Universitat de Girona

TESIS DOCTORAL

EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ACTIVO

CLAUDIA ALEJANDRA VÁSQUEZ ORTIZ

2014

TESIS DOCTORAL

EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ACTIVO

CLAUDIA ALEJANDRA VÁSQUEZ ORTIZ

2014

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

DIRECTOR DE TESIS: DR. ÀNGEL ALSINA I PASTELLS

Memoria presentada para optar al título de doctora por la Universidad de Girona

PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

Vásquez, C., Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, 85, 5-23.

Vásquez, C., Alsina, A. (2014). Evaluation of Primary teacher´s didactic-mathematical knowledge when teaching probability. In *4th World Conference on Learning, Teaching and Educational Leadership*. Barcelona (Spain): Procedia - Social and Behavioral Sciences. (En prensa).

Vásquez, C., Alsina, A. (2014). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: Diseño, Construcción y Validación de un Instrumento de Evaluación. *Bolema*. (En revisión).

Vásquez, C., Alsina, A. (2014). Cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad: análisis de la validez del contenido desde el enfoque Ontosemiótico. *Contribuciones a la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística*. México. (En revisión).

Vásquez C, Alsina A. (2014). Evaluación del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad en profesores de primaria en activo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (En revisión).

Vásquez, C., Alsina, A. (2013). Conocimiento de la probabilidad y su didáctica en maestros de educación básica. *Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*; 2013. p. 4982-4987.

Vásquez C, Alsina A. (2013). Conocimiento matemático y didáctico en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades. In: J.M. Contreras, G.R. Cañadas, M.M. Gea, P. Arteaga, editors. *Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.* Universidad de Granada, Granada: Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad. (SEIEM); 2013. p. 165-172.

Vásquez C, Alsina A. (2013). La formación matemático-didáctica del profesorado de primaria para la enseñanza de las probabilidades. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento a la instrucción matemática. In: Rebeca Flores, editors. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Coacalco, México: CLAME, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.; 2013. p. 175-184.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Universitat de Girona

El Dr. Àngel Alsina i Pastells, de la Universitat de Girona,

DECLARO:

Que el trabajo titulado "Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo", que presenta Claudia Vásquez Ortiz para la obtención del título de doctora, se ha realizado bajo mi dirección.

Y para que así conste y tenga los efectos oportunos, firmo el presente documento.

Firma

Girona, 01 de julio de 2014

A los tres hombres que más amo en la vida
y que siempre tendrán un lugar especial y
muy grande en mi corazón.

A ti papito por todas tus enseñanzas,
el amor y cariño que siempre me diste,
nunca te olvidaré.

A mi esposo, Emilio, por su gran pero
gran paciencia, apoyo, amor y
comprensión que siempre me ha brindado.

A mi hijo, Francisco, que llegaste para
acompañarme en los momentos difíciles
y para darme la fortaleza para continuar.
Por ser la luz de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la fortaleza de continuar adelante y poder alcanzar mis sueños y metas relacionados con la realización de esta Tesis Doctoral.

A mi esposo por toda la comprensión, apoyo y palabras de aliento que siempre me ha dado.

A mi pequeño Francisco por cederme horas y horas de estar con mamá y permitirme terminar la tesis, gracias por tus lindas sonrisas que me han dado las energías para seguir adelante con este proyecto personal.

Y cómo no agradecer a mi director de tesis, Àngel, has sido un verdadero ángel en mi camino, muchas gracias por todo el apoyo brindado, por compartir tus conocimientos conmigo, por la confianza y las palabras justas en los momentos precisos, y por sobre todo muchas gracias por tu amistad.

A mis amigos que me han acompañado durente este largo camino, el cual ha estado lleno de alegrías y tristezas.

Muchas pero muchas gracias a todos.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

El propósito de esta investigación es evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo. Lo anterior cobra importancia si consideramos que últimamente la probabilidad se ha incorporado fuertemente a lo largo del currículo escolar (NCTM, 1989; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MEC, 2007; MINEDUC, 2012), lo que representa un verdadero desafío para los profesores que actualmente se encuentran enseñando en las aulas. Sobre todo para los profesores de educación primaria, los cuales en su mayoría no han recibido preparación en relación a la probabilidad y su enseñanza durante su formación inicial para profesor.

Las investigaciones en relación a este tema son aún escasas, sobre todo en países como Chile, y no se dispone de instrumentos que permitan evaluar, en toda su amplitud, los distintos componentes del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. Es por esta razón que para alcanzar nuestro propósito hemos decidido construir un instrumento de evaluación que permita indagar en tales conocimientos, de modo tal de contar con información que pueda ser utilizada para el desarrollo de acciones de mejoramiento.

Para llevar a cabo la investigación se asume el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013) el cual se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), cuyas herramientas nos han permitido indagar en el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo.

Es bajo esta mirada que llevamos acabo el proceso de construcción de nuestro instrumento, el Cuestionario CDM-Probabilidad. Para ello, realizamos un estudio histórico-epistemológico sobre el objeto matemático probabilidad y sus significados. Dicho estudio se complementó con el análisis de investigaciones previas en relación al

aprendizaje de la probabilidad y la formación del profesorado para enseñar probabilidad. Además, se analizó el tratamiento otorgado a la probabilidad en las orientaciones curriculares nacionales e internacionales, así como en los libros de texto de educación primaria chilenos. Este análisis nos permitió establecer el significado de referencia para nuestra investigación, en base al cual hemos construido y validado el Cuestionario CDM-Probabilidad.

