
Procedimientos	Modelizar la situación a través de la integral definida Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow Interpretación del resultado
Definiciones	Concepto regla resultado de un proceso de cambio CRrpc
Proposiciones	Regla de Barrow Métodos de integración
Argumentaciones	Retórica y heurística
Conflictos semióticos asociados a esta CE	Noción de función acumulación CSdx (conflicto semiótico de la diferencial)

Tabla 4.11 Configuración epistémica resultado de un proceso de cambio.

En los conflictos semióticos hemos considerado la función acumulación siguiendo los trabajos de Wenzelburger (1994), Thompson (1994), Carlson, Persson y Smith (2003) y Thompson y Silverman (2007) principalmente que apuntan a considerar la integral como la función de acumulación y apuntan dificultades de los estudiantes como son un pobre concepto de función como relación de co-variación entre dos cantidades pero además como afirman Thompson y Silverman (2007) los estudiantes deben coordinar al mismo tiempo el valor de x variando desde un punto de partida, el valor de $f(x)$ variando según x y la acumulación del área encerrada entre x y $f(x)$, esto es, x, $f(x)$ y $\int_a^x f(t)dt$, lo que introduce una tercera dimensión. Apuntan además, que una dificultad importante de la función acumulación está en que no viene expresada en términos de una expresión algebraica, trigonométrica o exponencial, como los estudiantes están acostumbrados, sino mediante un complejo proceso lo que dificulta su comprensión como una función. Afirman estos autores que la función de acumulación no es trivial y que "nadie pretende enseñar la idea de función haciendo que los alumnos calculen los valores específicos de una concreta. Del mismo modo, no debemos pensar que estamos enseñando la idea de la función de acumulación por que los estudiantes calculan integrales definidas específicas" (Thompson y Silverman, 2007, p.121) Por último, señalar las dificultades para interpretar la diferencial, lo que provoca que los estudiantes con frecuencia los vean como simple notación.

4.2.3. Configuración epistémica inversa de la derivada

La relación entre derivada e integral, principalmente, se establece a partir de Newton y Leibniz consolidándose este resultado. Aunque se unen los métodos y resultados de las etapas posteriores donde el límite se plantea como noción central y las funciones integrables van teniendo condiciones cada vez menos restrictivas. En la actualidad está desconectada de la noción de límite y se utiliza a nivel algebraico, reglas de cálculo, o bien gráfico observando las propiedades de una función respecto de la otra.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**CEinvderiv**
Situaciones	Ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función
Lenguaje	Gráfico y algebraico
Procedimientos	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada
Definiciones	Inversión integral-derivada
Proposiciones	Teorema fundamental del cálculo integral
Argumentaciones	Retóricas
Conflictos semióticos asociados a esta CE	Confusión entre función y primitiva Comprensión de las relaciones y la notación. CSdx

Tabla 4.12 Configuración epistémica inversa de la derivada.

La primera dificultad ha sido puesta de manifiesto en el trabajo de Bezuidenhout y Olivier (2000). La segunda ha sido señalada en trabajos como Schneider-Gilot (1988), Labraña (2001) o Carlson, Persson y Smith (2003). Es en este sentido de las dificultades en la comprensión de las relaciones y la comprensión de la notación que hemos incluido CSdx, conflicto semiótico en esta configuración que también hemos considerado en la anterior.

4.2.4. Configuración epistémica de aproximación al límite

Está directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dará lugar a la nueva definición de integral definida que éste realiza. Nos situamos históricamente en el tercer período del desarrollo del Cálculo señalado por Kaput (1994, citado en Farmaki y Paschos, 2007), y que ya hemos comentado, que corresponde a las preocupaciones por la fundamentación teórica de las bases del Cálculo, que se irá desarrollando en adelante y que guiará los desarrollos de la integral definida.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**CEaproxlim**
Situaciones	Calculo de áreas por aproximación
Lenguaje	Gráfico y numérico
Procedimientos	Dada una función o figura, realizar una partición y calcular una aproximación de su área, realizar mejores aproximaciones e identificar el área con el límite.
Definiciones	CRlímite de una suma

Proposiciones	Límite de las sumas inferiores y el de las superiores coincide y es el área
Argumentaciones	Heurísticas
Conflictos semióticos asociados a esta CE	Horror al infinito: conflicto infinito potencial-actual (llenar algo finito como un área con una suma infinita) Heterogeneidad de las dimensiones (completar un área de dos dimensiones con líneas de dimensión 1)

Tabla 4.13 Configuración epistémica aproximación al límite.

Las dificultades de la comprensión de la integral definida asociadas al límite han sido expuestas anteriormente por lo que ahora solamente las mencionamos.

4.2.5. Configuración epistémica generalizada

La última etapa está marcada por la necesidad de ampliar el conjunto de las funciones integrables. La fundamentación comenzada por Cauchy ha abierto una nueva línea de desarrollo. Hemos visto que los trabajos posteriores han ido reduciendo las condiciones iniciales para que una función sea integrable, buscando un conjunto de funciones más amplio para integrar y, además, que sea flexible para estudiar condiciones de convergencia cuando se toman límites. Así, el cambio fundamental viene dado por la teoría de la medida.

A nivel de iniciación, que es donde situamos este trabajo, esta integral ha sido tratada en su trabajo por Turégano (1994, 97) principalmente que presenta una propuesta didáctica para introducir la integral basándose en la definición geométrica de la integral de Lebesgue, buscando conectar con la noción de área trabajada durante la educación primaria. Así, afirma que el problema de calcular el área de las figuras delimitadas por una gráfica de una función en un intervalo queda reducido en este modelo "al cálculo de la altura media de la función $f(x)$ en todo el intervalo [*a*, *b*], y, a continuación, calcular el área pedida como el producto de esta altura por la longitud *b-a* del intervalo cerrado [*a*, *b*]" (Turégno, 1997, p. 40)

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**CEgen**
Situaciones	Funciones integrables, reduciendo las condiciones de integrabilidad, según la integral de Lebesgue.
Lenguaje	Principalmente analítico y gráfico.
Procedimientos	Calcular la integral considerando la idea de altura media de una función en un intervalo.
Definiciones	CRLebesgue
Proposiciones	Elementos de la teoría de la medida.
Argumentaciones	Comparación de áreas. Analíticas basadas en cuestiones topológicas del estudio de la medida.

Tabla 4.14 Configuración epistémica generalizada.

4.2.6 Configuración epistémica algebraica

Además de las configuraciones epistémicas anteriores añadimos la *configuración epistémica algebraica*, que es fruto de la trasposición didáctica. En la educción secundaria se emplea gran parte del tiempo a practicar las reglas de integración. Hemos de tener en cuenta que la secuencia escogida por lo libros de texto, además, potencia esta cuestión, como apuntan Llorens y Santonja (1997) Así, una parte importante del significado implementado está exclusivamente dedicado al manejo de estas reglas. Es por ello que en ocasiones sólo se evalúa si el alumno saber aplicar los métodos explicados. Todo esto nos da lugar a otra configuración epistémica en este caso escolar, que no proviene de la historia estrictamente, y que consiste en las reglas de integración y la regla de Barow.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	**CEalg**
Situaciones	Calcular el valor de una integral
Lenguaje	Algebraico, numérico
Procedimientos	Dada una integral definida aplicar el método oportuno para calcular su valor.
Definiciones	La integración y la derivación son operaciones inversas
Proposiciones	Tabla de integrales inmediatas Métodos de integración Regla de Barrow
Argumentaciones	Heurística
Conflictos semióticos asociados a esta CE	La integral carece de significado.

Tabla 4.15 Configuración epistémica algebraica.

4.3. Significado de referencia

Una vez que hemos establecido las distintas configuraciones epistémica el significado de referencia que utilizaremos en nuestro estudio es el compuesto por estas seis configuraciones: geométrica, resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada, aproximación al límite, generalizada y algebraica. Es claro que este significado de referencia está referido a la institución que pretendemos evaluar.

La comparación de este significado de referencia con los significados locales (institucionales y personales) nos ayudará a determinar sesgos y dar claves de las dificultades en el aprendizaje de la integral definida.

En cada una de estas configuraciones hemos determinado las entidades primarias y además los conflictos semióticos potenciales lo que nos ayudará a guiar nuestra investigación, buscando las componentes del significado ausentes, las frecuencias con que aparecen, si se abordan los conflictos semióticos, etc.

Capítulo 5

Significados institucionales pretendidos e implementados

Una vez que el significado de referencia de la integral definida ha sido determinado, en este capítulo nos vamos a interesar por la adaptación que se produce en dicho significado para ser enseñado en la institución escolar. En nuestro caso nos ocupamos de 2º de Bachillerato modalidad de Tecnología en la Comunidad Autónoma de Andalucía, curso donde se introduce este concepto por primera vez como ya se determinó en el capítulo 1. Nos interesará ver cuáles han sido las elecciones realizadas por parte de la autoridad pertinente: el Ministerio y la Consejería de Educación, en tanto a qué se ha elegido y qué se ha descartado. Compararemos estos contenidos marcados por la normativa con los objetivos que pretenden, lo que nos permitirá hacer un análisis crítico de dichos contenidos y determinar si se ajustan a los objetivos, esto es, si son los apropiados para su consecución.

Por otra parte, nos ocuparemos de los significados que emanan de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) Nos interesará analizar el tipo de ejercicios propuestos para ver si hay algún tipo de sesgo respecto del significado de referencia, determinar cuál es el significado que se puede desprender de ellas y concluir si suponen una restricción en cuanto a que determinen un significado concreto. Es importante aclarar que no analizamos las PAU en cuanto a prueba de evaluación, pues no estudiamos los resultados de los alumnos. Queremos determinar la influencia que tienen en el significado pretendido dado que son conocidas por todos los profesores, la Universidad los publica todos los años, y consideramos (por propia experiencia) que son tenidos en cuenta por aquellos al planificar sus clases. Para ello, observaremos y clasificaremos las configuraciones epistémicas que son necesarias para resolver las situaciones propuestas. Dicha clasificación permitirá determinar si hay alguna configuración que predomine o si aparece con un determinado lenguaje, etc. Este análisis pretende responder a una cuestión central en este trabajo: ¿suponen las PAU una restricción institucional para la integral definida? Y si es así ¿en qué sentido?

Para poder contestar a estas preguntas nos proponemos, en la última parte de este capítulo, analizar la relación con lo que efectivamente el profesor realiza en el aula. Para ello, estudiaremos los apuntes de clase de cuatro alumnos, uno de cada uno de los profesores que impartían la asignatura a los grupos donde se pasó un cuestionario, que nos mostrará, en el siguiente capítulo, los significados personales. Para elegir a los alumnos de los que escogimos los apuntes se les preguntó a los profesores por aquellos estudiantes que tomaban los apuntes más fielmente a lo que ellos habían realizado en clase. De esta manera podremos comparar el significado implementado con el que emane de las PAU observando si se ajustan o no y en qué medida.

5.1 Significado propuesto en la normativa vigente

En el capítulo 1 enmarcamos la integral definida en la normativa que rige en el momento de iniciar nuestra investigación que es la LOGSE. Como ya expusimos en primer lugar se determinan los contenidos y criterios de evaluación mínimos y después los determinados por cada comunidad autónoma, en nuestro caso la Comunidad Autónoma de Andalucía. Es importante resaltar que, aunque nos hemos enmarcado en este contexto, el currículum propuesto es el que se suele utilizar para la introducción de la integral definida, incluso en otros países. Por ello, podemos considerar que los resultados de otras investigaciones son válidos en este caso, dado que la forma de trabajar con la integral definida es muy similar. Podemos decir que estos son los contenidos socialmente admitidos en esta época. De hecho desde que comenzamos la investigación sobre la integral definida, año 2001, hasta el año 2010 la integral definida no ha sufrido cambios en lo que respecta a los contenidos, métodos,…, estos es, significados propuestos por la normativa vigente en cada momento. Los diferentes textos y las distintas orientaciones de las PAU así lo reflejan también.

Hecha esta aclaración, analizamos en primer lugar los contenidos mínimos que son los siguientes: "*Integrales definidas. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas*" a los que corresponden los siguientes criterios de evaluación: "*Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida de áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables*" Si comparamos con las configuraciones epistémicas determinadas en el capítulo anterior, observamos que en los contenidos no se hace referencia más que a la interpretación de la integral como un área con lo que se centra en la *configuración epistémica geométrica*. El hecho de que se incluya la regla de Barrow puede indicar la *configuración epistémica inversa de la derivada* pues, en otro caso, se expondría como una regla sin justificación teórica ni significado. Cabe destacar que en los criterios de evaluación se pretende que los estudiantes midan áreas para regiones limitadas por curvas fácilmente representables lo que parece indicar la representación gráfica como método de cálculo y el énfasis en el contexto geométrico. Observamos que no se trata otra interpretación de la integral, en concreto, no se tratan problemas de acumulación, por lo que nos parece que CErpc queda relegada. Sin embargo, como criterio de evaluación se pide que los alumnos/as apliquen los conceptos del cálculo infinitesimal (límite, derivada e integral) al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos. Es claro que con este enfoque eminentemente geométrico es posible el estudio de los fenómenos geométricos pero nos preguntamos cómo será posible estudiar fenómenos naturales o tecnológicos que no son estáticos con este significado.

En cuanto a la concreción del currículum para la Comunidad Autónoma de Andalucía los contenidos propuestos son: "*El problema del área. Cálculo aproximado: método de las sumas. La integral definida de una función en un intervalo cerrado: concepto, notación y obtención de algunas propiedades sencillas. Relación entre los procesos de integración y derivación: el teorema fundamental del cálculo. La regla de Barrow. Métodos de cálculo de primitivas. Integración inmediata, por descomposición, cambio de variables y por partes (hasta dos niveles). Integración de funciones racionales sencillas con raíces reales en el denominador"* En este caso, las configuraciones epistémicas explícitamente consideradas son la CEgeo, se incluye CEaproxlím y CEinvderiv olvidando nuevamente CErpc y CEgen. Sin embargo, de nuevo en los criterios de evaluación y en los objetivos se establecer la conveniencia de que los estudiantes apliquen los conceptos del Cálculo aprendidos a la interpretación de fenómenos de la naturaleza o tecnológicos. Por su parte, diversos investigadores han mostrado la dificultad que tiene los estudiantes para realizar dicha interpretación. Así, Scheneider-Gilot (1988) observa, por una parte, que después de varios meses de instrucción, los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas pero la mayoría no sabe por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas y, por otra, analizando libros de texto y manuales de profesores, observa que los textos consideran como una verdad implícita que el cálculo de un área bajo una curva representativa de una función tienen interés por sí misma mientras que los alumnos tienden a considerarla como un cálculo estándar sin otra justificación. Llorens y Santonja (1997) afirman que los estudiantes asocian la integral definida con la regla de Barrow y no con un área, en un contexto puramente mecánico, conocen que ésta es la manera de calcular el área pero no saben por qué.

Además, Azcárate (1996) afirma que la integral tal y como se expone en los libros de texto es incomprensible para los alumnos y que éstos no reconocen cuándo el cálculo de una magnitud requiere una integración, al igual que Hernández (2007) que realiza una propuesta didáctica para ayudar a los estudiantes a reconocer cuando es necesario utilizar esta noción en la resolución de una situación una vez detectada esta carencia. Además, Premier y Lazarte (2008) consideran que ante esta dificultad los estudiantes se basan en pistas de tipo lingüístico para decidir si usar la integral. En este sentido, Artigue (2003) expone que *"a través de prácticas docentes estándar, los alumnos obtienen un razonable éxito en cuestiones estándar pero presentan grandes dificultades para decidir si una situación de modelización requiere un proceso de integral para su resolución"* (p.124)

Es por todo lo anterior que consideramos que se está estableciendo un significado de la integral definida totalmente sesgado al cálculo de áreas, sin otras aplicaciones y que está muy descontextualizado, incluso de la geometría elemental que el alumno estudió en años anteriores. Al no estudiar CErpc, por ejemplo, se limita notablemente la posibilidad de aplicar integral definida a otros contextos que no sean el puramente geométrico, muy estático. Además, al identificar la integral definida con un área no se consideran las ideas de acumulación, o de compensación presente en este concepto y se dificulta, por ejemplo, la interpretación de resultados negativos o nulos. Incluso algunos autores como Premier y Lazarte (2008) consideran esta asociación integral-área como un obstáculo: "La aplicación geométrica de la integral definida como área de una figura representa un obstáculo para el empleo de este concepto para el cálculo de otras magnitudes, por ejemplo, en el cálculo de trabajo con una integral definida el resultado puede ser negativo" (p. 6) y Ferrini-Mundy and Guardard (1992, citado en Rassaln y Tall, 2002) consideran que las técnicas procedimentales aprendidas en la enseñanza secundaria, pueden llegar a ser perjudiciales para en los estudios posteriores de la Facultad.

5.2 Significados que emanan de las PAU

En el capítulo 1 analizamos la problemática de las PAU en cuanto a la importancia que tienen en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida, objetivos, estudiantes a los que está dirigida, etc. Nos planteamos en este momento determinar los significados que se desprenden de ellas observando las configuraciones epistémicas que se requieren para resolver las situaciones propuestas en las pruebas, con el objetivo de establecer si existe un sesgo aún mayor del que ya se ha visto en los currícula.

Las PAU son elaboradas por las ponencias de cada materia objeto de examen, como ya se expuso, y están basadas en un Documento de Orientación para las Pruebas de Acceso a la Universidad que es elaborado previamente y conocido por todos los profesores que imparten la asignatura Matemáticas II. Recordamos que su objetivo es concretar y matizar el currículum. Respecto de la integral definida en los últimos 10 años este documento propone: *Conocer la técnica de integración por cambio de variable. Conocer las propiedades de linealidad de la integral definida con respecto tanto al integrando como al intervalo de integración. Conocer las propiedades de monotonía de la integral definida con respecto al integrando. Conocer la interpretación geométrica de la integral definida de una función (el área como límite de sumas superiores e inferiores) Conocer la noción de función integral (o función área) y saber el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow. Saber calcular el área de recintos planos limitados por curvas.*

Comparando los currícula propuestos por la normativa y las PAU observamos que no hay grandes diferencias entre ellos, pero nos parece interesante resaltar algunas cuestiones que se acentúan en el último. Observamos que se enfatiza notablemente CEgeo pues, en primer lugar, incluso se identifica la integral con el área: "*Conocer la noción de función integral (o función área)"* Además, hay una pequeña referencia a CEapoxlim a la que asigna un papel secundario pues la propone como una interpretación de la integral como área, lo que supone un nuevo refuerzo de la CEgeo. La CEinvderiv también se propone, ya que se incluye el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, pero no hay referencia explícita. Nuevamente están ausentes las configuraciones epistémicas CErcp y CEgen.

Este importante sesgo hacia la CEgeo se concreta en las pruebas realizadas por esta comisión como veremos al analizar las pruebas de acceso a las universidades andaluzas en cuanto a las configuraciones epistémicas que es necesario poner en juego para resolverlas. En Contreras y cols (2010) realizamos un estudio similar para las PAU de los años 1999 a 2008 que nos servirá para ver la evolución ya que hemos añadido dos años más. Así ahora consideramos el periodo de 1999 a 2010, ambos incluidos. Cada año se elaboran 6 pruebas dobles (cada una consta de dos partes, A y B, para que el estudiante elija una de ellas) De éstas se escogen dos pruebas cada año, una para la convocatoria de junio y otra para la de septiembre. Con ello hemos analizado inicialmente 144 pruebas detectando si se plantea alguna cuestión sobre la integral definida y, en este caso, la configuración epistémica presente, esto es, qué configuración es necesario conocer y utilizar para resolver la cuestión planteada. Teniendo en cuenta que en 31 pruebas no aparece ninguna cuestión sobre la integral definida y que en cuatro pruebas aparecen dos situaciones de dicha noción, se han considerado 117 situaciones en total. En ellas se han clasificado las configuraciones epistémicas encontradas, con lo que hemos obtenido la distribución que se refleja en la tabla 5.1 y donde el total de configuraciones es 120 porque en tres situaciones es necesario utilizar 2 configuraciones.

Lo primero que destacamos de estos datos es que la integral definida aparece en 117 situaciones de las 144 pruebas analizadas, un 81’25% del total, es decir, un alto porcentaje lo que indica la gran importancia de este objeto en el currículum de 2º de bachillerato.

No hay Integral Definida		**31**	
Integral Definida	CE-alg	**33**	**27’5%**
	CE-geo	**84**	**70%**
	CE-invderiv	**3**	**2’5%**
		120	

Tabla 5.1 Configuraciones epistémicas en las PAU desde 1999 a 2010

Con respecto a estas 117 situaciones, observamos que sólo aparecen 3 configuraciones epistémicas olvidando, no solamente las dos que deja de lado el documento de orientación, sino también la de aproximación al límite. Destaca notablemente CEgeo pues de las 120 configuraciones utilizadas, 84 corresponden a dicha configuración, esto es un 70%, mientras que CE-invderiv solamente aparece en tres casos (2’5%) Todo lo anterior, está en la línea marcada en las orientaciones que enfatizan notablemente CEgeo en detrimento de las otras configuraciones. Nos ha llamado la atención el 27’5% (33 de 120) de la configuración epistémica algebraica. Éste es, según nuestro punto de vista, un porcentaje muy alto para una configuración que se basa en métodos de cálculo algorítmico. Con estas situaciones sólo se puede evaluar la capacidad del estudiante para aplicar un algorítmo, lo que puede potenciar la algoritmización del cálculo integral señalada por diferentes autores. Este fenómeno es aún más claro si observamos que de las 31 pruebas donde no se requiere integral definida en 27 se requiere la integral indefinida como método algorítmico nada más. Así de las 144 pruebas estudiadas en 60 casos (41’67%) se evalúa la aplicación de un método en lo que respecta a la integración. El profesor de 2º de bachillerato que conoce las pruebas sabe que debe emplear gran parte del trabajo a que sus alumnos apliquen correctamente los métodos algorítmicos simplemente, lo que irá en detrimento de otro tipo de situaciones.

En este análisis de las CE en las PAU nos ha surgido la necesidad de especificar los modos en que se presentan las dos configuraciones epistémicas que más aparecen: la algebraica y la geométrica. Esto se debe a que hemos observado fuertes regularidades que nos parece interesante destacar y analizar. En lo que respecta a CEalg hay dos tipos de situaciones propuestas, aquella en la que se pide el cálculo de una integral definida directamente (la hemos llamado “directa”) y otro tipo de situaciones en las que utiliza dicha configuración en la resolución de una cuestión (la hemos llamado de "aplicación") De igual forma para CEgeo, hay situaciones en las que se pide directamente calcular un área mientras que en otras se aplica para resolver la situación. A continuación hemos seleccionado un ejemplo de cada uno de los casos considerados para clarificarlos, extraído de Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010). Además, hemos añadido un caso de la CEinvderiv que también involucra la configuración epistémica geométrica.

- CEalg Directa (Selectividad 2005) se pide expresamente el cálculo de una integral definida

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^{0} \mathrm{Ln}\,(2+x)\,dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

- CEalg Aplicación (Selectividad 2008) El cálculo de la integral es necesario para resolver la situación. No hay ninguna otra configuración de la integral involucrada, pero, a diferencia de la anterior, este cálculo se utiliza en la resolución de la situación, así, el estudiante, no sólo debe conocer un método de cálculo para resolver correctamente esta cuestión, sino que debe decidir cuándo aplicarlo.

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d.

- CEgeo Directa (Selectividad 2008) Se pide explícitamente que calcule el área entre dos curvas, aplicación directa de un método de cálculo que no garantiza la comprensión de la integral definida como un área.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Dadas las funciones $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

- CEgeo Aplicación (Selectividad 2007) aunque también debe de calcular un área entre dos curvas no basta sólo con aplicar lo que sería un método de cálculo de áreas como en el caso anterior, es necesaria alguna interpretación de la integral o del resultado de dicha integral.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos]
Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

- CEinvderiv (Selectividad 2002) en la que también se pone en juego CE-geo. Corresponde a uno de los pocos casos donde es necesario utilizar dos configuraciones epistémicas.

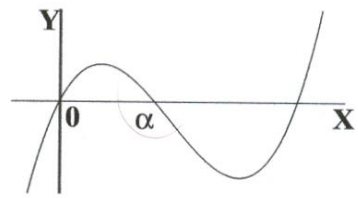
Ejercicio 1. Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) **[1'5 puntos]** Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha) = 0$.

ii) $F'(\alpha) = 0$.

iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.



(b) **[1 punto]** Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

Tabla 5.2. Ejemplos de situaciones de las PAU según la configuración epistémica necesaria en su resolución

Con esta nueva distinción la tabla anterior aparece ahora como muestra la tabla 5.3:

No hay Integral Definida			**31**	
Integral Definida	CEalg	Directa	**28**	**23'33%**
		Aplicación	**5**	**4'17%**
	CEgeo	Directa	**73**	**60'83%**
		Aplicación	**11**	**9'17%**
	CEinvderiv		**3**	**2'5%**
			120	**100%**

Tabla 5.3 Configuraciones epistémicas en las PAU desde 1999 a 2010

Observamos que en la mayoría de los casos donde aparece la CE-alg es directa, en 28 de los 33 casos (84'85%, el 23'33% de las configuraciones totales), esto es, se pide a los alumnos aplicar un método algorítmico exclusivamente. Algo similar sucede en CEgeo donde 73 de los 84 casos, el 86'9%, en que se debe utilizar esta configuración está dedicado al cálculo directo de un área (el 60'83% de las configuraciones totales), lo que puede convertirlo en un método para resolver un tipo de situaciones que aparecen frecuentemente en las PAU.

Una cuestión que también nos parece interesante resaltar en este estudio de las PAU es el hecho de que solamente en 3 situaciones de las 117 analizadas, sea necesario utilizar dos configuraciones epistémicas, como es el ejemplo expuesto en último lugar. Apenas se trabaja, por tanto, la coordinación entre las diferentes configuraciones con lo que el estudiante no obtendrá la flexibilidad de pasar de un significado de la integral a otro. Dado lo expuesto hasta ahora, dicho estudiante tenderá a reconocer la integral o como un área geométrica descontextualizada o como un método algorítmico, sin ser capaz de unir las diferentes configuraciones y, por ello, obteniendo un significado de la integral muy limitado.

Además, del estudio se desprende, observando los ejemplos representativos, que el registro que se utiliza es el algebraico, no utilizándose el registro geométrico, numérico u otro tipo de medios como programas de cálculo simbólico, calculadoras gráficas,… por lo que tampoco hay cambios de registro. Así, no se tiene en cuenta la hipótesis de que "aprender un objeto matemático significa saber coordinar los distintos sistemas de representación semiótico del mismo" (Duval, 2000) En esta misma línea Azcárate y col. (1996) señalan que "la adquisición de flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos (gráfico, numérico y algebraico) de los conceptos del cálculo diferencial e integral es un paso necesario para la introducción posterior del cálculo formal y asegura una sólida base para enfrentarse con los conceptos y los métodos cada vez más abstractos que se construirán a partir de aquí" (p.17)

Si comparamos con lo obtenido en el período 1999 a 2008 (extraído de Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010, donde hicimos la misma clasificación) observamos que el mayor aumento se ha producido en la CEgeo directa que ha pasado de aparecer en 53 casos a aparecer en 73 (en el resto de las configuraciones ha sido entre dos y tres solamente), lo que indica que esta tendencia a considerar la integral como un área se está potenciando en los dos últimos años. Así, los estudiantes que conocen que es un "típico ejercicio" lo dominarán a nivel algorítmico sin que podamos asegurar, por ello, que esto conlleva una verdadera comprensión de la integral definida.

A modo de resumen, podemos afirmar que la integral definida tiene una importancia notable pues aparece, en los últimos 12 años, en el 81'25% de los casos. La CE más solicitada es la geométrica (70% de los casos) generalmente de forma directa, esto es, solicitando explícitamente el área bajo la curva o el área entre dos curvas y utilizando el registro algebraico. En segundo lugar, la CE más solicitada es la algebraica, esto es, cálculo algorítmico, generalmente de forma directa también. Podemos, también, observar que son muy pocos los casos donde son necesarias dos CE, con lo que no se trabaja la coordinación entre ellas, y que el registro más utilizado es el algebraico.

Como ya se ha indicado, los profesores de secundaria conocen las PAU y por tanto éstas pueden producir el mismo fenómeno que se ha señalado en otro tipo de pruebas de evaluación externa: "La práctica, cada día más extendida (por lo menos en España), de organizar (parcialmente) el proceso de enseñanza como un "entrenamiento" para la resolución de ejercicios tipo PISA o de ejercicios extraídos de las pruebas oficiales de evaluación de las competencias básicas, hace pensar que se está produciendo una aceleración de una cierta variedad del deslizamiento metadidáctico que consiste en tomar como objeto de enseñanza lo que debería ser un medio de ayuda a la enseñanza, esto es, las tareas matemáticas que forman parte de los dispositivos didácticos de evaluación "externa"" (Gascón, Junio 2009, p.11)

El siguiente apartado pretende poner de manifiesto esta cuestión en lo que respecta al significado implementado. Señalamos que ya se estudió en los ejercicios propuestos por los libros de texto más utilizados en la Comunidad Autónoma de Andalucía en Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) obteniendo que “la CEgeo es la más utilizada en los ejercicios, lo que se corresponde con la presencia de dicha configuración en los libros de texto, así como la ausencia casi total de las configuraciones CEaproxlim y CErpc. Además, dentro de la geométrica, son los casos de aplicación directa los más numerosos, lo que muestra la influencia de las PAU en los textos, convirtiéndose en una verdadera restricción institucional” (p. 378)

5.3 El significado implementado

Tras analizar el significado que emana de las PAU, nos proponemos estudiar el efecto que éstas tienen en lo que el profesor efectivamente hace en clase como paso previo al estudio de los significados personales de los alumnos. Con el objetivo de estudiar dichos significados personales realizamos un cuestionario que pasamos a cuatro grupos distintos de tres centros diferentes de la provincia de Jaén y que veremos en el siguiente capítulo. No son grupos especialmente escogidos ni los profesores han preparado especialmente las clases, sino que fueron escogidos por proximidad geográfica (debido a cuestiones de operatividad) y porque nos parece que representan una manera muy extendida de enseñar la integral definida en este nivel educativo. De cada grupo recogimos los apuntes de un alumno/a que el profesor escogió pues consideraba que, recogía más fielmente lo realizado en clase. Por ello estimamos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo en cuanto a las configuraciones epistémicas que trabaja y los modos en que lo hace. Nos planteamos el estudio de las cuatro trayectorias epistémicas de estos grupos y consideramos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación, que nos permitirá comparar con el significado de referencia y el que se deduce del análisis cuantitativo de las PAU, y así extraer conclusiones respecto a la influencia de las PAU.

Para analizar estos apuntes de clase hemos hecho un estudio previo de las cuestiones que tendremos en cuenta en los apuntes lo que nos permitirá su comparación. Hemos tenido en cuenta el estudio sobre análisis de manuales realizado en Contreras y Ordóñez (2005), el cual ha sido ampliado y adaptado para el caso de los apuntes de clase. El análisis nos aportará información general del desarrollo realizado por cada profesor. Entre otras cuestiones ahora hemos tenido en cuenta las configuraciones epistémicas expuestas en el capítulo anterior y la clasificación de los ejercicios que hemos usado en el estudio de las PAU para poder comparar y así establecer si hay analogías.

5.3.1. Dimensiones del análisis de los apuntes

En el análisis que proponemos hemos distinguido tres dimensiones (Contreras y Ordóñez, 2005): *semiótica*, que corresponde con el estudio de las entidades primarias; *didáctica*, que nos informará del tipo de desarrollo según las funciones de dirección del estudio (Godino, Contreras y Font, 2006); y *epistemológica-cognitiva*, que corresponde al estudio de las distintas configuraciones epistémicas y los conflictos semióticos potenciales desarrollados en el capítulo 4.

5.3.1.1. <u>Análisis Semiótico</u>

Estudiaremos las entidades primarias (Godino, 2002) en cuanto a su distribución y el papel que se les asigna en el desarrollo de la unidad. Así, distinguiremos:

i. *Situacionales (ANSM1)*, según los tipos de situaciones de enseñanza que se utilicen. Pueden ser las siguientes:
   a. ANSM1.1 Clase de situaciones que se usan para fundamentar la matemática a enseñar según el tipo de fenómenos que se gestionan: uso de una situación de la propia matemática; uso de una situación de otras ciencias; y, uso de una situación de la realidad.
   b. ANSM1.2 Ejemplos que se utilizan para facilitar la comprensión del discurso matemático. Se observará: lugar dónde incluye −antes o después de la definición formal−, tipo de función utilizada, si se resuelve o no y cómo −completa, incompleta, de modo formal, de modo intuitivo.
   c. ANSM1.3 Ejercicios se utilizan como aplicación de los objetos matemáticos enseñados. Por una parte, para ver el tipo de ejercicios realizados, se clasificarán atendiendo a las subdimensiones:
      1) Conocimientos previos: aquellos ejercicios que están destinados a repasar conceptos previos que se estiman necesarios para la noción que se estudia.
      2) Cálculo algorítmico: destinados al logro de destrezas algorítmicas y aplicación de reglas expuestas.
      3) Búsqueda: destinados a que el lector elija y valore las herramientas más adecuadas para su resolución y cuyo objetivo es despertar el interés o que suponga un reto, siempre apoyándose en conocimientos ya adquiridos...
      4) Aplicación de una definición: para aclarar o interpretar una definición.

5) Aplicación de propiedades: para la interpretación o aclaración de la misma.
6) Demostración: se busca la demostración de un teorema o una propiedad.
7) La vida real: contextualizados en una situación vivida generalmente por el lector.

Completaremos el análisis de las distintas situaciones, posteriormente, con el estudio detallado de cada configuración presente donde se tendrá en cuenta la clasificación realizada en el estudio de las PAU. De esta manera podremos comparar ambas clasificaciones y ver las distintas configuraciones tratadas y la importancia asignada en el estudio de la integral definida en las dos instituciones. Como veíamos para la CEalg y CEgeo distinguiremos entre directa o de aplicación. Ahora hemos añadido también la categoría "*otra*" para aquellos casos en que se trabaja con esta configuración pero de forma diferentes a las anteriores.

ii. *Lingüísticas (ANSM2)*, que pueden ser del tipo siguiente: numérico, algebraico, geométrico.
iii. *Conceptuales (ANSM3)*, en las que se considera la definición que se da de la integral definida que es nuestro objeto de estudio. Para ello observaremos si hay una única definición y si ésta es formal o intuitiva.
iv. *Proposicionales (ANSM4)*, en la que consideramos el modo en que se exponen las propiedades de la integral definida. Se tendrán en cuenta las siguientes subdimensiones:
    a. ANSM4.1 Si la exposición que se realiza de las propiedades es formal o intuitiva.
    b. ANSM4.2 Si se demuestran o justifican o solamente se exponen.
    c. ANSM4.3 si se utilizan o sólo se exponen pero sin más referencia.
v. *Procedimentales (ANSM5)* donde nos planteamos cómo son los procedimientos utilizados en las actividades distinguiendo:
    a. ANSM5.1 si se emplean varios procedimientos para resolver las situaciones o solamente uno en cada caso.
    b. ANSM5.2 Si los procedimientos que se utilizan se justifican o simplemente se exponen como métodos rutinarios.
vi. *Argumentativas (ANSM6)* que nos mostrará el tipo de argumentaciones utilizadas en el desarrollo: distinguiremos entre retórica cuando utiliza un razonamiento encaminado a justificar los desarrollos realizados, y heurística si solamente hay una exposición de dicho desarrollo.

5.3.1.2. <u>Análisis Didáctico</u>

Para analizar las funciones de estudio consideradas o escogidas para cada grupo tendremos en cuenta:

i. *Planificación ($ANDD_1$)* en cuanto al diseño del proceso de estudio, esto es, si realiza selección de los objetivos, contenidos y significados a estudiar.

ii. *Motivación ($ANDD_2$)* analizamos si aporta elementos favorecedores de un clima de motivación. Así, consideraremos dos subdimensiones:

   a. Conexión con ideas previas *($ANDD_{2,1}$)*

   b. Contextualización histórica del concepto *($ANDD_{2,2}$)*

iii. *Tipo de enseñanza desarrollada ($ANDD_3$)*, tal y como se recoge en Godino, Contreras, Font (2006, p.68) consideraremos cuatro tipos de configuraciones didácticas teóricas: magistral, adidáctica, personal y dialógica. La magistral se refiere a la manera tradicional de enseñar basada en la presentación magistral del profesor seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos expuestos. La adidáctica corresponde a la manera de organizar el trabajo del profesor y los estudiantes propuesta por la Teoría de las Situaciones Didácticas, con su secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Entre ambas configuraciones encontramos la dialógica en la que se respeta el momento de exploración, pero el profesor asume la formulación y validación mientras que la institucionalización tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos. En la personal predomina el estudio personal, y se tiene cuando la resolución de la situación se realiza sin intervención del docente. Todo ello nos informará del papel asignado al alumno en la enseñanza: una recepción pasiva (cuando se desarrolla el conocimiento de un modo trasmisivo); de descubrimiento dirigido (cuando se programa de un modo rígido el conocimiento de cara a que lo descubra); por último, de construcción del saber cuándo se facilitan situaciones de enseñanza encaminadas a tal fin.

5.3.1.3. <u>Análisis Epistemológico-Cognitivo</u>

En este apartado centraremos el estudio en las configuraciones epistémicas establecidas como significados de referencia poniendo de manifiesto si en cada configuración epistémica se tratan sus diferentes elementos de significado a no. Como configuraciones epistémicas (ANEPCG1) consideraremos: CEgeo, CErpc, CEinvderiv, CEaproxlim y CEalg. No tendremos en cuenta CEgen ya que nunca aparece pues dado lo expuesto en las PAU los profesores desarrollan la integral como límite de una suma, la integral de Cauchy-Riemann.

Así mismo, observaremos si algunos de los conflictos semióticos potenciales señalados en el capítulo anterior son abordados o, por el contrario, se deja en manos del alumno su gestión ignorándolos. Tan sólo nos proponemos detectar si en algún grupo se han tenido en cuenta y se han realizado actividades encaminadas a su superación o, muy al contrario, se han obviado. Todo lo anterior lo podemos resumir en la tabla 5.4.

Dimensiones	**Variables**	**Subvariables**	
ANSM Análisis Semiótico	ANSM1 Situaciones	ANSM1.1: Situación de introducción-motivación	Propia de las Matemáticas o de otras Ciencias
		ANSM1.2: Ejemplos	Lugar donde se incluyen, tipo de función, resolución (completa, formal…)
		ANSM1.3: Ejercicios	1.-Conocimientos previos; 2.- Cálculo algorítmico; 3.- Búsqueda; 4.- Aplicación de la definición; 5.- Aplicación de una propiedad; 6.- Demostración; 7.- Vida real
	ANSM2: Lenguajes		Numérico, algebraico, geométrico
	ANSM3: Conceptos		Definición del concepto: única, formal o intuitiva
	ANSM4 Proposiciones	ANSM4.1	Exposición formal o intuitiva
		ANSM4.2	Demostración o justificación o ninguna de ellas
		ANSM4.3	Si se utilizan o no
	ANSM5 Procedimientos	ANSM5.1	Varios para resolver una misma situación
		ANSM5.2	Se justifican o son rutinas
	ANSM6: Argumentaciones		Retórica o heurística
ANDD Análisis didáctico	ANDD1: Planificación		Objetivos y contenidos a estudiar
	ANDD2 Motivación	ANDD2.1	Conexión con ideas previas
		ANDD2.2	Contextualización histórica
	ANDD3: Tipo de enseñanza		Adidáctica, magistral, dialógica o personal.
ANEPCG Análisis epistemológico-cognitivo	ANEPCG1	CEgeo	Si aparecen o no cada una de las Configuraciones Epistémicas. El estatus de cada una de ellas se analizará en la tabla siguiente
		CErpc	
		CEinvderiv	
		CEaproxlim	
		CEalg	
	ANEPCG2: conflictos semióticos potenciales		Si se aborda algunos de los conflictos semiótico potenciales.

Tabla 5.4: Dimensiones del análisis de apuntes

5.3.2. Aplicación al análisis de los apuntes de clase

A cada grupo le hemos asignado una letra que nos permite su identificación y que corresponde con la clasificación hecha en el cuestionario que se realizó a los alumnos. En cada caso se han elaborado tres tablas que nos recogen el análisis de cada grupo. La primera de las tablas nos aporta el análisis general de los apuntes del grupo estudiado. Sin embargo, respecto de las configuraciones epistémicas, consideramos que es necesario, no solo saber si una configuración está presente, sino determinar también el grado de desarrollo de dicha configuración. Por este motivo se han introducido dos tablas más: La segunda tabla que encontremos, en cada caso, desarrollará las entidades primarias de las configuraciones epistémicas y la siguiente nos aportará un estudio de las situaciones realizadas en clase según la clasificación hecha para las PAU. Pretendemos con estas dos últimas tablas determinar de forma más explícita el estatus que el profesor ha dado a cada configuración y la forma en que la ha presentado a sus alumnos. Trataremos de responder a la pregunta: ¿Se corresponden los significados y las configuraciones con lo obtenido en las PAU en cuanto a tratamiento, estatus, etc.?

5.3.2.1. Grupo A

El análisis de los apuntes de este grupo se refleja en la tabla 5.5.