Este cuestionario fue aplicado a una muestra de 93 profesores chilenos de educación primaria en activo. Los resultados obtenidos muestran un conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad muy insuficiente en todos sus componentes (conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado de contenido, conocimiento especializado y sus subcategorías), pues los participantes no logran superar el 23% de respuestas correctas en ninguno de los distintos aspectos evaluados. Además, en las distintas respuestas obtenidas se observan variados sesgos y heurísticas asociados a una inadecuada comprensión de la probabilidad. Así, en base a los resultados obtenidos, podemos afirmar que estos profesores no cuentan con un nivel de conocimientos adecuados que les permita desempeñar de manera exitosa la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.

A partir de los datos obtenidos, se concluye que urge realizar una intervención que permita fortalecer y desarrollar los distintos componentes del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo, además de una mejora sustancial del tratamiento de la probabilidad en los libros de texto de educación primaria.

RESUM

El propòsit d'aquesta investigació és avaluar el coneixement didàctic-matemàtic per a l'ensenyament de la probabilitat que tenen els mestres d'educació primària en actiu. Aquesta finalitat és rellevant si considerem que la presència de la probabilitat en el currículum escolar ha anat augmentant d'una manera progressiva durant les darreres dècades (NCTM, 1989; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MEC, 2007; MINEDUC, 2012), la qual cosa representa un veritable desafiament pel professorat que actualment porta a terme la seva pràctica docent a les aules. Sobretot per als mestres d'educació primària, els quals en la seva majoria no han rebut preparació en relació a la probabilitat i el seu ensenyament durant la formació inicial.

Les recerques en relació a aquest tema són encara escasses, sobretot en països com Xile, i no es disposa d'instruments que permetin avaluar, en tota la seva amplitud, els diferents components del coneixement didàctic-matemàtic per ensenyar probabilitat. És per aquesta raó que per aconseguir el nostre propòsit hem decidit construir un instrument d'avaluació que permeti indagar en tals coneixements, de tal manera que es pugui disposar d'informació per poder dur a terme accions de millora.

Per dur a terme la investigació s'assumeix el Model del Coneixement Didàctic-Matemàtic (Godino, 2009; Godino i Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font i Godino, 2013) el qual es fonamenta en l'Enfocament Ontosemiòtic de la Cognició i Instrucció Matemàtica (Godino, 2002; Godino, Batanero i Font, 2007), les eines del qual ens han permès indagar en el coneixement didàctic-matemàtic per a l'ensenyament de la probabilitat que tenen els mestres d'educació primària en actiu.

És des d'aquesta perspectiva que s'ha portat a terme el procés de construcció del nostre instrument, el Qüestionari CDM-Probabilitat. Per a construir-lo hem realitzat un estudi històric-epistemològic sobre l'objecte matemàtic probabilitat i els seus significats. Aquest estudi s'ha complementat amb l'anàlisi de recerques prèvies en relació a l'aprenentatge de la probabilitat i la formació del professorat per ensenyar probabilitat. A més, s'ha analitzat el tractament atorgat a la probabilitat en les orientacions

curriculars nacionals i internacionals, així com en els llibres de text d'educació primària xilens. Aquesta anàlisi ens ha permès establir el significat de referència per a la nostra recerca, a partir de la qual hem construït i validat el Qüestionari CDM-Probabilitat.

Aquest qüestionari s'ha aplicat a una mostra de 93 mestres xilens d'educació primària en actiu. Els resultats obtinguts mostren un coneixement didàctic-matemàtic per ensenyar probabilitat molt insuficient en tots els seus components (coneixement comú del contingut, coneixement ampliat de contingut, coneixement especialitzat i les seves subcategories), doncs els participants no aconsegueixen superar el 23% de respostes correctes en cap dels diferents aspectes avaluats. A més, en les diferents respostes obtingudes s'observen diversos biaixos i heurístiques associats a una inadequada comprensió de la probabilitat. Així, sobre la base dels resultats obtinguts, podem afirmar que aquests professors no compten amb un nivell de coneixements adequats que els permeti exercir de manera satisfactòria l'ensenyament de la probabilitat a l'educació primària.

A partir de les dades obtingudes, es conclou que urgeix realitzar una intervenció que permeti enfortir i desenvolupar els diferents components del coneixement didàctic-matemàtic per a l'ensenyament de la probabilitat dels mestres d'educació primària en actiu, a més d'una millora substancial del tractament de la probabilitat en els llibres de text d'educació primària.

SUMMARY

The purpose of this research is to assess the depth of teacher's didactic-mathematical knowledge for teaching Probability in elementary schools. It has lately gained relevance considering how this subject has been incorporated throughout the Chilean school curriculum (NCTM, 1989; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MEC, 2007; MINEDUC, 2012), which represents an undeniable challenge for educators who are currently teaching in the classrooms, especially for whom are working in elementary schools; the vast majority did not get any significant training regarding how to instruct Probability during their initial teaching education.

Research concerning to this subject are still lacking, especially in countries like Chile where there are not available measure tools for performing a proper assessment of the different components of the didactic-mathematical knowledge. Therefore, in order to reach our goal we decided to create an instrument of assessment which allows us to delve into this topic in greater depth to obtain useful information for designing action plans.

The research has been conducted by adopting the Didactic-Mathematical Knowledge Model (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013), which is based on the Onto-Semiotic Approach (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) to knowledge and mathematics education and provides a coherent set of tools to investigate about the didactic-mathematical knowledge of current elementary school's teachers for teaching Probability.

Under this perspective, a measure instrument called 'Questionnaire CDM-Probability' was designed. For the purpose of this thesis, an historical epistemological research regarding the mathematical object named 'Probability'-and the different meanings this concept may have- was performed. The review of previous research related to the comprehension of Probability, and the pedagogical training and development for teaching Probability complement this line of investigation. In addition to this, not only the treatment given to Probability from national and foreign school curriculum was

analysed, but also the contents of textbooks used in Chilean elementary schools. This analysis contributes to find a proper definition of Probability for our research and consequently, to develop and validate the ‘Questionnaire CDM-Probability’.

The ‘Questionnaire CDM-Probability’ was distributed to a sample of 93 Chilean elementary school’s teachers. The feedback received were quite clear regarding the teacher’s lack of didactic-mathematical knowledge in all of their components (common content knowledge, specialized content knowledge and extended content knowledge and their subcategories), because they didn’t reach more than a 23% of correct answers in any of the mentioned categories. Furthermore, several heuristic and biased answers have demonstrated an insufficient understanding of Probability concepts. Then, the results of the measurement performed have proven that Chilean elementary school’s teachers didn’t acquire a proper knowledge in order to teach elementary students on a successful way

In accordance with the data obtained from the Questionnaire CDM-Probability’, the main conclusions are to overcome the improvement of the didactic-mathematical knowledge of current elementary school’s teachers for teaching this topic, and to achieve a significant enhancement to the contents in textbooks used in Chilean elementary schools.

INTRODUCCIÓN GENERAL

El dominio del profesor de matemáticas en relación a los conocimientos que debe enseñar es un elemento clave, con efectos directos en el aprendizaje de sus alumnos, pues un profesor no puede enseñar lo que no sabe bien. En consecuencia, para la mejora de los aprendizajes de los alumnos es indispensable elevar el nivel de preparación de los profesores, sobre todo en aquellos temas recientemente incorporados en el currículo y para los cuales no recibieron preparación durante su formación inicial, como es el caso de la probabilidad.

Muchos profesores de Educación Primaria tienen poca o ninguna preparación para enseñar probabilidad, lo que ha provocado que en algunos casos ésta se omita (Serradó, Azcárate, Cardeñoso, 2005). Asimismo, en los casos en que se aborda, se reduce a la enseñanza de fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas (Batanero, Ortiz, Serrano, 2007). Además, ni los documentos curriculares ni los libros de texto ofrecen el apoyo suficiente al profesor, presentando en su mayoría una visión incompleta de la probabilidad (Serradó, Azcárate, Cardeñoso, 2006). Estos factores limitan el desarrollo de una experiencia estocástica adecuada en los alumnos, fundamentada en una metodología activa y exploratoria de fenómenos aleatorios que permita desarrollar un razonamiento probabilístico desde la infancia. Se requieren, pues, investigaciones que permitan caracterizar y evidenciar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de primaria en relación a la probabilidad, dado que las actividades que realizan en el aula dependen de sus conocimientos (Ball, Lubienski, Mewborn, 2001). Bajo esta mirada, la evaluación de las fortalezas y debilidades del profesorado es el punto de partida para diseñar planes de formación específicos que les permitan comprender la probabilidad y los aspectos relacionados con su enseñanza (Sthol, 2005).

Desde esta perspectiva, hemos llevado a cabo esta investigación cuyo propósito se centra en determinar ¿qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo? Para ello se asume el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013) que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (Godino, 2002, Godino, Batanero, Font, 2007). Así, desde este referente teórico de la didáctica de la matemática, construimos un instrumento de evaluación que nos permitió evaluar aspectos parciales del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria, es decir, el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado junto a sus subcategorías: conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento del contenido en relación con el currículo.

La memoria de esta tesis la hemos organizado en seis capítulos que a continuación describimos brevemente.
En el capítulo 1 se presenta el área problemática y sus antecedentes, para lo cual se realiza un análisis de los elementos clave que dan sustento a nuestra investigación. Hemos considerado el desarrollo histórico-epistemológico del objeto matemático probabilidad y sus significados. Además se incluye el análisis de investigaciones previas en relación al aprendizaje de la probabilidad en niños y adolescentes, y a la formación del profesorado para enseñar probabilidad. Finalizamos el capítulo con un resumen de los principales modelos del conocimiento del profesor para enseñar matemáticas, lo que nos ha facilitado la elección de nuestro marco teórico.

En el capítulo 2 presentamos el problema de investigación, junto con la pregunta de investigación y los objetivos que derivan de esta pregunta. También se incluye una descripción del marco teórico de la didáctica de la matemática que se ha utilizado, además de una descripción de la metodología empleada en nuestro estudio incluyendo las distintas fases que conforman la investigación.