Dimensiones	Variables	Subvariables	Análisis
ANSM	ANSM1	ANSM1.1	Se desarrolla exclusivamente el área de recintos cerrados limitados por curvas.
		ANSM1.2	Los ejemplos (4) aparecen inmediatamente después de la definición y usan funciones simples. Resolución formal y completa
		ANSM1.3	De los 23 ejercicios, 18 son de cálculo algorítmico (practican un método de resolución de situaciones tipo) y 5 de búsqueda.
	ANSM2		Generalmente algebraico. El gráfico como apoyo del discurso o para ver el área que calcula siempre algebraicamente. Solamente en un ejercicio se utiliza el lenguaje geométrico exclusivamente.
	ANSM3		Hay dos definiciones de integral definida: una formal utilizando CEaproxlim para funciones positivas y continuas, otra intuitiva que usa para cualquier tipo de función y que usa CEgeo identificando integral con área.
	ANSM4	ANSM4.1	Las propiedades de la integral definida se exponen formalmente.
		ANSM4.2	Sólo se exponen, no se demuestran o justifican.
		ANSM4.3	No se usan.
	ANSM5	ANSM5.1	Cada situación es resuelta por un sólo procedimiento. El mismo procedimiento se repite para el mismo tipo de situaciones.

		ANSM5.2	Se exponen como métodos rutinarios.
	ANSM6		Heurística pues explica los pasos a seguir pero no los justifica.
ANDD	ANDD1		La única referencia es a que se va a estudiar el área bajo una curva sin justificación ni conexión con otros conceptos.
	ANDD2	ANDD2.1	No hace referencia ninguna, ni siquiera a la geometría elemental donde se calculan área y volúmenes.
		ANDD2.2	Ninguna
	ANDD3		Magistral
ANEPCG	ANEPCG1	CEgeo	Se usa ampliamente
		CErpc	No aparece en ningún caso
		CEinvderiv	Sólo se expone el TFC y se aplica para la resolución de un tipo de ejercicios.
		CEaproxlim	Se usa únicamente para realizar la definición formal.
		CEalg	Se usa en varios ejercicios.
	ANEPCG2		No se aborda ninguno.

Tabla 5.5: Análisis de los apuntes grupo A

En primer lugar observamos que el único tipo de situaciones que se trabajan en la introducción, para motivar el nuevo concepto, son las puramente geométricas, en concreto, el área de recintos planos limitados por curvas (ANSM1.1), sin embargo, no hay conexión ni con el momento histórico ni con la geometría elemental (ANDD2) en la que se calculan áreas y volúmenes de figuras cerradas utilizando las fórmulas oportunas. Queda por determinar la necesidad de una nueva manera de calcular el área y por qué para funciones, ¿qué relación tiene con el área de la vida cotidiana? Hay que tener en cuenta que tampoco hay aplicaciones extramatemáticas, ni siquiera en los ejercicios (ANSM1.3), con lo que puede resultar un área geométrica muy descontextualizada para el alumno.

Observamos como el desarrollo parece ir buscando la eficacia en la resolución de un cierto tipo de problemas dado que el desarrollo es puramente trasmisivo, casi todos los ejercicios son de cálculo algorítmico (18 de los 23 ejercicios son de este tipo, lo que supone un 78’26%), utiliza un lenguaje algebraico y por un único método: el cálculo de la primitiva y la aplicación de la regla de Barrow. Los elementos formales como las definiciones o propiedades se exponen sin justificación, sin embargo, dado que apenas se trabajan, es difícil su asimilación. En esta misma línea observamos que las argumentaciones son, sobre todo, heurísticas pues muestran cómo se aplican los métodos para resolver un tipo de problemas pero no justifican dichos métodos. Tampoco se tienen en cuenta los posibles conflictos semióticos, quizás por este desarrollo muy centrado en los procedimientos, posiblemente buscando la eficacia, y que deja de lado cuestiones de significado.

Por otra parte, la definición formal de integral utilizando CE-aproxlim se puede ver como una justificación de por qué la nueva herramienta, la integral definida, se utiliza para el cálculo de áreas de recintos limitados por curvas, sin embargo, sólo se expone para funciones positivas y continuas donde la integral coincide con el área y estudia los otros casos a través de ejercicios tipo una vez explicado el método a seguir. No justifica puntos como por qué una integral es negativa, si se ha identificado con un área, o la interpretación de un recinto cerrado de área no nula y cuya integral es cero, dejando estas cuestiones bajo la responsabilidad del alumno. Además, esta definición apenas se utiliza en la resolución de situaciones, sólo para identificar el área con el cálculo integral a nivel puramente formal con lo que es dudoso que el alumno llegue a asimilarla, considerando además la gran complejidad que diversos autores han puesto de manifiesto, muy asociados al concepto de límite, y que hemos reflejado en los conflictos semióticos potenciales definidos en el capítulo anterior.

Al analizar las configuraciones epistémicas presentes en el desarrollo de la integral definida para este grupo observamos que destaca CEgeo, a la que se le asigna un papel fundamental, y la ausencia de CErpc. La tabla 5.6 muestra la forma en que aparecen las configuraciones epistémicas tratadas en este grupo comparándolas con lo establecido en el capítulo anterior para cada una de ellas.

	Configuraciones			
Entidades	**CEgeo**	**CEinvderiv**	**CEaproxlim**	**CEalg**
Situaciones	No calcula volúmenes.	5 de aplicación del TFC una vez enunciado y uno de búsqueda de propiedades	Una de una función positiva y continua abstracta.	Diversos ejemplos y ejercicios
Lenguaje	Algebraico. El gráfico como apoyo del discurso o para ver el área que calcula siempre algebraicamente	El algebraico y en un ejercicio el geométrico	Algebraico	Algebraico
Definiciones	Se expone	No se expone	Se exponen	No se exponen en este tema, sí en la introducción de las integrales indefinidas (tema anterior)
Propiedades	Se exponen	Se enuncia	Se expone	Regla de Barrow, las otras en el tema anterior
Procedimientos	Se expone y practican en diversos ejercicios	Un ejercicio para el primer procedimiento. Cinco ejemplos para el segundo.	Solamente en el desarrollo teórico para la definición de integral.	Se realizan en varios ejercicios

Argumentos	Heurística	Heurística	Heurística	Heurística

Tabla 5.6: Análisis de la configuraciones grupo A

En cuanto a la configuración geométrica, podemos observar cómo se trabajan todas las entidades primarias, aunque nos parece muy importante destacar el lenguaje utilizado. Solamente se utilizan el lenguaje algebraico y el gráfico como apoyo al discurso, olvidando un lenguaje numérico o un gráfico exclusivamente y, por supuesto, el paso de uno a otro, así como el uso de programas de cálculo simbólico o de calculadoras gráficas. En las demás configuraciones encontradas en este grupo podemos observar lo mismo respecto del lenguaje.

En cuanto a la configuración inversa de la derivada y aproximación al límite, además de lo expuesto para el lenguaje, podemos ver que se les da un tratamiento mucho menor pues no se trabajan todas las entidades primarias y se realizan pocas situaciones donde se utilicen. No así con CEalg que se trabaja con más amplitud, incluso en varios ejercicios.

Podemos deducir que este profesor hace un tratamiento de la integral definida conforme a lo que se deriva del estudio de las PAU, esto es, una presencia muy fuerte de la CEgeo utilizando el lenguaje algebraico casi exclusivamente, y una práctica del cálculo integral manifestado en la CEalg. Todo lo anterior se pone más de manifiesto si clasificamos las 27 situaciones realizadas en este grupo utilizando la clasificación que hicimos para las PAU y que es la que aparece en la tabla 5.7 (en un ejercicio es necesario utilizar dos CE, la CEgeo y la CEinvderiv y se ha puesto en ambos casos):

Integral Definida	CEalg (8)	Directa	**6**	**21’43%**
		Aplicación	**2**	**7’14%**
		Otras	**0**	**0**
	CEgeo (14)	Directa	**11+1**	**42’86%**
		Aplicación	**2**	**7’14%**
		Otras	**0**	**0**
	CEinvderiv (6)		**5+1**	**21’43%**
			28	**100%**

Tabla 5.7: Clasificación de los ejercicios según las CE, grupo A

Es claro que la configuración que más se aparece es la geométrica y, en concreto, las situaciones de cálculo directo de un área. Al igual que sucede en las PAU se trabaja también la CEalg, casi siempre de forma directa nuevamente. Respecto de la CEalg hay que tener en cuenta que el tema anterior se ha dedicado ampliamente a las reglas de integración y que la regla de Barrow se trabaja también al calcular áreas, con lo que es normal que ahora se trabaje un poco menos. En cuanto a la CEinvderiv tiene un desarrollo muy reducido, se limita a la exposición del Teorema Fundamental del Cálculo y a su aplicación al cálculo de la derivada de un tipo de funciones (nuevamente se expone un método de resolución de situaciones tipo, el cual se practica en 5 situaciones similares), sólo interviene la idea de que integración y derivación son procesos inversos en un único ejercicio extraído de las PAU del curso anterior.

Podemos concluir de esta tabla que se potencia mucho el trabajo algorítmico quizás buscando que el alumno aprenda a aplicar bien los métodos, destacando que las situaciones que más se trabajan son las que corresponden a CEgeo directa y que se resuelven por un único procedimiento que consiste en el cálculo de la primitiva y la aplicación de la regla de Barrow.

5.3.2.2. Grupo B

El análisis general de los apuntes de este grupo se refleja en la tabla 5.8

Dimensiones	Variables	Subvariables	Análisis
ANSM	ANSM1	ANSM1.1	Se desarrolla exclusivamente el área de recintos cerrados limitados por curvas.
		ANSM1.2	Los ejemplos (2) aparecen inmediatamente después de la definición y usan funciones simples. Se resuelven formal y completamente. Uno de ellos utiliza además la geometría elemental para su resolución.
		ANSM1.3	De los 25 ejercicios, 17 son de cálculo algorítmico (practican un método de resolución de situaciones tipo), 5 de búsqueda y 3 de aplicación de la definición (CEgeo)
	ANSM2		Generalmente algebraico. El gráfico como apoyo del discurso o para ver el área que calcula siempre algebraicamente.
	ANSM3		Hay dos definiciones de integral definida: una formal utilizando CEaproxlim para funciones positivas y continuas, otra intuitiva que usa para cualquier tipo de función y que usa CEgeo identificando integral con área.
	ANSM4	ANSM4.1	Las propiedades de la integral definida se exponen formalmente.
		ANSM4.2	Sólo se exponen, no se demuestran o justifican.
		ANSM4.3	No se usan estas propiedades
	ANSM5	ANSM5.1	La mayoría de las situaciones son resueltas por un sólo procedimiento, el cual se repite para el mismo tipo de situaciones, sin embargo, una situación se resuelve por dos métodos el geométrico y el algebraico y en otra se mezclan ambos procedimientos.
		ANSM5.2	Se exponen como métodos rutinarios.
	ANSM6		Heurística pues explica los pasos a seguir pero no los justifica.
ANDD	ANDD1		La única referencia es a que se va a estudiar el área bajo una curva sin justificar su necesidad.
	ANDD2	ANDD2.1	En 2 ejercicios y un ejemplo intenta conectar con la noción de área de la geometría elemental para figuras simples como un

			triángulo, un cuadrado y un rectángulo, reinterpretándolos y viendo que coinciden con la nueva definición.
		ANDD2.2	No hay contextualización histórica
	ANDD3		Magistral
ANEPCG	ANEPCG1	CEgeo	Se usa ampliamente
		CErpc	No aparece en ningún caso
		CEinvderiv	Se conoce y nombra en varios momentos. Se expone el TFC y se aplica para la resolución de ejercicios.
		CEaproxlim	Se usa únicamente para realizar la definición formal.
		CEalg	Se usa en varios ejercicios.
	ANEPCG2		No se aborda ninguno.

Tabla 5.8: Análisis de los apuntes grupo B

El desarrollo es muy similar al grupo anterior y por tanto lo dicho anteriormente es aplicable a este grupo. Nuevamente sólo se estudia el área de recintos cerrados limitados por curvas. En este caso después de la definición formal hay un ejemplo que se resuelve a través de la geometría elemental así como dos ejercicios. Es, por tanto, una mínima conexión para constatar que el área definida a través de la integral definida y la obtenida mediante las fórmulas geométricas da el mismo resultado para una determinada figura. Sin embargo, no aborda la necesidad de la nueva herramienta.

También en este grupo se expone la CEaproxlim pero nuevamente casi no se trabaja. Además se realiza la definición para funciones positivas y continuas y se deja en manos del alumno el hecho de que una integral sea negativa, a pesar de haberla identificado con un área, o el que sea cero aunque en la gráfica pueda haber una región de área no nula. No se abordan ninguno de los posibles conflictos semióticos.

Al igual que en el primer grupo, podemos decir que se busca la eficacia pues el desarrollo es muy algorítmico, basándonos en que la mayoría de los ejercicios lo son y se resuelven en general por un mismo método a través de un lenguaje algebraico, la enseñanza parece de tipo magistral y no se demuestran las propiedades o justifican las definiciones, solamente se exponen.

El lenguaje vuelve a ser el algebraico fundamentalmente y, de forma muy secundaria, el geométrico que utiliza para visualizar la figura casi siempre, aunque en algún caso utiliza el geométrico para resolver la situación.

En cuanto a las configuraciones nos encontramos con un esquema similar al grupo anterior, esto es, no se trabaja el resultado de un proceso de cambio, la aproximación al límite se utiliza para la definición formal nada más. Más concretamente se pueden ver cómo se desarrollan las distintas configuraciones en la tabla 5.9

	Configuraciones			
Entidades	**CEgeo**	**CEinvderiv**	**CEaproxlim**	**CEalg**
Situaciones	No calcula volúmenes.	Se trabajan dos tipos de situaciones.	Una función abstracta continua y positiva en el primer cuadrante	Se trabaja en varios ejercicios
Lenguaje	Algebraico. El gráfico como apoyo o para visualizar el área que calcula por métodos algebraicos. En un caso utiliza el numérico para un ejercicio que posteriormente realiza a través del cálculo de la primitiva.	Solamente algebraico	Algebraico. No hay numérico.	Algebraico
Definiciones	Se expone	Se nombra, quizás conocida del tema anterior	Se exponen pero no se trabajan	No se exponen en este tema, sí en las integrales indefinidas (tema anterior)
Propiedades	Se exponen	Se enuncia	Se exponen.	Solamente la regla de Barrow
Procedimientos	Realiza un esquema de los posibles casos para calcular un área. Lo que trabaja en los ejemplos y ejercicios ampliamente	El segundo caso como método para resolver un tipo de ejercicios. Además en la resolución de dos ejercicios de aplicación.	Solamente en el ejemplo que sirve para el desarrollo teórico de la definición de integral. No realiza ningún tipo de ejercicio ni de ejemplo de aplicación.	Se realizan en varios ejercicios
Argumentos	Heurística pues expone los métodos. Utiliza el apoyo gráfico.	Heurísticos pues expone cómo se hacen ese tipo de ejercicios	Heurística	
Observaciones	Realiza algunos ejercicios para diferenciar integral y área en concreto para comprobar que si una integral da cero la función no es y=0			

Tabla 5.9: Análisis de la configuraciones grupo B

La distribución de situaciones que realiza está reflejada en la tabla 5.10

Integral Definida	CEalg (6)	Directa	**4**	**14’82%**
		Aplicación	**1**	**3’7%**
		Otras	**1**	**3’7%**
	CEgeo (17)	Directa	**14**	**51’85%**
		Aplicación	**0**	**0**
		Otras	**3**	**11’11%**
	CEinvderiv (4)		**4**	**14’82%**
			27	**100%**

Tabla 5.10: Clasificación de los ejercicios según las CE, grupo B

Volvemos a observar un trabajo importante de la CEgeo, sobre todo, directa (alrededor del 50%) en la línea de las PAU que era un 55’45% del total de configuraciones. En este caso la CEalg directa tiene un tanto por ciento menor; pero nuevamente hay que considerar el amplio trabajo realizado por este profesor en el tema anterior (integral indefinida) respecto de los métodos de integración.

5.3.2.3. Grupo C

Dimensiones	Variables	Subvariables	Análisis
ANSM	ANSM1	ANSM1.1	Se desarrolla exclusivamente el área de recintos cerrados limitados por curvas.
		ANSM1.2	Los ejemplos aparecen inmediatamente después de la definición e ilustrando la clasificación: “*tipos de problemas con integrales definidas*” que expone. Se resuelven formalmente utilizando un lenguaje algebraico y en algún caso la representación de la función. Usa diferentes tipos de funciones.
		ANSM1.3	De los 44 ejercicios, todos son de cálculo algorítmico (practican un método de resolución de situaciones tipo).
	ANSM2		Generalmente algebraico. El gráfico como apoyo del discurso o para ver el área que calcula siempre algebraicamente.
	ANSM3		Hay una única definición de integral definida que identifica con la función área (CEgeo) realizada para funciones positivas y continuas.
	ANSM4	ANSM4.1	Las propiedades de la integral definida se exponen formalmente.
		ANSM4.2	Se exponen. Sólo se demuestra la regla de Barrow. El resto se exponen nada más.
		ANSM4.3	No se usan.
	ANSM5	ANSM5.1	Algunas situaciones se resuelven de dos maneras: con y sin apoyo de la gráfica de la función, pero en cualquier caso mediante un método algebraico por lo que podemos considerar que utiliza un sólo procedimiento. El mismo procedimiento se repite para el

			mismo tipo de situaciones.
		ANSM5.2	Se exponen como métodos rutinarios. Incluso hace una clasificación del tipo de problemas que podemos encontrar en los ejemplos y respecto de la cual clasifica los ejercicios del libro que posteriormente irá resolviendo.
	ANSM6		Heurística pues explica los pasos a seguir pero no los justifica.
ANDD	ANDD1		La única referencia es a que se va a estudiar el área bajo una curva sin justificación ni conexión con otros conceptos.
	ANDD2	ANDD2.1	No hace referencia ninguna, ni siquiera a la geometría elemental donde se calculan área y volúmenes.
		ANDD2.2	Ninguna
	ANDD3		Magistral
ANEPCG	ANEPCG1	CEgeo	Se usa ampliamente
		CErpc	No aparece en ningún caso
		CEinvderiv	Sólo se expone el TFC y se aplica para la resolución de un tipo de ejercicios que practica en dos casos.
		CEaproxlim	No aparece.
		CEalg	Se usa en varios ejercicios.
	ANEPCG2		No se aborda ninguno.

Tabla 5.11: Análisis de los apuntes grupo C

Nuevamente se estudian sólo áreas de recintos limitados por curvas. En este caso la CEgeo es, prácticamente, la única que se utiliza. Podemos decir que el desarrollo está centrado en conseguir de los alumnos adquieran la destreza de calcular el área de recintos limitados por curvas, como muestra el que todos los ejercicios son de cálculo algorítmico, con un procedimiento único: el cálculo de la primitiva, que repite una y otra vez siguiendo unos pasos que ha establecido explícitamente creando un método para aplicar en este tipo de ejercicios. Como en los casos anteriores no se abordan los posibles conflictos semióticos.

La clasificación de las entidades primarias de cada una de las configuraciones epistémicas se refleja en la tabla 5.12

	Configuraciones			
Entidades	**CEgeo**	**CEinvderiv**	**CEaproxlim**	**CEalg**
Situaciones	Identificación total de integral con área para funciones positivas. El 79’54% de los ejercicios son exclusivamente de esta configuración. Realiza un	Solamente en dos ejercicios, planteado como un método de resolución de un determinado tipo de problemas.	No se trabaja esta configuración. No aparece en ningún caso.	Se trabaja en varios ejercicios

	minucioso estudio de los posibles casos para calcular un área a través de la integral pero no lo justifica. No calcula volúmenes.			
Lenguaje	Algebraico, el geométrico como apoyo para visualizar el área que calcula por métodos algebraicos	Exclusivamente el algebraico		Algebraico
Definiciones	Se expone	No se expone		No se exponen en este tema, sí en las integrales indefinidas (tema anterior)
Propiedades	Se exponen	Se expone		Solamente la regla de Barrow
Procedimientos	Se exponen y se trabajan ampliamente. Se hace un minucioso estudio de los posibles casos para el cálculo del área de un recinto cerrado	Sólo el cálculo de la derivada de una función definida mediante una integral		Se realizan en varios ejercicios
Argumentos	Heurística	Heurística		
Observaciones	Fortísimo sesgo a la integral como área de un recinto. Prácticamente se dedica todo el estudio de la integral definida a este tipo de ejercicios, en sus diferentes casos.	No trabaja la idea de que integral y derivada son inversas una de la otra, sólo plantea un método de resolución de un determinado tipo de problemas.		

Tabla 5.12: Análisis de la configuraciones grupo C

En ella podemos observar el papel central asignado a la CEgeo así como la utilización de la CEinvderiv, que nuevamente se usa como método de resolución de un tipo de problemas. Deja en manos del alumno establecer la derivación y la integración como procesos inversos entre otras cuestiones.

La distribución de situaciones que realiza es la que aparece en la tabla 5.13

Integral Definida	CEalg (7)	Directa	**7**	**15’91%**
		Aplicación	**0**	**0%**
		Otras	**0**	**0%**

	CEgeo (35)	Directa	**34**	**77'27%**
		Aplicación	**1**	**2'27%**
		Otras	**0**	**0%**
	CEinvderiv (2)		**2**	**4'55%**
			44	**100%**

Tabla 5.13: Clasificación de los ejercicios según las CE, grupo C

Donde se muestra el papel tan importante que se da a la CEgeo directa, seguido de la CEalg directa en consonancia con las PAU.

5.3.2.4. Grupo D

El análisis general de los apuntes de este grupo se refleja en la tabla 5.14

Dimensiones	Variables	Subvariables	Análisis
ANSM	ANSM1	ANSM1.1	Se desarrolla exclusivamente el área de recintos cerrados limitados por curvas. Función abstracta positiva y continua.
		ANSM1.2	Dos ejemplos aparecen inmediatamente después de la definición. Se resuelven totalmente mediante métodos formales.
		ANSM1.3	De los 22 ejercicios, 20 son de cálculo algorítmico (practican un método de resolución de situaciones tipo) y 2 de aplicación de una propiedad: TFC.
	ANSM2		Generalmente algebraico. El gráfico como apoyo del discurso o para ver el área que calcula siempre algebraicamente.
	ANSM3		Hay una única definición informal de integral definida identificándola con la función área (CEgeo)
	ANSM4	ANSM4.1	Sólo expone la regla de Barow y el TFC, no indica ninguna otra propiedad.
		ANSM4.2	Sólo se exponen, no se demuestran o justifican.
		ANSM4.3	
	ANSM5	ANSM5.1	Cada situación es resuelta por un sólo procedimiento. El mismo procedimiento se repite para el mismo tipo de situaciones.
		ANSM5.2	Se exponen como métodos rutinarios.
	ANSM6		Heurística pues explica los pasos a seguir pero no los justifica.
ANDD	ANDD1		La única referencia es a que se va a estudiar el área bajo una curva sin justificación ni conexión con otros conceptos.
	ANDD2	ANDD2.1	No hace referencia ninguna, ni siquiera a la geometría elemental donde se calculan área y volúmenes.
		ANDD2.2	Ninguna
	ANDD3		Magistral
ANEPCG	ANEPCG1	CEgeo	Se usa ampliamente
		CErpc	No aparece en ningún caso
		CEinvderiv	Sólo se expone el TFC y se aplica para la resolución de un tipo de ejercicios, que practica

			en dos casos
		CEaproxlim	No se usa
		CEalg	Se usa en varios ejercicios.
	ANEPCG2		No se aborda ninguno.

Tabla 5.14: Análisis de los apuntes grupo D

En este grupo volvemos a encontrarnos con un desarrollo centrado en el cálculo de áreas bajo la curva sin justificación ni conexiones con otras ideas o con la geometría elemental. Se busca, a través de una enseñanza que sigue una configuración magistral y un entrenamiento de un tipo de ejercicios sin una verdadera búsqueda del significado de la integral definida. Este hecho se refleja en la tabla 5.15 donde se muestra el papel central asignado a la CEgeo, el papel secundario de la CEinvderiv (aunque en ambos casos se exponen como métodos de resolución de un tipo de problemas); y la ausencia de otras configuraciones que no parecen ser "eficaces" para la resolución de los problemas que suelen aparecer en las PAU.

	Configuraciones			
Entidades	**CEgeo**	**CEinvderiv**	**CEaproxlim**	**CEalg**
Situaciones	Identifica integral con área para funciones positivas. Posteriormente expone los diversos casos y sus correspondien-tes métodos para calcular un área a través de una integral. Un 72'73% de las situaciones trabajadas corresponde a esta configuración. No calcula volúmenes.	Se expone como método para resolver un tipo de problemas.	No se trabaja esta configuración. No aparece en ningún caso.	Se trabaja en varios ejercicios
Lenguaje	Principalmente el algebraico, el gráfico como apoyo, para visualizar el área que calculará después algebraicamente	Algebraico exclusivamente		Algebraico
Definiciones	Se expone	Solamente se nombra		No se exponen en este tema, sí en las integrales indefinidas (tema anterior)
Propiedades	Se exponen	Se expone		Solamente la regla de Barrow
Procedimientos	Se exponen y	Solamente el		Se realizan en

	trabajan ampliamente.	cálculo de la derivada de un función definida mediante una integral con límites de integración funciones		varios ejercicios
Argumentos	Heurística	Heurística		
Observaciones		No trabaja la idea de que integral y derivada son inversas una de la otra, sólo plantea un método de resolución de un determinado tipo de problemas.		

Tabla 5. 15: Análisis de la configuraciones grupo D

La distribución de situaciones que realiza es la que se muestra en la tabla 5.16 y confirma la búsqueda de efectividad en la resolución de los ejercicios de las PAU.

Integral Definida	CE-alg (4)	Directa	**4**	**18'18%**
		Aplicación	**0**	**0**
		Otras	**0**	**0**
	CE-geo (16)	Directa	**16**	**72'73%**
		Aplicación	**0**	**0**
		Otras	**0**	**0**
	CE-invderiv (2)		**2**	**9'09%**
			22	**100%**

Tabla 5.16: Clasificación de los ejercicios según las CE, grupo D

5.4. Conclusiones

Tras el análisis de cada uno de los grupos estudiados podemos concluir diversas cuestiones. En general, el momento del primer encuentro con la integral definida es bastante similar en los cuatro grupos estudiados. En ellos se realiza según una configuración didáctica magistral, sin ningún tipo de investigación o aproximación previa por parte del alumno. No hay tampoco justificación de la necesidad de la nueva noción, ni contextualiación histórica que le dote de sentido, algo muy similar a lo que observaron ya en Contreras y cols. (2003) para los manuales de 1998-2000 de este nivel educativo en la integral definida, lo que nos puede mostrar el "estancamiento" de esta noción. Solamente en un grupo hay una pequeña conexión con la geometría elemental al calcular, tras la definición, el área bajo curvas que determinan un triángulo, un cuadrado y un rectángulo mediante la integral definida para comprobar que se obtiene el mismo resultado que aplicando las fórmulas geométricas. Sin embargo, no se retoma la noción de área como noción previa tal y como proponen Cabañas y Cantoral (2005), dándose esta noción por transparente en este nivel educativo y dejando en manos de los estudiantes la conexión entre el área de figuras planas estudiada en cursos anteriores y el área bajo la curva, que ahora se presenta como el área de trapecios mixtilíneos. Es probable que ante esta desconexión el estudiante no sea capaz de entender la integral definida como una auténtica área y no la dote de significado. De esta manera será un método de cálculo que aplicarán según determinadas pistas lingüísticas que ofrezca la situación.

Por otra parte, aunque se identifica integral con área el desarrollo está centrado en los procedimientos de cálculo de forma casi exclusiva (concretamente en el cálculo de la primitiva y la aplicación de la regla de Barrow) como muestra el que casi todos los ejercicios realizados en los grupos sean de cálculo algorítmico y la distribución de configuraciones en dichos ejercicios que está en total consonancia con los propuestos en las PAU como podemos observar en la tabla 5.17 en la que se han agrupado los datos expuestos en las secciones anteriores.

			PAU	**Grupo A**	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**
Integral Definida	CEalg	Directa	**23’33%**	**21’43%**	**14’82%**	**15’91%**	**18’18%**
		Aplicación	**4’17%**	**7’14%**	**3’7%**	**0**	**0**
		Otras		**0**	**3’7%**	**0**	**0**
	CEgeo	Directa	**60’83%**	**42’86%**	**51’85%**	**77’27%**	**72’73%**
		Aplicación	**9’17%**	**7’14%**	**0**	**2’27%**	**0**
		Otras		**0**	**11’11%**	**0**	**0**
	CEinvderiv		**2’5%**	**21’43%**	**14’82%**	**4’55%**	**9’09%**
			100%	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Tabla 5. 17: Clasificación de los ejercicios según las CE de las PAU y de los grupos

Probablemente los estudiantes de estos grupos asociarán la integral definida con un método de cálculo sin más, en la línea de lo observado por Lloren y Santonja (1997). Estos autores observaron que dada la secuencia de contenidos de los libros de texto para la integral definida (la misma seguida en estos grupos) los alumnos identifican integral con cálculo de primitivas, la integral definida con la aplicación de la regla de Barrow, no interpretándola como un área sino con un sentido puramente algebraico: “El comienzo de los problemas cabe situarlo, evidentemente, en el mismo orden de exposición de los temas relativos al cálculo integral y en la insistencia que en ellos se hace. Si al alumno se le adiestra, (…), en el cálculo de primitivas que, además, encabeza el estudio del cálculo integral, no podemos pretender que, después, por dedicar una escasa atención (si es que llega a hacerse) al concepto de integral y a sus aplicaciones, las cosas queden en su sitio” (p. 69). Apuntan estos autores que uno de los motivos puede ser que son los tipos de ejercicios que se proponen en las PAU, lo que hemos comprobado que sigue sucediendo en el período que estudiamos, y que además “Las "reglas de derivación", las propiedades que se aplican en la resolución de una indeterminación o en la obtención de la primitiva de una función, la propia regla de Barrow, etc., son manifestaciones de esa algebrización que siempre representa el final de un largo proceso, incluso desde el punto de vista histórico. El énfasis en estos aspectos algebraicos puede ser más "cómodo" para el profesor porque, por ejemplo, siempre es más sencillo evaluar esas cuestiones de cálculo que evaluar los aspectos conceptuales.” (ibíd. p. 71)

Extraemos también que a pesar de dicha identificación de la integral definida con el área se ignoran cuestiones de acumulación con lo que carecerán de sentido las aplicaciones donde sea necesario este significado. Esta ausencia provoca una dificultad ya señalada por Tall (1991b, citado en Labraña), entre otros, quien puso de manifiesto que los estudiantes son incapaces de reconocer la integral en situaciones donde no aparece explícitamente e ignorando la dificultad de entender la variación de una función cuando no depende del tiempo señalada por Schneider (1988). Además, consideramos que toma su sentido lo manifestado por Ferrini-Mundy and Guardard (1992, citado en Rasslan y Tall, 2002) que consideran que los procedimientos de secundaria son incluso perjudiciales para los desarrollos posteriores. Así, la mayoría de los estudiantes sólo reconocen como aplicación de la integral definida el área bajo la curva (Berry y Nyman, 2003 y Camacho, Depool y Garbín, 2008) Sin embargo, ya apuntó Turégano (1998) que la acumulación choca de frente con las PAU que pone el acento en aspectos mecánicos y no conceptuales.

Podemos decir que también las cuestiones infinitesimales subyacentes en esta noción están ausentes pues, aunque en dos grupos se presenta CEaproxilim no se trabaja en los ejercicios, ni siquiera en ejemplos. Se hace una definición formal de la integral definida, que pretende un formalismo ajeno al alumno y que dudosamente el estudiante llegará a comprender por sí mismo como afirma Wenzelburger (1994) que considera que la enseñanza formal para estos primeros momentos de contacto con la integral definida no es adecuada. Más aún teniendo en cuenta que no aborda los conflictos semióticos potenciales que expusimos en el capítulo 4, muy asociados al paso al límite, por lo que deja bajo la responsabilidad del estudiante su gestión y dan por trasparentes las numerosas dificultades que, como ya expusimos, diversos autores han detectado.

También consideramos ausente el significado de la integral como proceso inverso de la derivación pues, aunque se expone el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, éste no se trabaja más que como un nuevo método de resolución de un modelo de ejercicios, también totalmente descontextualizados. Esta ausencia provocará que aunque los estudiantes conocen la reciprocidad derivada integral no está asimilada (Labraña, 2001, Carlson, Persson & Smith, 2003)

Si observamos los lenguajes en todos los grupos se utiliza el lenguaje algebraico de forma casi exclusiva. El lenguaje geométrico se utiliza para dibujar la gráfica de las funciones y poder visualizar el recinto al que calcularle el área, pero con un papel totalmente secundario, esto es, la integral es un área pero se basan en cálculos aritméticos y no en una visualización geométrica que tiene poca fuerza (Labraña, 2001, Rasslan y Tall, 2002) Por ello se producirá una incapacidad de calcular el valor de una integral en contextos geométricos simplemente contando unidades por la dependencia del área del cálculo de primitivas o la prevalencia del resultado numérico obtenido mediante el desarrollo algebraico si hay conflicto entre la gráfica y este último, detectada por este mismo autor. No le será fácil a un estudiante de estos grupos explicar por qué una integral puede ser negativa o nula si su área no es cero.

Por último, señalar que no hay situaciones que se resuelvan por dos métodos diferentes, no hay cambios de lenguaje, ni coordinación entre los distintos significados. Éstos quedan para el estudiante aislados unos de otros y no podrá establecer la necesaria coordinación.

Observamos, que en cada uno de estos grupos se ha hecho un desarrollo similar al que se desprende de las PAU, totalmente centrado en los procedimientos de cálculo a través de la primitiva, aunque ello suponga una verdadera renuncia al significado de la integral definida pues no se abordan cuestiones fundamentales para su comprensión.

Es claro, que nos surge la necesidad, en este momento, de verificar los efectos de esta enseñanza tan sesgada hacia la integral definida como área y como método algebraico prácticamente en el aprendizaje de los alumnos. Esto es, nos planteamos estudiar los significados personales de los estudiantes que han recibido esta enseñanza y determinar los conflictos semióticos y las ausencias de significado que se pueden producir además de los ya señalados.

Capítulo 6

Significados personales

Una vez que los significados subyacentes a las PAU ha sido determinados y que de los cuatro grupos analizados, los significados implementados siguen desarrollos muy similares a los de aquellas (centrado en los procedimientos más que en los significados), nos proponemos establecer el efecto que este tipo de enseñanza produce en los aprendizajes, es decir, aproximarnos al significado personal que estos grupos de estudiantes han construido, buscando regularidades, tendencias, puntos conflictivos, lagunas de significado, etc. Es decir, en este trabajo nos planteamos describir o caracterizar en términos de "semiometría" (Godino y Batanero, 1998) el significado personal de los estudiantes objeto de estudio acerca de la integral definida.

La cuestión de la evaluación de los conocimientos matemáticos es una cuestión compleja en la que subyace nuestra propia concepción de lo que es la comprensión matemática. Como ya se dijo en el capítulo 3, interpretar el significado desde la dualidad institucional-personal lleva a concebir la comprensión como un proceso social y no como proceso mental, entendiéndola como la correspondencia entre los significados personales y los institucionales, lo que además, señala la dependencia de los significados personales de los institucionales. Así, en el EOS se entiende la comprensión personal como "construcción o apropiación del significado institucional".

Aunque reconocemos la comprensión personal como un constructo inobservable que requiere diversos procesos: cuestionarios, entrevistas,…, podemos aproximarnos a él mediante el análisis de las prácticas realizadas por los estudiantes ante una serie de situaciones elegidas para tal fin. Una cuestión fundamental en el EOS es que como objeto básico del análisis cognitivo se toman los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto ante determinado campo de problemas. Por ello, para evaluar la comprensión de la integral definida observaremos el conjunto de prácticas manifestadas asociadas a este objeto según el significado de referencia determinado, esto es, analizaremos el significado personal declarado, lo que nos permitirá establecer características del significado personal de los estudiantes de estos cuatro grupos cuya enseñanza conocemos.

6.1 Instrumentos utilizados

Como instrumento para aproximarnos a este significado personal nos propusimos realizar un cuestionario dirigido a los alumnos de 2º de Bachillerato que habían recibido la instrucción correspondiente a la integral definida. Como paso previo realizamos un cuestionario piloto cuyo objetivo era analizar la eficacia de la herramienta para el análisis de los significados personales, buscando, por una parte, puntos conflictivos en la resolución y, por otra, confrontar y completar el análisis a priori que realizamos para su corrección. Una vez corregido y analizado el cuestionario a priori se elaboró el cuestionario definitivo que nos sirvió para determinar el significado personal, que es el principal objetivo en este capítulo. Este cuestionario definitivo se completó con entrevistas semiestructuradas, que buscaban clarificar determinadas cuestiones detectadas en la corrección que nos resultaban ambiguas y que nos parecía debíamos concretar ya que podían mostrar conflictos semióticos.

En la elaboración de ambos cuestionarios se tuvieron en cuenta, por una parte, las aportaciones de diferentes trabajos de investigación que habían planteado cuestionarios a alumnos de un nivel educativo similar al nuestro sobre la integral definida, en concreto, Labraña (2001) y Turégano (1994); el trabajo realizado por Wenzelburger (1993) en el que se tratan cuestiones de acumulación y que consideramos debían estar presentes en nuestro estudio. Por otra parte, tuvimos en cuenta, libros de texto de 2º de bachillerato y las PAU de los años anteriores, lo que se indicará en cada cuestión.

Para la corrección de los cuestionarios se realizó un análisis de cada una de las cuestiones propuestas, según la plantilla común que muestra la tabla 6.1. En él se determinan: los objetivos perseguidos con la cuestión y que descomponemos en general y específicos, los significados institucionales de referencia, las entidades primarias de la actividad matemática y los conflictos semióticos. En estos últimos hemos distinguido entre los conflictos propios de la integral definida y aquellos que están asociados a otros objetos matemáticos como son las funciones, por ejemplo.

<table>
<tr><th colspan="3">Plantilla de análisis de cuestiones</th></tr>
<tr><td colspan="3">CUESTIÓN ———</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo general</td><td>Se específica el objetivo perseguido con la cuestión planteada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos específicos</td><td>Se concreta el objetivo general en diferentes objetivos específicos dotándolo de operatividad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Significados institucionales de referencia subyacentes (CE)</td><td>Se especifican las Configuraciones Epistémicas que es necesario movilizar en la resolución de la cuestión según las establecidas en el capítulo 4.</td></tr>
<tr><td>Entidades primarias</td><td>Situación-problema</td><td>Se especifican las características específicas y definitorias de la cuestión propuesta.</td></tr>
</table>

	Lenguaje	Los tipos de lenguaje que se pueden usar en la resolución. Los posibles lenguajes que hemos considerado son: natural, analítico, numérico y gráfico.
	Argumentaciones	Distinguimos dos tipos de argumentaciones siguiendo a Duval (1995) que podemos encontrar en la respuestas de los alumnos: *Retórica: justificación verbal de un enunciado *Heurísitica: justificación de la eficacia de una acción. Si el alumno solamente realiza los procedimientos para resolver la situación pero no los acompaña de ningún comentario, consideramos que no realiza ningún tipo de argumentación ya que no la expresa.
	Conceptos y proposiciones	Se han unido ambas entidades primarias en este grupo. En él analizamos, por una parte, los conceptos-regla (que se tendrán en cuenta en el cuestionario definitivo) y, por otra parte, las proposiciones necesarias entre las que se incluyen las posibles proposiciones falsas que pueden utilizarse en la resolución de la cuestión. Éstas serán fuente de conflictos semióticos y serán expuestos en ese apartado.
	Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral definida		Hemos distinguido entre los errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral definida y los que no lo son. En este apartado completamos los conflictos semióticos propios de las proposiciones falsas que se utilicen (ya vistos en las proposiciones) y otros que puedan aparecer.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral definida		Aunque consideramos que los errores, en general, son debidos a conflictos semióticos, hemos observado que algunos corresponden a otros objetos matemáticos subyacentes (el opuesto será un ejemplo que veremos o las funciones) y nos pareció necesaria su diferenciación. Es claro que inciden en la comprensión de la integral pero su análisis y estudio no corresponde a nuestra investigación.

Tabla 6.1: Plantilla de análisis de cuestiones de los cuestionarios

Realizada la corrección es necesario pasar de este análisis cualitativo a uno cuantitativo para describir de forma general el significado personal del grupo de alumnos que interviene en nuestro estudio. Para ello se hicieron tablas por cuestiones según los distintos elementos considerados (entidades primarias y conflictos semióticos) lo que nos permitió definir diversas variables que, según sus valores, caracterizaban las respuestas. De esta manera pudimos codificar las contestaciones de los estudiantes al cuestionario y, utilizando el paquete estadístico SPSS, cuantificarlas, obteniendo regularidades en cada cuestión y así extraer consecuencias a cerca de los significados personales de los grupos estudiados. Podemos saber, para un determinado elemento con diferentes posibilidades (tipos de lenguajes, de proposiciones a utilizar, de procedimientos,…), cual es la frecuencia con que aparece una opción concreta y, teniendo en cuenta las otras variables, interpretar dicha frecuencia en términos de significados personales.

De las entidades desarrolladas, se analizarán en los resultados que expondremos aquellas que sean problemáticas didácticamente y que, en cada caso, mejor nos permitan la caracterización de las respuestas. En unos casos nos centraremos en los tipos de procedimientos escogidos para la resolución de la situación, en otros en las proposiciones o en los conceptos-regla utilizados, etc. Sin embargo, debemos señalar que una entidad aislada no caracteriza una respuesta y es necesario contemplarla en el conjunto aunque no aparecerá siempre explícitamente expresado en el análisis que expongamos. Además, estudiar y observar todas las variables que interviene nos ha servido de contraste para detectar posibles errores en la corrección e interpretación de las respuestas.

6.2 El cuestionario piloto

Este cuestionario piloto fue aplicado a 16 estudiantes de dos centros diferentes de la provincia de Jaén durante el curso 2002-03, una vez terminada la instrucción sobre la integral definida. La prueba se realizó en dos horas de clase no seguidas que habían sido acordadas con cada profesor previamente. En cada hora debían contestar cinco preguntas. Por este motivo en el cuestionario aparecen cinco cuestiones numeradas de 1 a 5, que corresponden a la primera parte, y otras cinco numeradas de 1’ a 5’ que corresponden a la segunda parte. Hay que observar que aunque nos pareció un tiempo adecuado para la tarea a realizar, algunos alumnos nos dijeron que el tiempo les había parecido escaso por lo que vimos la necesidad de contemplar la posibilidad de que el cuestionario definitivo tuviera menos cuestiones. A cada grupo se les explicó el propósito del cuestionario y que debían ser explícitos en sus contestaciones, aunque esta aclaración estaba también escrita en el cuestionario.

Como ya se ha comentado, el objetivo del análisis del cuestionario piloto era ver la eficacia del mismo y del análisis que habíamos planteado, así como perfeccionar el instrumento que queríamos utilizar. Nos propusimos varias mejoras, una en cuanto a las cuestiones planteadas a los alumnos, otra en cuanto al análisis que realizábamos de cada una de las cuestiones (elemento fundamental para nuestro estudio ya que nos permite la codificación de las respuestas) y, por último, la propia codificación, esto es, la elección de las variables que caracterizan las respuestas.

6.2.1 Construcción y análisis

Las configuraciones epistémicas que hemos determinado en el capítulo 4 y que componen el significado institucional de referencia de la integral nos han servido de base. Nos planteamos, en primer lugar, que la configuración epistémica generalizada de la integral definida no estaría incluida en el cuestionario pues no es objeto de estudio en el nivel educativo que tratamos. Dado que, según nos comentaron los profesores de los grupos escogidos y como hemos visto en los apuntes, sólo se había trabajado CEaproxlim como definición, consideramos que debíamos centrarnos en las otras cuatro configuraciones por el momento. Es por ello que en las diez cuestiones escogidas aparecen las cuatro configuraciones epistémicas, buscando una variedad de cuestiones que las representen tal como se representa en la tabla 6.2.

Configuraciones Epistémicas	Cuestiones
CEgeo	1-2-1'-4'
CErpc	5-2'-3'
CEinvderiv	3-4-4'
CEalg	1-5'

Tabla 6.2 CE y cuestiones

Otros puntos de reflexión en la elaboración de este cuestionario fueron los tipos de lenguaje, los conflictos semióticos y los puntos conflictivos a investigar con las cuestiones propuestas. En este sentido, dados los desarrollos de la integral en estos grupos, nos interesó ver la comprensión de esta noción en lenguajes no habituales como son el gráfico principalmente, buscando la reflexión y no la aplicación de métodos rutinarios ampliamente repetidos. Hemos incluido también alguna propiedad como es el caso de la aditividad del intervalo o las condiciones de integrabilidad.

En el análisis de este primer cuestionario nos centramos principalmente en los puntos conflictivos de las cuestiones ya que el objetivo era ver la eficacia del instrumento y resolver aquéllos. Por este motivo en la entidad "conceptos y proposiciones" no se indica los conceptos utilizados en general, sino que se hace más hincapié en las propiedades falsas que podemos encontrar en las respuestas de los estudiantes. En el cuestionario definitivo, cuyo análisis sí será definitorio de los significados personales de los alumnos, sí lo indicaremos y será objeto de estudio. Así, observamos que en algunas de las cuestiones planteadas será espacialmente significativa la elección de un concepto-regla u otro en tanto que determina significados personales diferentes.

El cuestionario propuesto se adjunta en el anexo I, a continuación exponemos cada cuestión con el análisis efectuado siguiendo la plantilla expuesta en la tabla 6.1.

CUESTIÓN 1: Dada la función $f(x)=\dfrac{4}{x^4}$, hallar:

a) $\int_1^2 f(x)dx$ b) $\int_{-1}^1 f(x)dx$

Además, en cada caso, calcula el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje de las abscisas.

Esta cuestión es una adaptación de una cuestión de Labraña (2001) en la que se propone la integral de una función no continua ni acotada, pero a la que se le puede calcular fácilmente una primitiva por métodos analíticos.

1) Objetivos

a) General: Analizar las relaciones que existen entre CEgeo y CEalg y detectar posibles conflictos semióticos relacionados con estos significados.

b) Específicos: Analizar el papel de la condición necesaria de acotación para la integrabilidad.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CEgeo y CEalg.

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema. El apartado a) plantea la integral en un intervalo donde la función es continua y acotada y el b) tiene un punto donde la función es no acotada, por ello sirve de "testigo" para que el alumno discrimine cuando se puede aplicar las reglas de integración y cuando no para obtener el resultado correcto. Observar si recurren a la gráfica de la función y ver qué sucede con un área no acotada.

b) Lenguaje: natural, analítico, gráfico

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico (justifica las acciones) o en algún caso retórico.

d) Conceptos y proposiciones: se utiliza una proposición falsa PF: "*si a la integral se le puede aplicar uno de los métodos algorítmicos de integración, entonces existe la integral definida y su valor da el área"* y la regla de Barrow.

e) Procedimientos o acciones encaminados a la resolución de la situación-problema, lo descomponemos en la trama de funciones semióticas que es necesario establecer

e.1 Para resolver el apartado a) se realizarán[6]:

Lenguaje natural $\xrightarrow{F_{1.1}}$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\xrightarrow{F_{1.2}}$Condición de integrabilidad $\xrightarrow{F_{1.3}}$Cálculo de la integral.

e.2 Para resolver el apartado b) se realizarán:

Lenguaje natural $\xrightarrow{F_{2.1}}$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\xrightarrow{F_{2.2}}$Condición de integrabilidad $\xrightarrow{F_{2.3}}$ No existe la integral, no se puede calcular.

e.3 Para calcular *el área* del apartado a) se realizarán:

-Observa la gráfica
-Calcula los puntos de corte con OX $\xrightarrow{F_{3.1}}$ Valor absoluto a la integral calculada

[6] Las $F_{i,j}$ son las funciones semióticas que se establecen al realizar este procedimiento.

$\boxed{\textbf{e.4}}$ Para calcular *el área* del apartado b) se realizará

-Observa la gráfica -Calcula los puntos de corte con OX

$\xrightarrow{F_{4.1}}$ Acotación $\xrightarrow{F_{4.2}}$ Cálculo de la integral $\xrightarrow{F_{4.3}}$ Valor absoluto

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que hemos considerado son varios. Por un lado, un posible conflicto semiótico asociado a la proposición falsa es: *"no considerar las condiciones de existencia de la integral para poder aplicar las reglas de cálculo"*, que puede deberse al uso reiterado y exclusivo en las prácticas, no explícito en la mayoría de los casos, de funciones continuas y acotadas, en la línea de lo expuesto por Labraña (2001) quien llega a considerar las condiciones de integrabilidad como un obstáculo didáctico. Además, tendremos en cuenta aquellas funciones semióticas que no establece un estudiante, que determinan también conflictos semióticos. Nos interesa particularmente observar si establece las funciones semióticas $F_{1.2}$ y $F_{2.2}$ que corresponden a la condición de integrabilidad y el cálculo del área, esto es e.3 y e.4. Además, debemos tener en cuenta el conflicto semiótico *"Si no hay puntos de corte con el eje OX, no hay área"* que corresponde a aquellos alumnos que no calculan la integral pues no encuentran los puntos de corte con el eje, lo que indica una ausencia de la concepción de integral como área, sólo aplican una serie de pasos aprendidos como método algorítmico pero carente de verdadera significación.

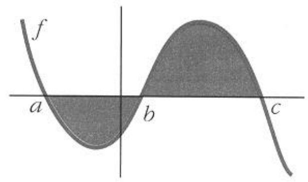
Por último, hemos considerado la regla de Barrow para los casos en que hay un conflicto para esta regla que son $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$ ó $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos de la integral definida que en esta cuestión observamos son principalmente errores de *cálculo integral*, entendiendo por ello errores al aplicar las reglas de integración y de *cálculo numérico*, que son errores en las operaciones implicadas en la resolución de la cuestión.

CUESTIÓN 2: De las siguientes expresiones:

$$a)\int_a^c f(x)dx \quad b)\left|\int_a^c f(x)dx\right| \quad c)\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad d) -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

determina cuál, o cuáles de ellas, nos dan el área limitada por la gráfica de f y el eje de las abscisas. Debes justificar extensamente el por qué de la aceptación, o rechazo, de cada uno de los apartados.



Esta cuestión está tomada de Colera, García y Oliveira (2001)

1) Objetivos

a) General: Analizar los significados personales acerca de CEgeo y detectar posibles conflictos semióticos asociados a esta configuración.

b) Específicos:

i. Discriminar la expresión analítica del área por medio de la integral definida.

ii. Analizar la interpretación gráfica de la integral definida y su relación con el área.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CEgeo

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se busca establecer el grado de comprensión del alumno según los niveles descritos en la literatura de la integral como área, puesto que los apartados a, b y c sitúan al alumno en el nivel descriptivo u operativo (Turégano, 1994).

b) Lenguaje: se espera que se utilice fundamentalmente el lenguaje natural y, eventualmente, el gráfico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo retórico.

d) Conceptos y proposiciones: Se pueden utilizar varias proposiciones falsas:

PF1: "*la integral definida nos proporciona el área*" que corresponde a aquellos alumnos que no diferencian entre integral y área, podemos considerar que tienen una imagen operativa (Turégano, 1994) pues la integral es directamente el área y no hay que tener en cuenta el signo.

PF2: *"basta tomar el valor absoluto para obtener el área"*, son aquellos alumnos que aunque tiene una imagen operativa, la integral es un área, consideran que siempre debe ser positiva. La idea geométrica de área es muy importante y prevalece el que debe ser positiva. Son estudiantes que reflejan una confusión total entre integral y área, tendrán problemas con la interpretación de integrales definidas negativas y puede ser un obstáculo para los problemas de modelización.

PF3: "*se verifica la propiedad:* $\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$" que puede provenir de un conflicto semiótico producido por una excesiva rutinización del cálculo del área calculando los puntos de corte, etc. No tiene sentido para estos estudiantes pues carecen de las nociones de acumulación. Necesariamente tendrán problemas en la interpretación de áreas nulas.

También puede provenir de un conflicto semiótico asociado al valor absoluto, al considerar que ambas expresiones son iguales. En el cuestionario definitivo decidimos añadir un apartado en esta cuestión para diferenciar entre estos dos conflictos.

PF4: *"Basta tener en cuenta los puntos de corte para que la integral nos dé el área por sí misma"* que proviene de una excesiva rutinización del método de cálculo de la integral definida, como en el caso anterior, sin un verdadero significado.

e) Procedimientos o acciones: la trama de funciones semiótica que se realizara es:

Lenguaje gráfico ↔ Lenguaje analítico (al considerar las expresiones) → Lenguaje gráfico (se realiza una elección) → Lenguaje natural (para justificar)

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos en esta cuestión los encontramos en el apartado de propiedades, pues cada una de las propiedades falsas muestra un conflicto semiótico. No hemos considerado aparte otros conflictos pues lo encontrado en las respuestas de los estudiantes no nos resulta significativo.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos de la integral definida que hemos considerado en esta cuestión son solamente uno que hemos asociado al concepto de opuesto y que se muestra en la respuesta del alumno mostrado en la figura 6.1, el cual hemos elegido porque nos muestra también la necesidad del valor absoluto.

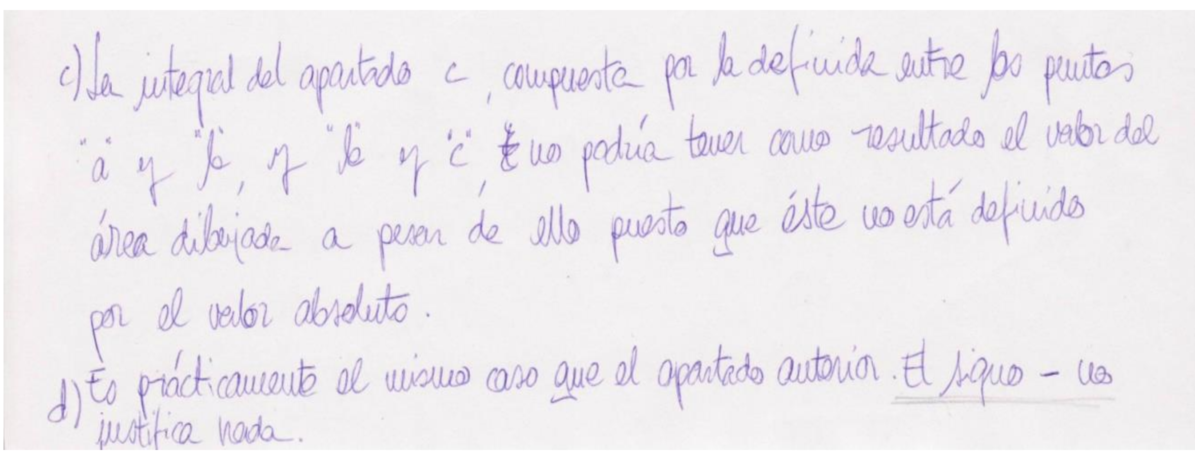
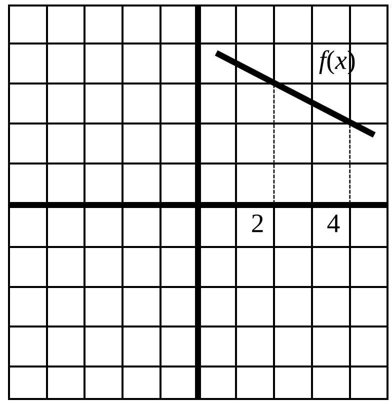

c) La integral del apartado c, compuesta por la definida entre los puntos "a" y "b", y "b" y "c", no podía tener como resultado el valor del área dibujada a pesar de ello puesto que éste no está definido por el valor absoluto.
d) Es prácticamente el mismo caso que el apartado anterior. El signo – no justifica nada.

Figura 6.1: Estudiante 8A, cuestión 2, cuestionario piloto

CUESTIÓN 3: Dada la función *f*(x) correspondiente a la gráfica:



Dibuja tres funciones primitivas de dicha función *f*(x) en el intervalo [2, 4].

Esta cuestión está elaborada tomando como punto de partida las cuestiones 2.14 y 2.15 del cuestionario elaborado por Labraña (2001). En ella y en la siguiente pretendemos analizar si la relación integral-función, en el lenguaje gráfico exclusivamente, es conocido por los estudiantes. No corresponde a la integral definida, pero son conocimientos previos que decidimos también explorar. Al ser el cuestionario piloto nos planteamos objetivos más amplios para delimitar bien las cuestiones del cuestionario definitivo, buscando acotar adecuadamente la problemática que corresponda a la integral definida.

1) Objetivos

a) General: Analizar, en el lenguaje gráfico, la relación entre primitiva-función y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Analizar el cálculo de primitivas desde la gráfica de la función, sin disponer de fórmulas algebraicas explícitamente para poder aplicar los métodos de integración conocidos. Ya hemos visto que diversos autores, entre los que destacamos Artigue y Szwed (1983), Labraña (2001) y Berry y Nyman (2003), han observado la dependencia de los estudiantes de la expresión algebraica de la función, esto es, la necesidad de tener la expresión algebraica para poder calcular la integral definida.

ii. Analizar la relación entre las distintas primitivas de una misma función.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: aunque no es una cuestión específicamente de integral definida exploramos CEinvderiv

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: la recta dada pasa por puntos conocidos de forma que permite el paso al lenguaje analítico. Además la parábola que se obtiene como primitiva tiene su vértice en un punto exterior de la cuadrícula, punto (8,16), buscando que el sujeto detecte la forma sin acudir a la representación. Además, la rama en el intervalo solicitado es creciente, al contrario de la función.

b) Lenguaje: gráfico, numérico y analítico principalmente, aunque también consideraremos el natural.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico (justifica las acciones).

d) Conceptos y proposiciones: se pueden utilizar algunas de las siguientes proposiciones falsas:

PF1: si la pendiente de la recta es negativa la parábola es convexa.

PF2: dado que la función es decreciente en [2,4], la rama de la parábola en ese intervalo es decreciente.

En ambos casos el conflicto semiótico es considerar que la forma de la primitiva debe ser similar a la forma de la función.

e) Procedimientos o acciones: Se pueden realizarlos los siguientes pasos para la resolución de la situación-problema donde hemos especificado la trama de funciones semióticas que es necesario realizar:

$\boxed{\textbf{e.1}}$ Lenguaje gráfico $\xrightarrow{F_{1.1}}$ Lenguaje numérico $\xrightarrow{F_{1.2}}$ Analítico (cálculo de la recta $\xrightarrow{F_{1.3}}$ integral indefinida $\xrightarrow{F_{1.4}}$ 3 primitivas) $\xrightarrow{F_{1.5}}$ numérico $\xrightarrow{F_{1.6}}$ gráfico (3 primitivas). Este procedimiento indica una gran dependencia del cálculo algorítmico.

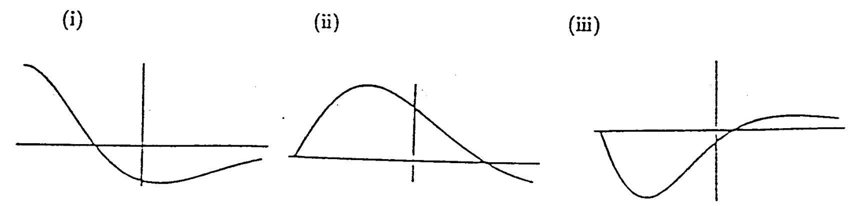
$\boxed{\textbf{e.2}}$ Gráfico de $f \xrightarrow{F_{2.1}}$ Analítico implícito (análisis de grados) $\xrightarrow{F_{2.2}}$ gráfico de $F \xrightarrow{F_{2.3}}$ gráficos F_1, F_2, F_3.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida.

Un conflicto semiótico sería no poner más que una primitiva (k=0), pues confunde integral indefinida con primitiva. "*CSk=0*". Además, para los conflictos semióticos, hemos tenido en cuenta las funciones semióticas no realizadas pues representan lagunas significativas.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos de la integral definida que hemos considerado en esta cuestión son dos: el cálculo de la pendiente de la recta tangente y considerar que la parábola debe estar centrada en [2,4] ya que es en ese intervalo donde se pide y además, queda dentro de la cuadrícula utilizada.

CUESTIÓN 4: Las gráficas i, ii y iii corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, su función derivada f' y una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando las respuestas lo más extensamente que puedas.



Esta cuestión corresponde a la convocatoria de junio de 1996 de las PAU de la Comunidad de Andalucía. Como en la cuestión anterior se pretende analizar la comprensión de los alumnos en cuanto a la relación primitiva-función considerando, ahora también, la derivada. Todo ello desde un lenguaje exclusivamente gráfico pues no disponen de la expresión algebraica de la función y, al contrario del caso anterior, tampoco la posibilidad de construirla.

1) Objetivos

a) General: Analizar los significados personales acerca de la relación primitiva-función-derivada gráficamente y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Estudiar la aplicación de las propiedades que relacionan a una función con su derivada.

ii. Analizar las relaciones gráficas entre $\int f$, f y Df.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: aunque no es una cuestión específicamente de integral definida nos aproximamos a CEinvderiv desde el lenguaje gráfico.

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: el enunciado favorece un planteamiento por parte del sujeto basado en la estrategia de ensayo-error y aplicación de propiedades. Se busca observar si el alumno es capaz de establecer la reversibilidad función $\rightarrow$ primitiva; primitiva $\rightarrow$ derivada de la primitiva=función.

b) Lenguaje: natural y gráfico consideramos en un principio, pero los resultados nos llevaron a natural y analítico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo retórico.

d) Conceptos y proposiciones: se utilizaran las "*propiedades de la derivada*" con respecto a la gráfica de una función y "$D\int f = f$".

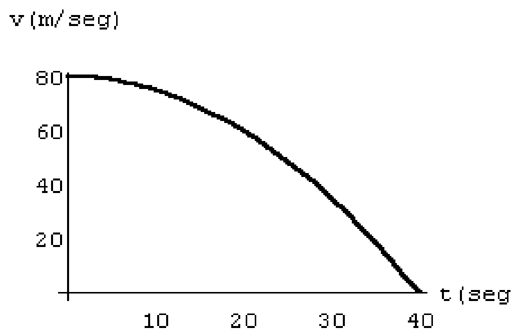
e) Procedimientos o acciones. Se realizaran los siguientes: Lenguaje gráfico $\rightarrow$ lenguaje analítico implícito $\rightarrow$ lenguaje natural $\rightarrow$ lenguaje gráfico.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de laintegral definida que hemos considerado son "*no considerar que la integral cumple: D∫f=f*", que hemos denominado CS_{teor}

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos de la integral definida no hemos considerado ninguno en esta cuestión.

CUESTIÓN 5: Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión debido a una rotura de embrague. Se estima que a partir de ese momento (t=0) su velocidad, en metros por segundo, viene dada por $v(t) = 80 - 0.05t^2$, cuya gráfica puedes comprobar que es la de la figura adjunta.

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 20 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 20 y los 40 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?



Esta cuestión está tomada de Turégano (1994)

1) Objetivos

a) General: Analizar el CErpc con un problema de Física muy habitual para los estudiantes en este nivel educativo y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Analizar la noción de integral definida en un problema de modelización del movimiento acelerado.

ii. Analizar la aplicación de la propiedad: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

iii. Detectar el CSMU.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CErpc

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se trata de estudiar si el alumno asocia el espacio recorrido por el móvil con el área comprendida entre los extremos. Es el típico problema de modelización de la integral definida. Además se incluye un apartado donde se pretende ver si se considera la aditividad.

b) Lenguaje: analítico y numérico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico (justifica las acciones).

d) Conceptos y proposiciones: se utilizaran nociones de movimiento uniforme, esto es una proposición falsa: *"Como espacio es velocidad por tiempo, basta calcular la velocidad para los valores correspondientes y multiplicar por el tiempo"* que corresponde con el conflicto semiótico que hemos denominado CSMU (Ordóñez y Contreras, 2003, Contreras y Ordóñez, 2005a, 2005b)

La propiedad que pueden aplicar es la de la *aditividad* de los intervalos de la integral: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

e) Procedimientos o acciones: Distinguimos los procedimientos que se pueden realizar para resolver cada uno de los apartados:

e.1 Para resolver el primer apartado se realizarán:

Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral.

e.2 Para resolver el segundo apartado se realizarán:

Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral.

e.3 Para calcular el área del tercer apartado hay dos posibles vías:

e.3.1: Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfico (implícito o explícito) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral definida de 0 a 40. En esta vía no se aplica la *aditividad del intervalo.*

e.3.2: Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfico (implícito o explícito) $\rightarrow$ Aplicación de la *aditividad* del intervalo $\rightarrow$ Suma de los valores.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida consideramos el ya mencionado CSMU.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida que en esta cuestión observamos son principalmente errores de *cálculo integral*, entendiendo por ello errores al aplicar las reglas de integración y de *cálculo numérico*, que son errores en las operaciones implicadas en la resolución de la cuestión.

CUESTIÓN 1': Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$. Ambos deciden dividir equitativamente la parcela mediante una recta $y=a$ paralela a la recta $y=1$. Halla el valor de a.

Esta cuestión está tomada de Colera y col. (2001) y es similar a una propuesta en las PAU (2001) en la que se eliminó el contexto.

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales de los alumnos respecto a la CEgeo y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Reconocer la función a integrar.

ii. Cálculo de los límites de integración.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CEgeo

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se trata de una situación de la vida real que hay que modelizar según la integral definida.

b) Lenguaje: natural, analítico y gráfico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico (justifica las acciones).

d) Conceptos y proposiciones: nos fijamos en las proposiciones falsas que se pueden aplicar:

PF1: *"El área encerrada corresponde a la integral definida de la función dada."* Que ya fue considerado en la cuestión 2.

PF2: *"Aunque he de restar "a" a la función dada, los límites de integración no cambian."*

PF3: *"Los límites de integración son –a y a ya que se debe dividir por la recta y=a" confundiendo y=a con x=a.*

e) Procedimientos o acciones: los procedimientos son pasar del lenguaje natural al gráfico (explícito o implícito), de éste al analítico con diversos tratamientos.

Consideramos que hay dos vías:

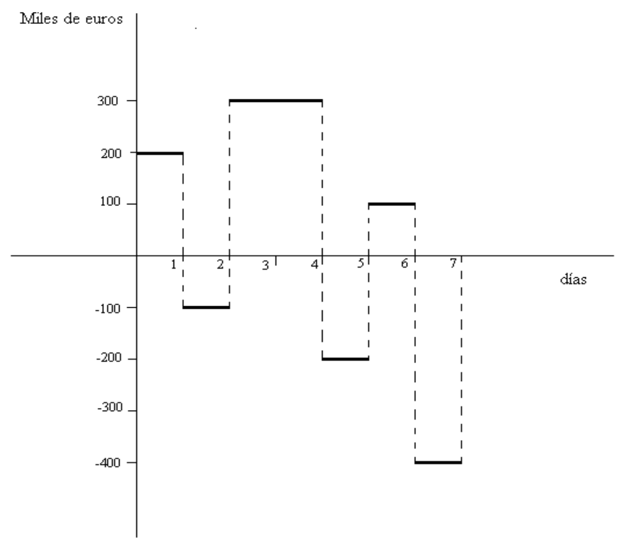
e.1 calcular el área de la parcela completa e igualar el doble de una de las partes a la completa. Conduce a tratamientos sencillos e iguales.

e.2 calcular cada una de las partes e igualarlas. Conduce a tratamientos más complejos y diferentes.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida en esta cuestión vienen determinados por la aplicación de alguna de las propiedades falsas expuestas anteriormente.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral que hemos considerado son de cálculo numérico.

CUESTIÓN 2’: La gráfica adjunta indica las ganancias o pérdidas, en miles de euros, de una pequeña empresa, según los días de la semana, ¿cuál es el saldo en euros al final de la semana?



Esta cuestión está tomada de Wenzelburger (1994). Se pretende explorar las intuiciones de los alumnos respecto de los resultados de los procesos de cambio, como se señala en el citado trabajo: “se usará el ejemplo de una cuenta bancaria (…) para aclarar los conceptos que son importantes para entender la idea fundamental del Cálculo Integral. Hablaremos de resultados, efectos o efecto total de los cambios” (p.8)

1) Objetivos

a) General: Analizar los significados personales acerca de resultados de los procesos de cambio y detectar posibles conflictos semióticos asociados a este significado.

b) Específicos: Analizar el resultado de un proceso de cambio en un ejemplo de la vida real a nivel intuitivo.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CErpc

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se ha buscado una situación especialmente simple en la que no sea necesario el cálculo integral, con el objetivo de detectar la diferencia entre área total y resultado de un proceso de cambio. Se escoge un intervalo de amplitud dos para diferenciar entre área y valor de la ordenada.

b) Lenguaje: numérico y natural.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico.

d) Conceptos y proposiciones: se puede utilizar una de las siguientes proposiciones falsas:

PF1: *"el resultado final se obtiene sumando todas las áreas"*.

PF2: *"para calcular el resultado final basta considerar las ordenadas"*.

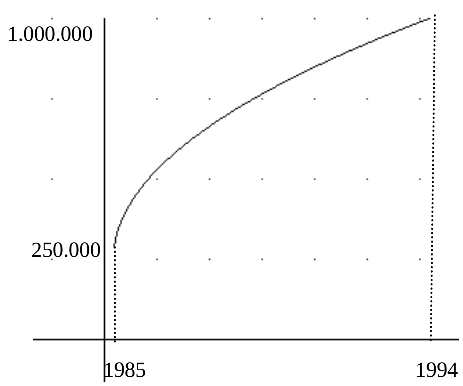
e) Procedimientos o acciones: los pasos para la resolución de la situación-problema son:

Lenguaje gráfico $\rightarrow$ Lenguaje numérico (se extraen los datos oportunos$\rightarrow$se realizan las operaciones necesarias) $\rightarrow$ Lenguaje natural

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida son los asociados a cada una de las proposiciones falsas.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos asociados a la integral definida son *"no considerar las unidades en el eje de las ordenadas"*

CUESTIÓN 3': La función siguiente $f(x) = 250000\left(1 + \sqrt{x - 1985}\right)$, representa las tasas estimadas de incremento del consumo de energía eléctrica en un país, de 1985 a 1994, ¿cuál es consumo total en estos nueve años?



Esta cuestión fue construida tomando como referencia una propuesta por Wenzelburger (1994), también sobre el incremento de energía eléctrica.

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales de los alumnos respecto a la CErpc (como resultado de los procesos de cambio) y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos: Observar si una situación derivada de la economía, no habitual para los estudiantes, es modelizada por medio de la integral definida.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CErpc

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se propone una situación relacionada con las razones de cambios continuos, una vez que en la cuestión anterior se trataron las razones de cambios discretos. Se aporta la expresión analítica de la función para que permita realizar la integral por lo métodos algorítmicos conocidos.

b) Lenguaje: gráfico (implícito) y analítico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico.

d) Conceptos y proposiciones: Las proposiciones falsas que se pueden aplicar son:

PF1: "*como el consumo viene dado por f(x), entonces se calculan f(1994) y f(1985) y se restan (o bien, calculo f(1994))*" confundiendo el resultado total con la diferencia entre el valor final y el inicial. El conflicto semiótico asociado es: *"Confundir el resultado de la tasa de cambio con dicha tasa."*

PF2: *"Basta con calcular* $\sum f(a_i)$; $a_i =$ *años"*, discretiza el problema. La consideramos similar a PF2 de la cuestión anterior donde se tomaban solamente los valores de las ordenadas.

e) Procedimientos o acciones los pasos encaminados a la resolución de la situación-problema que consideramos son :

Lenguaje natural	→	Lenguaje gráfico (explícito o implícito)	→	Analítico con diversos tratamientos

4) Los errores en las contestaciones son debidos a los conflictos semióticos de la integral definida expuestos anteriormente, asociados a las propiedades falsas consideradas. Además, hemos incluido otro conflicto semiótico que hemos denominado At=A1-A2 y que se refleja en la respuesta del alumno que recogemos en la figura 6.2. En el que como puede verse en la respuesta para calcular el consumo hay que eliminar el rectángulo de altura *f(1985)* y base 9 que es la diferencia 1994-1985, confundiendo el consumo con la variación que ha experimentado éste.

Por último, en esta cuestión, hemos considerado la regla de Barrow para el caso en que hay un conflicto para esta regla que corresponde con $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$.

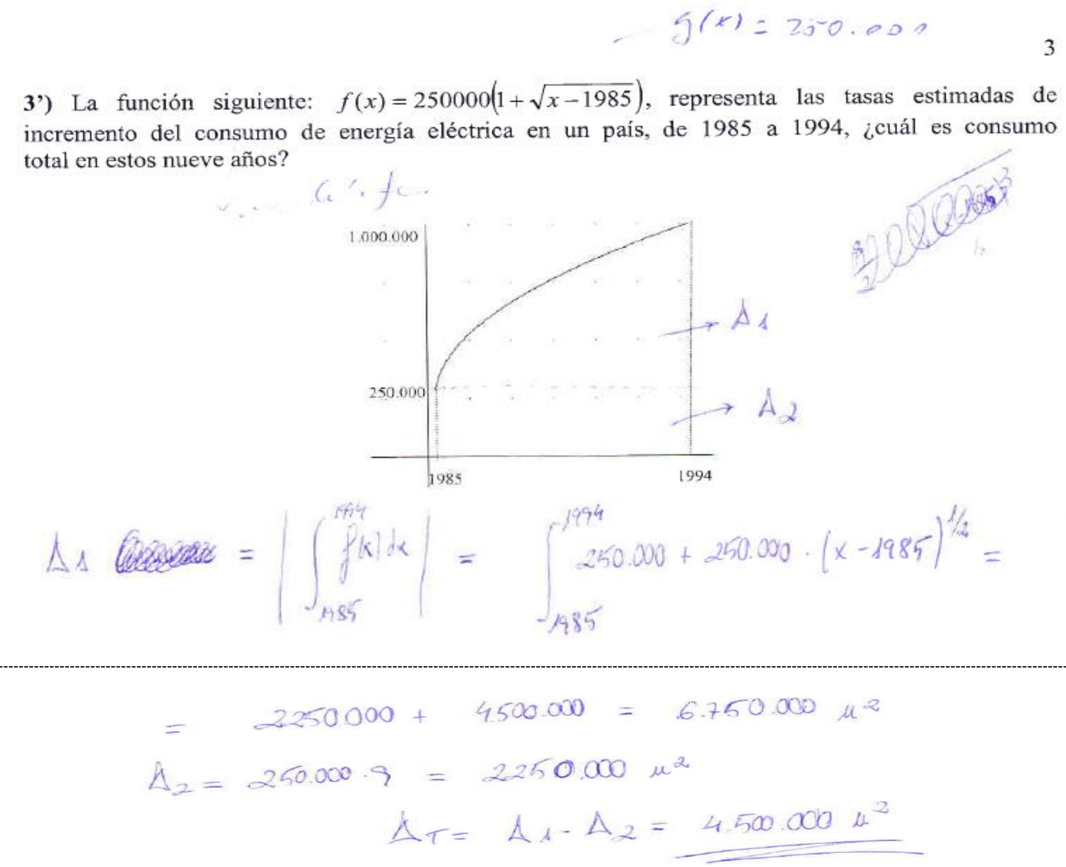
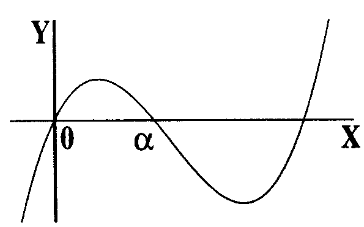


Figura 6.2: Estudiante 2A, cuestión 3', cuestionario piloto

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos de la integral definida que en esta cuestión observamos son principalmente errores de *cálculo integral*, entendiendo por ello errores al aplicar las reglas de integración y de *cálculo numérico,* que son errores en las operaciones implicadas en la resolución de la cuestión.

CUESTIÓN 4': Consideramos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si fuese f la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas lo más extensamente que puedas:

1. $F(\alpha) = 0$ 2. $F'(\alpha) = 0$ 3. F es creciente en el intervalo $(0,\alpha)$.



Esta cuestión está tomada de las PAU (2002)

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales acerca del teorema fundamental del Cálculo Integral, de la integral definida como área y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Observar si el alumno conoce teorema Fundamental del Cálculo Integral y, por tanto, que $F'(x)=f(x)$.

ii. Observar si el alumno combina diferentes configuraciones epistémicas para resolver los diferentes apartados

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CEgeo y CEinvderiv.

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: El enunciado busca detectar posibles confusiones de identificación entre la integral definida y la propia función. Hay dos configuraciones puestas en juego. Se deben hacer los cambios de una CE a otra según el apartado que se esté resolviendo. Además, debe manejar el registro gráfico pues no dispone de valores numéricos ni las expresiones analíticas para las funciones.

b) Lenguaje: natural, gráfico y analítico.

c) Argumentaciones: de carácter retórico.

d) Conceptos y proposiciones: para resolver esta situación pueden utilizarse las propiedades de las derivadas y las diferentes proposiciones falsas que hemos clasificado de la siguiente manera:

En 1) una proposición falsa que aplican es PF1: *"Es verdadera que $F(\alpha) = 0$ porque la gráfica corta al eje OX en α".*

En 2) una proposición falsa es PF2: *"Es verdadera que $F'(\alpha) = 0$, puesto que si $F(\alpha)=0$, entonces $F'(\alpha)=0$."*

En 3) una proposición falsa es PF3: *"Es falsa, ya que $F(x)$ es creciente hasta $\alpha/2$ y decreciente desde ese punto hasta α."*

Conflicto semiótico asociado a cada una de estas proposiciones falsas es el mismo: *"Confundir la función integral definida con la función dada"* y que hemos denominado $CS_{f(x)}$

e) Procedimientos o acciones: pasos encaminados a la resolución de la situación-problema.

En el apartado 1, caben tres vías:

$\boxed{\textbf{e.1.1}}$ Del enunciado al teorema fundamental del Cálculo Integral, de éste a su tesis $F'(x) = f(x)$, de éste a que $F(x)\neq f(x)$, por último a que $F(\alpha)\neq 0$, en este caso utiliza

CE-invderiv (en realidad no obtienen el que sea falsa sino que no tiene por qué ser cierta)

e.1.2 Del enunciado a que $F(\alpha)$ es el área barrida de 0 a α, de aquí a la gráfica, de ésta a que el área es ≠0, por último a que $F(\alpha)\neq 0$, en este caso utiliza CEgeo

e.1.3 Del enunciado a la gráfica, de ahí a que $F=f$ y por tanto $F(\alpha) = f(\alpha) = 0$

En el apartado 2: Del enunciado al teorema fundamental del Cálculo Integral, de éste a que $F'(\alpha)=f(x)$, de aquí a la gráfica, por último a que $F'(\alpha)=f(\alpha)=0$, en este caso utiliza CEinvderiv

En el apartado 3, caben las dos posibilidades siguientes:

e.3.1 Del enunciado a que $F(\alpha)$ es el área barrida de 0 a α, de ésta a que $A(x)$ es una función creciente, por último a que F es creciente en (0,α), en este caso utiliza CEgeo y estaría muy en la línea de la acumulación que se trabaja en CErpc.

e.3.2 f es positiva, como $F'=f$, entonces F es creciente, en este caso utiliza CEinvderiv

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que hemos considerado son: $CS_{f(x)}$: *"Confundir la función integral definida con la función dada"* que hemos mencionado anteriormente. Además, hemos denominado conflicto semiótico del teorema fundamental, esto es, CS_{tf} para aquellos casos en que *"confunde integral con derivada"*.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida que hemos observado en esta cuestión los hemos agrupado en CSderivadas para aquellos casos que están asociados a la noción de derivada.

CUESTIÓN 5': Se considera la función $g(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad -2\leq x<0 \\ 2x & si \quad 0\leq x<2 \\ 8-3x & si \quad 2\leq x\leq 4\end{cases}$. Representa dicha función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$a)\int_{-2}^{1} g(x)dx \quad b)\int_{1}^{4} g(x)dx \quad c)\int_{-2}^{4} g(x)dx$

Elaboramos esta cuestión para ejemplificar un tipo de situación bastante frecuente de cálculo de una integral definida y cuyo objetivo es observar la transferencia que hacen los estudiantes para funciones definidas a trozos no continuas. Hay que tener en cuenta que la integral definida solamente se ha establecido para funciones acotadas y continuas, y con una sola expresión analítica.

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales acerca de la noción de la integral definida en una función definida a trozos no continua. Detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Observar si el alumno aplica correctamente la definición de integral definida en una función definida a trozos, poniendo el punto de atención en la descomposición de las integrales según los intervalos de definición de la función y en la no continuidad de ésta.

ii. Observar la aplicación de la regla de Barrow.

iii. Explorar la aditividad del intervalo, esto es, $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

iv. Ver la influencia que la técnica o mecánica del cálculo del área a través de la integral definida sobre el concepto de integral definida.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CEalg y propiedades de las integrales.

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se proponen tres integrales definidas en casos de distintos intervalos de integración y para una misma función definida a trozos. El último caso se puede obtener sumando los dos anteriores. Se propone dos rectas para que formen triángulos y dar la posibilidad de utilizar fórmulas geométricas en el cálculo de la integral, por este motivo se pide la representación gráfica.

b) Lenguaje: analítico, gráfico y natural.

c) Argumentaciones: de carácter heurístico.

d) Conceptos y proposiciones: una de las propiedades que pueden utilizar es la aditividad del intervalo. Consideramos, también, las fórmulas del área de un triángulo para el cálculo de la integral o bien la regla de Barrow.

En lo que respecta a las proposiciones falsas hemos considerado:

Una proposición falsa que se puede aplicar es PF1: *"Calcular la integral utilizando una única expresión de g(x)".*

En b) una proposición falsa, además de la anterior es PF2: *"al ser g(x) discontinua en (2,4), no existe la integral definida de g(x) en dicho intervalo."*

e) Procedimientos o acciones: podemos encontrarnos con distintos procedimientos dependiendo de las proposiciones elegidas para la resolución:

Si nos fijamos en el método de cálculo de las integrales en el apartado b, al menos:

$\boxed{\textbf{e.1.}}$ Del lenguaje natural al gráfico, de aquí a la entidad conceptual-proposional, de ésta a la existencia de la integral definida, de ésta a descomponer la integral en dos integrales según los intervalos de definición de la función y la aplicación de la regla de Barrow a cada trozo.

$\boxed{\textbf{e.2.}}$ Del lenguaje natural al gráfico, de aquí a la entidad conceptual-proposional, de ésta a la existencia de la integral definida, de ésta a descomponer la integral en dos integrales según los intervalos de definición de la función y la aplicación de la regla de Barrow para el primer apartado y de las fórmulas geométricas para al menos uno de los otros.

Si nos fijamos en la aditividad del intervalo:

$\boxed{\textbf{e.3.}}$ Una vez obtenidos los resultados en los apartados a y b aplicación de la aditividad en el apartado c.

$\boxed{\textbf{e.4.}}$ Una vez obtenidos los resultados en los apartados a y b realización de uno de los procedimientos para calcular c. Por tanto no aplica la aditividad en el apartado c.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que hemos considerado en esta cuestión son:

Conflicto semiótico asociado a PF1: *"Sólo es posible calcular la integral para una función con una única expresión."*

El conflicto semiótico asociado a PF2 que es: *"Considerar que sólo existe la integral definida si la función es continua y acotada en el intervalo"* en este caso hacemos notar que no habría discordancia con el significado institucional que estos estudiantes han recibido ya que se les ha definido para este tipo de funciones, pero la hay con el significado institucional global de la integral definida. Podemos considerar que lo *oportuno* en estos grupos sería mostrar esta PF2 y su conflicto semiótico dada la instrucción recibida, pues en otro caso puede indicar que no tienen en cuenta las condiciones de existencia de la integral, esto es, cualquier función es integrable.