En el capítulo 3 se aborda el análisis del tratamiento otorgado a la probabilidad en las orientaciones curriculares internacionales (NCTM, 1989; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MEC, 2007) y nacionales (MINEDUC, 2012). Además, se realiza un análisis del tratamiento otorgado al estudio de la probabilidad en los libros de texto de educación primaria chilenos.

En el capítulo 4 se describe el proceso de diseño, construcción y validación del instrumento de evaluación utilizado en nuestra investigación. Se comienza con la descripción del objetivo y el tipo de instrumento a utilizar. Luego se da a conocer el proceso de construcción de la versión inicial junto a su proceso de validación, para lo que utilizamos el juicio de expertos y una aplicación piloto del instrumento a una muestra reducida de profesores. Se finaliza el capítulo presentando la versión final del Cuestionario CDM-Probabilidad junto al análisis *a priori* de los distintos ítems que lo conforman.

En el capítulo 5 se describen los resultados obtenidos del proceso de aplicación del Cuestionario CDM-Probabilidad a una muestra de 93 profesores chilenos de educación primaria en activo. Además se presenta el análisis de las respuestas para cada uno de los distintos tipos de conocimientos evaluados (conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado, junto a sus subcategorías) de los profesores a las distintas situaciones problemáticas planteadas.

En el capítulo 6 se presenta una discusión de los resultados así como las principales conclusiones obtenidas en relación a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados, y se concluye con los principales aportes y limitaciones de nuestra investigación y posibles líneas de investigación futuras.

Finalizamos esta memoria con las referencias bibliográficas y los anexos que conforman esta investigación. El primero corresponde a la carta y pautra de evaluación entregada a los expertos para que emitieran su juicio. El segundo a la versión inicial del instrumento, el tercero al consentimiento informado que firmaron los 93 profesores de educación primaria en activo que participaron de nuestra investigación. El cuarto corresponde a la versión final del cuestionario CDM-Probabilidad, y por último el quinto anexo presenta la rúbrica utilizada para llevar a cabo la corrección de las respuestas otorgadas por los profesores al Cuestionario CDM-Probabilidad.

CAPÍTULO 1
ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

1.1 Presentación

El propósito de este capítulo es analizar aquellos elementos que consideramos esenciales para fundamentar nuestra problemática de investigación en relación al conocimiento didáctico-matemático de los profesores de educación primaria sobre probabilidad.

El surgimiento de la probabilidad no ha estado exento de grandes debates principalmente filosóficos en los cuales se encuentran involucrados distintos significados, lo que ha influido directamente en su enseñanza. Es por esta razón que por medio de este capítulo buscamos evidenciar, a través de la revisión de diversas investigaciones realizadas sobre los diferentes aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje y sobre la formación de profesores en el campo de la probabilidad, el tipo de problemas del que es objeto la probabilidad, desde una perspectiva educativa.

Para alcanzar nuestro propósito hemos dividido este capítulo en cinco apartados: (1) Desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad, en el cual se da a conocer la evolución de la probabilidad, considerando para ello los trabajos de Hacking (1995), Batanero (2005), Batanero, Henry y Parzysz, (2005), Batanero y Díaz (2007), y Stewart (2009) entre otros, a partir de los cuales es posible observar la complejidad epistemológica de la cual ha sido objeto la probabilidad desde sus inicios; (2) Significados de la probabilidad, en este apartado se describen los principales significados de la probabilidad que interesa tener presentes para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria, lo que nos ayudará a comprender los errores y dificultades a las cuales se ven enfrentados los alumnos al momento de aprender probabilidad y que son propias del concepto. Para esto nos hemos basado principalmente, en las investigaciones de Batanero (2005), y Batanero, Henry y Parzysz, (2005); (3) Investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y educación primaria, en este apartado presentamos, brevemente, las principales investigaciones relacionadas con los posibles errores y dificultades que los alumnos de educación infantil y educación primaria pueden tener con la probabilidad y los conceptos vinculados a su estudio. Es dado lo anterior, que nos hemos fundamentado, principalmente, en los estudios de Piaget e Inhelder (1951), Fischbein (1975), Kahneman, Slovic y Tversky (1982), Konold (1991) y Cañizares (1997); (4) Investigaciones sobre formación del profesorado para enseñar probabilidad, en este apartado presentamos las principales investigaciones relacionadas con la formación del profesorado de educación primaria para enseñar probabilidad. Para ello, hemos considerado tres aspectos fundamentales: el conocimiento probabilístico de los profesores, el conocimiento de la probabilidad en relación a los estudiantes y el conocimiento de la probabilidad en relación a su enseñanza. Nos hemos centrado principalmente en las investigaciones desarrolladas por el equipo de didáctica de la probabilidad de la Universidad de Granada liderado por Carmen Batanero; y (5) modelos del conocimiento del profesor, en este apartado se describen los principales modelos sobre el conocimiento del profesor para enseñar matemáticas (Shulman, 1986, 1987; Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Godino, 2009; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2012; Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2013) y que consideramos pueden ser de utilidad para ayudar a dilucidar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que debe poseer un profesor de educación primaria.