Por último, hemos considerado la regla de Barrow para los casos en que hay un conflicto para esta regla que son $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$ o $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ y que ya hemos visto en otras cuestiones.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos de la integral definida que en esta cuestión observamos son principalmente errores de *cálculo integral*, entendiendo por ello errores al aplicar las reglas de integración, y de *cálculo numérico*, que son errores en las operaciones implicadas en la resolución de la cuestión.

6.2.2 Resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario piloto

Todas las tablas extraídas de la codificación de los datos obtenidos se adjuntan en el anexo III. Para poder realizar un análisis cuantitativo comentamos en el apartado 6.1 que se realizó una codificación de cada pregunta. De esta manera se definió, en general, cada entidad primaria como una variable con sus posibles respuestas: las diferentes posibilidades establecidas en el análisis del cuestionario. Sólo exponemos en este apartado las conclusiones más relevantes de cada cuestión, aunque han sido estudiadas todas las entidades primarias individualmente y en conjunto.

CUESTIÓN 1

Se pretende observar si los alumnos tienen en cuenta la condición de integrabilidad antes de aplicar las reglas de integración y la regla de Barrow. Observando la tabla 6.3 donde se exponen los conceptos y propiedades utilizadas podemos afirmar que el 93’3% de los alumnos consideran que basta que se pueda aplicar una regla de integración para que sea posible calcular la integral. Este hecho se puede corroborar observando que en la resolución de las integrales de ambos apartados (e.1 y e.2) no se establecen las funciones semióticas $F_{1.1}$, $F_{1.2}$, $F_{2.2}$ que indican la misma cuestión, esto es, no tiene en cuenta la condición de acotación, sólo aplican reglas de cálculo integral.

Conceptos y propiedades		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	R. Barrow	1	6,3	6,7	6,7
	Ambas (PF y R. Barrow)	14	87,5	93,3	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Tabla 6.3: Conceptos y Propiedades. Cuestión 1, cuestionario piloto.

Nos llama la atención, por último, el alto porcentaje de estudiantes, un 60%, que no calculan el área (no hacen e.3 ni e.4) a pesar de haber calculado el valor de las integrales. Lo interpretamos como que la consideran una pregunta redundante, ya han calculado la integral, o que no han interpretado este enunciado.

Dado el porcentaje tan alto de alumnos que no consideraron la condición de integrabilidad consideramos que no debíamos incluir esta cuestión en el cuestionario definitivo. Es claro, que no se trabajan las propiedades en las clases, lo hemos visto en el análisis de los apuntes.

CUESTIÓN 2

En esta cuestión ha sido analizada en diferentes trabajos (Contreras y Ordóñez, 2005b y Ordóñez y Contreras, 2010) En ella son especialmente relevantes los conceptos y propiedades ya que nos muestran los conflictos semióticos asociados a la CEgeo en cuanto a la interpretación gráfica.

Observamos 9 estudiantes, el 56,3%, que presentan alguno de los conflictos semióticos considerados en esta cuestión, lo que muestra importantes deficiencias en el significado personal de estos estudiantes, al menos en la visualización. Destacamos el 25%, que muestra en sus respuestas la propiedad falsa PF3: $\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$ que corresponde a aquellos estudiantes que responden que b) es cierta por este motivo, mostrando una importante confusión pues estiman que para calcular el total basta con calcular cada trozo y sumarlo, lo que les puede llevar a no distinguir entre integral y área. Probablemente provenga de las prácticas que realizan en clase donde la mayoría de los ejercicios se resuelven así, lo que no les ha posibilitado ver la deferencia entre ambas expresiones (Contreras y Ordóñez, 2005)

Un caso, el 6,3%, corresponde a un conflicto semiótico asociado al concepto de opuesto, pero observaremos que en el cuestionario definitivo tuvo mayor incidencia.

CUESTIÓN 3

Lo primero que observamos es que el 37’5% de los alumnos deja esta cuestión en blanco y además ninguno de los estudiantes la resolvió correctamente, lo que nos indica la gran complejidad que presenta para ellos esta cuestión.

La gran mayoría de los que intentan la resolución, el 90%, lo hacen por una de los dos vías (e.1 ó e.2) Los errores provienen de las últimas funciones semióticas que no se realizan, en total un 60%, por lo que no consiguen pintar las primitivas pedidas. Solamente un 20% (2 alumnos) tiene *CSk=0.* Este hecho nos indica que conocen la relación primitiva-función pero que la gran dificultad está en el tipo de lenguaje que se ha empleado, el gráfico. Además, un 40% de los estudiantes que intentan la resolución lo hace por e.1, lo que indica una dependencia importante del cálculo algorítmico en estos estudiantes.

No se incluyó en el cuestionario definitivo porque corresponde con conceptos previos y nos pareció que debíamos reformarla para analizar la dificultad encontrada con el lenguaje gráfico.

CUESTIÓN 4

Al igual que en la pregunta anterior lo primero que destacamos del análisis de los datos es que el 43’8% de los alumnos dejan en blanco esta cuestión, lo que nos parece un tanto por ciento muy elevado. Entre los que contestan esta cuestión la mayoría (88’9%) utiliza las propiedades oportunas, pero solamente 2 estudiantes (un 22’2%) la resuelven correctamente lo que nos parece un porcentaje demasiado bajo.

Consideramos que la dificultad se debe a la falta de trabajo de registro gráfico y no a la falta de comprensión de la relación primitiva-función-derivada, pues CS_{teor} sólo aparece en 2 casos (22’2% de los casos)

No se incluyó en el cuestionario definitivo por el mismo motivo anterior.

CUESTIÓN 5

El primer dato que destacamos es que es una cuestión accesible para los alumnos, la han trabajado en Física, pues solo la ha dejado en blanco un alumno. A pesar de ello un porcentaje considerable utiliza nociones de movimiento uniforme en la resolución como se puede observar en la tabla 6.4 donde 4 estudiantes, un 26´7% de los que la resuelven las utilizan más un alumno que las utiliza para resolver el apartado primero aunque luego utiliza la integral definida en los otros. El resto, un 66’6% reconoce la integral en este problema. Los primeros mostrarán el conflicto semiótico CSMU, un porcentaje del 33’3% de los que abordan la cuestión, lo que nos muestra un porcentaje que consideramos alto, Son alumnos anclados en las nociones de movimiento uniforme y les supone un obstáculo para otras cuestiones.

Procedimientos o acciones		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Nociones de MU	4	25,0	26,7	26,7
	e.1,e.2 y e.3.1	1	6,3	6,7	33,4
	e.1,e.2 y e.3.2	5	31,3	33,3	66,7
	e.1,e.2 y otra para el 3er apartado	1	6,3	6,7	73,4
	e.1,e.2 y e.3.1 incompleta	1	6,3	6,7	80,1
	e.1,e.2 y e.3.1y e.3.2	1	6,3	6,7	86,7
	Nociones MU, e.2, e.3.1	1	6,3	6,7	93,3
	otros	1	6,3	6,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Tabla 6.4: Procedimientos. Cuestión 5, cuestionario piloto.

Este hecho nos indica que la transferencia al contexto físico no es una cuestión transparente en absoluto (Contreras y Ordóñez, 2005b) De hecho Farmaki y Paschos (2007) apuntan en su estudio que la relación entre el área y la distancia cubierta es un paso que históricamente resultó difícil: “The interrelation between the distance covered and the area of the figure on the velocity–time graph is not self-evident. It implies the passage from the velocity function to the integral, from the ‘rate’ to the ‘total’: a shift that proved a difficult conceptual leap to make historically, and was made intuitively by Oresme, who made the connection between kinematic arguments and Euclidean geometry” (p. 96)

También podemos extraer de la tabla el porcentaje de estudiantes que aplican la aditividad (e.3.2), 6 en total, lo que supone un 40%, lo que nos informa de que ésta es una propiedad muy intuitiva y fácilmente justificable desde este tipo de problemas en los que surge de forma “natural”, es decir, el contexto físico no sólo nos puede servir para justificar la necesidad de la integral definida y trabajarla a nivel intuitivo como paso previo a la sino también para trabajar, intuitivamente, propiedades.

Nos ha llamado la atención, por último, la gran frecuencia de errores de cálculo numérico e integral (4 alumnos de 15 en cada caso) reflejada en la figura 6.3, que nos parece importante en este nivel educativo, dado que se integra un polinomio de segundo grado y toma valores simples, a nuestro parecer.

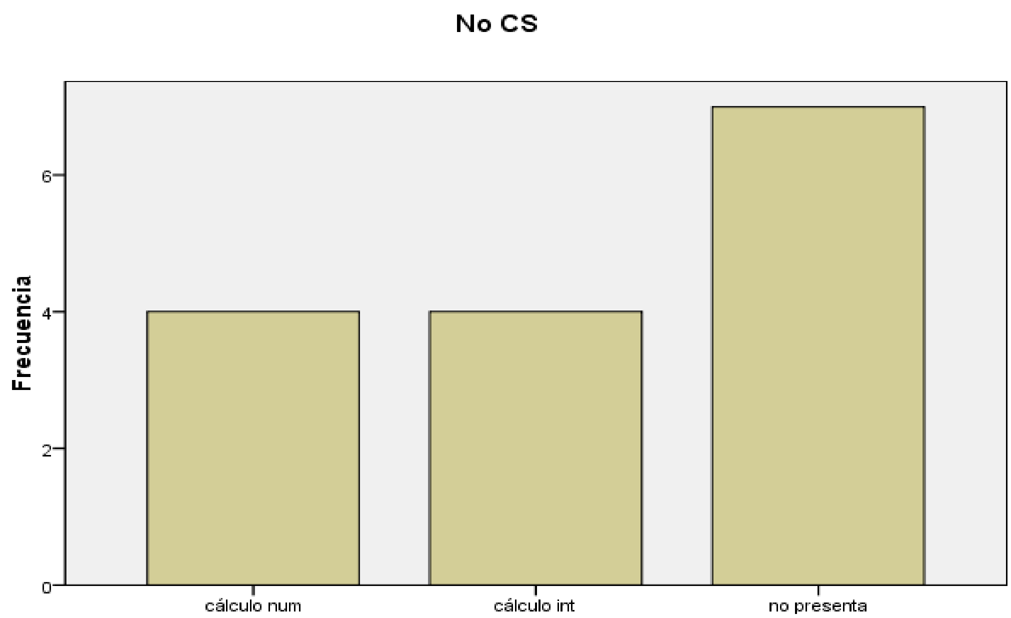


Figura 6.3: Conflictos semióticos no asociados a la integral definida. Cuestión 5, cuestionario piloto.

CUESTIÓN 1’

Nos encontramos con una cuestión que se planteó en las PAU de 2001 pero que dejaron en blanco un 31’3% de los alumnos. Además, nadie la realizó bien por lo que podemos concluir que, a pesar de parecer un típico problema de área bajo la curva, tiene una gran complejidad. Esta afirmación la podemos también observar de los datos de la tabla 6.5 de conflictos semióticos que mostramos a continuación.

Conflictos semióticos		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Los correspondientes a cada proposición falsa	7	43,8	63,6	63,6
	no presenta	3	18,8	27,3	90,9
	otros	1	6,3	9,1	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Tabla 6.5 Conflictos semióticos. Cuestión 1', cuestionario piloto.

En ella observamos que un 63'6% de los estudiantes que han abordado la resolución de esta cuestión tiene un conflicto asociado a alguna de las proposiciones falsas que hemos considerado y aún hay otro CS más que consiste en una mala elección de la función a integrar. Con esto afirmamos que el 72'7% de los alumnos presentan conflictos semióticos asociados a la integral definida en esta cuestión.

Conceptos y propiedades		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF2	5	31,3	45,5	45,5
	PF3	1	6,3	9,1	54,5
	PF1 y PF3	2	12,5	18,2	72,7
	otros	1	6,3	9,1	81,8
	sólo los propios	2	12,5	18,2	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Tabla 6.6: Conceptos y Propiedades. Cuestión 1', cuestionario piloto.

Si observamos la frecuencia de PF2 y PF3 todos los casos de conflictos corresponden a estas proposiciones, que están asociados a la elección de los límites de integración. Podemos, por tanto, concluir que esta es una cuestión compleja para los estudiantes y que gran parte de dicha complejidad se debe a la elección de los límites de integración.

CUESTIÓN 2'

En primer lugar podemos afirmar que es una cuestión muy accesible a los alumnos. Nos ha llamado la atención, sin embargo, que solamente un estudiante no la aborda aunque sí realizó otras cuestiones, quizá fue falta de tiempo.

Por otra parte, dado el nivel educativo en que nos situamos y la aparente simplicidad de la cuestión, hemos observado que el tanto por ciento de estudiantes que la resuelven correctamente no es del 100%, sino del 60%. Los errores se distribuyen según muestra la tabla 6.7, donde hay que tener en cuenta que un alumno tiene PF2 y no considera las unidades en OY a la vez.

Errores		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido
Válidos	PF2	3	18,8	20,0
	no unidades en OY	3	18,8	20,0
	no presenta	9	56,3	60,0
	otros	1	6,3	6,7
	Total	15	93,8	100,0
Perdidos	Sistema	1	6,3	
	Total	16	100,0	

Tabla 6.7 Errores. Cuestión 2’, cuestionario piloto.

Se observa que el 20% de los estudiantes tiene la propiedad falsa dos, esto es, *“para calcular el resultado final basta considerar las ordenadas”* que nos muestra dificultades para asociar los efectos o resultados de los cambios con el área bajo la curva, no tienen la idea de acumulación y, por ello, dificultades en CErpc.

Por último, otro 20%, muestra un conflicto asociado a las gráficas de las funciones puesto que no considera que las unidades son miles de euros, sino que directamente asumen que el resultado vendrá dado en euros. Es posible que provenga de un despiste o que señale un pobre concepto de función que dificultaría la comprensión en problemas de modelización.

CUESTIÓN 3’

Nuevamente consideramos el alto porcentaje de alumnos que no abordan la cuestión, un 37’5% (6 de 16) si a esto unimos que solamente un alumno la ha contestado bien podemos asegurar que es una cuestión complicada.

Los errores los podemos observar en la tabla 6.8 donde distinguimos entre errores debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida (CS) y los que no están directamente relacionados con la integral definida, sino que están asociados a otras nociones, que hemos denominado no CS. En ella podemos observar que hasta un 30% tiene conflictos semióticos para asociar el consumo total con el área bajo la curva, PF1 ó PF2, lo que indica que, tal y como pasaba en el contexto de la Física, la modelización no es transparente. Podemos asegurar que en este caso aún entraña más dificultad dado que más alumnos la han dejado en blanco y hay peores resultados. Además, esta modelización tampoco la podemos considerar correcta en aquellos casos en los que tenemos At=A1-A2, con lo que se llega al 50% de las respuestas con alguno de los errores considerados.

			Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CS	PF1	1	6,3	10,0	10,0
		PF2	2	12,5	20,0	30,0
		At=A1-A2	2	12,5	20,0	50,0
		r. Barrow	1	6,3	10,0	60,0
	no CS	cálculo num.	3	18,8	30,0	30,0
		cálculo integ.	2	12,5	20,0	50,0
		Total	10	62,5	100,0	
Perdidos		blanco	6	37,5		
		Total	16	100,0		

Tabla 6.8: Errores. Cuestión 3’, cuestionario piloto.

Dado que el objetivo de este cuestionario piloto es clarificar las respuestas de estudiantes, encontrar puntos conflictivos en sus respuestas, etc para elaborar un cuestionario definitivo consideramos el conflicto que hemos denominado r. Barrow consistente en considerar $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$ que consideramos que puede provenir de un conocimiento escolar que no se recuerda bien, pero que debíamos tener en cuenta por su posible incidencia en el cuestionario definitivo.

Por último señalar nuevamente porcentaje de estudiante, hasta un 50%, que tienen errores de cálculo numérico o integral y que nos parece muy alto dado el nivel educativo y el tipo de función y cálculos numéricos necesarios en la resolución.

CUESTIÓN 4’

Como en otras cuestiones nos fijamos en primer lugar en el porcentaje de alumnos que han abordado la cuestión, que en este caso es del 75% (12 de 16) y que solamente la han realizado bien el 25% (3 de 12) respecto de los que abordan la cuestión, esto es, un 18’8% del total. Hay que tener en cuenta que en ambos casos era una cuestión resuelta en clase, según confirmaron los dos profesores, lo que no indica el alto grado de dificultad.

Observando las propiedades utilizadas para la resolución en el gráfico siguiente obtenemos que, sobre todo, se utilizan las propiedades de las derivadas: 6 que las utilizan exclusivamente, 3 que corresponde a “solo los propios” y que por tanto han resuelto bien el apartado 2 con lo que las han utilizado, y 2 que las han combinado con alguna propiedad falsa. Esto supone un 91’7% (11 de 12) lo que nos señala a CEinvderiv como configuración epistémica que reconocen los estudiantes principalmente.

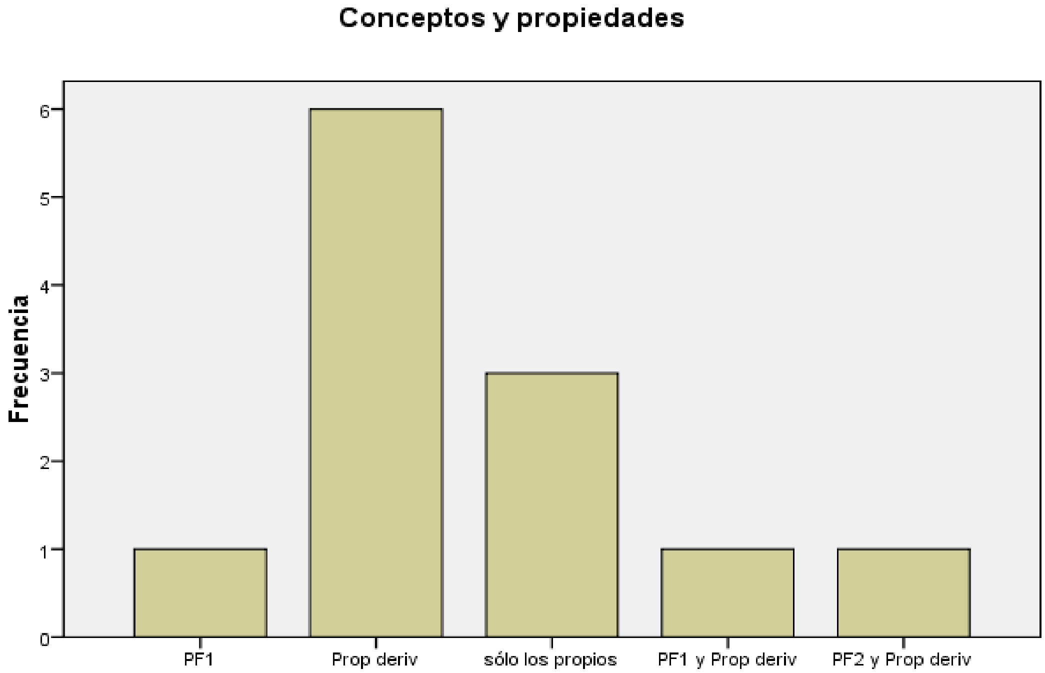


Figura 6.4: Conceptos y propiedades. Cuestión 4’, cuestionario piloto

En esta cuestión los procedimientos o acciones y los conflictos semióticos nos indicarán el grado de consecución de los objetivos planteados, en tanto al papel que tiene CE-geo y a si hay flexibilidad para combinar ambas configuraciones. En primer lugar observaremos la elección en los procedimientos realizados para resolver la cuestión. Aquellos alumnos que realizan e.1.1, el apartado 2 y e.3.2, utilizan las propiedades de las derivadas y por tanto el teorema Fundamental del Cálculo Integral, esto es, recurren exclusivamente a CE-invderiv. Si la resolución se hace mediante e.1.2 y e.3.1 pero no realiza correctamente el segundo apartado o lo deja en blanco, muestra que solamente utiliza CE-geo. Sin embargo, no interesamos también por los alumnos que son capaces de cambiar de una configuración a otra para resolver los apartados. Este caso corresponderá a las respuestas que han utilizado alguna de las siguientes combinaciones en los procedimientos: e.1.2, el apartado 2 y cualquiera en 3; e.1.2 y e.3.2, o bien el apartado 2 con e.3.1.

Para ello hemos elaborado la tabla 6.9 donde se combinan los tres apartados. En ella podemos observar que de los tres alumnos que dan respuestas correctas (los tres apartados completos), dos utilizan CEinvderiv solamente (e.1.1, el apartado 2 y e.3.2), es decir, no son capaces de cambiar de configuración de un apartado a otro. En realidad, estos alumnos no pueden asegurar que sea falsa, sólo saben que no tiene por qué ser verdadera pero no son capaces de encontrar otro recurso que le lleve a asegurar la falsedad de la cuestión (Contreras y Ordóñez, 2005).

Tabla de contingencia: Apartado 1. * Apartado 3. * Apartado 2.

Apartado 2.			Apartado 3.: apartado blanco	Apartado 3.: otros	Apartado 3.: e.3.2 incompleta	Apartado 3.: e.3.2 completa	Total
apartado blanco	**Apartado 1.**	apartado blanco	0	1			1
		e.1.2 completa	1	0			1
	Total		1	1			2
completo	**Apartado 1.**	otros	0	1	0	1	2
		e.1.1completa	0	0	0	2	2
		e.1.2 completa	2	0	0	1	3
		e.1.3incompleta	0	0	1	0	1
	Total		2	1	1	4	8
otros	**Apartado 1.**	otros		1		0	1
		e.1.3completa		0		1	1
	Total			1		1	2

Tabla 6.9 Procedimientos. Cuestión 4’, cuestionario piloto.

Un alumno combina las dos CE (e.1.2, el apartado 2 y e.3.2) y si añadimos los 2 estudiantes que hacen e.1.2 y el apartado 2 pero no contestan el tercer apartado tenemos que son 3 estudiantes (18’8%) los que consideramos que han alcanzado un mayor grado de comprensión ya que no solamente han adquirido ambos significados sino que son capaces de utilizarlos de forma flexible en diferentes contextos (Contreras y Ordóñez, 2005) La no realización de la tercera cuestión, sin embargo, nos sugiere un déficit en la noción de acumulación, tienen la CEgeo y CEinderiv pero dificultades en CErpc.

Observamos cómo CEgeo se utiliza solamente para el primer apartado y es en éste la más utilizada (4 de las 11 contestaciones a este apartado); pero el que no se utilice apenas en los otro le asigna un papel secundario. Quizás el enunciado de la cuestión sugiere el teorema Fundamental del Cálculo Integral y es por ello que los estudiantes se guían por lo que consideran una “pista” para utilizar una u otra CE en la resolución.

En cuanto a los CS observamos que el 33’3% de los estudiantes muestra conflictos asociados a la integral definida (25% *CSf(x)* y 8’3% *CStf*) según aparece en la tabla 6.10

Conflictos Semióticos		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	$CS_{f(x)}$	3	18,8	25,0	25,0
	CS_{tf}	1	6,3	8,3	33,3
	CS derivada	2	12,5	16,7	
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
	Total	16	100,0		

Tabla 6.10: Conflictos semióticos. Cuestión 4', cuestionario piloto.

CUESTIÓN 5'

Si nos fijamos en el número de estudiantes que contestan la cuestión (14 de 16) podemos decir que es accesible para ellos pero solamente el 14'3% de los que la trabajan la resuelven correctamente (2 de los 14) nos informa de que resulta compleja por diferentes motivos que intentaremos clarificar en los conflictos semióticos y otros errores detectados.

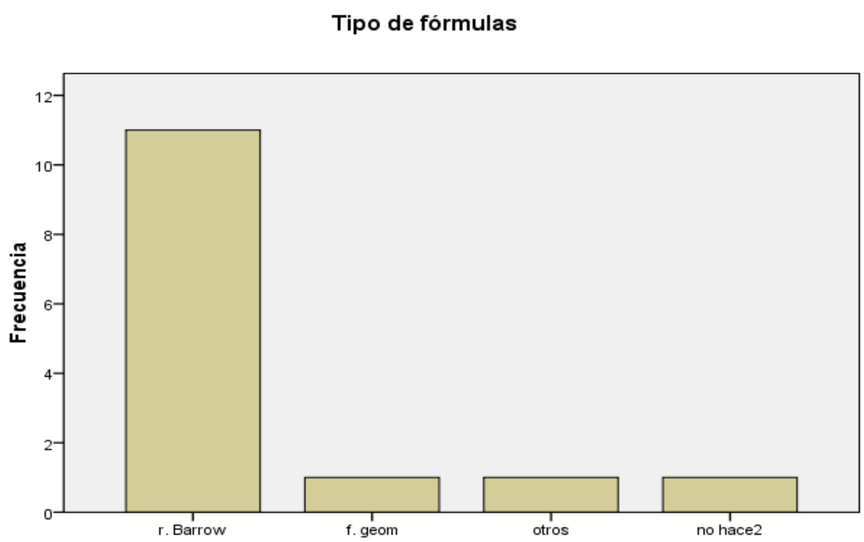


Figura 6.5: Tipos de fórmulas utilizada. Cuestión 5'. Cuestionario piloto

Sin embargo, abordamos en primer lugar las proposiciones. Observaremos dos cuestiones principalmente: el tipo de fórmula utilizada para calcular las integrales definidas y si aplican la aditividad del intervalo. Respecto del primero, tipo de fórmula, tenemos, según nos indica la figura 6.5, que solamente un alumno opta por calcular el área de los triángulos mediante la fórmula geométrica, el resto, salvo incoherencias, opta por la regla de Barrow, ampliamente trabajada en clase.

Los errores que hemos detectado en la aplicación de esta regla, dos casos, son de dos tipos. Por un lado $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ y por otro $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$ que ya hemos detectado en otras cuestiones. Ambos pueden corresponder a un conocimiento escolar que no se recuerda bien, probablemente porque es una mera fórmula a recordar para el cálculo integral. Cada caso corresponde a un alumno concreto que lo repite en diferentes cuestiones.

Respecto del segundo punto: ver la aplicación de la propiedad de la aditividad, y objetivo de esta cuestión, hemos de fijarnos en el apartado 3 donde de los 11 alumnos que lo resuelven solamente 3 (27'3%) lo hacen aplicando esta propiedad. El resto vuelve a realizar los cálculos. Sin embargo, en la cuestión 5, donde se exploraba también esta cuestión, a un nivel muy intuitivo la encontramos en el doble de respuestas: 6, dos de los cuales coinciden con los que la han aplicado en este caso.

Destacamos tres casos que parece que intentan aplicar esta regla y que son especialmente interesantes desde el punto de vista didáctico. El primer caso corresponde a la suma de las dos expresiones de f en el intervalo demandado: $\int_{x_1}^{x_3} g(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3}\big(g_1(x) + g_2(x)\big)\,dx$. El segundo caso es similar pero en vez de sumar ambas expresiones las multiplica: $\int_{x_1}^{x_3} g(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3}\big(g_1(x)\cdot g_2(x)\big)\,dx$. Consideramos que ambos casos corresponden a la aplicación de PF1: *"Calcular la integral utilizando una única expresión de g(x)"* y por tanto el conflicto semiótico asociado: *"sólo es posible calcular la integral para una función con una única expresión."* En el tercer caso nos encontramos con que no cambia los límites de integración: $\int_{x_1}^{x_3} g(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} g_1(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_3} g_2(x)\,dx$ que puede ser debido a un conflicto semiótico de las funciones definidas a trozos. En todos ellos apuntamos el hecho de que no se ha introducido en clase el caso de las funciones definidas por intervalos, según se comprueba en los apuntes, queda bajo la responsabilidad del estudiante la extensión a este tipo de funciones.

Por todo lo anterior podemos concluir que la aditividad no es una propiedad muy asimilada por los alumnos de los grupos estudiados, es decir la transferencia desde las funciones definidas por una única expresión a funciones definidas por intervalos no es transparente y debe ser trabajada para que se realice correctamente.

Destacamos el caso de dos alumnos que parecen confundir integral y área, según nuestro objetivo iv, pues en el cálculo integral si el resultado es negativo lo cambia a positivo mostrando la necesidad de que la integral sea siempre positiva, *pues es un área*.

Por último, resaltamos el hecho de que PF2, que expresa la imposibilidad de calcular la integral por no ser la función continua, no lo hemos detectado en ningún caso lo que, como ya expusimos nos parece significativo. Es una propiedad no trabajada en clase y, por tanto, se deja bajo la responsabilidad del alumno su gestión. Hemos observado en los conflictos anteriores que la extensión de la integrabilidad a funciones definidas por intervalos no es inmediata. Si a esto unimos la cuestión 1 de este cuestionario nos encontramos con que quizás estos alumnos estén mostrando el conflicto semiótico que señalábamos: *"no considerar las condiciones de existencia de la integral para poder aplicar las reglas de cálculo"* que proviene de aplicar la proposición falsa: "*si a la integral se le puede aplicar uno de los métodos, entonces existe la integral definida y su valor da el área"*.

6.3 El cuestionario definitivo

Posteriormente se realizó el cuestionario definitivo, teniendo en cuenta lo obtenido en el cuestionario piloto. Consta de 8 items, pasado a 48 alumnos de 2º de Bachillerato de tres centros de Jaén y de cuatro profesores distintos. Para este cuestionario se realizó también un análisis que nos permitió, al igual que el anterior, definir las variables y sus posibles valores, consiguiendo pasar de un estudio cualitativo a uno cuantitativo que nos permite detectar regularidades.

Además, se escogieron 5 alumnos de dos de los Centros para entrevistas semiestructuradas con el objetivo de clarificar algunas cuestiones de las respuestas del cuestionario. De acuerdo con Boigues (2010), consideramos que la potencialidad de las entrevistas "radica en la capacidad para identificar procesos mentales que afecten, tanto a las estructuras del conocimiento de un individuo (Piaget, 1970; Zazkis y Campbell, 1996) como a sus formas de razonamiento" (p. 112) Según los dos métodos en las entrevistas que propone este autor, citando a Clement (2002): convergente y generativos, podemos afirmar que nuestras entrevistas siguen un método eminentemente convergente, al centrarse en asignar las observaciones a las categorías que se fijaron en al análisis a priori. Sin embargo, creemos que tiene una parte generativa ya que planteamos una entrevista semiestructurada muy abierta, lo que permite un análisis interpretativo más general. (ibíd., pp.112-113)

6.3.1 Construcción y análisis

Para construir el cuestionario definitivo se analizó el cuestionario piloto observando, en primer lugar, aquellas cuestiones que habían sido representativas en tanto a la información que aportaba de la comprensión de los estudiantes, las dificultades y cuestiones interesantes de cada una de las situaciones. En segundo lugar, observamos que el cuestionario piloto había sido extenso y era necesario reducir el número de cuestiones por lo que decidimos dejar solamente ocho cuestiones, aunque este hecho nos llevó a eliminar algunas cuestiones y a reformular otras.

Decidimos eliminar la cuestión 1 porque observamos que en clase no se habían introducido más que funciones continuas o con un número finito de discontinuidades (caso de las funciones definidas por intervalos), pero no se había considerado ni siquiera nombrado el caso de las integrales impropias, lo que ya comentamos en el análisis de dicha cuestión.

Además, eliminamos las cuestiones 3 y 4 ya que las consideramos como conocimientos previos y, como ya comentamos en el análisis de estas cuestiones, dados los resultados observamos que la mayor dificultad estaba en la imposibilidad de utilizar la expresión algebraica para el cálculo integral, solamente se puede utilizar el lenguaje gráfico. Construimos en su lugar la cuestión 3 que comentaremos más adelante.

También eliminamos las cuestiones 2' y 3' que eran cuestiones de modelización por lo que trabajaban CErpc. La cuestión 2' aportaba el conflicto semiótico de considerar que "*para calcular el resultado final basta considerar las ordenadas*". La cuestión 3' aportaba el conflicto semiótico de At=A1-A2, que muestran una importante confusión entre variación y resultado total. Con el objetivo de explorar, de otra forma este último conflicto, se reformuló la cuestión 5, que ahora es la 2. Para observar el primer conflicto señalado y la CErpc se elaboró la cuestión 8, sustituyendo a las anteriores.

Las cuestiones 1' y 4' se han mantenido porque nos han parecido muy ricas en cuanto al análisis de la comprensión de los estudiantes que nos permiten realizar. Por último, las cuestiones 2, 5 y 5'sufrieron pequeñas modificaciones y se añadió la cuestión 7 para profundizar en CErpc. Todo ello será comentado en cada uno de los análisis de las cuestiones.

De esta manera el estudio de las configuraciones epistémicas es el que aparece en la tabla 6. 11

Configuraciones Epistémicas	Cuestionario piloto	Cuestionario definitivo
CEgeo	1-2-1'-4'	1-3-4-6
CErpc	5-2'-3'	2-7-8
CEinvderiv	3-4-4'	4
CEalg	1-5'	5

Tabla 6.11 CE en los cuestionarios

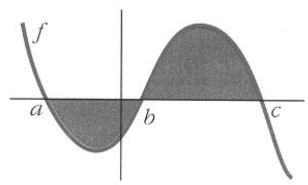
A continuación exponemos cada una de las situaciones del cuestionario definitivo, el cual se encuentra completo en el anexo II, así como del análisis que realizamos de cada cuestión, para el que nos hemos basado en el análisis del cuestionario y que fue completado según la corrección. En este análisis que exponemos hay una diferencia con el análisis del cuestionario piloto. Ahora en para la entidad primaria "conceptos" hemos tenido en cuenta el concepto que se utilizaba en la resolución de la situación. Así, por ejemplo, entendemos por *concepto regla área*: $CR_{área}$, la definición de integral definida como el área bajo la curva o concepto regla álgebra: CR_{alg} la integral como un proceso algebraico. Será también interesante, sobre todo en algunas cuestiones, observar las proposiciones utilizadas. Todo ello se observará mejor en el análisis de las cuestiones que realizaremos posteriormente.

CUESTIÓN 1: ¿Cuáles de las siguientes expresiones:

$$a)\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\left|\int_b^c f(x)dx\right| \qquad b)\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx \qquad c)\left|\int_a^c f(x)dx\right|$$

$$d)-\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx \qquad e)\int_a^c f(x)dx$$

nos da el área limitada por la gráfica de *f* y el eje de las abscisas? Debes justificar extensamente el por qué de la aceptación, o rechazo, de cada uno de los apartados.



Esta cuestión está tomada de Colera y col. (2001) y se propuso en el cuestionario piloto. Ahora ha sido reformada añadiendo el apartado a) con el fin de diferenciar entre aquellos alumnos que muestran la proposición falsa PF3 y que podía provenir de un conflictos semiótico del valor absoluto (si contestan que a) y c) son iguales) o de una excesiva rutinización del cálculo del área.

Ahora, el análisis considerado se diferencia del que se realizó en el cuestionario piloto en la entidad conceptos y proposiciones, en los errores debidos a conflictos semióticos de la integral definida y en los errores no debidos a conflictos semióticos de la integral definida:

3) Entidades primarias:

d)Conceptos y proposiciones: Se utilizará $CR_{área}$ (*la integral definida nos da el área encerrada entre la curva y el eje de las abscisas*). También, se pueden utilizar varias proposiciones falsas que ya consideramos en el cuestionario piloto y que resumimos como:

PF1: *"la integral definida nos proporciona el área"*.

PF2: *"basta tomar el valor absoluto para obtener el área"*.

PF3: *"se verifica la propiedad:* $\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$*"*

PF4: *"Basta tener en cuenta los puntos de corte para que la integral nos de el área por sí misma"*.

Además, tendremos en cuenta PF5: *"para calcular el área de una región situada por debajo del eje de abscisas es necesario utilizar el valor absoluto"*. Se detecta en todo aquel que contesta a) y no d). En parte debido a un proceso mecánico de cálculo de áreas a través de la integral, pero también porque no tienen el concepto de valor absoluto ni de opuesto.

Observamos que PF2 y PF3 se verifican a la vez si contestan sí en a) y en c). En este caso también confunden integral definida con área.

En este caso exponemos a continuación un fragmento de la entrevista realizada al alumno que hemos denominado 3A y que muestra dicha confusión:

[…]

Investigadora (I)- ¿te acuerdas? Tú me dices que la a) y la c) son ciertas, me centro en la a) y la c), ¿por qué, porque son iguales?

Estudiante (E)- Para mí sí. Es que las dos partes de la integral en valor absoluto y hacerla todo junto, creo que sí

I- Crees que es lo mismo

E- Si acaso, al tener el signo menos dentro del valor absoluto pues a lo mejor influye. Yo que sé

I- Le cambia

E- Claro

I- ¿Puede que le cambie por tener el signo menos en el valor absoluto?

E- Puede ser

I- Pero tú crees que es lo mismo el valor absoluto de la integral que la suma de los dos valores absolutos

E- Claro. Yo hago valor absoluto y lo sumo al valor absoluto y el valor absoluto de todo…

I- Todo es lo mismo

E- Claro ¿no? Porque a fin de cuentas tú lo que tienes que hacer dentro del valor absoluto de c) tienes que hacer la suma de las dos ¿no?

[…]

4) También en los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida hemos considerado en esta cuestión, además, confundir el valor absoluto de la integral con la integral del valor absoluto: $\left|\int_a^b f\right|$ con $\int_a^b |f|$, que hemos decidido ponerlo como asociado a la integral definida porque claramente interviene en la noción, aunque es cierto que puede ser un CS de la integral definida o bien del valor absoluto o de las funciones. También ha sido observado en la investigación de Camacho, Depool y Garbín (2008).

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida considerados en esta cuestión son: concepto de opuesto y de valor absoluto que interfieren directamente en la correcta comprensión de $CR_{área}$. El primero ya lo observamos en el anterior cuestionario. El segundo corresponde a aquellos alumnos que no tiene claro el concepto de valor absoluto. Para clarificar estos casos presentamos un alumno que manifiesta ambos conflictos como puede observarse en la figura 6.6:

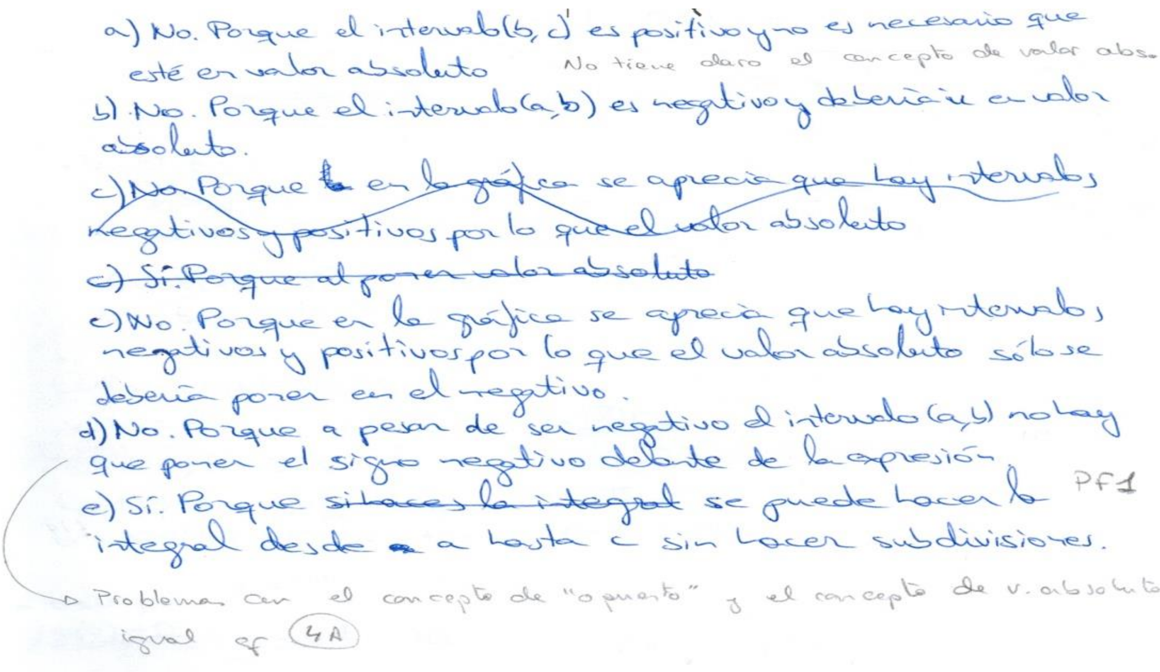
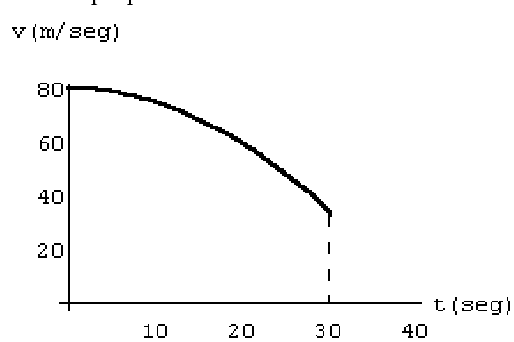

a) No. Porque el intervalo(b, c) es positivo y no es necesario que esté en valor absoluto   No tiene claro el concepto de valor abs.
b) No. Porque el intervalo(a,b) es negativo y debería ir en valor absoluto.
~~c) No. Porque en la gráfica se aprecia que hay intervalos negativos y positivos por lo que el valor absoluto~~
~~c) Sí. Porque al poner valor absoluto~~
c) No. Porque en la gráfica se aprecia que hay intervalos negativos y positivos por lo que el valor absoluto sólo se debería poner en el negativo.
d) No. Porque a pesar de ser negativo el intervalo (a,b) no hay que poner el signo negativo delante de la expresión
e) Sí. Porque ~~si haces la integral~~ se puede hacer la integral desde a hasta c sin hacer subdivisiones.   PF1
→ Problemas con el concepto de "opuesto" y el concepto de v. absoluto
igual cf 4A

Figura 6.6: Estudiante 7B, cuestión 1, cuestionario definitivo

CUESTIÓN 2: Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión durante 30 segundos debido a un problema en el motor. Estando sin propulsión (t=0) su velocidad en metros por segundo vendrá dada por $v(t) = 80 - 0.05t^2$, cuya gráfica es la de la figura adjunta:

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 10 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 10 y los 30 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá sin propulsión?



Esta cuestión fue propuesta en el cuestionario piloto, extraída de Turégano, 1994. Sin embargo, la hemos modificado teniendo en cuenta el conflicto semiótico que encontramos en la cuestión 3' y que denominamos At=A1-A2. Por este motivo hemos hecho que la gráfica no corte al eje de las abscisas, para poder observar la presencia de este CS ya que la cuestión en la que lo encontramos ha sido eliminada. En el análisis de esta cuestión hemos añadido, además, algunas proposiciones falsas y acciones que nos ayudan a la definición de las variables, con lo que queda de la siguiente manera:

b) Objetivos específicos, hemos añadido un cuarto que es: iv) Detectar si hay una confusión entre el espacio recorrido y la variación experimentada por el espacio, a través del denominado At=A1-A2

3) Entidades primarias se han modificado las siguientes:

a) Situación-problema: además de lo tratado en el cuestionario piloto, se ha modificado la gráfica para que no corte al eje OX con el propósito de determinar posible conflictos semióticos

Lenguaje: analítico y numérico.

d) Conceptos y proposiciones: se pueden utilizar $CR_{\text{Física}}$ (el espacio recorrido en un movimiento uniforme viene dado por la integral definida de la función velocidad) o nociones de movimiento uniforme cuando tienen el CSMU, La propiedad que pueden aplicar es la de la *aditividad* de los intervalos de la integral ya comentadas en el cuestionario piloto.

En cuanto a las proposiciones falsas que ahora hemos tenido en cuenta, podemos encontrarnos con las siguientes:

PF1 *"Como espacio es velocidad por tiempo, basta calcular la velocidad para los valores correspondientes y multiplicar por el tiempo"*.

Tomando lo que aporta la pregunta 3´del cuestionario piloto, PF2 $A_T=A_1-A_2$, es decir, confunde el espacio recorrido con la variación experimentada por el espacio.

PF3 *"Como el espacio es la integral de la velocidad, calculo la función espacio e(t) mediante la integral indefinida y sustituyo por el incremento de t"* Proviene de una mala concepción de $CR_{\text{Física}}$, mezclado con un conocimiento escolar proveniente de las clases de Física que no se recuerda adecuadamente y es posible que del error de la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$ que comentamos en el anterior cuestionario.

e) Procedimientos o acciones también hemos tenido en cuenta varios cambios con respecto al cuestionario piloto, $\boxed{\textbf{e.1}}$ y $\boxed{\textbf{e.2}}$ coinciden, sin embargo, en $\boxed{\textbf{e.3}}$ para calcular el área del tercer apartado hay cuatro posibles vías:

$\boxed{\textbf{e.3.1}}$: Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfico (implícito o explícito) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral definida de 0 a 30. En esta vía no se aplica la *aditividad del intervalo.*

$\boxed{\textbf{e.3.2}}$: Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfico (implícito o explícito) $\rightarrow$ Aplicación de la *aditividad* del intervalo $\rightarrow$ Suma de los valores.

$\boxed{\textbf{e.3.3}}$ Sin propulsión no recorre espacio. Corresponde a un error de interpretación del enunciado.

$\boxed{\textbf{e.3.4}}$ Sin propulsión v=0 $\rightarrow$ Aplicación de fórmulas para calcular t=40 $\rightarrow$ cálculo de $\int_0^{40} v(t)dt \rightarrow$ interpretación del enunciado.

Por otra parte, si el alumno utiliza únicamente nociones del movimiento uniforme podemos encontrarnos con las siguientes acciones:

$\boxed{\textbf{e.0}}$ Lenguaje natural $\rightarrow$ Analítico (fórmulas) $\rightarrow$ numérico.

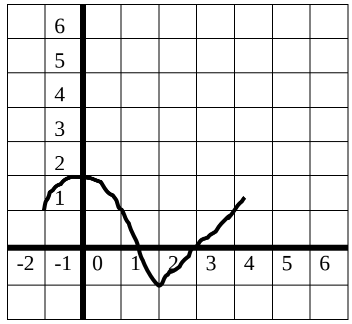
Sin embargo, es posible que mezcle el $CR_{Física}$ con el conocimiento escolar proveniente de las clases de Física y nos encontremos con PF3 en cuyo caso nos encontraremos con las siguientes acciones para el primer y segundo apartado:

$\boxed{\textbf{e.1.1}}$ ó $\boxed{\textbf{e.2.1}}$: Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\rightarrow$ Cálculo de la integral indefinida $\rightarrow$ cálculo del incremento de t $\rightarrow$ sustitución.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que consideramos en esta cuestión son, por una parte, el conflicto semiótico CSMU. Además, un conflicto semiótico conceptual es interpretar el espacio como derivada de la velocidad que puede ser una manifestación de CS_{tf} en el contexto físico. Por último, los errores debidos a la aplicación incorrecta de la regla de Barrrow, que ya encontramos en el cuestionario piloto. Por un lado $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, que denominaremos RB1, y por otro $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$, que denominaremos RB2. Se podrán detectar en otras cuestiones.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida que en esta cuestión observamos son principalmente errores de *cálculo integral* y de *cálculo numérico*, tal como los considerábamos en el cuestionario anterior. Además, en esta cuestión nos encontramos con interpretación del enunciado, para aquellos alumnos que no han sabido interpretarlo pues, por ejemplo, han confundido el que vaya sin propulsión con el hecho de pararse, y $CS_{física}$ para conflictos semióticos que provienen de nociones de la Física y que en esta cuestión se manifiestan.

CUESTIÓN 3: ¿Cómo calcularías, con la mayor aproximación que sea posible, la integral definida en el intervalo [-1,4] de la función cuya gráfica aparece en la figura? Justifica la respuesta.



Esta cuestión está adaptada de Labraña (2001) buscando clarificar ciertos puntos, en concreto la relación entre integral y área que establecen los alumnos, la dependencia de las fórmulas para poder aplicar los métodos algorítmicos y las dificultades en el contexto gráfico exclusivamente detectadas en la cuestión 3 y 4 del anterior cuestionario y expuestas por Artigue (1989, citado en Labraña, 2001), como vimos en el capítulo 2, o por Paschos y Farmaki (2006) que presentan el estudio de un caso donde una estudiante que no pude continuar con la resolución de la situación pues aunque observa el gráfico, busca insistentemente la fórmula porque obviamente considera que sólo conociendo la fórmula ella será capaz de actuar (p. 4-342)

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales de los alumnos en cuanto a las interacciones entre el significado de integral definida como área: CEgeo y el cálculo de la integral definida. Detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Estudiar recursos de cálculo de la integral definida cuando no aparece $f(x)$ como una función analítica.

ii. Analizar la dependencia del álgebra para calcular la integral definida.

iii. Analizar las relaciones entre área debajo de una curva y la integral definida.

iv. Estudiar el uso de la propiedad de aditividad de la integral.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CEgeo

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se pregunta por integral en vez de por área, buscando analizar las relaciones que el alumno establece entre ambas. Se propone una cuestión en la que no se utiliza la fórmula algebraica para la función que viene dada solamente por el gráfico para ver si se movilizan otros recursos. Se ha procurado plantear regiones generales, esto es, valores positivos y negativos de OX y curva por encima y debajo de este eje. El enunciado permite utilizar recursos muy variados como lo demuestran las acciones. Se trabaja también la aditividad.

b) Lenguaje: natural, analítico (buscar fórmulas para la expresión de la función o fórmulas geométricas), gráfico y numérico (contar cuadritos).

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico (justifica las acciones).

d) Conceptos y proposiciones: en esta cuestión distinguiremos dos conceptos-regla que se pueden emplear. Así, consideramos que se utiliza $CR_{\text{área}}$ en todos aquellos casos que recurran a fórmulas geométricas, contar cuadritos etc. y CR_{alg} para todos aquellos que plantean la aplicación de las reglas del cálculo integral a una función que debe calcularse (bien porque la calcula, bien porque lo indica)

Por otra parte la proposición falsa que aplican es PF: *"Si calculo el área entonces obtengo la integral definida"* o bien *"debo aplicar el valor absoluto ya que la integral definida es un área y por lo tanto positiva"*, que corresponden con PF1 y PF2 de la cuestión 1 de este cuestionario definitivo y que en esta caso lo hemos considerado como una sola pues en esta cuestión viene unidas ambas proposiciones. El conflicto semiótico es confundir integral definida y área. En cuanto a las propiedades se puede utilizar la aditividad.

e) Procedimientos o acciones: pasos encaminados a la resolución de la situación-problema.

Hay diversas posibilidades:

$\boxed{\textbf{e.1}}$ Usar fórmulas geométricas.

$\boxed{\textbf{e.2}}$ Sustituir una función desconocida por otra conocida.

$\boxed{\textbf{e.3}}$ Aproximación por rectángulos, mostrando una aproximación a CEaproxlim.

$\boxed{\textbf{e.4}}$ Contar cuadros por compensación.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que podemos detectar son los debidos a la proposición falsa y los siguientes:

CS_{alg}: "*No conocer la expresión analítica de la función impide calcular la integral definida". *Debido a una excesiva algortimización del cálculo integral.

CS_{adit}: No aplica aditividad sino que suma todas las expresiones o directamente aplica la regla de Barrow.

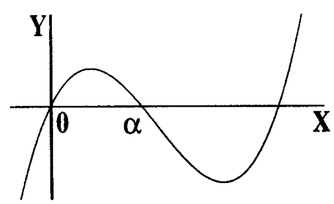
La regla de Barrow según la tipología que hemos visto en la cuestión 2 y que observaremos en otras cuestiones: RB1 y RB2.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida que consideramos en esta cuestión son los conflictos semióticos de funciones que hemos agrupado en CS_{fun} y $CS_{área}$: necesita que la función "termine" por la ostensividad de la figura, esto es, considera área cuando ostensivamente hay un área cerrada.

En esta cuestión también nos encontramos con la equivocada elección de los límites de integración que consideramos corresponde a una mala lectura de la gráfica y por tanto no correspondería, en este caso particular, a la integral definida.

CUESTIÓN 4: Consideramos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Si fuese f la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando ampliamente las respuestas:

1. $F(\alpha) = 0$ 2. $F'(\alpha) = 0$ 3. F es creciente en el intervalo $(0,\alpha)$.



Esta cuestión es la cuestión 4' del cuestionario piloto, que no ha sido modificada en su enunciado. A pesar de que resultó ser una cuestión compleja para los estudiantes decidimos dejarla pues nos informa de CEinvderiv y de una cuestión fundamental que no aparece en ninguna otra cuestión como es el cambio entre configuraciones epistémicas. Hemos mejorado el análisis, principalmente, en las acciones al considerar las que se pueden hacer si se aplica una proposición falsa, mejorando la caracterización de las posibles respuestas. Así mismo hemos considerado algunas propiedades falsas y conflictos semióticos no considerados en el cuestionario piloto, con lo que en el análisis hay que considerar además:

1) Objetivos específicos hemos añadido un tercer objetivo: iii) Observar si el alumno combina diferentes configuraciones epistémicas para resolver los diferentes apartados

3) En las entidades primarias:

d) Conceptos y proposiciones: Se pueden utilizar nociones de funciones y gráfica (consideran *F=f)*, propiedades de las derivadas, el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI) y $CR_{área}$. Además, podemos encontrarnos con las siguientes proposiciones falsas que establecimos en el cuestionario piloto y ahora hemos considerado otra propiedad falsa: PF4 "*Si los límites de integración son distintos entonces* $\int_o^{\propto} f(x)\,dx \neq 0$" lo cual equivale al contra recíproco: Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ es porque *a*=*b*. Puede ser consecuencia de que no hay idea de proceso de acumulación, no hay posibilidad de "compensación", está muy arraigada la identificación integral área; pero puede ser que provenga de una aplicación de una regla intuitiva (Stavy and Tirosh, 2000, citado en Tsamir, 2007), un caso particular de la regla por Tsamir (2007) *la integral de una función entre límites a y b, y límites c y d donde b-a=d-c debería dar la misma solución* (p. 31) En cualquiera de los casos son estudiantes que pueden presentar problemas con la noción de acumulación asociada a la integral definida.

e) Procedimientos o acciones han sido mejorados respecto del cuestionario piloto también.

En el apartado 1, caben las siguientes vías:

$\boxed{\textbf{e.1.1}}$ Del enunciado al teorema fundamental del Cálculo Integral, de éste a su tesis $F'(x) = f(x)$, de éste a que $F(x)\neq f(x)$, por último a que $F(\alpha)\neq 0$. Es importante observar que esta opción no da la solución, pues no dice lo que sucede con $F(\alpha)$ puede ser cierto o no, habría que buscar otra forma, el área en este caso. Esto lleva a confusión pues hay alumnos que optaran por él y no consideran esta incertidumbre, ¿por qué no cambia de registro? En este caso utilizan CE-invderiv.

$\boxed{\textbf{e.1.2}}$ Del enunciado a que $F(\alpha)$ es el área barrida de 0 a α, de aquí a la gráfica, de ésta a que el área es distinta de 0, por último a que $F(\alpha)\neq 0$. CE-geo.

$\boxed{\textbf{e.1.3}}$ Del enunciado a la gráfica y de ahí a que $F=f$ y por tanto $f(\alpha)=F(\alpha)=0$. Muestra $CS_{f(x)}$

$\boxed{\textbf{e.1.4}}$ Enunciado $\rightarrow$ $F=f'$ (CS_{tf}) $\rightarrow$ propiedades entre función y derivada $\rightarrow$ gráfica $\rightarrow$ interpretación.

$\boxed{\textbf{e.1.5}}$ Enunciado $\rightarrow$ integral cero si los límites son cero o coinciden $\rightarrow$ interpretación que corresponde a aquellos casos que muestran PF4.

En el apartado 2:

$\boxed{\textbf{e.2.1}}$ Del enunciado al Teorema Fundamental del Cálculo Integral, de éste a que $F'(\alpha)=f(x)$, de aquí a la gráfica, por último a que $F'(\alpha)=f(\alpha)=0$, En este caso utilizan CE-invderiv.

$\boxed{\textbf{e.2.2}}$ Enunciado $\rightarrow$ propiedades de las derivadas $\rightarrow$ gráfica (confunde F con f, $CS_{f(x)}$) $\rightarrow$ interpretación.

$\boxed{\textbf{e.2.3}}$ Enunciado → PF2 → interpretación

En el apartado 3, caben las siguientes posibilidades:

$\boxed{\textbf{e.3.1}}$ Del enunciado a que $F(\alpha)$ es el área barrida de 0 a α, de ésta a que $A(x)$ es una función creciente, por último a que F es creciente en $(0,\alpha)$, en este caso utilizan CE-geo.

$\boxed{\textbf{e.3.2}}$ Aplicando las propiedades de las derivadas: f es positiva y $F'=f$ con lo que F es creciente, en este caso utilizan CE-invderiv.

$\boxed{\textbf{e.3.3}}$ Enunciado → $F=f$ → gráfica → la función crece y decrece → interpretación (corresponde a PF3)

$\boxed{\textbf{e.3.4}}$ Enunciado → confusión F con f'→ gráfica → propiedades de las derivadas → interpretación. Corresponde a CS_{tf} que comentaremos en conflictos semióticos.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida considerados en esta cuestión son el conflicto semiótico asociado a las anteriores proposiciones falsas que hemos denominado $CS_{f(x)}$: *"Confundir la función integral definida con la función dada"* en la línea de lo observado por Bezuidenhout y Olivier (2000) en una cuestión donde, dada la gráfica $y = h(t)$, hay que calcular un máximo local para $p(x) = \int_a^x h(t)dt$.

Por último podemos encontrarnos con la confusión de integral con derivada, conflicto semiótico que hemos denominado CS_{tf}. También, intercambian el papel de F y f con lo que considera $F=f'$.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida para esta cuestión son los conflictos semióticos de las derivadas CS_{deriv}. Asimismo nos podemos encontrar con los conflictos semióticos de funciones que en la cuestión anterior ya denominamos CS_{fun}

CUESTIÓN 5: Se considera la función $g(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad -2 \le x < 0 \\ 2x & si \quad 0 \le x < 2 \\ 8-3x & si \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$. Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$a)\int_{-2}^{1} g(x)dx \quad b)\int_{1}^{4} g(x)dx \quad c)\int_{-2}^{4} g(x)dx$

Presentamos la cuestión 5' con una ligera modificación que consiste en que la integral entre -2 y cero sea negativa, el motivo es explorar la necesidad del valor absoluto lo que nos indicaría confusión integral-área ya que no se pide el área sino el valor de la integral, como encontraron Bezuidenhout y Olivier (2000) en su investigación, donde hay estudiantes que siempre consideran el valor positivo de la integral debido a la conexión entre integral y área bajo la curva (p.77) En el análisis hemos considerado los conceptos regla que se pueden usar, dos proposiciones falsas más y un nuevo conflicto, principalmente. Así, en el análisis realizado en el cuestionario piloto habrá que considerar, además:

1) Objetivos específicos hemos considerado otro nuevo que es v) ver la influencia que la técnica o mecánica de cálculo del área través de la integral definida sobre el concepto de integral definida.

3) Entidades primarias hemos modificado las siguientes:

a) Situación-problema, además de lo expuesto en el anterior cuestionario se han puesto dos integrales negativas para ver si toman valores absolutos, lo que nos indicaría una confusión entre integral y área.

d) Conceptos y proposiciones: en esta cuestión pueden utilizar los métodos algorítmicos de cálculo integral con lo que tendremos CR_{alg} y por tanto la regla de Barrow, o bien, en algunos casos, fórmula geométrica del área del triángulo, esto es, $CR_{área}$. Una de las propiedades que pueden utilizar es la aditividad del intervalo.

En cuanto a las proposiciones falsas podemos encontrarnos con las siguientes que consideramos en el cuestionario piloto:

PF1: *"Calcular la integral utilizando una única expresión de g(x)".*

PF2: *"al ser g(x) discontinua en (2,4), no existe la integral definida de g(x) en dicho intervalo."*

Además, ahora añadimos:

PF3: *"Es necesario calcular el valor absoluto pues la integral es un área y debe de ser siempre positiva"* que la utilizan aquellos alumnos que ponen el valor absoluto en cada trozo, antes de observar el signo o en el resultado total de la integral, para asegurarse de que sea positiva, mostrando una clara confusión entre integral área.

PF4: *"Es necesario calcular los puntos de corte y poner el valor absoluto para los trozos por debajo de OX"*, que es similar al anterior, la diferencia estriba en que observan el signo y sólo aplican el valor absoluto a los resultados negativos. También muestran confusión integral-área.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida son los asociados a PF1 y PF2 y el conflicto semiótico asociado a PF3 y PF4 es el que hemos denominado CS_{vab}*: es necesario calcular el valor absoluto para que la integral sea positiva y que proviene de confundir integral con área.* Hay varias maneras en que este conflicto se muestra. En algunos casos el estudiante descompone la integral en diversas integrales según los intervalos y calcula el valor absoluto de cada una de ellas sin observar el signo (corresponde a PF3). En otros casos, el valor absoluto se calcula al resultado final de la integral (también corresponde con PF3). Sin embargo, en algunas contestaciones hemos observado que solamente se calcula el valor absoluto para las integrales de resultado negativo (PF4). En cualquier caso consideramos que aplican el valor absoluto por la identificación integral-área con lo que muestran el mismo conflicto.

También hemos considerado los errores en la regla de Barrow, que como ya establecimos en la cuestión 2 de este cuestionario, son por un lado, como hemos descrito en otras cuestiones, RB1: $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, y por otro RB2: $\int_a^b f(x)dx = F(b-a)$.

5) Entre los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida, nos encontramos con un CS propio de la representación gráfica de las funciones definidas a trozos que es considerar que la función debe de ser continua y por tanto a la hora de representarla obligan a la continuidad. Consideramos que es un CS propio de las funciones y por ello lo hemos puesto como CS_{fun}. Por último, errores de *cálculo integral* y de *cálculo numérico*, tal como los considerábamos en el cuestionario anterior.

CUESTIÓN 6: Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$. Deciden dividir equitativamente dicha parcela mediante una recta $y=a$ paralela a la recta $y=1$. Halla el valor de a.

Esta cuestión es la 1' del cuestionario piloto, cuyo enunciado no ha sido modificado. Por este motivo, hemos ampliado poco el análisis que allí realizamos.

3) Entidades primarias solamente hemos añadido a conceptos y proposiciones que en esta cuestión los alumnos deben conocer y utilizar $CR_{área}$.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida son los que provienen de la aplicación de alguna de las proposiciones falsas. En cuanto al planteamiento podemos encontrarnos con dos conflictos semióticos. Uno de ellos es la elección de los límites de integración = $CS_{lím}$ y otro es la elección de las funciones a integrar.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida considerados en esta cuestión son el cálculo numérico. Por otra parte hay un conflicto que hemos denominado (conflicto semiótico de interpretación): CS_{int} que corresponde a todas aquellas contestaciones en las que a raíz de obtener el área total el alumno obtiene como resultado $a = \frac{Área_{total}}{2}$. Consideramos que no pertenece a la integral definida pues es un problema de interpretación, esto es, debe conseguir un a y es el primero que localiza nada más obtener un resultado. Este caso es un poco "la edad del capitán"

(Brousseau), por lo que correspondería a resolución de problemas o a los efectos del contrato didáctico. Otro error proviene del mal planteamiento de la ecuación a resolver.

CUESTIÓN 7: Un ciclista se desplaza a una velocidad $v(t)= 20\text{-}10t$.

Calcula $\int_0^4 v(t)dt$ y describe cómo fue el recorrido del ciclista.

Esta cuestión fue propuesta por Labraña (2001) y pertenece a la categoría epistemológica 3: "aplicaciones a otros contextos", de las cuatro que realiza. En la valoración que realiza de cada una de las cuestiones que considera obtiene que esta cuestión, en Secundaria, tiene una dificultad baja. Sin embargo, la pertinencia en este nivel educativo también es alta, así como el interés desde el punto de vista formal e intuitivo es alto (Labraña, p.124) Desde nuestro punto de vista, esta cuestión nos ofrece la posibilidad de ver una aplicación de la integral definida, bastante accesible para los estudiantes en cuanto al grado de dificultad de los cálculos requeridos pero en la que se pone en juego la interpretación de una integral nula que corresponde a un fenómeno evidentemente no estático. Todo ello supondrá una fuente de conflictos cuya resolución nos informará de los significados personales.

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales de los alumnos respecto al significado institucional de la integral definida en una aplicación de la Física y posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Asociar el espacio al área 0 o la integral definida.

ii. Observar si el valor cero de la integral definida conduce a interpretaciones erróneas.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CErpc

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se trata de una situación de la vida que se modeliza según la integral definida. Se buscan dificultades relacionadas con la interpretación de un fenómeno de movimiento de un móvil en el que la integral es nula pero se indica que hay movimiento pues se da la fórmula matemática que lo define.

b) Lenguaje: natural, analítico y gráfico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo retórico.

d) Conceptos y proposiciones: los conceptos-regla que se pueden utilizar en esta cuestión son dos. Por una parte, $CR_{Física}$: el espacio recorrido en un movimiento uniforme viene dado por la integral definida de la función velocidad y CR_{alg} si calcula la integral pero no realiza ninguna acción más o en la interpretación no la utiliza sino que recurre a otras nociones, nociones de movimiento uniforme de la Física, para explica el fenómeno.

La proposición falsa que aplican es PF: *"Si la integral definida vale cero, entonces no hay movimiento"* que lleva asociado $CS_{\text{int cero}}$.

En esta cuestión deben interpretar el resultado nulo y, siguiendo las categorías de respuestas propuestas por Labraña, 2001 (p.215) se puede aplicar dos proposiciones:

P1: *El ciclista regresa; señalando los intervalos*.

P2: *Regresa; circuito cerrado*.

e) Procedimientos o acciones: pasos encaminados a la resolución de la situación-problema.

Hay varias vías:

e.1 calcular la integral definida → interpretación del fenómeno a raíz del resultado.

e.2 representación gráfica →cálculo geométrico → interpretación del fenómeno.

e.3 representación gráfica → descomposición en dos integrales → cálculo de la integral definida → interpretación del fenómeno.

e.4 cálculo de la integral definida → representación gráfica → interpretación del fenómeno.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que podemos encontrarnos en nuevamente CSMU (considerar y aplicar e fórmulas del movimiento uniforme) como en cualquier cuestión con este contexto de la Física.

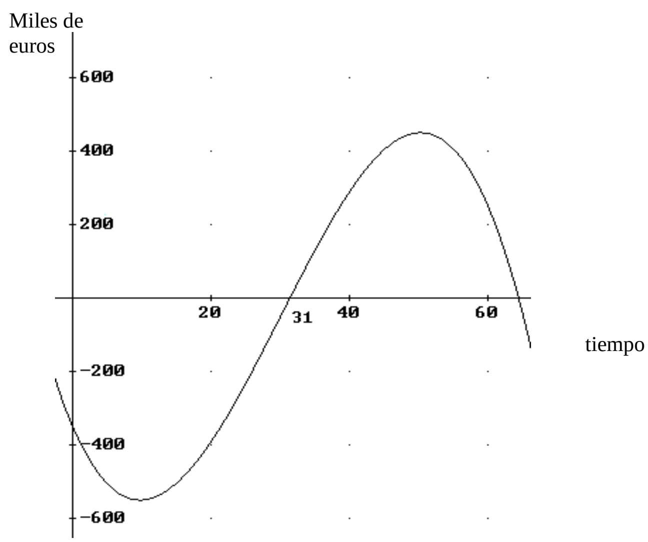
Otro conflicto semiótico es el asociado a la proposición falsa $CS_{\text{int cero}}$, esto es, contradicción de trabajar v y sin embargo, responder con "no se mueve" por ser la integral definida cero, prevalece el cálculo algebraico al significado del movimiento, "es indicativo de que se hace un uso mecánico y no significativo de la fórmula de la velocidad" (Labraña, 2001, p. 216)

También hemos teniendo en cuenta CS_{vab}: *es necesario calcular el valor absoluto para que la integral sea positiva* y que proviene de confundir integral con área considerado ya en la cuestión 5.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida en esta cuestión son interpretar $\int v$ como *v*, detectado por Labraña y que consideramos que es un deslizamiento debido a una mala $CR_{\text{Física}}$ pues no interpretan la integral como el espacio. Estos alumnos pueden tener CRFísica porque lo asocian con un fenómeno físico aunque no es el correcto. En las cuestiones con Física hay una doble trasposición didáctica desde el fenómeno físico a su modelización física y desde ésta a la modelización matemática.

Otros $CS_{física}$ que también han salido los hemos agrupado con esa denominación. En esta situación también nos hemos encontrado con algunos CS que ya han ido apareciendo en otras cuestiones: CS_{fun}.

CUESTIÓN 8: Por los datos iniciales se estima que las ganancias/pérdidas, en miles de euros, de una pequeña empresa dedicada a la fabricación y comercialización del turrón se ajustan, durante los 60 días que dura la campaña de Navidad, a la función $f(x) = -0'03x^3 + 2'7x^2 - 44x - 350$, cuya gráfica es la representada en la figura. ¿Cuál será el resultado de esta campaña de Navidad?



Esta cuestión fue realizada para analizar CErpc,

1) Objetivos

a) General: Detectar los significados personales de los alumnos respecto a la CErpc (como resultado de un proceso de cambio) y detectar posibles conflictos semióticos asociados.

b) Específicos:

i. Observar si una situación derivada de la Economía es modelizada por medio de la integral definida.

ii. Ver la interpretación de un resultado negativo en una integral definida.

iii. Observar la dependencia de la asociación de integral-área es impedimento para la interpretación de procesos de acumulación.

2) Significados institucionales de referencia subyacentes: CErpc.

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se propone una situación relacionada con las razones de cambios continuos, en la que la función toma valores positivos y negativos. El resultado es negativo, lo que obligará al alumno a distinguir entre integral definida y área. Se pretende, junto con la cuestión anterior, clarificar CE-rpc.

b) Lenguaje: analítico, natural y numérico.

c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo heurístico.

d) Conceptos y proposiciones: los conceptos-regla que consideramos que se pueden usar esta cuestión son: CR_{rpc} si es capaz de calcular la integral definida directamente e interpretar su resultado, $CR_{área}$ para aquellos casos en que descompone en dos integrales, calcula el valor absoluto etc. que proviene de las prácticas escolares de cálculo del área bajo la curva, CR_{alg} si solamente calcula la integral definida pero no realiza ninguna interpretación, tenemos en cuenta que los estudiantes saben que es un cuestionario sobre la integral definida y por ello entendemos que no reconocen la integral en esta situación. Si simplemente calculan el valor numérico de la función consideramos que utilizan nociones y propiedades de las funciones.

Se pueden utilizar varias proposiciones falsas:

PF1: *"Como las ganacias-perdidas vienen dadas por f(x), entonces basta calcular f(60) para obtener el balance final."*

PF2 *"basta con calcular* $\sum f(a_i)$ *con* a_i *días"* Discretiza el problema, no hace el paso al límite.

PF3: *"Las pérdidas-ganancias vienen dadas la integral que es equivalente al área por lo que descompongo en dos trozos"*.

PF4: *"El resultado debe ser positivo pues es una integral y por lo tanto un área"*.

e) Procedimientos o acciones: Hay varias vías:

e.1 Lenguaje natural → Gráfica → Cálculo de la integral → Interpretación, que se corresponde con la utilización de CR_{rpc} si es completa y CR_{alg} si falta la última función semiótica.

e.2 Lenguaje natural → Gráfica → Descomposición en dos integrales → Cálculo de las integrales → Diferencia de ambas → Interpretación. Ausencia de significado CErpc y aplicación de CEgeo aunque puede ser capaz de interpretar correctamente el fenómeno. También se incluye los que muestran PF3.

e.3 Lenguaje natural → analítico (cálculo de $f(x)$) → Interpretación, que utilizaran aquellos alumnos que muestren PF1.

e.4 Lenguaje natural → Gráfica → Cálculo de la integral → Valor absoluto → Interpretación. Se corresponde principalmente con PF4.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos de la integral definida que hemos considerado en esta cuestión son $CS_{lím}$ que volvemos a encontrarnos y que ahora proviene de $CS_{área}$ pues consideran que el área debe de estar "cerrada", entendiendo por cerrada la que lo está de forma ostensiva al cortar con cualquier eje o la que empieza y termina cortando al eje OX. Además CS_{vab}*: es necesario calcular el valor absoluto para que la integral sea positiva* mostrándonos confusión entre integral y área, asociado a PF4 principalmente.

5) Los errores en las contestaciones no debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida en esta cuestión han sido ya expuestos en otras. Así encontraremos CS_{fun} y errores de *cálculo integral* y de *cálculo numérico*, tal como los hemos considerado anteriormente.

6.3.2 Resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario definitivo

A continuación exponemos las conclusiones del análisis de los resultados. En el anexo IV se exponen todas las tablas que se han obtenido tras la definición de cada variable. En el presente análisis, basándonos en dichas tablas y gráficas, hemos hecho los agrupamientos que hemos considerado oportunos en orden a mejorar la claridad de los resultados y se van exponiendo los resultados más significativos obtenidos.

CUESTIÓN 1

El primer dato que destacamos es que no hay ninguna respuesta en blanco y que hay un 41'7% de estudiantes que muestra solamente $CR_{área}$ con lo que el resto, el 58'3%, muestra algún conflicto semiótico (un porcentaje similar al detectado en el piloto 56'3%) Es este 41'7% el que consideramos que asocia adecuadamente la expresión analítica por medio de la integral con el área e interpreta gráficamente la integral definida, objetivos específicos que nos planteamos.

En cuanto a los conflictos semióticos asociados, objetivo general de esta cuestión, nos basamos en la tabla 6.12 que nos muestra el recuento de proposiciones falsas, teniendo en cuenta que en ocasiones en una misma respuesta podemos encontrar varias proposiciones falsas.

Si tenemos en cuenta que PF1 y PF2 muestran confusión entre integral y área podemos observar que el 25% de los estudiantes presentan este conflicto semiótico. Además, el 25% presenta PF3 ($\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$), tendrá problemas para entender la integral como el resultado de un proceso de cambio total, pues no entenderán las compensaciones que hay entre las partes positivas y negativas.

Probablemente, no entenderán que una integral nula no es, necesariamente, un área nula, por ejemplo.

Conceptos y proposiciones		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	PF1	3	6,3
	PF2	9	18’8
	PF3	12	25
	PF4	5	10,4
	PF5	12	25
	Total	48	

Tabla 6.12: Distribución de proposiciones falsas en la cuestión 1 del cuestionario definitivo

En la misma línea, de confusiones con el valor absoluto, nos encontramos 12 casos que muestra PF5 (necesidad del valor absoluto), 3 que muestra confusión entre el valor absoluto de la integral y la integral del valor absoluto, y 8 casos que muestran el conflicto semiótico del valor absoluto considerado en los conflictos semióticos no asociados a la integral definida y donde sólo hay coincidencia en un caso, donde coinciden los dos últimos; esto nos permite asegurar que 22 casos (45’8%) tienen conflictos semióticos con esta noción, concluyendo que el valor absoluto no es transparente ni está asimilada por los estudiantes de este nivel.

También como concepto previo, nos ha llamado la atención la alta incidencia del concepto de opuesto que vimos en el primer cuestionario y que ahora aparece en un 25% de las respuestas. La figura 6.6 que vimos en el análisis de esta cuestión, expusimos la respuesta de un alumno que tiene tanto el conflicto del valor absoluto como el de opuesto.

Concluir que la integral como área no es transparente, se mezclan además muchas otras nociones (valor absoluto, opuesto) que los estudiantes no tiene asimiladas y que generan conflictos semióticos en esta noción, por lo que sería conveniente, en primer lugar, abordar estas nociones, como conocimientos previos.

CUESTIÓN 2

El primer dato que destacamos es que esta es una cuestión accesible para los alumnos pues nuevamente la deja en blanco solamente uno de ellos. Sin embargo, observamos que reconocen $CR_{\text{Física}}$ un 68’8% de los alumnos que abordan la cuestión, aunque de ellos un 6’4% tiene PF3 (Figura 6.7, donde muestra también la idea de la aditividad del intervalo), y en un 22’9% aún utilizan nociones del movimiento uniforme para la resolución.

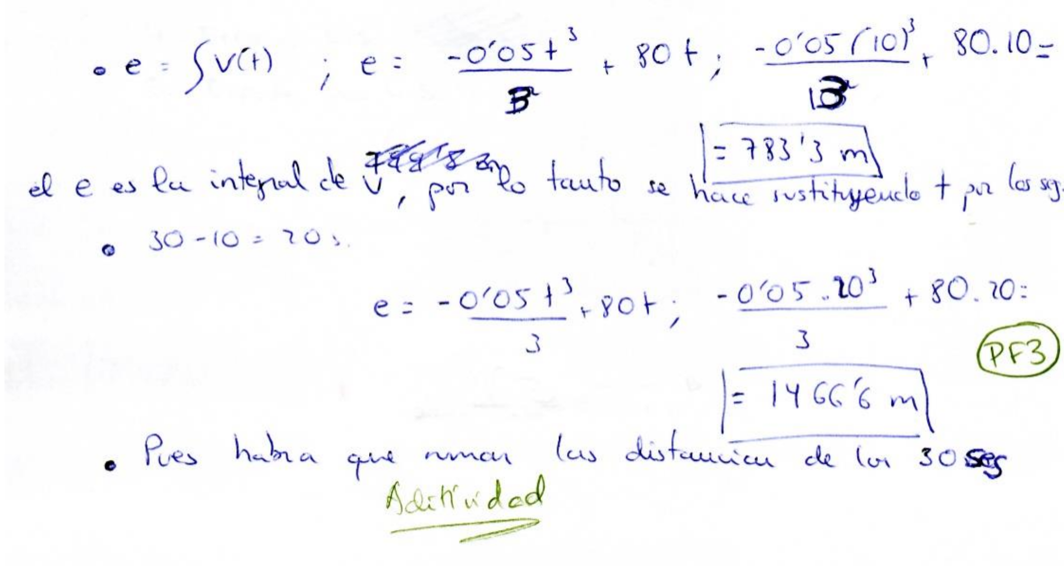


Figura 6.7: Estudiante 41C, cuestión 2, cuestionario definitivo

Respecto a CSMU, hasta un 25’5% muestra este conflicto. Si consideramos, junto con estos datos, que esta es una cuestión conocida de las clases de Física y que los estudiantes conocían que este cuestionario pretendía indagar sobre sus ideas acerca de la integral definida, podemos asegurar, en respuesta al primer objetivo específico, que la transferencia al contexto físico, siendo el más conocido, no es inmediata ni transparente. Estamos de acuerdo con Camacho, Depool y Garbín (2008) que afirma que “Los estudiantes no logran interpretar adecuadamente el significado de la integral definida cuando se aplica a una situación en un contexto diferente al matemático” (p. 50)

Además, hay que añadir un conflicto que consideramos importante para los casos de modelización y es lo que hemos denominado *“la interpretación del enunciado”* detectada en un 38’3% y que hemos considerado que no corresponde a la integral definida pero que nos muestra una importante dificultad.

Llama poderosamente la atención que solamente un 4’2% de los casos utiliza la aditividad, segundo objetivo que nos planteamos con esta cuestión. Además, un 6’4% tiene errores en la aplicación de la regla de Barrow, concretamente del tipo que hemos denominado R1 (intercambian en el orden en la regla de Barrow)

En este cuestionario nos planteamos si había confusión entre el espacio recorrido y al variación del espacio (lo que denominamos At=A1-A2) y que se había detectado en otro cuestión que, al ser eliminada, provocó el cambio de esta. No hemos encontrado en las respuestas escritas ningún caso, pero en el siguiente fragmento de la entrevista realizada al alumno 4A podemos observarla:

[…]

I- Entonces el espacio, ¿cuál sería más o menos? ¿Cuál crees tú que sería?

E- El espacio, pues…

I- ¿Cómo lo calcularías?

E- Pues a los 75, quiero decir a los 10 segundos sí se que va a 75. Pues el área ¿no?

I- (…) Y ¿cómo la calcularías?

E- Pues… la función que me dan menos la que sería igual a 75

I- A ver. Explícamelo mejor, que me lo dices pero…

E- Te lo dibujo ya. Sería la función

I- v(t)

E- menos *f* de…

I- menos el 75 que te ha salido de…

E- exactamente, que sería y=75 ¿no?

I- y ¿cómo calcularías ésta área?, ¿con la función?

E- Después no, después a…resto eso y hago la integral desde 10 hasta 0

I-¡Escríbemelo!

E- A ver, si yo que tengo ese trozo… pues resto primero v(t) menos f(x), por ejemplo, que sería 75, ¿no? Vamos, que hago $80-0'05t^2-75$

I- ¿Que es el que has calculado antes?

E- Sí, y después hago la integral desde 10 a 0

I- Desde 0 a 10 ¿no? Se leen de abajo a arriba

E- Sí, y de lo que me salga está aquí

I- Exactamente. De ésta, de v(t) –*f*(x), que tú has calculado. Para de 10 a 30, ¿exactamente igual?

E- Sí

I- Volverías a calcular la velocidad…

E- Sí, al 30 ¿no?

I- Le restarías y a partir de ahí trabajarías con la misma función, pero ahora…

E- Sí, en vez de 75, pues 30

[…]

Por último, una cuestión que encontraremos con frecuencia, porcentajes elevados en errores de cálculo numérico (12’8%) e integral (14’9%) dado que se escogieron funciones que no entrañaran mucha dificultad para que el cálculo no fuese un impedimento en la resolución de la cuestión.

CUESTIÓN 3

En esta cuestión encontramos que los estudiantes la pueden abordar de dos maneras. Se puede calcular el área entre la curva y el eje de las abscisas y a partir de ella calcular la integral definida, o bien intentar calcular la expresión o expresiones que definen la función y aplicarle los métodos algorítmicos de integración habituales. No hemos considerado un proceso de aproximación, utilizando CEaproxlim, debido a que hemos observado en los apuntes de clase que no se ha trabajado y, por ello, no será considerada por los estudiantes.

A cada una de las opciones consideradas corresponden, respectivamente, $CR_{área}$ y CR_{alg} por lo que estos conceptos-regla son nuestro primer punto de reflexión abordando, con ellos, los dos primeros objetivos planteados. Observamos en la tabla 6.13 de conceptos y proposiciones que CR_{alg} es elegida en el 95’5% de los casos frente a un escaso 4’5% de $CR_{área}$ lo que muestra una gran dependencia del cálculo algorítmico, incluso en una situación donde no es posible utilizarlo. Sin embargo, los estudiantes no son capaces de encontrar otro recurso para resolver la cuestión como muestran las acciones donde un 77’3% sólo indica los pasos a seguir pero no es capaz de realizarlos, esto es, no realiza ninguna otra acción pues en todos los casos (salvo en uno en el que hace una mezcla de ambos conceptos-regla) utiliza CR_{alg} aunque como no tiene la expresión analítica de la función no puede obtener un resultado. Se podría pensar que podríamos haber obtenido este resultado cuantificando el número de apariciones de CS_{alg} pero en esta cuestión hemos visto que un alto porcentaje sólo indica los pasos a seguir. En la corrección hemos considerado que un alumno presentaba este conflicto si lo manifestaba explícitamente. Por este motivo, CS_{alg} aparece en menos casos y, para nuestro objetivo, nos han parecido más representativos los conceptos-regla.