1.2 Desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad

Durante las últimas décadas se ha dado importancia al estudio de la probabilidad, de forma gradual y progresiva a lo largo del currículo escolar. Desde esta perspectiva se hace necesario dar una mirada al desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad, pues este no ha estado exento de desafíos que, en su búsqueda por dar respuesta a situaciones problemáticas, han contribuido al avance de la probabilidad (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Desarrollo del cual todo profesor que va a enseñar probabilidad debe ser consciente, pues de lo contrario difícilmente podrá comprender los obstáculos y dificultades a los que se verán enfrentados sus estudiantes, quienes en su proceso de construcción y aprendizaje de los conceptos vinculados al estudio de la probabilidad "se encontraran con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades" (Batanero, 2007, p. 28).

En lo que sigue analizamos brevemente algunos de los principales hitos presentes en el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad, para ello hemos utilizado como referente principal la investigación realizada por Hacking (1995) en relación al surgimiento de la probabilidad, complementándolo con los estudios realizados por Batanero *et al*. (2005), Batanero (2007) y Stewart (2009) entre otros.

Comúnmente se cree que la probabilidad surge de forma repentina alrededor del 1660, atribuyéndose los primeros trabajos en torno a este nuevo concepto a Pascal, quien se habría interesado en este tema a partir de problemas vinculados con los juegos de azar, por lo que el origen de la probabilidad se encontraría estrechamente ligado a ellos.

Si bien es importante conocer cómo se ha desarrollado la probabilidad a partir de los tiempos de Pascal, para este estudio también es relevante, conocer cómo se originó, cuáles fueron las precondiciones, que si bien consistían en algo que no es probabilidad, a través de mutaciones llevaron al surgimiento de la probabilidad como hoy la conocemos.

Para comenzar con este estudio histórico-epistemológico nos remontaremos a la prehistoria de la probabilidad.

1.2.1 Prehistoria de la probabilidad

Como se ha mencionado, el origen de la probabilidad se encuentra estrechamente ligado a los juegos de azar, los cuales son de muy antigua data. Descubrimientos arqueológicos en Sumeria y Asiría han dado claras evidencias de que los dispositivos de azar eran utilizados por estas culturas. Quienes habrían practicado juegos de azar utilizando el hueso del talón de animales corredores, conocido como astrágalo o talus, el cual al ser lanzado sobre una superficie plana sólo puede caer en cuatro posiciones distintas. Incluso se han encontrado pinturas en tumbas egipcias con dibujos de estos antecesores de los dados, así como tableros que permitían llevar el registro de los resultados de los lanzamientos. También se han encontrado en excavaciones arqueológicas, de más de 40.000 años, astrágalos que habrían sido utilizados para la práctica de juegos de azar. Por otro lado, dada la información reunida, se sabe que numerosas civilizaciones de la antigüedad habrían utilizado dispositivos aleatorizadores en oráculos y ceremonias religiosas.

Aún cuando la relación del término probabilidad con ideas numéricas de aleatoriedad aparece por primera vez de forma impresa en 1662, es importante destacar que hay registros de que la palabra latina *probabilis* ya era utilizada desde la antigüedad, entendiéndola como “algo merecedor de aprobación”.

Se han encontrado, además, ciertas oraciones de Aristóteles, en las que se utilizaba esta palabra, en las que se señala que “lo probable es lo que usualmente ocurre”, es algo digno de aprobación ya que se encuentra sustentado en la evidencia.

Si bien durante la Edad Media los juegos con dados fueron prohibidos por los obispos y reyes, ya que eran utilizados en ceremonias religiosas de carácter pagano, esto no fue un impedimento para que durante esta época surgieran los primeros estudios científicos sobre fenómenos aleatorios, sobre todo aquellos referidos al lanzamiento de dados. Destacando el trabajo de Fournival quien en el siglo XIII escribe el poema *De Vetula* en el cual afirma que al lanzar tres dados hay 216 posibles resultados.

A la vez destacan los conceptos vinculados a la probabilidad que aparecen en los trabajos de Santo Tomas de Aquino, en los cuales se entendía a la probabilidad no como algo relacionado a la evidencia o razón, sino más bien a la opinión, por lo que se le vinculaba con la aprobación o aceptabilidad de algo por parte de personas inteligentes, en contraste con el conocimiento que solamente podía obtenerse por demostración. Lo anterior, llevo a que se diera una doctrina casuística del probabilismo, la cual sería demolida más tarde por Pascal por medio de la teoría moderna de la probabilidad.

A diferencia del concepto probabilidad sustentado durante la Edad Media, a finales del Renacimiento se da un vuelco vinculándola a la evidencia, la cual confiere una determinada probabilidad a las proposiciones, haciéndola dignas de aprobación, en dependencia directa con la frecuencia en que dicha evidencia lograba predicciones correctas.

Por su parte, a finales de este periodo, en 1494, destaca el hecho de que Luca Pacioli expone algunos problemas vinculados al azar que habrían sido encontrados en un manuscrito italiano del 1380, se cree que tales problemas podrían ser de origen árabe. Por ejemplo:

> Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego y cada gol vale 10 puntos. Las apuestas son de 10 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 20. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.

Es importante señalar que estos tipos de problemas vinculados a los juegos de azar no fueron resueltos sino hasta el 1660 aproximadamente.