Conceptos y proposiciones		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido
Válidos	CR_{alg}	42	87,5	95,5
	$CR_{área}$	2	4,2	4,5
	PF	24	50,0	54,5
	Aditividad	35	72,9	79,5
	Otros	1	2,1	2,3
	Total	44	91,7	100,0
Perdidos	blanco	4	8,3	
	Total	48	100,0	

Tabla 6.13: Conceptos y proposiciones. Cuestión 3. Cuestionario definitivo.

También, observando los lenguajes encontramos que el lenguaje analítico es utilizado en el 59’1%, el gráfico 9’1%, y el numérico el 2´3% de los casos solamente, lo que vuelve a incidir poderosamente en el recurso algorítmico frente a cualquier otro. Consideramos que en ello ha podido influir el que se les pide la integral y no el área, lo que evoca, posiblemente, el cálculo integral por métodos algorítmicos, además de la fuerte dependencia de la expresión algebraica, como indican los dos fragmentos de entrevistas de los estudiantes 6B y 16B que exponemos.

Estudiante 6B

[…]

I- ¿Y si te digo que lo calcules?

E- Pues lo calculo. Bueno, yo es que tampoco no se. Si no te dicen la gráfica no se puede calcular

I- La gráfica si te la dicen

E- Bueno digo la…espérate. Es que no te dicen la función ¿no?

I- No tienes las fórmulas, de acuerdo. Te piden la integral

E- Sí

I- Luego necesitas las fórmulas. ¿Y si te pido el área?, ¿me la pintas?

E- ¿El área?

I- Sí

E- Vamos a ver (pinta). Esa sería, por que en esta parte la podrías calcular porque es un triángulo pero luego aquí, ésta, es una línea, pero luego aquí tiene parte de la parábola, entonces no se podría

I- No se podría porque no tienes las fórmulas puesto que son parábolas, líneas…

E- Porque ese triángulo sí pero lo demás no

[…]

Donde además observamos que, aunque pertenece al grupo B, donde se presentó CEaproxlim no se capaz de evocarlo en este caso.

Estudiante 16B

[…]

I- ¿Te acuerdas? Te pido la integral definida de –1 hasta 4, ¿vale? Pero me lo cuentas y no me haces los cálculos, ¿por qué?, ¿por qué no me haces cálculos?, ¿por qué no me dices la integral definida valdría tanto?

E- ¡Ay!, porque no se la función lo que vale

I- No sabes las fórmulas de la función

E- No

I- ¿Y si te pido el área?

E- El área, ya más o menos lo intentaría hacer pero por…

I- ¿Cómo?

E- Por figuras geométricas. Iría, aquí, más o menos, esto sería un cuadradito, aquí… (Bueno el radio sería éste), una circunferencia… Las iría sumando, pero… sería muy lioso.

I- ¿Qué diferencia hay entre área e integral definida?

E- Ninguna. Bueno, que el área siempre tiene que salir positiva

I- ¿Y la integral?

E- Te puede salir negativa. Pero no caí en hacerlo por áreas. No se. Porque también aquí no está… bueno sí, haciendo aproximadamente aquí, podría estar en medio y, considerando que esto fueran líneas rectas, que fueran triángulos, rectángulos. Pero no se, no…

[…]

En esta entrevista, además, observamos que la asociación integral-área no es fuerte, pues aunque se explica de esta manera hay una fuerte dependencia del cálculo algebraico. Por lo que, respecto del objetivo tercero: relación área-integral, afirmamos que los estudiantes realizan la asociación integral-área basándose en pistas lingüísticas, pero, en realidad, asocian la integral definida con un proceso algebraico., la regla de Barrow

(Llorens y Santonja, 1997). Nuevamente, observar que pertenece al grupo B y no evoca CEaproxlim, lo que nos indica que no está asimilada por los estudiantes, ni considerada.

En lo que respecta a la aditividad del intervalo (iv objetivo) sí encontramos que la consideran un 79’5% lo que muestra, comparando con la cuestión anterior, que es una propiedad muy intuitiva desde el punto de vista gráfico. La cuestión 5 nos ayudará también a analizar la comprensión de esta propiedad de los estudiantes.

Hemos de destacar la presencia de la propiedad falsa en un 54’5% y del conflicto semiótico asociado que muestra una confusión entre integral y área bajo la curva pues no consideran que en la integral los resultados positivos y negativos se restan y que incluso puede salir un resultado negativo, lo que los sitúa en una imagen operativa utilizando la terminología de Turégano (1994). Este hecho puede condicionar la comprensión de la integral definida en contextos de otras ciencias impidiendo la emergencia de CErpc necesaria en ellos. Destacar que a pesar de esta confusión entre integral y área en todos los casos PF aparece junto con CR_{alg} y en uno además con $CR_{área}$. Ésta es un área que no son capaces de calcular aunque define figuras simples, no evoca la utilización de las fórmulas de las figuras planas, en la línea de lo observado en los apuntes de clase donde se habla de área pero no hay conexión con la Geometría elemental salvo en el caso del grupo B donde hay una pequeña referencia.

Respecto al área bajo la curva, observamos que dos repuestas, un 4’5%, presentan $CS_{área}$, esto es, la necesidad de que haya un área ostensivamente cerrada, mostrando una de las dificultades de esta manera de presentar la integral.

CUESTIÓN 4

En primer lugar observamos que aborda la cuestión un 89’6%, pero escasamente el 14% (6 de 43 alumnos) la realiza bien. A ello hemos de unir que de los 6 alumnos que la contestan bien 5 son del grupo B. En este grupo esta cuestión se le propuso en un examen y fue corregida y comentada en clase posteriormente, antes de nuestro cuestionario. También era un ejercicio realizado en clase en el grupo A. Todo ello nos da una idea de la complejidad que entraña esta cuestión para los estudiantes observando los resultados anteriores desde esta perspectiva. Dado que es una cuestión que resultó interesante debido a que plantea, sobre todo, un cambio de CE para la resolución y la flexibilidad entre las configuraciones, decidimos no eliminarla. Además, el hecho de que dos grupos la hubieran trabajado en clase pensamos que nos podía servir de contraste con los otros dos grupos.

Abordando el primero de nuestros objetivos, observamos los conceptos y proposiciones en la tabla 6.14 donde destaca la utilización de Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI) con un porcentaje del 60’5%, frente a $CR_{área}$ con un porcentaje del

32’6%, siendo un 27’9% el porcentaje de casos en que se utilizan las dos. Este hecho nos indica que la configuración epistémica CEinvderiv es la más utilizada en esta cuestión y, por tanto, las propiedades de las derivadas que se usan en un porcentaje muy similar, un 53’5%.

Conceptos y proposiciones		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido
Válidos	TFCI	26	54,2	60,5
	$CR_{\text{área}}$	14	29,2	32,6
	$CR_{\text{área}}$ y TFCI	12	25,0	27,9
	Nociones de funciones	8	16,7	18,6
	Propiedades derivadas	23	47,9	53,5
	PF1	10	20,8	23,3
	PF2	3	6,3	7,0
	PF3	12	25,0	27,9
	PF4	2	4,2	4,7
	Total	43	89,6	100,0
Perdidos	blanco	5	10,4	
	Total	48	100,0	

Tabla 6.14: Conceptos y proposiciones. Cuestión 4. Cuestionario definitivo.

Por su parte, CEgeo se emplea principalmente en apartado 1, no en el apartado 3 donde aparece en tres casos nada más. Estos tres alumnos que utilizan esta configuración en el apartado 3 son los que también mostrarían nociones de acumulación, pues indican que el área va creciendo, como puede verse en la figura 6. 8.

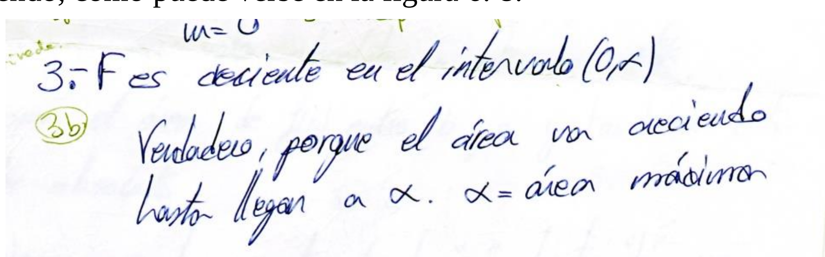


Figura 6.8: Estudiante 3A, cuestión 4, cuestionario definitivo

Es importante destacar que los tres pertenecen al grupo A (en el cual se había trabajado el ejercicio) y donde el resto de los compañeros de grupo o dejan el ejercicio en blanco, o responde correcta pero sin explicar el motivo, en cuyo caso no la tomamos como válida.

También observamos que la proposición falsa que más encontramos es PF3, en un 27’9% seguida de PF1 con un 23’3% que muestran un confusión entre las dos funciones, esto es, $CS_{f(x)}$. De hecho este conflicto es el que más aparece, en un 44'2% de las respuestas, siendo el 14% el porcentaje para CS_{tf}. El conflicto $CS_{f(x)}$, apuntamos en el análisis que había sido observado también por Bezuidenhout y Olivier (2000) en su caso aparece en 55 de los 89 estudiantes objeto de estudio, esto es en un 61'8% (p. 77)

Lo anterior nos muestra las grandes dificultades que tiene el TFCI pues, aunque los alumnos son capaces de reconocer la integral como inversa de la derivada, en el contexto gráfico esta relación presenta importantes dificultades que deben ser abordadas.

Apartado 2			**Apartado 3**				Total
			B. I. SR. OV	e.3.1 completa CEgeo	e.3.2 completa CEinvderiv	e.3.3 ó e.3.4 completas PF3 ó PF4	
B. I. SR. OV[7]	**Apartado 1**	B. I. SR. OV	2	0	2	1	5
		e.1.2 completa CEgeo	0	0	2		2
		e.1.3 completa $CS_{f(x)}$	2		0	1	3
		e.1.4 completa CS_{tf}	1	1	0		2
		e.1.5 completa PF4	1	0	0	1	2
	Total		6	1	4	3	14
e.2.1 completa CEinvderiv	**Apartado 1**	B. I. SR. OV	2	1	1	2	7
		e.1.1 incompleta CEinvderiv	1	0	0	0	1
		e.1.1 completa CEinvderiv	0	0	2	1	3
		e.1.2 completa CEgeo	3	0	6	0	9
		e.1.4 completa CS_{tf}	1	0	0	0	1
	Total		7	1	9	4	21
e.2.2 ó e.2.3 completas $CS_{f(x)}$ ó PF2	**Apartado 1**	e.1.2 completa CEgeo	0	1	0	0	1
		e.1.3 completa $CS_{f(x)}$	1	0	0	4	5
		e.1.4 completa CS_{tf}	0	0	1	1	2
	Total		1	1	1	5	8

Tabla 6.15: Procedimientos. Cuestión 4. Cuestionario definitivo.

[7] B. I. SR. OV = Blanco, incoherencias, sin razonar u otras vías

CUESTIÓN 5

En primer lugar observamos los conceptos-regla que se utilizan pues nos determinan la configuración epistémica puesta en juego. Todos los estudiante que contestan esta cuestión utilizan $CR_{alg,}$ bien porque aplican los métodos de integración y la regla de Barrow o porque lo indican, pero solamente utiliza las fórmulas geométricas en algún apartado ($CR_{área}$) un 4’4%, que son 2 casos y que corresponden al grupo B donde vimos que había un intento de conectar con las fórmulas de la Geometría elemental en los ejercicios realizados en clase. En la figura 6.9 observamos uno de estos alumnos que además muestra PF4.

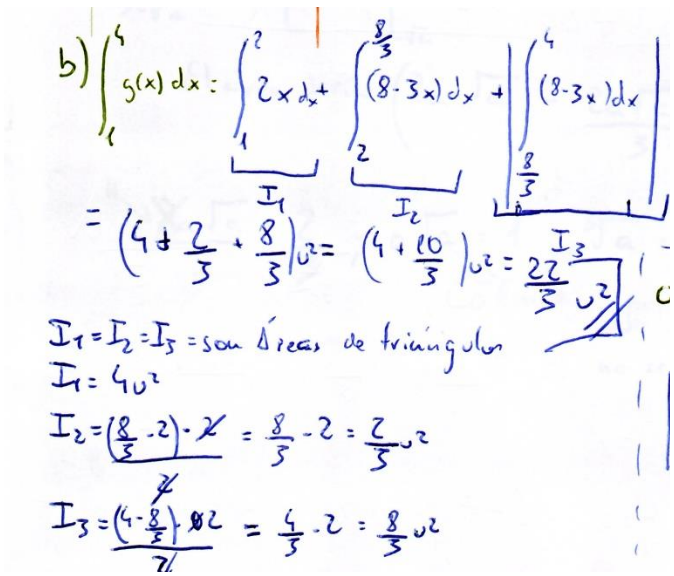


Figura 6.9: Estudiante 13B, cuestión 5, cuestionario definitivo

Los errores en la regla de Barrow vuelve a ser RB1 con una pequeña incidencia del 4’4%, con lo que podemos afirmar que está asimilada por los estudiantes en general. En lo que respecta a la aplicación de la propiedad de la aditividad, nuestro cuarto objetivo, hemos obtenido que la aplica un 80% de los estudiantes que abordan la cuestión lo que es un alto porcentaje; pero si observamos los alumnos que han resuelto el apartado 3) utilizando esta propiedad (en los procedimientos y acciones de resolución de este apartado) nos encontramos con un 22’9% solamente. Este hecho lo interpretamos como que ésta es una propiedad que a nivel gráfico es muy intuitiva y los alumnos sienten la necesidad de utilizarla para las funciones definidas a trozos pero no la aplican en el tercer apartado porque pueden utilizar métodos algorítmicos ampliamente practicados y que les ofrecen más confianza. Es pues una propiedad que no está bien asimilada.

En lo que respecta a los conflictos semióticos tenemos que PF1, y por tanto el conflicto semiótico asociado, aparece en 10 casos, un 22’2%, de los cuales 5 suman las dos expresiones de la función, 2 restan ambas expresiones, 1 las multiplica y 4 considera solamente una expresión sin tener en cuenta el intervalo de definición ni los límites de integración (entre ellos 2 suman las dos expresiones en otro apartado como puede observarse en la figura 6.9) Por tanto son estudiantes que no realizan la transferencia de la integral definida para funciones continuas definidas por una única expresión, expuesta en clase, a funciones definidas por intervalos. Inventan pseudofórmulas sin reparar en el campo de validez de lo definido inicialmente, esto es, corresponde con lo Camacho, Depool y Garbin (2008) consideran que es un intento de extrapolar directamente la resolución algebraica del procedimiento utilizado para el caso de una función no definida por intervalos (p.46)

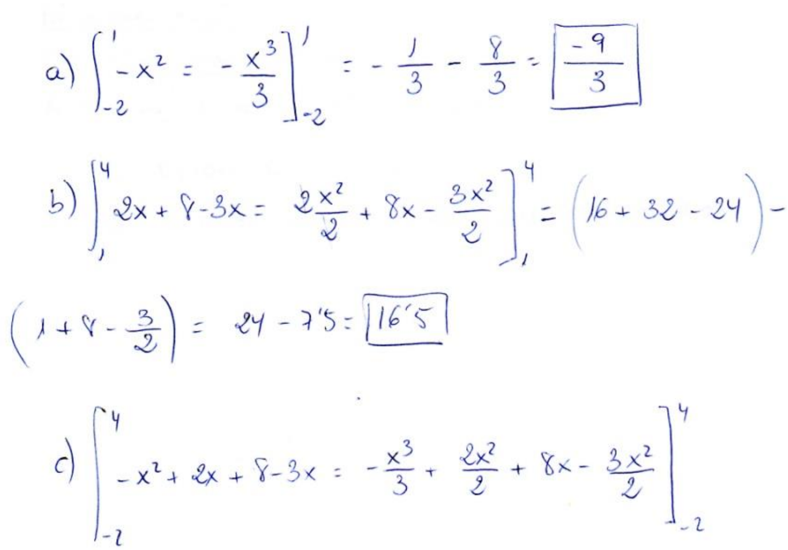


Figura 6.10: Estudiante 44D, cuestión 5, cuestionario definitivo

Nos parece importante la incidencia de PF3 y PF4 que, lógicamente coincide con CS_{vab} y que lo hemos encontrado en un 26’7% de los estudiantes (12), son aquellos casos en los que hay una identificación integral-área, no siendo capaces de diferenciar entre ambas nociones.

Por último dos cuestiones que ya tratamos en el cuestionario piloto. Nos referimos, por una parte, a la no aparición de PF2 y lo que esto significa en cuanto a la no consideración de las condiciones de integrabilidad. Por otra parte, a la alta incidencia, un 46’7%, de los errores de cálculo numérico que nos resulta llamativo dada la facilidad de los cálculos propuestos y el nivel educativo en que nos situamos.

CUESTIÓN 6

El primer dato que destacamos en esta cuestión es que la deja en blanco un 29’2% de los alumnos, y que ni en el cuestionario piloto ni en éste hay ningún alumno que sea capaz de resolver esta cuestión de aplicación el área bajo la curva, aunque todos reconocen este concepto-regla en la cuestión y parece una típica cuestión de lo que hemos denominado en la clasificación para las PAU y los ejercicios de los apuntes CEgeo de aplicación.

Conceptos y proposiciones		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	$CR_{\text{área}}$	21	43,8	61,8	61,8
	$CR_{\text{área}}$ y PF1	2	4,2	5,9	67,6
	$CR_{\text{área}}$ y PF2	10	20,8	29,4	97,1
	$CR_{\text{área}}$, PF1 y PF3	1	2,1	2,9	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	Blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Tabla 6.16: Conceptos y proposiciones. Cuestión 6. Cuestionario definitivo.

El motivo de esta dificultad lo podemos encontrar en los conflictos semióticos. Así observamos en la tabla 6.16 que en 13 casos (38’2%) hay alguno de los CS considerados y que la mayor parte corresponde a PF2 y PF3, un 32’3%, que son los que muestran dificultades con los límites de integración. A ellos hay que unir un 5’9%, que no tienen estas proposiciones falsas y que presentan CS_{lim}. Así concluimos que los límites de integración son fuente de conflicto para un 38’2% de los estudiantes.

Procedimientos		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e.1	18	37,5	52,9	52,9
	e.2	4	8,3	11,8	64,7
	incoherente	1	2,1	2,9	67,6
	otras	2	4,2	5,9	73,5
	solo área total	10	20,8	29,4	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Tabla 6.17: Procedimientos. Cuestión 6. Cuestionario definitivo.

Hay además, dentro de los que no tiene ninguna de las proposiciones falsas consideradas, una regularidad importante que la encontramos en los procedimientos. Un 29,4% sólo realizan el área bajo la curva $y=x^2-1$ o la opuesta pero nada más como se muestra en la tabla 6.17. Así, pensamos que recuerdan el método de calcular el área entre dos curvas, ampliamente trabajado, pero aquí se encuentran con la dificultad añadida de que una de las curvas ($y=a$) es el dato a encontrar y afecta a la función a integrar y a los límites de integración. Los estudiantes no son capaces de pasar del "extensivo" que supone el área entre dos curvas concretas al área entre dos curvas donde una de ellas es un "intensivo", un tipo de función, un caso general. Pensamos que los estudiantes intentan reproducir las formas y métodos practicados en clase. Casi todos recurren a la representación gráfica (97'1% como muestra la tabla 6.18) en la mayoría de los casos como apoyo pues este tipo de lenguaje está en 2º lugar, tras el analítico, como muestra la tabla 6.18, lo que corrobora lo anterior. Además, en los procedimientos observamos en la tabla 6.17 que la primera vía es la más escogida, en el 52'9% de los casos (quizás por su semejanza a los métodos practicados del área entre dos curvas) La dualidad extensivo-intensivo aporta una importante dificultad a esta cuestión.

Lenguaje		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analítico, gráfico	21	43,8	61,8	61,8
	analítico, gráfico y natural	10	20,8	29,4	91,2
	gráfico, analítico	2	4,2	5,9	97,1
	natural	1	2,1	2,9	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Tabla 6.18 Lenguaje. Cuestión 6. Cuestionario definitivo.

CUESTIÓN 7

Lo primero que destacamos es que solamente deja en blanco esta cuestión un 6'3% de los alumnos, lo que confirma que es accesible para ellos. En cuanto a los objetivos, nos habíamos planteado observar las interpretaciones del valor cero de la integral definida. Hemos obtenido que un 42'2% de los estudiantes que contestan la cuestión responde que el ciclista no se mueve, muestran $CS_{int\ cero}$. Para este nivel educativo Labaraña (2001) obtuvo un porcentaje similar: 45'8%. De acuerdo con lo expuesto por este autor "la expresión $v(t)$ no sugiere precisamente que la velocidad sea cero, lo cual es indicativo de que se hace un uso mecánico y no significativo de la fórmula de la velocidad" (p. 216) Consideramos, además, que este error viene potenciado por una excesiva identificación integral-área que indica que si la integral es cero es porque el área es cero sin otra posibilidad pues no se han trabajado nociones de acumulación.

Observamos que solamente un 24’4% recurre a la gráfica de la función, utilizan el lenguaje gráfico y escogen e.3 ó e.4. Sin embargo, un 15’5% la realizan después de calcular la integral definida (e.4) en lo que interpretamos como un recurso que clarifique la cuestión. De ellos solamente uno (2’2%) tiene también $CS_{int\ cero}$ mostrando una confusión importante que resuelve inclinándose por lo obtenido en el cálculo algorítmico. De los restantes, solamente un 4’4% del total de contestaciones (2 alumnos) la realiza bien (tiene P1 ó P2), los demás la dejan sin interpretar, lo que muestra fuertes contradicciones entre lo obtenido en el cálculo algorítmico y la gráfica que les impide interpretar correctamente el fenómeno.

El total de estudiantes que dejan la cuestión sin interpretar es del 20%, algo superior a Labraña (2001) que obtuvo un 11’9%, y que consideramos como estudiantes que observan que el espacio no es cero, probablemente por la fórmula de la velocidad, pero no pueden interpretar el resultado de la integral.

Podemos concluir que, entre los que muestran $CS_{int\ cero}$ y los que no interpretan el resultado, para un 61% de los alumnos de estos grupos que abordan la cuestión, la ausencia de CErpc es fuente de conflicto en la interpretación de fenómenos simples como el expuesto, mientras que solamente un 13’3% (P1 ó P2) son capaces de interpretarlo adecuadamente.

A ellos habría que añadir un 15’6% que consideran que la integral de la velocidad es la velocidad (un 11’9 % para Labraña, 2001, teniendo en cuenta que en su caso se ponía explícitamente que la velocidad es la derivada del espacio) estamos de acuerdo en que “esto último parece indicar que no está suficientemente clarificada la idea de que la función de la que se calcula una primitiva es una derivada de ésta” (p. 217) y que la transferencia el contexto físico no es inmediata aún siendo el más habitual para nuestros alumnos, algo que ya comentamos en la cuestión 2.

Si interpreta el resultado cero de la integral “como que el ciclista no se mueve, indicaría que no se transfiere a este nuevo contexto la idea anterior (integral/área/signo), intensamente practicada en la aulas (…) Por otra parte indicaría también, dado que la idea de que no se mueve se opone directamente a la función velocidad que expresa el enunciado, una actitud de designificación de las fórmulas, que puede ser consecuencia del absoluto dominio de las prácticas algorítmicas, la ejecución correcta de las cuales constituye por sí misma el éxito escolar, despreocupándose de los significados asociados” (ibíd., p.146)

CUESTIÓN 8

En primer lugar observamos que en blanco la deja un 12’5% de los estudiantes. Era la última pregunta y no parece una cuestión difícil, aunque solamente la contestan bien el 21’4%, 9 de los 42 que la abordan, incluyendo 3 casos que muestra PF3 (descompone en dos trozos identificando integral y área) pero que dan una interpretación correcta, lo que nos parece un porcentaje bastante bajo.

Nos habíamos planteado en esta cuestión observar la dependencia de la asociación integral-área. Analizando la tabla 6.19 de conceptos y proposiciones podemos observar que un 19% utiliza CR_{rpc}, alumnos que calculan la integral definida e interpretan, frente al 73’8% que utiliza $CR_{área}$ muy en consonancia con lo que hemos observado en los apuntes donde se trabaja ampliamente CEgeo. Hay que tener en cuenta que un estudiante de los que utiliza CR_{rpc} tiene CS_{lim} por lo que muestra también una fuerte dependencia de CEgeo. Volviendo a las respuestas correctas, 9 en total, 6 corresponden a alumnos que han utilizado CR_{rpc} frente a 3 que utilizan $CR_{área}$ lo que muestra que los estudiantes de estos grupos tienen una identificación de la integral definida con el área que provoca conflictos semióticos en cuestiones como la expuesta (Ordóñez y Contreras, 2007), esto es, en la transferencia a contextos no puramente geométricos.

Conceptos y proposiciones		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CR_{rpc}	8	16,7	19,0	19,0
	CR_{alg}	1	2,1	2,4	21,4
	$CR_{área}$ y PF3	19	39,6	45,2	66,7
	$CR_{área}$ y PF4	2	4,2	4,8	71,4
	función y prop, PF1	2	4,2	4,8	76,2
	$CR_{área}$, PF3 y PF4	8	16,7	19,0	95,2
	$CR_{área}$, CR_{rcp} y PF4	1	2,1	2,4	97,6
	$CR_{área}$, func y prop, PF1 y PF3	1	2,1	2,4	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
Total		48	100,0		

Tabla 6.19: Conceptos y proposiciones. Cuestión 8. Cuestionario definitivo.

Es importante asimismo el porcentaje de los que muestran PF4, y por tanto CS_{vab}, un 26’2%. Son alumnos que también presentan una importante identificación entre integral y área, lo que les impide interpretar correctamente fenómenos de modelización si tienen resultados negativos, incluso en casos tan intuitivos como el expuesto. Además, los que muestran PF3 son un 66’7% que también identifican integral con área pero, gran parte, no tiene la idea de área geométrica como los anteriores y son capaces de interpretar integrales negativas. La figura 6.11 muestra un estudiante en cuya respuesta puede observarse la necesidad de que la integral sea positiva (pone un signo menos delante de la parte que observa debajo del eje OX y por tanto será negativa) En este estudiante, además observamos un fenómeno detectado en su estudio por Tsamir (2007) que son aquellos estudiantes que consideran que *la integral de una función entre límites a y b, y límites c y d donde b-a=d-c debería dar la misma solución* (p. 31) y que corresponde a la aplicación de la regla intuitiva *igual A-igual B.*

$$-\int_0^{30} -0'03x^3+2'7x^2-44x-350 \;+\; \int_{30}^{60} -0'03x^3+2'7x^2-44x-350 =$$

$$= -\left(\frac{-0'03x^4}{4}+\frac{2'7x^3}{3}-\frac{44x^2}{2}-350x\right)\Bigg]_0^{30} + \frac{-0'03x^4}{4}+\frac{2'7x^3}{3}-\frac{44x^2}{2}-350x\Bigg]_{30}^{60}$$

Como son los mismos valores en ambas, una, por el signo negativo, anulará a la otra, por tanto, las pérdidas y las ganancias serán iguales.

Figura 6.11: Estudiante 44D, cuestión 8, cuestionario definitivo

Además, en el fragmento de entrevista siguiente podemos observar la estudiante 16B que muestra una identificación entre integral y área y manifestó PF4 que es capaz de superar en la conversación y PF3.

[…]

I- La 8, es la de las pérdidas y ganancias de una empresa en la campaña de Navidad, ¿vale? Tú me haces a partes: haces el trozo de 0 a 31 y de 31 a 60. Éste, de 0 a 31, lo pones en valor absoluto, ¿por qué?

E- ¡Ay!, porque yo quería calcular el área y no sé, como el área siempre hay que ponerla en valor absoluto…, pero claro, al ser pérdidas no influiría si es una cosa negativa, porque a partir de aquí, empezaría a ganar la empresa ¿no?

I- Entonces, ¿cómo lo harías tú ahora?

E- Pues quitándole el valor absoluto y calcularía ésta parte, la pérdida que tiene, y ésta, pues las ganancias. Entonces a lo que ha ganado, le quitaría las pérdidas para ver verdaderamente lo que ha ganado.

I- ¿Y tendrías que hacerlo independientemente? ¿Tú tendrías que hacer de 0 a 31 y de 31 a 60?

E- Sí

I- ¿por qué?

E- Porque al ser esto negativo… ¡Ah no!, pero tendría que partirlo hasta 31, para ver lo que verdaderamente pierde para luego podérselo restar a lo que gana

I- ¿Y si la integral de 0 a 60 no te sale lo mismo?, ¡claro pregunto!

E- Yo que se

I- Es distinto si tú haces la integral de 0 a 60, ¿es distinto que si tú haces la integral de 0 a 31 y se lo restas a la integral de 31 a 60?

E- No, sería lo mismo…A ver, no porque tienes que saber ese punto de corte

I- ¿Necesitas trocear por el punto de corte?

E- Sí

[…]

Es claro que esta alumna no tiene la noción de integral como un proceso de acumulación, considera la integral como un área estática exclusivamente. El hecho de que necesite el punto de corte sugiere un método de cálculo aprendido que puede llegar a ser un obstáculo en ciertas situaciones.

Ya hemos observado, al ver la incidencia de PF4, el tanto por ciento de respuestas que muestran CS_{vab}, pero además, nos parece significativo que un 7'1% muestra CS_{lim}, que procede de una noción muy ingenua de área ya que necesitan que ésta esté ostensivamente cerrada; y el 23,8% de los alumnos que tienen errores de cálculo numérico o integral teniendo en cuenta que, al igual que en la cuestión anterior, se buscó una función sencilla (polinomio de tercer grado) y son alumnos de 2º de bachillerato de Ciencias.

En esta cuestión PF1 y el procedimiento e.3 nos muestra dificultades para asociar los efectos o resultados de los cambios con el área bajo la curva y, por ello, dificultades para reconocer la integral como herramienta para resolver la cuestión. Se corresponde, sobre todo, con PF1 de p3' del cuestionario piloto, donde observábamos que aparecía en un 10% de los casos, mientras que ahora la encontramos en un 7'2%. Así, vemos que hay un pequeño porcentaje de estudiantes que, a pesar de conocer que es un cuestionario sobre integral definida, no asocian la integral con el resultado de un proceso de cambio, ni con el área con lo que no podrán hacer la transferencia a contextos no geométricos. Para ellos la integral definida es probablemente un método algorítmico de cálculo de áreas bajo la curva carente de otro significado y que aplicaran si se les pide explícitamente.

No hemos obtenido en el cuestionario definitivo ningún caso de discretización del problema (PF2) aunque en el cuestionario piloto tuvo una incidencia del 20%.

6.4 Conclusiones del estudio de los significados personales

Para poder obtener conclusiones generales tenemos en cuenta la distribución de configuraciones epistémicas y cuestiones que se mostró en la tabla 6.11. Así, la CEgeo se trabaja principalmente en las cuestiones uno, tres, cuatro y seis. De ellas extraemos que las principales dificultades de los estudiantes son la confusión entre integral y área en la línea de lo propuesto por las PAU y lo que, en consecuencia, se ha trabajado en clase según hemos observado en los apuntes de los grupos del tipo de situaciones planteadas por los profesores. Es lógico, que estos estudiantes se queden con la idea de que la única aplicación de la integral definida es el área, tal como afirman Berry y Nyman (2003) que le sucede a muchos estudiantes.

Obtuvimos en la cuestión 3 que si no hay una expresión algebraica a la que poderles aplicar los métodos de integración ampliamente practicados en clase muchos estudiantes consideran que no se puede calcular la integral, casi no se utilizan métodos geométricos y en ningún caso utilizan aproximaciones sucesivas. Todo ello que nos informa de la gran dependencia del cálculo algorítmico e idea de que la integral es un proceso puramente algebraico. Como expone Cordero (2005) los estudiantes recuerdan la integral como $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, pero no como un límite. Ellos, además, asocian la integral definida con el área de una forma rutinaria pero sin verdadero significado, creen que debe ser positiva, de ahí la necesidad del valor absoluto que hemos encontrado frecuentemente, pero no hay una verdadera asociación con el área pues no son capaces de utilizar el área de figuras como el triángulo en el cálculo integral. Estimamos que ello es debido a la falta de conexión con esta noción vista en la Geometría elemental y a que el tipo de lenguaje que siempre se utiliza en la resolución de las situaciones es el algebraico, como vimos en el análisis de las PAU y de los apuntes. También obtuvimos en el análisis de las PAU que el tipo de situaciones donde se pide la integral definida es muy limitado: son situaciones de cálculo del área entre dos curvas y, por tanto, son las que se trabajan ampliamente en clase. Esto explica el que en la cuestión 4 CEgeo se utilice menos que CEinvderiv (salvo para los estudiantes que la trabajaron en clase) pues no corresponde al método ampliamente practicado, con lo que el estudiante no reconoce directamente este significado geométrico de la integral. Al carecer la noción de verdadero significado el estudiante se basa en pistas y éste es un enunciado que evoca el TFCI.

Señalamos, para esta configuración, dos últimas cuestiones que consideramos se tratan con demasiada transparencia y son origen de diversos conflictos semióticos. Por un lado los problemas con los límites de integración observados sobre todo en la cuestión 6 y donde influye la complejidad de la faceta intensivo-extensivo. Por otro lado, la transparencia con la que se tratan conceptos previos como la propia área, y el concepto de opuesto o de valor absoluto que también son generadores de diversos conflictos que influyen en la comprensión de la integral definida.

En lo que respecta a CErpc nos propusimos investigarla principalmente a través de las cuestiones dos, siete y ocho. La primera pregunta que nos hacíamos es si el estudiante tiene habilidad para detectar la integral en situaciones simples, conocidas e intuitivas. Las dos primeras son situaciones del contexto físico que se trabaja ampliamente en la asignatura de

Física, sin embargo, observamos que un importante porcentaje de alumnos que o no reconocen la integral como la herramienta idónea para resolver esta situación y continúan utilizando fórmulas del movimiento uniforme, o no aplican correctamente la integral definida. Nuevamente encontramos en estas cuestiones la fuerte identificación integral-área, observada sobre todo en la cuestión 8. El análisis de estas cuestiones muestra que no hay una verdadera comprensión de la integral como acumulación o como resultado de un proceso de cambio, lo que impide la correcta resolución de situaciones donde el resultado de la integral es cero o negativo, y que viene potenciado, además de por la identificación integral-área mencionada, porque el área que se asocia a la integral definida es un área geométrica muy descontextualizada que se utiliza sobre todo para funciones continuas y positivas y muy poco en situaciones de modelización.

En la cuestión 7 volvimos a observar que el contexto algebraico es más fiable para los estudiantes (es el que más se trabaja en clase, el gráfico suele tener un papel secundario) pues prevalecen los resultados obtenidos mediante el cálculo algorítmico sobre la solución gráfica.

Aunque la cuestión 4 no estaba destinada al estudio de CErpc, pudimos observar en la resolución del tercer apartado que solamente aquellos estudiantes que la habían trabajado en clase (grupo A) tienen nociones de acumulación y las aplican en la resolución. El resto utiliza la relación integral-derivada, con lo que usan las propiedades de la función derivada en la resolución.

En lo que respecta a CEinvderiv observamos en la cuestión 4 que la principal dificultad está en la confusión entre integral y primitiva. Creemos que esto sucede porque no se estudia la función acumulación $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ como tal función, por lo que el estudiante sólo reconoce $f(t)$ como función que es la que observa, generalmente en una gráfica. Ya hemos observado el papel que se le asigna a CEinvderiv, el de establecer la relación integral-derivada y además, el Teorema Fundamental del Cálculo solamente es un elemento para la formalización, apenas se utiliza en la resolución de situaciones. Es lógico que el estudiante que se enfrenta por sí solo a la función acumulación, que como vimos, es de gran complejidad, tenga grandes dificultades para reconocerla y, por tanto, para entenderla.

Por último, nos planteamos CEalg que estudiamos en la cuestión 5. En ella observamos que la regla de Barrow está bien asimilada en general. Además, la mayoría de los estudiantes aplican bien la regla de la aditividad para calcular la integral en una función definida a intervalos, donde es necesaria, pero no lo hacen para aquel caso donde pueden utilizar métodos algebraicos (resolución del tercer apartado en el que solamente habría que sumar los obtenido en los otros dos apartados) lo que nos indica que no es una propiedad bien asimilada por los estudiantes y que cuando la aplican es porque la han aprendido como un método de cálculo sin una verdadera comprensión.

Nuevamente, en esta cuestión donde se plantea una situación puramente algebraica, hemos encontrado la identificación integral-área en algo más de la cuarta parte de los estudiantes.

Finalmente, hemos observado que, a pesar de que la integral definida se definió para funciones continuas, los alumnos hacen la transferencia a funciones no continuas bien en general, aunque un grupo aplica pseudofórmulas que se resumen en conseguir una única expresión de la función para poder integrarla, escogiendo una de ellas o realizando operaciones elementales entre las diferentes expresiones. Sin embargo, esta transferencia directa nos plantea una duda importante, al no haberse realizado la ampliación al caso de funciones con un número finitos de discontinuidades de salto finito, ¿es consciente el estudiante de esta ampliación o simplemente aplica los métodos de integración siempre que sea posible sin cuestionarse las condiciones que debe cumplir una función para ser integrable? En este punto recordamos los resultados que obtuvimos de la cuestión 1 del cuestionario piloto que indicaban que los estudiantes no consideran las condiciones de integrabilidad y, como afirma Labraña (2001), estas condiciones son un auténtico obstáculo didáctico.

Como conclusión afirmamos, basándonos en estos resultados, que los estudiantes identifican integral-área y que en muchos casos no llegan a diferenciarlas lo que les impide la correcta resolución de las situaciones donde esta diferencia es esencial. Sin embargo, consideran la integral definida como un método: cálculo de una primitiva y aplicación de la regla de Barrow, sin que haya una verdadera conexión con la noción de área estudiada en la Geometría elemental, es por tanto un área muy descontextualizada y estática que no les favorece la conexión a otros contextos. Dado que el lenguaje que más se utiliza en clase es el algebraico, ya que es el requerido en las PAU de forma casi exclusiva, los estudiantes tienen un pobre dominio el registro gráfico. Sus respuestas se basan en cálculos algebraicos que prevalecen sobre cualquier otro a la hora de decidir una solución si encuentran contradicción entre lo obtenido en dos registros distintos, algebraico y gráfico, por ejemplo.

La falta del significado de acumulación, propio de la integral definida que dota de significado, además, a la relación derivada-integral, también se ha puesto de manifiesto.

Consideramos, en definitiva, que el significado personal es muy incompleto. La Universidad con una enseñanza muy formal tampoco dotará de significado a esta noción.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta Memoria hemos presentado un estudio sobre la integral definida en 2º de Bachillerato de Ciencias y en las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Comunidad Autónoma de Andalucía, utilizando como marco de referencia en nuestra investigación el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. El marco teórico nos permitió desglosar el objetivo general marcado en diversos objetivos específicos que han guiado la investigación, así como definir las hipótesis que planteamos y las diferentes metodologías empleadas en las distintas fases de las que se compone este trabajo.

Corresponde ahora presentar las principales conclusiones obtenidas, analizando el grado de consecución de los objetivos planteados y discutiendo las hipótesis que formulamos en el capítulo 3. Como una consecuencia de los resultados obtenidos, nos planteamos, además, hacer una valoración del proceso de enseñanza-aprendizaje que hemos estudiado. Dicha valoración, desde el EOS, se plantea en términos de idoneidad articulada en las seis idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica que expusimos en el tercer capítulo y siguiendo las pautas de análisis aportadas en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007).

Finalizaremos con unas reflexiones sobre las implicaciones que tiene nuestro trabajo sobre la enseñanza de la integral definida y algunas orientaciones curriculares lo que dará respuesta a nuestro último objetivo.

7.1 Conclusiones respecto a los objetivos e hipótesis

Nos fijamos como objetivo principal *identificar, describir y explicar los factores relacionados con los fenómenos didácticos de renuncia al aprendizaje del objeto integral definida y de algebraización del Cálculo Integral, así como la influencia que las restricciones institucionales relacionadas con las Pruebas de Acceso a la Universidad puedan tener en los fenómenos anteriores, todo ello según el EOS*. Este objetivo general se desglosó en 7 objetivos específicos cuyo grado de consecución analizamos a continuación.

Objetivo 1: *Análisis del desarrollo epistemológico-evolutivo del objeto integral definida, según los significados institucionales y los conflictos semióticos, en las diversas* *instituciones de la matemática sabia, a fin de poder detectar y caracterizar la emergencia de dicho objeto a través de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas.*

Planteábamos este primer objetivo porque consideramos que el estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución de la integral definida nos aportaría las situaciones que dieron origen al concepto, las dificultades que fue necesario superar y cómo se abordaron hasta llegar a la situación actual, informándonos así de los puntos conflictivos, conflictos semióticos potenciales, situaciones motivadoras, los diversos campos de aplicación, etc.

En el capítulo 4 realizamos este estudio histórico-epistemológico describiendo los acontecimientos matemáticos más relevantes y, recogiendo en una tabla las entidades primarias en cada momento histórico, facetas destacables, elementos emocionales y mediacionales y conflictos semióticos. Además, en cada una de las épocas consideradas, establecimos en la frontera epistemológica aquellas cuestiones que los matemáticos no fueron capaces de superar, y ello les limitó o impidió el avance que se realizará en las siguientes épocas; y la ruptura epistemológica que indica esos cambios fundamentales en la matemática del momentos y cuya superación supone un avance significativo. Todo ello posibilita determinar los avances y diferencias de una época a otra determinando de esta forma la evolución de la noción.