Como vemos, aún cuando los dispositivos aleatorizadores utilizados en los juegos de azar existían desde hace varios miles de años y la palabra probabilidad ya era ampliamente utilizada, la probabilidad no surgió como tal sino hasta el año 1660. Quizás esto se debe a la ausencia de una noción de suceso aleatorio, o a la existencia de barreras religiosas, ya que tales dispositivos eran utilizados en ceremonias religiosas para que las divinidades dieran a conocer su voluntad, por lo que cualquier intento por conocer los resultados de los lanzamientos, de antemano, podría ser interpretado como un deseo de adivinar la voluntad de los dioses. O bien, al hecho de que la matemática que existía no era suficiente, en ese momento, para originar un cálculo de probabilidades.

Pese a lo anterior se han encontrado algunos trabajos relacionados con un cálculo de probabilidad incipiente, dentro de los cuales cabe destacar a Cardano quien en 1526 escribe el primer argumento teórico para calcular probabilidades en su libro *De Ludo Aleae*, exponiendo un razonamiento basado en la equiprobabilidad de las distintas caras de un dado para el cálculo de probabilidades de sucesos. Sin embargo, este libro no fue publicado sino hasta el año 1663.

Además, destacan algunos escritos de Galileo para quien la probabilidad tiene que ver con la aprobación, la cual se encuentra única y exclusivamente vinculada a la evidencia. En sus trabajos queda de manifiesto que el cálculo de la probabilidad, a partir de la equiprobabilidad de las caras de un dado, ya era conocido por los matemáticos del siglo XVI.

Aún cuando los escritos de Pacioli, Cardano y Galileo exponen problemas relacionados con los juegos de azar, estos sólo buscaban dar una solución a problemas concretos y no formular una teoría de la probabilidad. Sin embargo, a partir de sus trabajos aparecen ciertos elementos que más tarde pasarían a formar parte de la teoría clásica de probabilidades.
Es importante destacar que tanto en los trabajos de Pacioli, Cardano y Galileo es posible observar una probabilidad inclinada al estudio de frecuencias de los hechos presentados.

1.2.2 Surgimiento del concepto probabilidad

Como ya se ha mencionado, se cree que la probabilidad comenzó en 1654 como consecuencia de la correspondencia entre Pascal y Fermat en la cual se buscaba dar respuesta a los problemas sobre juegos de azar del caballero de Meré, problemas que hasta la fecha no habían podido ser resueltos de manera satisfactoria. Aún cuando la solución enviada por Pascal a Fermat no se conoce, este hecho es considerado como el nacimiento de la probabilidad de manera formal, ya que es en este momento cuando surgen criterios analíticos sistemáticos que permitieron otorgar validez universal a la probabilidad.

Sin embargo, como ya sabemos, el uso de dispositivos de azar es de muy antigua data e incluso existen algunos trabajos anteriores al de Pascal en los que ya se empleaba el término probabilidad vinculado a los juegos de azar, en los cuales se exponen algunos cálculos aislados de probabilidades como los de Pacioli, Cardano y Galileo. Pese a esto es alrededor de 1660 que muchos contemporáneos a Pascal dieron con las ideas básicas de la probabilidad, comenzando así su nacimiento y florecimiento, tal es el caso de Leibniz quien en forma independiente y sin conocer los trabajos de Pascal, hasta ese momento, trató de aplicar las probabilidades métricas a la solución de problemas legales. Bajo el enfoque de Leibniz la probabilidad era entendida de una manera epistemológica, puesto que se interesaba por los grados de prueba vinculados al derecho, lo cual lo llevo a afirmar que la probabilidad es un grado de posibilidad.

En 1657 Huygens escribe y publica el primer libro sobre probabilidades *"Ratiocinis in ludo alae"* en base a las ideas de Pascal y Fermat añadiendo algunos resultados obtenidos por sí mismo en los cuales utiliza la esperanza matemática como concepto central, por lo que es considerado el padre de la teoría de la probabilidad. En su libro se exponen principalmente problemas de carácter aleatorio, lo cual deja de manifiesto la inclinación del autor por un enfoque frecuentista de la probabilidad.

En esta misma época, Pascal aplica el razonamiento probabilístico a problemas que ya no son exclusivamente del ámbito de los juegos de azar, lo que le llevará más tarde a inventar la teoría de decisiones. Como podemos ver, el concepto de probabilidad que surgió en la época de Pascal tiene que ver tanto con los grados de creencias como con las frecuencias estables. Esto se puede observar claramente en los problemas que el caballero de Meré presentó a Pascal, tal es el caso del problema de la división de las apuestas:

> Dos jugadores, A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda equilibrada. El jugador que primero llega a 6 puntos gana la apuesta. El juego se

> interrumpe en un momento en que A tiene 5 puntos y B tiene 3 puntos. ¿Cómo repartir de manera justa el premio?

Como es posible observar este problema es completamente de carácter aleatorio. Por otro lado, si observamos el problema sobre la existencia de Dios, al cual Pascal busca otorgar una respuesta desde las probabilidades, preguntándose: ¿hacia qué lado debiéramos inclinarnos?

> Ante la cual los dos actos posibles no son "Creer en Dios" o "No creer". No se puede decidir creer en Dios. Se puede decidir actuar de manera tal que, muy probablemente, se llegará a creer en Dios. Pascal llama a eso la apuesta a que Dios existe. Apostar a que él no existe es dejar de preocuparse por tales cosas.
> Aquí el problema de la decisión está constituido por dos posibles estados del mundo y dos posibles cursos de acción. Si Dios no existe, ambos cursos de acción están a la par. Usted vivirá su vida y de ninguno de los dos modos sufrirá malos efectos debido a alguna intervención sobrenatural. Pero si Dios existe, entonces, apostar a que no le traerá la condena. Apostar que Dios existe puede llevarle la salvación. La salvación es mejor que la condena. Por lo tanto, la apuesta "Dios existe" domina la apuesta "No existe". (Hacking, 1995, p. 88)

Se puede observar que éste a diferencia del problema de la división de las apuestas no se relaciona para nada con el azar, ya que la existencia de Dios o no, no es una cuestión de carácter aleatorio pues carece de un trasfondo estadístico, sino que más bien se relaciona con el grado de creencias razonables a las cuales se puede aplicar un razonamiento de carácter probabilístico.

De este modo, queda de manifiesto el carácter frecuentista y aquel vinculado a los grados de creencias de la probabilidad presente desde sus orígenes. Dualidad que es posible observar a partir de los trabajos de Huygens y Leibniz, quienes escribieron sobre problemas aleatorios y los grados de prueba vinculados al derecho, respectivamente. Como vemos, por un lado se estaba desarrollando una probabilidad de carácter aleatorio y por otro una probabilidad de carácter epistemológico, incluso se hablaba de tipos de probabilidades, distinguiéndose entre probabilidades inductivas y estadísticas, llegándose a proponer utilizar las palabras *chance* y *probabilité* para hacer la distinción entre estos dos tipos de probabilidades. Por otro lado, no hay que olvidar que en sus inicios la probabilidad era vinculada al concepto de posibilidad, siendo en 1662 cuando se asigna la palabra probabilidad para el par de conceptos epistémicos y aleatorios asociados a la probabilidad.

1.2.3 Una Teoría de la Probabilidad

A mediados del siglo XVII es posible visualizar, producto de las contribuciones de Leibniz y Bernoulli entre otros, un desarrollo notable de la probabilidad, el cual culminará con el nacimiento de la teoría de la probabilidad. Es así como, en la Lógica de Port Royal de 1662 se encuentra por primera vez el uso de la probabilidad en el sentido que hoy conocemos, es decir, capaz de ser medida numéricamente. Este hecho es importante, ya que hace que la probabilidad epistemológica surja como un concepto significativo para la lógica. En uno de los últimos capítulos de la Lógica de Port Royal de 1662, el autor aplica medidas numéricas al cálculo de probabilidades, en un problema que consiste en:

> Ganar un juego donde uno de diez jugadores arriesga una moneda por una oportunidad pareja de obtener diez de ganancia. Perder es nueve veces más probable. Hay nueve grados de probabilidad de perder una moneda por sólo uno de ganar nueve. (Hacking, 1995, p. 100).

A partir de este problema es posible observar el carácter frecuentista que el autor otorga a la probabilidad. A su vez en el capítulo precedente, de la Lógica de Port Royal, es posible observar que aplica consideraciones cuantitativas a la medición de la probabilidad, pero no todo es cuantitativo ya que en el siguiente problema sobre los contratos notariados queda de manifiesto la dimensión cualitativa de la probabilidad, en éste se expone:

> Considérese la pregunta sobre si un contrato del que dos notarios dan fe ha sido postdatado. Como es cierto que 999 de 1000 contratos debidamente han sido fechados correctamente, entonces, "si no conocemos ninguna otra particularidad sobre el contrato", deberíamos creer que la fecha es honesta. "Es

> incomparablemente más probable que el contrato ante mí sea uno de los 999 y no el único de los 1000 que esta postdatado". No obstante, si nos enteramos que los notarios son inescrupulosos, el documento se convierte en menos creíble. Si nos enteramos que al momento de la fecha del contrato la parte que debía prestar 20.000 libras sólo tenía 100 libras, entonces "creería que hay algo falso en el contrato". (Hacking, 1995, p. 101)

El problema deja claramente en evidencia como un dato cualitativo influye sobre la probabilidad cuantitativa asignada al problema, en otras palabras como la probabilidad de un suceso se ve condicionada a partir de una característica cualitativa. De esta manera es como la dimensión bayesiana aparece como una característica cualitativa de la probabilidad, pero que de alguna manera influiría sobre lo cuantitativo, problema que sería resuelto un siglo más tarde por Thomas Bayes.

Algunos años más tarde, en 1665, Leibniz publica un artículo en el que propone medir estos grados de prueba con una escala de 0 a 1, lo cual quedaba sujeto a un cálculo que él denominaba probabilidad. Cuando la condición era imposible le asignaba la probabilidad 0, cuando la condición es completamente posible asigna la probabilidad 1, y si la condición es incierta asigna una probabilidad que corresponde a una fracción, las cuales denotan los grados de la prueba del derecho o su grado de probabilidad, es decir, como una razón entre los casos favorables sobre el total de casos igualmente posibles, definición que sería formalizada años más tarde por Laplace.