Hemos establecido los siguientes significados institucionales históricos: en la cultura griega de la que destacamos los procesos de formalización, el horror al infinito y la ausencia de generalización de los problemas; la Edad Media donde se comienza a trabajar con el infinito de forma intuitiva, el tiempo se convierte en prototipo del continuo y se estudian fenómenos de la naturaleza; etapa del uso explícito de los procesos infinitos que corresponde al Renacimiento y, por tanto, a la recuperación de la cultura clásica desde la perspectiva de la nueva álgebra y la necesidad de abordar nuevos problemas científicos y con ello la necesidad de encontrar un método heurístico que permita resolver problemas aunque ello traiga consigo una ausencia de rigor; etapa de generalización de los métodos infinitesimales de la que destacamos la generalización del álgebra y su utilización para la generalización de problemas y un retorno a métodos geométricos en busca del rigor; como inversa de la derivada que corresponde al desarrollo de la integral definida realizado por Newton estableciendo la integración y la derivación como procesos inversos; como suma de elementos infinitesimales que es el desarrollo realizado por Leibnitz; como límite de una suma en el que destaca el desarrollo de Cauchy estableciendo el límite como central y consiguiendo, con ello, un paso importante hacia la formalización que mejorará Weierstrass; formalizada o extendida a funciones discontinuas donde destaca la extensión del dominio de las funciones integrables a determinadas funciones discontinuas y, por último, generalizada en la que encontramos la integral de Lebesgue, fruto de una nueva noción de medida.

Conseguir nuestro primer objetivo nos permitió abordar el siguiente, pues observamos la integral definida en el momento actual con una visión amplia y crítica, a o que también contribuyó el estudio de los diferentes trabajos de investigación sobre la integral definida que se recoge en el capítulo 2.

Objetivo 2: *Establecer el significado global teniendo en cuenta la adaptación de los significados institucionales históricos y, de esta manera, las configuraciones epistémicas que utilizaremos como significado de referencia*.

Como ya expusimos los significados históricos deben ser adaptados para el momento actual. No tiene sentido una mera transcripción de la historia, por ejemplo, porque hay métodos que ha quedado obsoletos y ya no tiene sentido al disponer del álgebra o la geometría analítica. Otros, sin embargo, han quedado olvidados pero dan lugar a una configuración epistémica que forma parte del significado global de la integral definida.

En la determinación del significado de referencia hemos considerado la institución en la que situamos la investigación. En el capítulo 1 expusimos esa cuestión observando que es el momento del primer encuentro del estudiante con la integral definida y que su estudio se plantea como un inicio a estudios superiores.

De esta manera en la segunda parte del capítulo 4 establecimos las diferentes configuraciones epistémicas que configuran el significado de referencia que hemos considerado, así como, conflictos semióticos asociados a cada una de las configuraciones epistémicas. Observamos que el significado de referencia de la integral definida está compuesto por seis configuraciones epistémicas que son: geométrica, resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada, aproximación al límite, generalizada y algebraica y hemos también señalado algunos conflictos semióticos potenciales asociados a cada una de ellas.

La consecución de estos dos objetivos nos lleva que se cumple o verifica la primera de las hipótesis que nos planteamos H_1: *en el análisis del desarrollo epistemológico-evolutivo del concepto de integral definida se detectan varios significados institucionales y conflictos semióticos que, adaptados, establecen el significado institucional de referencia actual de dicho objeto matemático, las diferentes configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales* y que es un elemento clave o esencial para la consecución de los restantes objetivos ya que es el significado con el que se compararon los demás significados y nos permitió establecer sesgos. Éstos nos aportarán la información pertinente en este momento para poder determinar si se cumplen las idoneidades que marca el EOS y que expusimos en el capítulo 3.

Abordamos en primer lugar diversos significados institucionales, como reflejamos en los objetivos tres a cinco, para analizar posteriormente los personales, según determina el objetivo seis.

Objetivo 3: *Análisis del significado institucional pretendido en 2º de Bachillerato, en cuanto al objeto integral definida, determinado por los desarrollos curriculares que establece la administración educativa, comparándolo, por medio de las configuraciones epistémicas, con el significado institucional de referencia*.

Este objetivo se abordó en la primera parte del capítulo 5 donde pusimos de manifiesto, mediante la comparación de significados, que la configuración epistémica resultado de un proceso de cambio y la configuración generalizada no se consideran ni en los contenidos mínimos generales ni en el currículum de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Con ello hemos verificado nuestra $H_{2:}$ *la comparación del significado institucional actual con el currículum oficial de la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato de Andalucía permite establecer sesgos en la elección del significado pretendido por parte de las diversas instituciones implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida*.

Observando los objetivos que se pretenden alcanzar, principalmente el segundo: "*aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en actividades cotidianas*", expuesto en el capítulo 1, estimamos que será baja la idoneidad epistémica ni ecológica. Afirmamos que no hay idoneidad epistémica debido a la ausencia de dos configuraciones, pero principalmente CErpc que trata cuestiones de acumulación que no están representada en las otras y que estimamos necesario para la interpretación de fenómenos de otras ciencias. Hemos observado cómo diferentes investigaciones hablan de las dificultades de interpretar la integral definida en contextos no geométricos e, incluso, que los estudiantes se basan en pistas lingüísticas para decidir la utilización de la integral definida en la resolución de una situación, lo que también hemos obtenido en el análisis de los significados personales. Además, hemos comentado numerosas dificultades en la noción de acumulación. Por este motivo hemos afirmado que la idoneidad ecológica no es la adecuada, pues la ausencia de CErpc dificulta la relación con otros contenidos intra e interdisciplinares y no contribuye a la formación socio-profesional de los estudiantes. Hay un conflicto entre los objetivos que se pretenden alcanzar y los contenidos propuestos para ello.

Objetivo 4: *Estudio del papel que juegan tanto el documento de orientación para las Pruebas de Acceso a la Universidad que propone la ponencia de Matemáticas II de Andalucía, como las propias pruebas como factores condicionantes del proceso de* *elección, por parte del profesor, del significado pretendido y su efecto en el aprendizaje*.

En la segunda parte del capítulo 5 se abordó el estudio de las orientaciones curriculares que se realizan para las PAU, donde incluso se identifica la integral definida con el área. Para el estudio del significado que se desprende de las propias pruebas realizamos una clasificación de las diferentes situaciones según la configuración epistémica que se pone en juego para su realización. Nos surgió la necesidad, en el análisis, de ampliar esta clasificación considerando la forma en que se utiliza la configuración. De la cuantificación de cada categoría se desprende el significado que emana de las PAU. Concluimos que la configuración geométrica es la más utilizada y que, además, la mayoría de las situaciones que se proponen son aquellas en las que se solicita explícitamente el área entre dos curvas y cuya resolución se realiza algebraicamente. En segundo lugar está CEalg, centrada sobre todo en el cálculo algorítmico directo. Además, no se trabaja a penas la coordinación entre las configuraciones y hay pocos cambios de registro.

Así, podemos asegurar que las PAU son una nueva restricción como asegura nuestra $H_{3:}$ *el análisis de las orientaciones y, sobre todo, de las Pruebas de Acceso a la Universidad informa de que éstas son una nueva restricción para el significado pretendido y, por tanto, para el implementado*; ya que se consideran solamente tres CE: geométrica y algebraica con mayor frecuencia, y CEinvderiv con mucha menor frecuencia con lo que se olvida otra configuración CEaproxlim. Todo ello nos informa de la baja idoneidad ecológica al olvidar una configuración considerada en las directrices curriculares y también de la baja idoneidad epistémica respecto del significado de referencia por el mismo motivo y por el tipo de lenguaje que se utiliza, centrado en el algebraico, no favoreciendo diferentes modos de expresión.

Una vez que observamos las diversas restricciones que sufre el significado de referencia y, analizado las que imponen las PAU, nos planteamos poner de manifiesto su influencia en la enseñanza-aprendizaje de esta noción en 2º de Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Abordamos el estudio del significado implementado (objetivo 5) y de los significados personales (objetivo 6) Para ello seleccionamos 4 grupos de la provincia de Jaén a los que pasamos un cuestionario y de los que recogimos los apuntes de clase.

Objetivo 5: *Análisis de la enseñanza institucional escolar implementada de la noción de integral definida en un contexto institucional determinado, por medio del análisis de los apuntes de clase*.

En la última parte del capítulo 5, dedicado a diferentes significados institucionales, estudiamos los apuntes de los cuatro grupos objeto de estudio. En realidad, nos aproximamos a la trayectoria epistémica del significado implementado, pues, como ya expusimos, somos conscientes que para estudiar el significado implementado serían necesarios otros métodos de recogida de datos también. Sin embargo, dado que nuestro objetivo es observar la influencia de las PAU en el significado implementado consideramos que la trayectoria epistémica del significado implementado nos permitirá sacar conclusiones. Para el análisis creamos una plantilla en la que se distinguen tres dimensiones: análisis semiótico, según las entidades primarias en que el EOS descompone la actividad matemática; didáctico, con las variables planificación, motivación y tipo de enseñanza; epistemológico cognitivo, donde se recogen las configuraciones epistémicas y los conflictos semióticos tratados. Estas tablas se completaron con otra en la que se exponen las configuraciones epistémicas, distinguiendo cada entidad primaria, y, una tercera, en la que se clasifican las situaciones trabajadas según la clasificación hecha en las PAU.

Los resultados muestran que hay una gran coincidencia con el desarrollo de las PAU. Se centran en CEgeo y en CEalg, proponiendo, sobre todo, situaciones en las que se pide explícitamente el cálculo del área entre dos curvas o el cálculo de una integral definida respectivamente; usa métodos algebraicos casi exclusivamente, el lenguaje geométrico tiene un papel totalmente secundario y apenas hay situaciones que se resuelvan por dos métodos o sea necesario utilizar dos configuraciones epistémicas en la resolución. Es decir, se verifica H_4: l*as anteriores restricciones provocan un significado implementado muy sesgado a determinadas configuraciones epistémicas, olvidando o relegando otras, ofreciendo así un significado muy parcial y, sobre todo, enfocado hacia elementos de tipo algebraico*.

Podemos decir, en cuanto a la valoración, que si tomamos como significado de referencia las orientaciones curriculares o el que emana de las PAU, hay una buena idoneidad epistémica y ecológica, pues las configuraciones epistémicas, su distribución e importancia se corresponden. Sin embargo, si lo comparamos con el significado de referencia que hemos establecido en el capítulo 4 sucede lo contrario. Afirmamos que hay una baja idoneidad didáctica por diversos motivos. En cuanto a la idoneidad epistémica ya hemos observado que es baja pues el desarrollo está muy centrado en CEgeo y CEalg; CEaproxlim se expone en dos de los cuatro grupos como forma de introducir la integral definida, buscando una formalización ajena para los estudiantes, más aún cuando se hace un desarrollo teórico pero nunca se proponen situaciones para trabajarla y se ignoran las dificultades inherentes al concepto de límite; CEinvderiv se reduce a la relación integral-derivada, trabajada en la introducción del integral indefinida, pero apenas se trabaja en las situaciones realizadas; y, por último, CErpc no se trabaja, queda relegada lo mismo que CEgen. Nos parece de gran importancia el hecho de que no se consideren los conflictos semióticos potenciales y que las propiedades se exponen pero no se demuestran ni trabajan en la línea de las directrices de las PAU que establecen que "*en los ejercicios de la prueba no se pedirán las demostraciones de los teoremas. Ningún ejercicio del examen tendrá carácter exclusivamente teórico*." Lo anterior nos vuelve a informar de la falta de idoneidad epistémica.

Afirmamos también que esta idoneidad epistémica es baja porque si observamos los lenguajes no hay variedad. Tampoco se promueve la coordinación entre dos de ellos. Los desarrollos están centrados en los métodos algebraicos que se proponen en las PAU.

En lo que se refiere a la idoneidad cognitiva la consideramos baja debido a que no hay una conexión con ideas previas, principalmente con la noción de área a la que se considera transparente, y que la formalización con que se realiza la introducción y definición de la integral definida utilizando CEaproxlim no la consideramos adecuada para este nivel, debido a su gran complejidad ontosemiótica, como se muestra en Contreras y Ordóñez (2006) al analizar una típico ejemplo de introducción a la integral definida. Además, hemos observado en la cuestión 3 del cuestionario definitivo, que CEaproxilim no es considerada por los estudiantes.

La idoneidad mediacional también la consideramos baja pues, tal y como hemos comentado, los desarrollos son casi todos de tipo algebraico y no se utilizan otro tipo de recursos. De hecho en las normas de las PAU se explicita que "*se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos*".

En lo que respecta a la idoneidad emocional apuntamos que casi no hay situaciones de motivación del nuevo concepto, ni de aplicación a la vida cotidiana o a otras ciencias. A ello se une el tipo de enseñanza en la que, según los apuntes analizados, el estudiante tiene un papel totalmente pasivo y la responsabilidad recae sobre el profesor. En este punto volvemos a incidir sobre la falta de situaciones encaminadas a afrontar conflictos semióticos. Todo ello nos lleva a afirmar la baja idoneidad emocional e interaccional.

Por último, en lo que respecta a la idoneidad ecológica consideramos es media. Aunque si nos fijamos en el grado de adaptación curricular afirmamos que es bastante adecuada; pero, como sucedía en la comparación de las orientaciones curriculares con del significado de referencia, la ausencia de CErpc provoca un déficit en la aplicación a otras disciplinas y al ámbito tecnológico. Ya señalamos que algunos autores apuntan a que los estudiantes solamente consideran el cálculo del área como aplicación de la integral definida y llegan a considerar que lo que los estudiantes aprenden en este nivel es incluso perjudicial para posteriores desarrollos en la Universidad.

Objetivo 6: *Caracterización de los significados personales logrados por los alumnos* *tras la implementación de la enseñanza, mediante la elaboración y aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas tras su corrección*.

Para la consecución de este objetivo elaboramos dos cuestionarios (un piloto y el definitivo) que pasamos a los estudiantes de los cuatro grupos escogido para nuestra investigación. Para la corrección y posterior codificación que nos permitiera hablar de tipos de respuestas de los estudiantes en términos cuantitativos también elaboramos una plantilla de corrección según las entidades primarias y los conflictos semióticos. La corrección del cuestionario definitivo se completó con entrevistas para clarificar ciertas respuestas. Todo ello lo hemos recogido en el capítulo 6. Las conclusiones nos han llevado a la verificación de H_5: e*l estudio de los significados personales declarados determina características en las configuraciones cognitivas que indican que las restricciones anteriores producen unos significados personales logrados incompletos y sin una adecuada contextualización*.

Los resultados muestran que los estudiantes tienen dificultades con conceptos previos como el valor absoluto, el concepto de opuesto o la noción de área que influyen en su comprensión de la integral definida. Además, hay una fuerte identificación integral-área. Sin embargo, dicha identificación está carente de verdadero significado, se percibe como un nuevo proceso algorítmico, no es un área que se relacione con la estudiada en Geometría elemental ni contextualizada, sino un método basado en el cálculo de la primitiva y aplicación de la regla de Barrow que proporciona un área geométrica y estática. Además, con este significado de integral como área, y al carecer del significado de acumulación, los estudiantes tienen dificultades para resolver cuestiones donde la integral es cero o negativa y para reconocerla en diversos contextos, incluso en el físico tan trabajado en las clases de Física. También hemos detectado dificultades en la elección de los límites de integración.

Por otra parte, aunque conocen la relación integral-derivada, en contextos geométricos confunden integral y primitiva, lo que consideramos que está muy influenciado por la ausencia del estudio de la función de acumulación.

Otra de las características de las configuraciones cognitivas de estos alumnos es su preferencia por el lenguaje algebraico frente al lenguaje geométrico, del que tienen un pobre dominio, y la ausencia del lenguaje numérico. Los estudiantes basan sus respuestas en cálculos algebraicos frente a posibles cálculos geométricos. Además, este lenguaje algebraico es estimado más fiables que cualquier otro llegando incluso a mantener resultados claramente erróneos pues son los obtenidos mediante la aplicación de los métodos de integración y la regla de Barrow ampliamente practicados en clase. Hay una gran dependencia del cálculo algorítmico que se observa en la necesidad de tener una expresión algebraica para poder aplicar las reglas de integración.

Con esta fuerte dependencia del cálculo algorítmico hemos observado que la regla de

Barrow está bien asimilada por los estudiantes, en general. Además, la transferencia a funciones no continuas, como las funciones definidas por intervalos, se realiza adecuadamente aunque la principal dificultad que hemos encontrado en determinadas respuestas está relacionada con la necesidad de utilizar una única expresión algebraica para poder integrarla con lo que realizan operaciones básicas como suma, resta o producto con las diversas expresiones que aparecen en la función.

Por último la propiedad que hemos denominado de aditividad del intervalo $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ es conocida por los estudiantes, pero la mayoría prefieren repetir los cálculos algebraicos, siendo esto un nuevo indicador de la fuerte dependencia del cálculo algorítmico ya comentado.

Tras este estudio consideramos que estamos en condiciones de abordar el último objetivo que nos propusimos: establecer, a través del EOS, algunas pautas para la implementación de la integral definida.

Objetivo 7: *Con la información obtenida de los resultados emanados del desarrollo de los objetivos anteriores, establecer unas orientaciones curriculares, conclusiones de tipo orientativo de cara a la enseñanza de la integral definida en la asignatura de Matemáticas II 2º de Bachillerato en Andalucía*.

Son pautas abiertas a nuevas investigaciones pues la valoración de la idoneidad es un proceso complejo que incluye muchas dimensiones y factores. Aún así las consideramos unas directrices para la enseñanza de la integral definida basadas en estos criterios de idoneidad propuestos por el EOS y que hemos utilizado para valorar la enseñanza en los grupos estudiados. Cumplimos, de esta manera, nuestra H_6: *Los resultados obtenidos y las herramientas del marco teórico nos permitirán realizar orientaciones curriculares para la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato de Andalucía en cuanto a la integral definida*.

Nuestra propuesta a grandes rasgos considera imprescindible un acercamiento intuitivo al concepto de integral definida basado en CErpc para lo que consideramos el registro gráfico como idóneo y el movimiento como contexto motivador en consonancia con la génesis histórica de la integral definida. Seguidamente se estudiaría la función acumulación desde el registro gráfico combinándolo con el numérico para abordar las dificultades de los estudiantes en reconocer esta nueva función y utilizando nuevas situaciones de modelización para conseguir la comprensión de la integral como el resultado de un proceso de acumulación o un proceso de cambio. De esta manera, a partir de la función acumulación podremos avanzar en dos caminos diferentes y complementarios: una elaboración de una tabla de integrales estableciendo además la relación integral-derivada, y en la identificación explícita de la integral definida en un intervalo [a,b], un caso particular de la función acumulación, como el área bajo la curva, abriendo de esta forma nuevos métodos de cálculo utilizando la geometría elemental o los métodos algorítmicos. Se iniciaría, además, el camino hacia CEaproxlim teniendo en cuenta que hay que enfrentar al estudiante a los conflictos semióticos.

Las situaciones trabajadas darán lugar, desde la nueva versión CEaporxlim, a una interpretación de dx y por tanto será posible establecer la formalización de la noción utilizando el complejo proceso de paso al límite.

Explícitamente, desarrollamos lo anterior de la siguiente manera. Proponemos como significado central CErpc. A través de la función de acumulación, CEgeo será un caso particular. En primer lugar, se trabajarían situaciones de movimiento uniforme desde el registro gráfico. Nos parece muy interesante, en este sentido, la propuesta de Farmaki y Paschos (2007) donde se recuperan las situaciones de la Edad Media, cuyo principal exponente es Oresme, pues permiten trabajar intuitivamente la noción de área y la de acumulación. Son situaciones motivadoras de la nueva noción, por lo que se estará dotando de sentido y utilizan el registro gráfico que es muy intuitivo para los estudiantes. Se reconoce el área bajo la curva como instrumento para el cálculo de integrales definidas pero trabajando CErpc.

Posteriormente, es necesario ampliar el campo de aplicación a otras situaciones para trabajar la idea de proceso de acumulación tal y como propone Wenzelburger (1993, 94), incorporando situaciones de la vida cotidiana y utilizando materiales informáticos para su resolución, lo que nos permitirá librarnos de pesados cálculos algorítmicos. La interpretación geométrica de la integral de Lebesgue propuesta por Turégano (1994) aportará una manera idónea de trabajar con la integral definida sin realizar el paso al límite, que consideramos con menor idoneidad cognitiva.

Con estas nuevas situaciones se trabajará la función acumulación uniendo el registro gráfico y el numérico buscando que el estudiante sea capaz de reconocer la nueva función sin olvidar la función que determina el fenómeno que se ha modelizado. Proponemos trabajar, desde el registro gráfico y numérico conjuntamente, la tripleta $\left(x,\ f(x),\ \int_a^x f(t)dt\right)$ identificando las relaciones de covarianza que se establecen y las propiedades de cada una de ellas.

En estas situaciones será importante escoger una amplia gama de funciones e intervalos, esto es, funciones positivas, negativas, con parte positiva y negativa, continua, con un conjunto finitos de puntos de discontinuidad de salto finito. Buscamos establecer la diferencia entre integral y área y las condiciones de integrabilidad. Será interesante proponer funciones no integrables para enfrentar a los estudiantes con esta condición y que vean la necesidad de reconocer si una función verifica las condiciones o no antes de integrarla. Podremos, además, trabajar las propiedades de la integral definida como es la aditividad del intervalo que hemos visto que es muy intuitiva gráficamente.

Una vez trabajada la función de acumulación desde el registro numérico, es posible hacer el cambio al registro algebraico y, de esta manera, establecer la relación integral-derivada, también a nivel algebraico, y una tabla de integrales que nos permita aplicar los métodos de integración y la regla de Barrow para el cálculo.

Los cambios de registro serán imprescindibles para que el estudiante adquiera la flexibilidad necesaria en una adecuada comprensión. Es por ello que establecidos los registros gráficos, numéricos y algebraico y diferentes significados de la integral definida serán necesarias actividades encaminadas a la coordinación de los diferentes registros y también de las diferentes configuraciones.

Será necesario realizar, ahora, el paso en sentido contrario. Hemos pasado de las situaciones de la vida cotidiana a la noción de integral definida. Henández (2007) afirma que "es necesario mostrar a los estudiantes una caracterización general de todos los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida y lograr que la interpreten y la apliquen en la identificación de los problemas que pueden resolverse mediante esa operación y que sean capaces, además, de justificar por qué un determinado problema no puede ser resuelto aplicando la integral definida."(p.4) Este autor propone un método para reconocer si una situación se puede resolver mediante la integral definida que expusimos en el capítulo 2.

En último lugar, y en una etapa posterior, proponemos establecer la formalización de la integral definida. Para ello se puede establecer la fundamentación teórica a través de las sumas de Riemann y todo el proceso formal de paso al límite. Será necesario abordar los conflictos semióticos que hemos señalado asociados a la configuración CEaproxlim: CSVAA "*considerar que el área sólo puede tomar un valor aproximado y no fijo*", CSDD "*magnitudes de dimensiones distintas se entremezclan*" o el conflicto semiótico de la consideración geométrica del límite CSGL: *"Se efectúa el paso al límite en el nivel de la imaginación visual de las magnitudes, donde los rectángulos se estrecharan hasta llegar a ser efectivamente segmentos"*. Desde este nuevo significado de la integral definida habrá que dotar de significado a *dx*.

Hay que tener en cuenta que aunque se consiga una idoneidad epistémica alta, el tiempo de enseñanza puede que sea mayor que el actual por lo que, en estas circunstancias, la idoneidad mediacional sería baja. Aún así, consideramos que es imprescindible una nueva organización de la enseñanza de la integral definida si nuestro objetivo es conseguir un aprendizaje significativo. Además, esta nueva organización debería incluir las enseñanzas universitarias, que deberán ser conscientes de que en secundaria no se ha hecho una formalización del concepto y elaborar sus currícula con estas premisas.

7.2 Limitaciones y sugerencias para otras investigaciones

Una de las limitaciones de nuestra investigación es el número de alumnos con el que hemos trabajado y que no permite generalizar los resultados, sino esperar nuevas investigaciones que avalen lo obtenido en esta. Hay que tener en cuenta que son alumnos de 2º de Bachillerato y que los profesores tiene ante sí un amplio temario que deben cubrir por las PAU y restricciones temporales importantes, con lo que cualquier intervención exterior debe ser muy puntual, lo que no deja de ser una nueva restricción de las PAU. Este hecho provocó que no fuese posible estudiar el significado implementado mediante grabaciones, por ejemplo, por lo que decidimos limitarnos a la trayectoria epistemológica extraída de los apuntes de clase.

Por otra parte, hemos reducido nuestro análisis de las PAU a la Comunidad Autónoma de Andalucía debido a que es esta la comunidad donde residimos lo que nos facilitaría tener acceso a grupos de estudiantes sobre los que investigar los efectos de las restricciones obtenidas. Comparar con otras comunidades nos haría ver los sesgos si son coincidentes o no. Las diferencias nos aportarían un dato interesante sobre la verdadera influencia de las pruebas de evaluación externa en la enseñanza y aprendizaje de la integral definida. Además, de esta manera, la valoración de la idoneidad didáctica sería mejor, por ejemplo porque mejoraría la valoración de la idoneidad cognitiva.

Otra de las perspectivas de nuestro trabajo a partir de ahora es avanzar en la investigación de las dificultades del significado de acumulación y de la función de acumulación, de forma que podamos hacer propuestas para su introducción en el primer encuentro con la noción de integral definida a partir de situaciones que doten de significado a la integral y utilizando recursos informáticos.

7.3 Aportaciones

La primera aportación de nuestra investigación es la determinación del significado de referencia de la integral definida en el momento del primer encuentro con este concepto y en estudiantes no universitarios, el cual está constituido por las diferentes configuraciones epistémicas que establecimos en el capítulo 4. A través de él hemos podido constatar las ausencias de significado en las directrices curriculares que explican las dificultades de los alumnos y los fenómenos de renuncia a un aprendizaje significativo.

Así mismo, hemos caracterizado el significado institucional que se desprende de las PAU y, su comparación con el significado de referencia, nos ha permitido poner de manifiesto que dichas PAU son una gran restricción para la enseñanza de la integral definida a través de un significado aún más sesgado que el anterior. Pero además, la determinación del significado de las PAU ha hecho posible determinar sus efectos sobre la enseñanza en 2º de Bachillerato de Ciencias en la Comunidad Autónoma de Andalucía (los apuntes de clase) y el aprendizaje (el cuestionario y las entrevistas a los estudiantes)

La metodología empleada en el análisis de los apuntes, proveniente de una similar de los libros de texto utilizada en otros trabajos de investigación, que está basada en los elementos teóricos que propone el EOS se ha revelado muy productiva para analizar el proceso de enseñanza y la comparación de unos con otros y que se podría emplear para el estudio de otras nociones.

También la metodología empleada en el análisis de las respuestas a los cuestionarios y su codificación para la caracterización de los significados personales que nuevamente se podría emplear para otras nociones.

Una nueva aportación proviene de la aplicación de los criterios de idoneidad que nos ha dado elementos para valorar la enseñanza y el aprendizaje y establecer, en consonancia con dicha valoración, unas directrices curriculares en orden a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la integral definida.

7.4 Trabajos desarrollados

De esta investigación se han derivado diferentes trabajos presentados en congresos y jornadas, así como publicaciones en revistas que exponemos cronológicamente:

Ordóñez, L. y Contreras, Á. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (eds) Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada, España.

Contreras, A. y Ordóñez, L., (2005). Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Coordinadores) Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, Córdoba. España.

Crisóstomo, E., Ordóñez, L., Contreras, Á. y Godino, J (2005) Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En Á. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds), Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la teoría de la Funciones Semióticas, 125-166. Jaén, España.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. Relime, 9(1), 65-84.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2007) Significados personales y conflictos semióticos de los estudiantes en el aprendizaje de la Integral Definida. En E. Castro (Ed.), El profesorado de matemáticas mira hacia el futuro. Matemáticas para todos. XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Granada, España.

Ordóñez, L. y Contreras, A., (2007) Significados históricos-epistemológicos y escolares de la Integral Definida. Restricciones planteadas por las Pruebas de Acceso a la Universidad. Trabajo presentado en el grupo de trabajo Didactica del Análisis en el XI Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Universidad de La Laguna, La Laguna, España.

Contreras, Á., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367–384.

Ordóñez, L. y Contreras, Á. (2010). La integral definida en las PAU: sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º de bachillerato. En Á. Contreras y L. Ordóñez (Ed.) Jornadas de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Baeza, Jaén, España.

Ordóñez, L. y Contreras, Á. (2011). La integral definida en bachillerato, restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la Universidad. Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, Ciudad Real. España. En revisión

ANEXOS

ANEXO I

CUESTIONARIO PILOTO

CUESTIONARIO INTEGRAL DEFINIDA

Para cada una de las cuestiones, responde lo más extensamente que puedas, aclarando, al máximo, cualquier aspecto relacionado con dichas cuestiones.

---

1) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x^4}$, hallar:

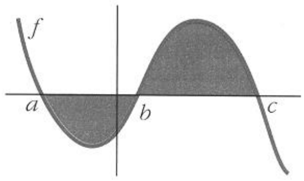
a) $\int_1^2 f(x)dx$ b) $\int_{-1}^1 f(x)dx$

Además, en cada caso, calcula el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje de las abscisas.

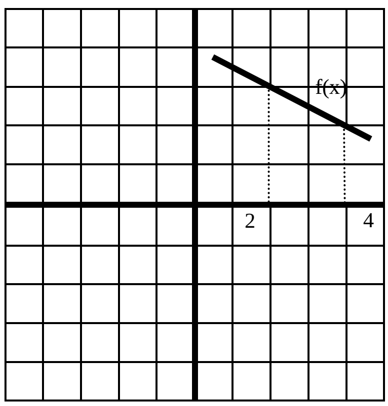
2) De las siguientes expresiones:

$$a)\int_a^c f(x)dx \quad b)\left|\int_a^c f(x)dx\right| \quad c)\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad d) -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

determina cuál, o cuáles de ellas, nos dan el área limitada por la gráfica de f y el eje de las abscisas. Debes justificar extensamente el por qué de la aceptación, o rechazo, de cada uno de los apartados.

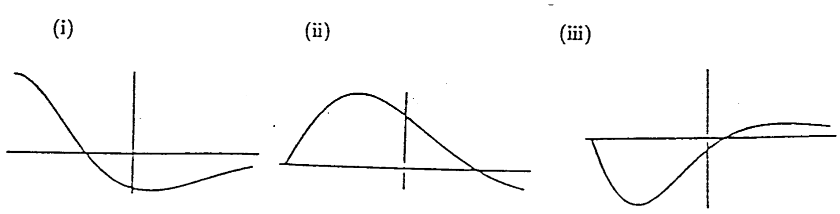


3) Dada la función f(x) correspondiente a la gráfica:



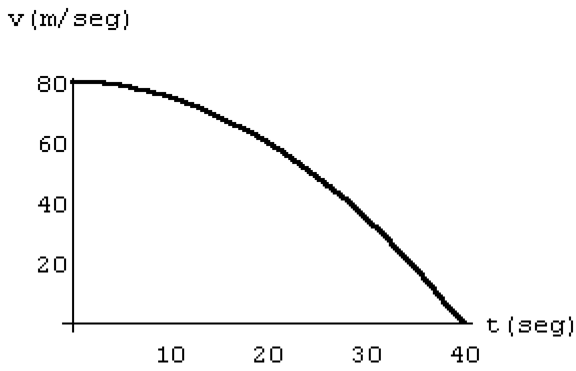
Dibuja tres funciones primitivas de dicha función f(x) en el intervalo [2, 4].

4) Las gráficas i, ii y iii corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, su función derivada f' y una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando las respuestas lo más extensamente que puedas.



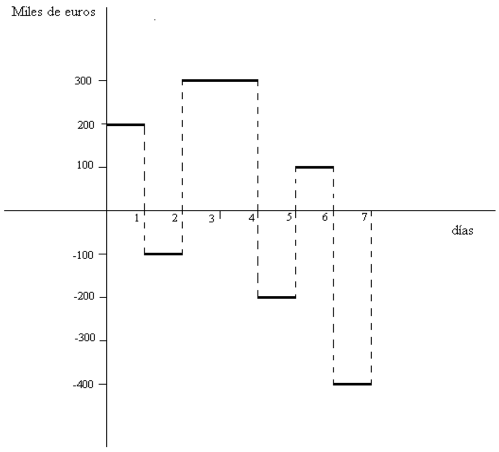
5) Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión debido a una rotura de embrague. Se estima que a partir de ese momento (t=0) su velocidad, en metros por segundo, viene dada por $v(t) = 80 - 0.05t^2$, cuya gráfica puedes comprobar que es la de la figura adjunta.

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 20 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 20 y los 40 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?

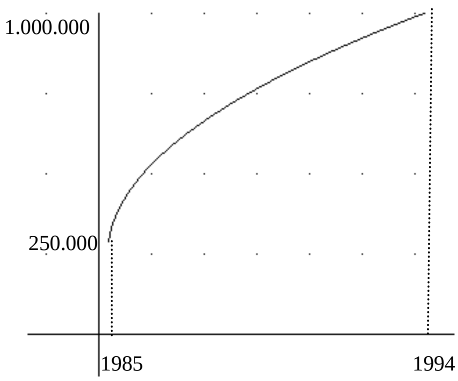


1') Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta y=1. Ambos deciden dividir equitativamente la parcela mediante una recta y=a paralela a la recta y=1. Halla el valor de a.

2') La gráfica adjunta indica las ganancias o pérdidas, en miles de euros, de una pequeña empresa, según los días de la semana, ¿cuál es el saldo en euros al final de la semana?

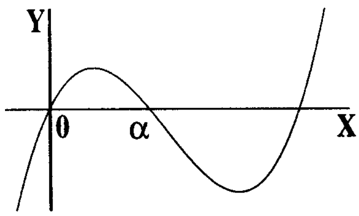


3') La función siguiente: $f(x) = 250000\left(1+\sqrt{x-1985}\right)$, representa las tasas estimadas de incremento del consumo de energía eléctrica en un país, de 1985 a 1994, ¿cuál es consumo total en estos nueve años?



4') Consideramos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si fuese f la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas lo más extensamente que puedas:

1. F(α) = 0 2. F'(α) = 0 3. F es creciente en el intervalo (0,α).



5') Se considera la función $g(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad -2\le x<0 \\ 2x & si \quad 0\le x<2 \\ 8-3x & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$. Representa dicha función g y

calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$a)\int_{-2}^{1} g(x)dx \quad b)\int_{1}^{4} g(x)dx \quad c)\int_{-2}^{4} g(x)dx$

ANEXO II

CUESTIONARIO DEFINITVO

APELLIDOS Y NOMBRE ....

CENTRO ....

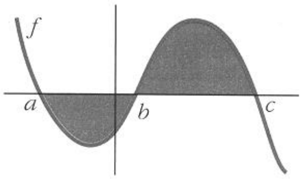
Para cada una de las cuestiones, responde lo más extensamente que puedas, aclarando, al máximo, cualquier aspecto relacionado con dichas cuestiones.

1) ¿Cuáles de las siguientes expresiones:

$$a)\left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_b^c f(x)dx\right| \qquad b)\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad c)\left|\int_a^c f(x)dx\right|$$

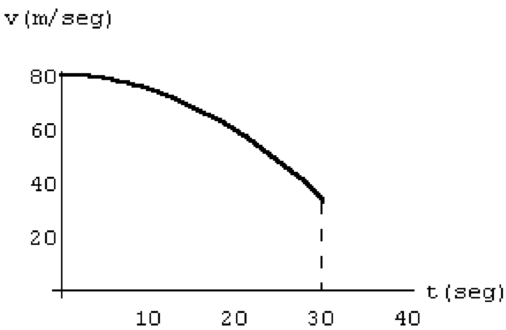
$$d) - \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad e)\int_a^c f(x)dx$$

nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de las abscisas?
Debes justificar extensamente el por qué de la aceptación, o rechazo, de cada uno de los apartados.

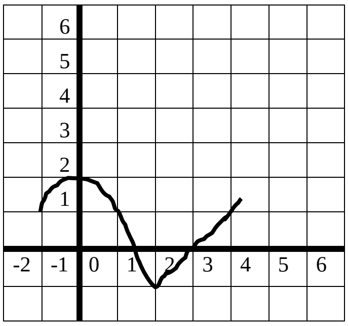


2) Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión durante 30 segundos debido a un problema en el motor. Estando sin propulsión (t=0) su velocidad en metros por segundo vendrá dada por $v(t) = 80 - 0.05t^2$, cuya gráfica es la de la figura adjunta.

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 10 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 10 y los 30 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá sin propulsión?

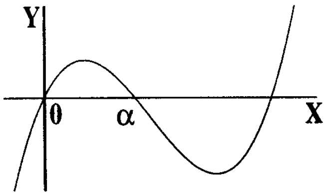


3) ¿Cómo calcularías, con la mayor aproximación que sea posible, la integral definida en el intervalo [-1,4] de la función cuya gráfica aparece en la figura? Justifica la respuesta.



4) Consideramos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si fuese f la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando ampliamente las respuestas:

1. $F(\alpha) = 0$ 2. $F'(\alpha) = 0$ 3. F es creciente en el intervalo $(0,\alpha)$.



APELLIDOS Y NOMBRE ....

CENTRO ....

5) Se considera la función $g(x)=\begin{cases} -x^2 & si \quad -2\le x<0 \\ 2x & si \quad 0\le x<2 \\ 8-3x & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$. Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

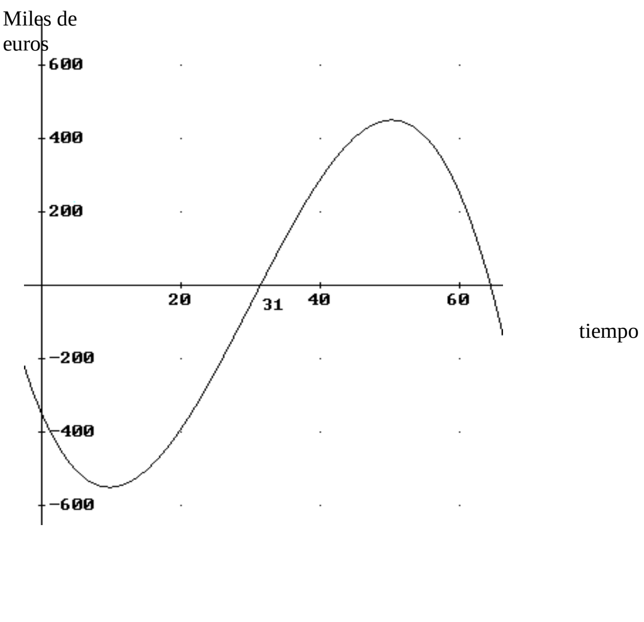
$$a)\int_{-2}^{1} g(x)dx \qquad b)\int_{1}^{4} g(x)dx \qquad c)\int_{-2}^{4} g(x)dx$$

6) Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta y=1. Deciden dividir equitativamente dicha parcela mediante una recta y=a paralela a la recta y=1. Halla el valor de a.

7) Un ciclista se desplaza a una velocidad v(t)= 20-10t.

Calcula $\int_0^4 v(t)dt$ y describe cómo fue el recorrido del ciclista.

8) Por los datos iniciales se estima que las ganancias/pérdidas, en miles de euros, de una pequeña empresa dedicada a la fabricación y comercialización del turrón se ajustan, durante los 60 días que dura la campaña de Navidad, a la función $f(x) = -0'03x^3 + 2'7x^2 - 44x - 350$, cuya gráfica es la representada en la figura. ¿Cuál será el resultado de esta campaña de Navidad?.



ANEXO III

ANÁLISIS del

CUESTIONARIO PILOTO

Cuestión 1

Estadísticos

N	Válidos	15
	Perdidos	1

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analítico	8	50,0	53,3	53,3
	anal y nat	3	18,8	20,0	73,3
	anal y graf	3	18,8	20,0	93,3
	anal, natural y graf	1	6,3	6,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	11	68,8	73,3	73,3
	heurística	3	18,8	20,0	93,3
	ambas	1	6,3	6,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	R. Barrow	1	6,3	6,7	6,7
	Ambas (PF y Barrow)	14	87,5	93,3	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Observamos en cada caso las funciones semióticas que **no** realiza, así, por ejemplo, 11-12 significa que no realiza ni $F_{1.1}$ ni $F_{1.2}$

Acciones e1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	otros	1	6,3	6,7	6,7
	11-12	14	87,5	93,3	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Acciones e2

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	otros	1	6,3	6,7	6,7
	22	2	12,5	13,3	20,0
	21-22	12	75,0	80,0	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Acciones e3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	no hace	9	56,3	60,0	60,0
	otro	2	12,5	13,3	73,3
	31	4	25,0	26,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Acciones e4

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	no hace	9	56,3	60,0	60,0
	otro	2	12,5	13,3	73,3
	41-42	4	25,0	26,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	r. Barrow	1	6,3	6,7	6,7
	no ptos corte, no área	2	12,5	13,3	20,0
	ninguno	12	75,0	80,0	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	cálculo numérico	4	25,0	26,7	26,7
	cálculo integral	4	25,0	26,7	53,3
	ninguno	4	25,0	26,7	80,0
	otros	1	6,3	6,7	86,7
	19 (cal. Numérico y otros)	1	6,3	6,7	93,3
	29 (cal. Integral y otro)	1	6,3	6,7	100,0

	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Cuestión 2

Estadísticos

N	Válidos	16
	Perdidos	0

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	15	93,8	93,8	93,8
	nat y graf	1	6,3	6,3	100,0

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	retórica	16	100,0	100,0	100,0

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF1	1	6,3	6,3	6,3
	PF2	2	12,5	12,5	18,8
	PF3	4	25,0	25,0	43,8
	PF4	2	12,5	12,5	56,3
	no tiene	7	43,8	43,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Las especificadas	16	100,0	100,0	100,0

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	lo visto	14	87,5	87,5	87,5
	otros	2	12,5	12,5	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	concepto de opuesto	1	6,3	6,3	6,3
	no tiene	15	93,8	93,8	100,0
	Total	16	100,0	100,0	

Cuestión 3

Estadísticos

N	Válidos	10
	Perdidos	6

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analítico	1	6,3	10,0	10,0
	gráfico	3	18,8	30,0	40,0
	numérico	1	6,3	10,0	50,0
	nat y graf	1	6,3	10,0	60,0
	graf y anal	1	6,3	10,0	70,0
	anal.graf.,y numér	2	12,5	20,0	90,0
	graf, num y natural	1	6,3	10,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	3	18,8	30,0	30,0
	heurística	6	37,5	60,0	90,0
	retórica	1	6,3	10,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF1	2	12,5	20,0	20,0
	no tiene	8	50,0	80,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Opción escogida

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e1	4	25,0	40,0	40,0
	e2	5	31,3	50,0	90,0
	otros	1	6,3	10,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Observamos en cada caso las funciones semióticas que **no** realiza, así, por ejemplo, 15-16 significa que no realiza ni $F_{1.5}$ ni $F_{1.6}$

FS que faltan

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	4	25,0	40,0	40,0
	22	2	12,5	20,0	60,0
	23	1	6,3	10,0	70,0
	15-16	2	12,5	20,0	90,0
	22-23	1	6,3	10,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
Total		16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSk=0	2	12,5	20,0	20,0
	no presenta	7	43,8	70,0	90,0
	Otros	1	6,3	10,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	cál. pendiente	3	18,8	30,0	30,0
	centrar la paráb. en [2,4]	3	18,8	30,0	60,0
	no presenta	2	12,5	20,0	80,0
	otros	2	12,5	20,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Cuestión 4

Estadísticos

N	Válidos	9
	Perdidos	7

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	8	50,0	88,9	88,9
	analítico	1	6,3	11,1	100,0
	Total	9	56,3	100,0	
Perdidos	blanco	7	43,8		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	1	6,3	11,1	11,1
	retórica	8	50,0	88,9	100,0
	Total	9	56,3	100,0	
Perdidos	blanco	7	43,8		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Prop. derivadas	3	18,8	33,3	33,3
	DIf=f	4	25,0	44,4	77,8
	ambas	1	6,3	11,1	88,9
	Otros	1	6,3	11,1	100,0
	Total	9	56,3	100,0	
Perdidos	blanco	7	43,8		
	Total	16	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	las especificadas	8	50,0	88,9	88,9
	otros	1	6,3	11,1	100,0
	Total	9	56,3	100,0	
Perdidos	blanco	7	43,8		
	Total	16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSteor.	2	12,5	22,2	22,2
	no presenta	6	37,5	66,7	88,9
	otros	1	6,3	11,1	100,0
	Total	9	56,3	100,0	
Perdidos	blanco	7	43,8		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	no presenta	8	50,0	88,9	88,9
	otros	1	6,3	11,1	100,0
	Total	9	56,3	100,0	
Perdidos	blanco	7	43,8		
	Total	16	100,0		

Cuestión 5

Estadísticos

N	Válidos	15
	Perdidos	1

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	nat y anal	2	12,5	13,3	13,3
	anal y num	13	81,3	86,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	12	75,0	80,0	80,0
	heurística	3	18,8	20,0	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Aditividad	5	31,3	33,3	33,3
	Nociones MU	5	31,3	33,3	66,7
	sólo los propios para resolver la cuestión sin aditividad	1	6,3	6,7	73,3
	otros	4	25,0	26,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Hemos codificado los procedimientos o acciones de la siguiente manera:

- 4 indica que ha utilizado nociones de movimiento uniforme
- 1231 indica que ha utilizado e.1 para resolver el primer apartado, e.2 para resolver el segundo apartado y la primera vía para el tercer apartado, esto es, e.3.1
- 1232 indica que ha utilizado e.1 para resolver el primer apartado, e.2 para resolver el segundo apartado y la segunda vía para el tercer apartado, esto es, e.3.2
- 1239 indica que ha utilizado e.1 para resolver el primer apartado, e.2 para resolver el segundo apartado y otra vía el tercer apartado, que corresponde con alguna incoherencia
- 4231 indica que ha utilizado nociones del movimiento uniforme para resolver el primer apartado, e.2 para resolver el segundo apartado y la primera vía para el tercer apartado, esto es, e.3.1

- 12311 indica que ha utilizado e.1 para resolver el primer apartado, e.2 para resolver el segundo apartado y la primera vía para el tercer apartado, esto es, e.3.1 pero que está incompleta.
- 1231 indica que ha utilizado e.1 para resolver el primer apartado, e.2 para resolver el segundo apartado y la primera y segunda vía para el tercer apartado, esto es, e.3.1 y e.3.2

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	4	4	25,0	26,7	26,7
	otros	1	6,3	6,7	33,3
	1231	1	6,3	6,7	40,0
	1232	5	31,3	33,3	73,3
	1239	1	6,3	6,7	80,0
	4231	1	6,3	6,7	86,7
	12311	1	6,3	6,7	93,3
	12312	1	6,3	6,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSMU	5	31,3	33,3	33,3
	no presenta	8	50,0	53,3	86,7
	otros	2	12,5	13,3	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	cálculo num	4	25,0	26,7	26,7
	cálculo int	4	25,0	26,7	53,3
	no presenta	7	43,8	46,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Cuestión1´

Estadísticos

N	Válidos	11
	Perdidos	5

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	anal y graf	10	62,5	90,9	90,9
	graf y nat	1	6,3	9,1	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	7	43,8	63,6	63,6
	heurística	3	18,8	27,3	90,9
	retórica	1	6,3	9,1	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF2	5	31,3	45,5	45,5
	PF3	1	6,3	9,1	54,5
	sólo los propios	2	12,5	18,2	72,7
	Otros	1	6,3	9,1	81,8
	PF1 y PF3	2	12,5	18,2	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	1	7	43,8	63,6	63,6
	2	2	12,5	18,2	81,8
	incoherencias	2	12,5	18,2	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	los citados	7	43,8	63,6	63,6
	no presenta	3	18,8	27,3	90,9
	otros	1	6,3	9,1	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	cálculo num	3	18,8	27,3	27,3
	no presenta	6	37,5	54,5	81,8
	otros	2	12,5	18,2	100,0
	Total	11	68,8	100,0	
Perdidos	blanco	5	31,3		
	Total	16	100,0		

Cuestión 2'

Estadísticos

N	Válidos	15
	Perdidos	1

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	numérico	8	50,0	53,3	53,3
	nat y num	7	43,8	46,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	Sistema	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	10	62,5	66,7	66,7
	heurística	5	31,3	33,3	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	Sistema	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF2	3	18,8	20,0	20,0
	sólo los propios	12	75,0	80,0	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	Sistema	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	las especificadas	15	93,8	100,0	100,0
Perdidos	Sistema	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	no presenta	15	93,8	100,0	100,0
Perdidos	Sistema	1	6,3		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	no unidades en OY	3	18,8	20,0	20,0
	no presenta	11	68,8	73,3	93,3
	otros	1	6,3	6,7	100,0
	Total	15	93,8	100,0	
Perdidos	Sistema	1	6,3		
	Total	16	100,0		

Cuestión 3´

Estadísticos

N	Válidos	10
	Perdidos	6

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analítico	7	43,8	70,0	70,0
	numérico	3	18,8	30,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	9	56,3	90,0	90,0
	heurística	1	6,3	10,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF1	1	6,3	10,0	10,0
	PF2	2	12,5	20,0	30,0
	sólo los propios	7	43,8	70,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	las especificadas	10	62,5	100,0	100,0
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	r. Barrow	1	6,3	10,0	10,0
	At=A1-A2	2	12,5	20,0	30,0
	no presenta	7	43,8	70,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	cálculo num	3	18,8	30,0	30,0
	cálculo int	2	12,5	20,0	50,0
	no presenta	5	31,3	50,0	100,0
	Total	10	62,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	37,5		
	Total	16	100,0		

Cuestión 4'

Estadísticos

N	Válidos	12
	Perdidos	4

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	4	25,0	33,3	33,3
	nat y anal	6	37,5	50,0	83,3
	nat y graf	1	6,3	8,3	91,7
	nat, graf y anal	1	6,3	8,3	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	1	6,3	8,3	8,3
	retórica	11	68,8	91,7	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF1	1	6,3	8,3	8,3
	Prop deriv	6	37,5	50,0	58,3
	sólo los propios	3	18,8	25,0	83,3
	PF1 y Prop deriv	1	6,3	8,3	91,7
	PF2 y Prop deriv	1	6,3	8,3	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
	Total	16	100,0		

Acciones en 1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	apartado blanco	1	6,3	8,3	8,3
	otros	3	18,8	25,0	33,3
	e.1.1completa	2	12,5	16,7	50,0
	e.1.2 completa	4	25,0	33,3	83,3
	e.1.3incompleta	1	6,3	8,3	91,7
	e.1.3completa	1	6,3	8,3	100,0

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
Total		16	100,0		

Acciones en 2

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	apartado blanco	2	12,5	16,7	16,7
	completo	8	50,0	66,7	83,3
	otros	2	12,5	16,7	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
Total		16	100,0		

Acciones en 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	apartado blanco	3	18,8	25,0	25,0
	otros	3	18,8	25,0	50,0
	e.3.2incompleta	1	6,3	8,3	58,3
	e.3.2completa	5	31,3	41,7	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
Total		16	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSf(x)	3	18,8	25,0	25,0
	CStf	1	6,3	8,3	33,3
	no presenta	8	50,0	66,7	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CS derivada	2	12,5	16,7	16,7
	no presenta	8	50,0	66,7	83,3
	otros	1	6,3	8,3	91,7
	39	1	6,3	8,3	100,0
	Total	12	75,0	100,0	
Perdidos	blanco	4	25,0		
	Total	16	100,0		

Cuestión 5´

Estadísticos

N	Válidos	14
	Perdidos	2

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analítico	1	6,3	7,1	7,1
	anal y graf	4	25,0	28,6	35,7
	graf y anal	8	50,0	57,1	92,9
	graf, anal y natu	1	6,3	7,1	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	12	75,0	85,7	85,7
	heurística	2	12,5	14,3	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	aditividad	3	18,8	21,4	21,4
	sólo los propios	11	68,8	78,6	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

Tipo de fórmulas

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	r. Barrow	11	68,8	78,6	78,6
	f. geom	1	6,3	7,1	85,7
	otros	1	6,3	7,1	92,9
	no hace2	1	6,3	7,1	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

Aditividad en 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	sin aditiv	8	50,0	57,1	57,1
	con aditiv	3	18,8	21,4	78,6

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
	no hace 3	3	18,8	21,4	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

Tabla de contingencia Acciones en 1 * Acciones en 3 * Acciones en 2

Recuento

			Acciones en 3				
Acciones en 2			apartado blanco	otros	e.3.2 incompleta	e.3.2 completa	Total
apartado blanco	Acciones en 1	apartado blanco	0	1			1
		e.1.2 completa	1	0			1
	Total		1	1			2
completo	Acciones en 1	otros	0	1	0	1	2
		e.1.1completa	0	0	0	2	2
		e.1.2 completa	2	0	0	1	3
		e.1.3incompleta	0	0	1	0	1
	Total		2	1	1	4	8
otros	Acciones en 1	otros		1		0	1
		e.1.3completa		0		1	1
	Total			1		1	2

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	r. Barrow	2	12,5	14,3	14,3
	confusión de la aditividad	1	6,3	7,1	21,4
	no presenta	8	50,0	57,1	78,6
	no cambia los lím.	1	6,3	7,1	85,7
	suma las f(x)	1	6,3	7,1	92,9
	multiplica las f(x)	1	6,3	7,1	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	cálculo num	5	31,3	35,7	35,7
	cálculo int	1	6,3	7,1	42,9
	no presenta	6	37,5	42,9	85,7
	otros	2	12,5	14,3	100,0
	Total	14	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	2	12,5		
	Total	16	100,0		

ANEXO IV

ANÁLISIS del

CUESTIONARIO DEFINITIVO

Cuestión 1

Estadísticos

N	Válidos	48
	Perdidos	0

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	47	97,9	97,9	97,9
	nat. y graf.	1	2,1	2,1	100,0
	Total	48	100,0	100,0	

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	retórica	48	100,0	100,0	100,0

Conceptos y proposiciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRárea	20	41,7	41,7	41,7
	CRárea y PF1	3	6,3	6,3	47,9
	CRárea y PF2	1	2,1	2,1	50,0
	CRárea y PF3	2	4,2	4,2	54,2
	CRárea y PF4	4	8,3	8,3	62,5
	CRárea y PF5	8	16,7	16,7	79,2
	CRárea y PF2, PF3	5	10,4	10,4	89,6
	CRárea y PF3, PF4	1	2,1	2,1	91,7
	CRárea, PF3 y PF5	1	2,1	2,1	93,8
	CRárea y PF2, PF3, PF5	3	6,3	6,3	100,0
	Total	48	100,0	100,0	

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	las especificadas	48	100,0	100,0	100,0

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	conf. V.ABS int con INT v. abs	3	6,3	6,3	6,3
	no presenta	45	93,8	93,8	100,0
	Total	48	100,0	100,0	

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	conp. opuesto	11	22,9	22,9	22,9
	conp. valor abs.	4	8,3	8,3	31,3
	no presenta	29	60,4	60,4	91,7
	conp. opuesto y v. abs.	4	8,3	8,3	100,0
	Total	48	100,0	100,0	

Cuestión 2

Estadísticos

N	Válidos	47
	Perdidos	1

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analitico	7	14,6	14,9	14,9
	nat. y analit.	1	2,1	2,1	17,0
	anlit. y nat.	4	8,3	8,5	25,5
	anlit. y num.	28	58,3	59,6	85,1
	nat., analit. y num.	7	14,6	14,9	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	38	79,2	80,9	80,9
	heuristica	9	18,8	19,1	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

Conceptos y proposiciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	$CR_{Física}$	29	60,4	61,7	61,7
	nociones MU	11	22,9	23,4	85,1
	otros	3	6,3	6,4	91,5
	$CR_{Física}$ y aditiv	1	2,1	2,1	93,6
	$CR_{Física}$ y PF3	2	4,2	4,3	97,9
	$CR_{Física}$ aditiv y PF3	1	2,1	2,1	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

Acciones a)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e1 completa	30	62,5	63,8	63,8
	fórmulas m.u.	11	22,9	23,4	87,2
	incoherencias	1	2,1	2,1	89,4
	otras	2	4,2	4,3	93,6
	e1.1 completa	3	6,3	6,4	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

Acciones b)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e2 incompleta	2	4,2	4,3	4,3
	e2 completa	28	58,3	59,6	63,8
	formulas m.u.	11	22,9	23,4	87,2
	incoherencias	1	2,1	2,1	89,4
	otras	2	4,2	4,3	93,6
	e2.1 completa	3	6,3	6,4	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

Acciones c)

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	formulas m.u.	8	16,7	21,1	21,1
	incoherencias	4	8,3	10,5	31,6
	otras	3	6,3	7,9	39,5
	e31 completa	9	18,8	23,7	63,2
	e32 completa	2	4,2	5,3	68,4
	e33 completa	8	16,7	21,1	89,5
	e34 completa	4	8,3	10,5	100,0
	Total	38	79,2	100,0	
Perdidos	blanco	10	20,8		
	Total	48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	RB1	3	6,3	6,4	6,4
	CSMU	11	25,0	25,5	31,9
	no presenta	30	60,4	61,7	93,6
	otros	3	6,3	6,4	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	calc. num.	2	4,2	4,3	4,3
	calc. int.	3	6,3	6,4	10,6
	interp. enunc.	10	20,8	21,3	31,9
	CSfisica	3	6,3	6,4	38,3
	no presenta	19	39,6	40,4	78,7
	otros	1	2,1	2,1	80,9
	calc. num. e interp. enunc.	3	6,3	6,4	87,2
	calc. num. y otros	1	2,1	2,1	89,4
	calc. int. e interp. enunc.	4	8,3	8,5	97,9
	interp. enunc.y otros	1	2,1	2,1	100,0
	Total	47	97,9	100,0	
Perdidos	blanco	1	2,1		
	Total	48	100,0		

Cuestión 3

Estadísticos

N	Válidos	44
	Perdidos	4

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	16	33,3	36,4	36,4
	analitico	9	18,8	20,5	56,8
	nat. y analit.	14	29,2	31,8	88,6
	nat. y num.	1	2,1	2,3	90,9
	anlit., graf. y nat.	2	4,2	4,5	95,5
	graf. y nat.	1	2,1	2,3	97,7
	anlit. graf. y nat.	1	2,1	2,3	100,0
	Total	44	91,7	100,0	
Perdidos	blanco	4	8,3		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	7	14,6	15,9	15,9
	heuristica	37	77,1	84,1	100,0
	Total	44	91,7	100,0	
Perdidos	blanco	4	8,3		
	Total	48	100,0		

Conceptos y proposiciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRalg	6	12,5	13,6	13,6
	otros	1	2,1	2,3	15,9
	CRarea y aditiv	1	2,1	2,3	18,2
	CRalg y PF	1	2,1	2,3	20,5
	CRalg y aditiv	12	25,0	27,3	47,7
	CRalg, PF y aditiv	22	45,8	50,0	97,7
	CRarea, CRalg, PF y aditiv	1	2,1	2,3	100,0
	Total	44	91,7	100,0	
Perdidos	blanco	4	8,3		
	Total	48	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	f. geom	1	2,1	2,3	2,3
	calculo de la función	5	10,4	11,4	13,6
	solo indica	34	70,8	77,3	90,9
	otras	1	2,1	2,3	93,2
	f. geom y calc función	1	2,1	2,3	95,5
	calculo de la función incompleta	2	4,2	4,5	100,0
	Total	44	91,7	100,0	
Perdidos	blanco	4	8,3		
	Total	48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSaditiv	4	8,3	9,1	9,1
	CSalg	2	4,2	4,5	13,6
	el de PF	24	50,0	54,5	68,2
	no presenta	11	22,9	25,0	93,2
	otros	1	2,1	2,3	95,5
	RB1	1	2,1	2,3	97,7
	CSaditiv y r. Barrow	1	2,1	2,3	100,0
	Total	44	91,7	100,0	

Perdidos	blanco	4	8,3		
	Total	48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	calc. num.	3	6,3	6,8	6,8
	Lim integ.	5	10,4	11,4	18,2
	CSfun	2	4,2	4,5	22,7
	CSarea	2	4,2	4,5	27,3
	no presenta	27	56,3	61,4	88,6
	otros	4	8,3	9,1	97,7
	Lim integ. y CSfun	1	2,1	2,3	100,0
	Total	44	91,7	100,0	
Perdidos	blanco	4	8,3		
	Total	48	100,0		

Cuestión 4

Estadísticos

N	Válidos	43
	Perdidos	5

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	40	83,3	93,0	93,0
	nat. y analit.	3	6,3	7,0	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	retorica	43	89,6	100,0	100,0
Perdidos	blanco	5	10,4		
	Total	48	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	PF3	1	2,1	2,3	2,3
	PF4	1	2,1	2,3	4,7
	Nociones de func.	2	4,2	4,7	9,3
	PF1 y PF3	1	2,1	2,3	11,6
	CRarea y TFCI	4	8,3	9,3	20,9
	CRarea y prop. der.	2	4,2	4,7	25,6
	TFCI y PF1	1	2,1	2,3	27,9
	TFCI y PF3	3	6,3	7,0	34,9

	TFCI y r. Barrow	1	2,1	2,3	37,2
	TFCI y prop. der.	7	14,6	16,3	53,5
	Prop deriv y PF1	2	4,2	4,7	58,1
	Nociones de func. y PF1	2	4,2	4,7	62,8
	Noc. de func. y PF3	1	2,1	2,3	65,1
	Noc de func. y TFCI	1	2,1	2,3	67,4
	CRarea, TFCI y prop. der.	8	16,7	18,6	86,0
	Prop deriv, PF1 y PF3	2	4,2	4,7	90,7
	Nociones de func. PF3 y PF4	1	2,1	2,3	93,0
	Prop deriv, PF1, PF2 y PF3	2	4,2	4,7	97,7
	noc. func., TFCI, PF2 y PF3	1	2,1	2,3	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
	Total	48	100,0		

Acciones en 1

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	blanco	4	8,3	9,3	9,3
	incoherencias	1	2,1	2,3	11,6
	sin razonar	4	8,3	9,3	20,9
	otras vias	3	6,3	7,0	27,9
	e11 incompleta	1	2,1	2,3	30,2
	e11 completa	3	6,3	7,0	37,2
	e12 completa	12	25,0	27,9	65,1
	e13 completa	8	16,7	18,6	83,7
	e14 completa	5	10,4	11,6	95,3
	e15 completa	2	4,2	4,7	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
Total		48	100,0		

Acciones en 2

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	blanco	6	12,5	14,0	14,0
	incoherencias	2	4,2	4,7	18,6
	sin razonar	5	10,4	11,6	30,2
	otras vias	1	2,1	2,3	32,6
	e21 completa	21	43,8	48,8	81,4
	e22 completa	6	12,5	14,0	95,3
	e23 completa	2	4,2	4,7	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
Total		48	100,0		

Acciones en 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	blanco	4	8,3	9,3	9,3
	incoherencias	3	6,3	7,0	16,3
	sin razonar	2	4,2	4,7	20,9
	otras vias	5	10,4	11,6	32,6
	e31 completa	3	6,3	7,0	39,5
	e32 completa	14	29,2	32,6	72,1
	e33 completa	11	22,9	25,6	97,7
	e34 completa	1	2,1	2,3	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
Total		48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSf(x)	15	31,3	34,9	34,9
	CStf	3	6,3	7,0	41,9
	no presenta	20	41,7	46,5	88,4
	otros	1	2,1	2,3	90,7
	CSf(x) y CStf	3	6,3	7,0	97,7
	CSf(x) y otros	1	2,1	2,3	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
Total		48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CS derivada	8	16,7	18,6	18,6
	no presenta	32	66,7	74,4	93,0
	otros	1	2,1	2,3	95,3
	CS deriv. y CSfun	2	4,2	4,7	100,0
	Total	43	89,6	100,0	
Perdidos	blanco	5	10,4		
	Total	48	100,0		

Tabla de contingencia Apartado 1 * Apartado 3 * Apartado 2											
			Apartado 3								
Apartado 2			blanco	incoherencias	sin razonar	otras vías	e.3.1 completa	e.3.2 completa	e.3.3 completa	e.3.4 completa	Total
blanco	Apartado 1	blanco	0	1				1	1	0	3
		e.1.3 completa	1	0				0	0	1	2
		e.1.5 completa	0	0				0	1	0	1
	Total		1	1				1	2	1	6
incoherencias	Apartado 1	sin razonar		1		0					1
		e.1.3 completa		0		1					1
	Total			1		1					2
sin razonar	Apartado 1	sin razonar			0	0	0	1			1
		e.1.2 completa			0	0	0	1			1
		e.1.4 completa			0	1	1	0			2
		e.1.5 completa			1	0	0	0			1
	Total				1	1	1	2			5
otras vias	Apartado 1	e.1.2 completa						1			1
	Total							1			1
e.2.1 completa	Apartado 1	blanco	0	0	0	0	0	0	1		1
		incoherencias	0	1	0	0	0	0	0		1
		sin razonar	0	0	0	0	1	1	0		2
		otras vías	0	0	0	1	0	0	2		3
		e.1.1 incompleta	1	0	0	0	0	0	0		1
		e.1.1 completa	0	0	0	0	0	2	1		3
		e.1.2 completa	1	0	1	1	0	6	0		9
		e.1.4 completa	0	0	0	1	0	0	0		1
	Total		2	1	1	3	1	9	4		21
e.2.2 completa	Apartado 1	e.1.2 completa	0				1	0	0		1
		e.1.3 completa	1				0	0	3		4
		e.1.4 completa	0				0	1	0		1
	Total		1				1	1	3		6

e.2.3 completa	**Apartado 1**	e.1.3 completa							1		1
		e.1.4 completa							1		1
	Total								2		2

Cuestión 5

Estadísticos

N	Válidos	45
	Perdidos	3

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analitico	2	4,2	4,4	4,4
	anlit. y graf.	43	89,6	95,6	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	43	89,6	95,6	95,6
	heuristica	2	4,2	4,4	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
	Total	48	100,0		

Conceptos y proposiciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRalg y PF1	9	18,8	20,0	20,0
	CRalg y Aditiv.	23	47,9	51,1	71,1
	CRarea, CRalg y Aditiv.	1	2,1	2,2	73,3
	CRalg, Aditiv., PF1	1	2,1	2,2	75,6
	CRalg, Aditiv. y PF3	5	10,4	11,1	86,7
	CRalg, Aditiv. y PF4	5	10,4	11,1	97,8
	CRarea, CRalg, Aditiv. y PF4	1	2,1	2,2	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

Tipo de fórmulas

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	r. Barrow	39	81,3	86,7	86,7
	incoherencias	1	2,1	2,2	88,9
	r. Barrow y f. geom.	2	4,2	4,4	93,3
	no hace2	2	4,2	4,4	97,8
	no hace 1 ni 2	1	2,1	2,2	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

Aditividad en 3

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	sin aditiv	27	56,3	60,0	60,0
	con aditiv	11	22,9	24,4	84,4
	no hace 3	7	14,6	15,6	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
	Total	48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	el propio de PF1	8	16,7	17,8	17,8
	CSvab	10	20,8	22,2	40,0
	no presenta	22	45,8	48,9	88,9
	otros	2	4,2	4,4	93,3
	el propio de PF1 y CSvab	1	2,1	2,2	95,6
	RB1 y PF1	1	2,1	2,2	97,8
	RB1 y CSvab	1	2,1	2,2	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	calc. num.	20	41,7	44,4	44,4
	calc. int.	2	4,2	4,4	48,9
	no presenta	19	39,6	42,2	91,1
	otros	3	6,3	6,7	97,8
	calc. num. y otros	1	2,1	2,2	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
	Total	48	100,0		

Cuestión 6

Estadísticos

N	Válidos	34
	Perdidos	14

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	natural	1	2,1	2,9	2,9
	anlit. y graf.	21	43,8	61,8	64,7
	graf. y analit.	2	4,2	5,9	70,6
	anlit, graf y nat.	10	20,8	29,4	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	21	43,8	61,8	61,8
	heuristica	13	27,1	38,2	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Conceptos y propiedades

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRarea	21	43,8	61,8	61,8
	CRarea y PF1	2	4,2	5,9	67,6
	CRarea y PF2	10	20,8	29,4	97,1
	CRarea, PF1 y PF3	1	2,1	2,9	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e.1	18	37,5	52,9	52,9
	e.2	4	8,3	11,8	64,7
	incoherente	1	2,1	2,9	67,6
	otras	1	2,1	2,9	70,6
	solo área total	10	20,8	29,4	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
Total		48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSlim	1	2,1	2,9	2,9
	no presenta	30	62,5	88,2	91,2
	otros	1	2,1	2,9	94,1
	RB1	1	2,1	2,9	97,1
	CSlim y elec. func.	1	2,1	2,9	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
Total		48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	calc. num.	5	10,4	14,7	14,7
	calc. int.	2	4,2	5,9	20,6
	CSint	2	4,2	5,9	26,5
	Ecuación	1	2,1	2,9	29,4
	no presenta	17	35,4	50,0	79,4
	otros	5	10,4	14,7	94,1
	calc. num. y CSint	1	2,1	2,9	97,1
	calc. num. y ecuación	1	2,1	2,9	100,0
	Total	34	70,8	100,0	
Perdidos	blanco	14	29,2		
	Total	48	100,0		

Cuestión 7

Estadísticos

N	Válidos	45
	Perdidos	3

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analitico	7	14,6	15,6	15,6
	anlit. y nat.	27	56,3	60,0	75,6
	anlit, graf. y nat.	11	22,9	24,4	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	8	16,7	17,8	17,8
	retorica	37	77,1	82,2	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

Conceptos y proposiciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRfisica	8	16,7	17,8	17,8
	CRalg	12	25,0	26,7	44,4
	CRfisica y PF	19	39,6	42,2	86,7
	CRfisica y P1	1	2,1	2,2	88,9
	CRfisica y P2	5	10,4	11,1	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e.1	26	54,2	57,8	57,8
	e.3	3	6,3	6,7	64,4
	e.4	6	12,5	13,3	77,8
	e.1 sin acabar	8	16,7	17,8	95,6
	e.3 no completo	1	2,1	2,2	97,8
	e.4 sin acabar	1	2,1	2,2	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSint cero	15	31,3	33,3	33,3
	CSvab	3	6,3	6,7	40,0
	no presenta	22	45,8	48,9	88,9
	RB1	1	2,1	2,2	91,1
	CSint cero y CSvab	1	2,1	2,2	93,3
	CSint cero y otro	1	2,1	2,2	95,6
	CSint cero y RB1	2	4,2	4,4	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
Total		48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	calc. num.	1	2,1	2,2	2,2
	calc. int.	2	4,2	4,4	6,7
	integral de v es v	7	14,6	15,6	22,2
	CSfun	1	2,1	2,2	24,4
	CSfisica	5	10,4	11,1	35,6
	no presenta	29	60,4	64,4	100,0
	Total	45	93,8	100,0	
Perdidos	blanco	3	6,3		
	Total	48	100,0		

Cuestión 8

Estadísticos

N	Válidos	42
	Perdidos	6

Lenguaje

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	analitico	23	47,9	54,8	54,8
	numerico	2	4,2	4,8	59,5
	nat. y analit.	15	31,3	35,7	95,2
	anlit. y nat.	2	4,2	4,8	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
	Total	48	100,0		

Argumentaciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	ninguna	28	58,3	66,7	66,7
	heuristica	14	29,2	33,3	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
	Total	48	100,0		

Conceptos y proposiciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CRrpc	8	16,7	19,0	19,0
	CRalg	1	2,1	2,4	21,4
	CRarea y PF3	19	39,6	45,2	66,7
	CRarea y PF4	2	4,2	4,8	71,4
	funcion y prop, PF1	2	4,2	4,8	76,2
	CRarea, PF3 y PF4	8	16,7	19,0	95,2
	CRarea, CRrcp y PF4	1	2,1	2,4	97,6
	CRarea, func y prop, PF1 y PF3	1	2,1	2,4	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
Total		48	100,0		

Acciones

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	e.1	8	16,7	19,0	19,0
	e.2	18	37,5	42,9	61,9
	e.3	2	4,2	4,8	66,7
	e.4	1	2,1	2,4	69,0
	otras	2	4,2	4,8	73,8
	e.1 sin interpretación	1	2,1	2,4	76,2
	e.2 sin acabar	4	8,3	9,5	85,7
	e.2 sin interpretación	4	8,3	9,5	95,2
	e.2 y e.3	1	2,1	2,4	97,6
	e.4 sin interpretación	1	2,1	2,4	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
Total		48	100,0		

Otros CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	CSvab	9	18,8	21,4	21,4
	CSlim	3	6,3	7,1	28,6
	no presenta	27	56,3	64,3	92,9
	RB1	1	2,1	2,4	95,2
	CSvab y otro	1	2,1	2,4	97,6
	CSvab y RB1	1	2,1	2,4	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
Total		48	100,0		

No CS

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	calc. num.	7	14,6	16,7	16,7
	calc. int.	3	6,3	7,1	23,8
	CSfun	1	2,1	2,4	26,2
	no presenta	30	62,5	71,4	97,6
	otros	1	2,1	2,4	100,0
	Total	42	87,5	100,0	
Perdidos	blanco	6	12,5		
	Total	48	100,0		

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1998). La evolución de las problemáticas en Didáctica del Análisis, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18 (2),* 231-262.

Artigue, M. (2003) ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2)*, 117-134.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Azorín, F. y Sánchez-Crespo, J.L. (1986). *Métodos y Aplicaciones del Muestreo*. Madrid: Alianza Editorial.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas*, 125-164. Zaragoza: ICE.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behaviour*, *22*, 481-497.

Bessot, D., et als. (1999) *Aux origines du calcul infinitésimal*, IREM de Basse-Normandie: Ellipses.

Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 73-80. Hiroshima, Japan.

Boigues, F.J. (2010). *"El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente"* Tesis doctoral, Universidad de Alicante. España.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005). Un estudio sobre la reproductibilidad de situaciones didácticas: el papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral. En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Coordinadores) *Investigación en Educación Matemática IX*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, Córdoba. España.

Camacho, M. y Depool, R. (2003). "Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (pcs) *Derive*". *Educación Matemática*, *15 (3)*, 119-140.

Camacho, M., Depool, R. & Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática, 20 (3),* 33-57.

Cantoral, R. (2003). *La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: Una mirada emergente.* Trabajo presentado en la XI Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XI CIAEM), Blumenau, Brasil.

Carlson, M. P., Persson, J. & Smith, N., (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the fundamental theorem of calculus. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty, J. Zilliox (Eds) Proceedings *of the **27th** Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 165-172. Joint Meeting of PME and PMENA, Hawaii, USA.

Colera, J., García, R. y Oliveira, M.J. (2001). *Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

Contreras, Á., García, M., Luque, L., Ordóñez, L., Ortega, M. y Sánchez, C. (2003). *Análisis de manuales de 1º y 2º de Bachillerato LOGSE en Institutos de educación Secundaria de la provincia de Jaén en cuanto a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal derivada e integral*. Proyecto de investigación. Instituto de estudios giennenses. Excelentísima Diputación Provincial de Jaén. Jaén.

Contreras, A. y Ordóñez, L., (2005a). Análisis de manuales en el marco teórico de la TFS. Aplicación a la integral definida. *Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* **(**V CIBEM) Oporto. Portugal

Contreras, A. y Ordóñez, L., (2005b). Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Coordinadores) *Investigación en Educación Matemática*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, Córdoba. España.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime, 9(1)*, 65-84.

Contreras, Á., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, *28(3)*, 367–384.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime, 8 (3), 265-286*

Costa,V., Domenicantonio, R. y Vacchino, M.C. (2010). Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial. *Uno, 21*, 173-185.

Crisóstomo, E., Ordóñez, L., Contreras, Á. y Godino, J (2005) Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En Á. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds), *Investigaciones en Didáctica de la Matemática*. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la teoría de la Funciones Semióticas, 125-166. Jaén, España.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu; V. y Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. En M. van den Heuvel-Panhuizen, (Eds), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 297-304. Utrecht, The Netherlands.

Dahan-Dalmedico, A. y Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques*. París: Éditions du Seuil.

De Lorenzo, J. (1977). "*La matemática y el problema de su historia".* Madrid: Tecnos.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*, 311–336. Mexico: PMENA, Cinvestav-IPN.

Farfán, R. M (1997). *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Farmaki, V. & Paschos, P. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 83–106.

Faro, R. (2010) *Apuntes de Teoría de la Medida.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura. Consultado: (14 de diciembre, 2010) Disponible en http://matematicas.unex.es/~ricarfr/Tmedida/LibroTMedRed.pdf

Fox, D. (1981). El proceso de investigación en educación. Pamplona: EUNSA.

Gaud, D. et als. (1998), *Des tangentes aux infiniment petites. Réflexions & travaux pour la classe*. IREM, Université de Poitiers.

Gil Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa*. Barcelona: PPU.

Ghiglione, R. y Mataron, B. (1989). *Las encuestas sociológicas: teorías y prácticas*. México: Trillas

Grattan-Guinness, I. (1980). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Universidad.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22 (2/3)*, 237–284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3)*, 325–355.

Godino J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics education as a research domain: A search for identity 177-195. Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27 (2),* 221-252. Consultado: (14 de septiembre, 2010) Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Consultado: (14 de septiembre, 2010) Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26 (1)*, 39–88.

Godino, J. D. y Font, V. (2007 a). Algunos desarrollos y aplicaciones de la Teoría de los Significados sistémicos. Consultado: (14 de septiembre, 2010) Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D. y Font, V. (2007 b). Algunos desarrollos y aplicaciones de la Teoría de las Funciones Semióticas. Consultado: (14 de septiembre, 2010) Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias 27 (1)*, 59-76.

Goetz, J. P. y LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

González, P.M. (1992), *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza Editorial.

Guichard, J. (2000). *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques*. IREM de Poitiers : Ellipses.

Hernández, R. (2007) Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema. *Actualidades Investigativas en Educación 7(2),* 1-20.

Hjemslev, L. (1943), *Prolegómenos a una teoría del lenguaje,* Madrid: Gredos, 1971

Labraña, P.A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. España.

Llorens, J. L. y Santonja, F. J. (1997) Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas, 5, (1/2),* 61-76.

Lois, A. & Milevicich, L., (2009). The impact of technological tools in the teaching and learning of integral calculus. Trabajo presentado en *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6) Working Group 7*, Lyon, France.

Miles, M.B y Huberman, A.M. (1984). *Qualitative data analysis*. Beverly Hills: Sage Publications.

Miles, M.B y Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis*. *A new sourcebook of methods.* Beverly Hills: Sage Publications.

Mnemosyne Nº 1 (1992), *Mathématiques. Approche par les textes historiques.* París : IREM, Université Paris VII.
Mnemosyne Nº 13 (1997), *Mathématiques. Approche par les textes historiques*. París: IREM, Université Paris VII.
Mnemosyne Nº 2 (1992), *Mathématiques. Approche par les textes historique.* París: IREM, Université Paris VII.
Mnemosyne Nº 6 (1993), *Mathématiques. Approche par les textes historiques*. París : IREM, Université Paris VII.
Montucla, J. E. (1986), *Histoire des recherches sur la quadrature de cercle, Reproduction de textes anciens nouvelles série nº1*, París: IREM, Université Paris VII.
Ordóñez, L., Contreras, A., García, M. y Luque, L. (2002). *Significado institucional de la Integral definida.* Comunicación presentada en el X Congreso THALES sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. El Ejido-Adra. España.
Ordóñez, L. y Contreras, Á. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (eds) *Investigación en Educación Matemática.* Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada, España.
Ordóñez, L. y Contreras, A. (2007a) Significados personales y conflictos semióticos de los estudiantes en el aprendizaje de la Integral Definida. En E. Castro (Ed.), *El profesorado de matemáticas mira hacia el futuro. Matemáticas para todos*. XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Granada, España.
Ordóñez, L. y Contreras, A., (2007b) *Significados históricos-epistemológicos y escolares de la Integral Definida. Restricciones planteadas por las Pruebas de Acceso a la Universidad*. Trabajo presentado en el grupo de trabajo Didactica del Análisis en el XI Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Universidad de La Laguna, La Laguna, España.
Ordóñez, L., Contreras, A., Luque, L., y Sánchez, C. (2001) La enseñanza de la integral en estudiantes de 2º de Bachillerato. En E. Palacián y J. Sancho (Eds.) *X Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (JAEM)*, X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza, España.
Ordóñez, L. y Contreras, Á. (2010). La integral definida en las PAU: sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º de bachillerato. En Á. Contreras y L. Ordóñez (Ed.) Jornadas de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Baeza, Jaén, España.
Orton, A. (1983a). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics, 14(1),* 1-18.
Orton, A. (1983b) "Student's understanding of differentiation" *Educational Studies in Mathematics, 14(3),* 235-250.
Paralera, C. y Martín, A.M. (2009). Diseño de una e-actividad sobre aplicaciones de las integrales en Economía como cuaderno de trabajo para el alumno. *Uno, 19*, 140-149
Paschos, T. y Farmaki, V. (2006). The reflective abstraction in the construction Of the concept of the definite integral: A case study. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & Stehlíková (Eds) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 337-344. Joint Meeting of PME, Prague, Czech Republic
Priemer, N. y Lazarte, G. (2008). *Integral definida: ingeniería didáctica para su enseñanza-aprendizaje*. VI Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería "Formando al ingeniero" (VI CAEDI), Salta, Argentina. Consultado: (14 de septiembre, 2010) Disponible en: http://www.caedi.org.ar/pcdi/dosmarcos.html

Rasslan, S. and Tall, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. En A. D.Cockburn, E. Nardi, (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 89-96. Norwich. UK.

Rey Pastor, J. et al. (1969). *Análisis Matemático*, 8ed. Buenos Aires: Kapelusz.

Roberval, G. P. de (1987). *Traité des indivisibles*. Reproduction de textes anciens nouvelles série nº3. París: IREM, Université Paris VII.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki: una historia del arte y la ciencia del cálculo.* Tres Cantos: Nivola libros y ediciones S.L.

Schneider-Gilot, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, Tesis Doctoral, Université Catholique de Louvain, Lovain-La-Neuve. Bélgica.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus 'Functions and calculus'. In A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325. Dordrecht: Kluwer

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tsamir, P. (2007). Should more than one theoretical approach be used for analyzing students' errors? The case of areas, volumes and integration. *For the Learning of Mathematics, 27(2),* 28-33.

Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis doctoral. Universitat de València, Valencia. España.

Turégano, P. (1996). Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *Uno, 10*, 9-27.

Turégano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma*, *26*, 39-52.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 116 (2)*, 233-249.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (2/3),* 133–170.

Waldegg G. (1997), Histoire, Épistémologie et Méthodologie dans la Recherche en Didactique. *For the Learning of Mathematics, 17(1),* 43-47.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral definida. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática, 5,* 93-123.

Wenzelburger, E. (1994). *Cálculo integral* México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.