Sin bien Leibniz no contribuyó a la matemática de las probabilidades, su trabajo y conceptualización de la probabilidad numérica como una noción epistémica, donde los grados de probabilidad son entendidos como grados de certeza, tuvo un fuerte impacto en el desarrollo de la probabilidad, pues para Leibniz "la probabilidad es en proporción a lo que sabemos", de este modo bajo dicha conceptualización se da inicio al surgimiento de la probabilidad de A dado B, o probabilidad condicional como hoy le conocemos.

Es en 1705 que Bernoulli escribe el libro "*Ars Conjectandi*", que fue publicado de forma póstuma en 1713, con éste se completa el surgimiento de la probabilidad, pues en él se realiza un análisis de la probabilidad, el cual cristaliza en la demostración del primer teorema del límite de las probabilidades o ley de los grandes números, en la cual

> "decía exactamente en qué sentido las razones de largas observaciones en ensayos corresponden a probabilidades. Básicamente demuestra que la probabilidad de que la razón no se aproxime mucho a la probabilidad correcta tiende a cero cuando el número de ensayos aumenta sin limite*"*. (Stewart, 2009, p. 264).

El libro de Bernoulli consta de cuatro partes, la primera recoge y mejora los principales trabajos de Huygens sobre los juegos de azar incorporando algunos comentarios, además de la definición de la función cuantía para un esquema dicotómico con "r" repeticiones, es decir, la distribución binomial. En la segunda parte, exponen y explican conceptos de combinatoria aplicados al cálculo de probabilidades. En la tercera parte, aplica la teoría de las combinaciones a la resolución de ejercicios sobre juegos de azar.
Pese a la importancia de las tres primeras partes de este libro, es la cuarta parte en la que se encuentra la más importante de las contribuciones de Bernoulli a la teoría de probabilidades, pues en ella se reconoce por primera vez una concepción subjetiva de la probabilidad y se demuestra el primer teorema del límite.

Al igual que Leibniz, Bernoulli plantea que "la probabilidad es el grado de certeza y difiere de la certeza absoluta como la parte difiere del todo" pero la novedad del planteamiento de Bernoulli radica en el análisis de la implicancia de la certeza en las probabilidades, pues considera que la certeza puede ser objetiva o subjetiva. Pero la principal consecuencia de su trabajo es que otorga importancia a la distinción entre los conceptos aleatorios y epistémico de la probabilidad, es decir sitúa a la dualidad de la probabilidad en un plano de gran interés para su estudio, ya que si bien es cierto que estaba interesado en estimar probabilidades aleatorias desconocidas, también lo estaba en saber qué tan seguro se podía estar de cualquier sentencia dada acerca de una probabilidad aleatoria, lo que lleva al estudio de la probabilidad epistémica y su influencia en la probabilidad aleatoria, estudio en el cual Bernoulli no tuvo éxito.

Es en 1763 que Bayes afianzará esta concepción subjetiva de la probabilidad en su libro titulado "*Essay Towards Solving a Problem in the doctrine of Chances*" en el cual propone entender la probabilidad $P(A)$ de ocurrencia de un suceso A como la razón entre el valor de la esperanza depositada en la ocurrencia de un suceso y la ganancia esperada. Se puede decir que a partir de las ideas planteadas y desarrolladas en su libro, se da inicio al desarrollo de la inferencia estadística. Pero, la gran contribución de Bayes al desarrollo de la teoría de probabilidades consiste en que hasta ese momento la probabilidad era entendida como una medida que permitía determinar la frecuencia de ocurrencia de un determinado suceso aleatorio, sin embargo, para él la probabilidad es concebida como un suceso aleatorio en términos de apuesta previa a su ocurrencia, es decir, previa evaluación subjetiva de lo que se arriesga en función de lo que se espera ganar. Donde lo que se busca valorar, por sobre la frecuencia de ocurrencia de un suceso, es el grado de certeza en base a las condiciones dadas. Es así como, surge la probabilidad condicional, la cual permite formalizar la idea de que la probabilidad depende de la información.

De ahí que el enfoque epistemológico o epistémico de la probabilidad sea también conocido como enfoque bayesiano debido al evidente carácter subjetivo del concepto probabilidad planteado por Bayes.

Décadas más tarde, será Laplace quien por primera vez intente definir la probabilidad con todo el rigor matemático. Al igual que Bernoulli promueve el concepto subjetivo de probabilidad, cuyo significado se define en los siguientes términos: "Azar (…) no es más que un término propio para designar nuestra ignorancia acerca del modo en que las diferentes partes de un fenómeno se coordinan entre sí y con el resto de la naturaleza. La noción de probabilidad hace referencia a esta ignorancia" (Hacking, 1995, p. 184)

Es así como en su obra "*Teorie analytique des probabilités*" que fue publicada en 1812 se encuentra la definición clásica de probabilidad (formula de Laplace) de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente 'probables'*. Además, proporciona la primera gran sistematización y ordenamiento de todo el conocimiento disponible hasta ese momento en relación a la teoría de probabilidades. Como vemos Laplace utilizó el principio de razón insuficiente, el cual considera las alternativas como equiprobables en ausencia de razón conocida para esperar lo contrario.

Así, los progresos realizados por Laplace en la constitución de la teoría clásica de probabilidad llevaron que a lo largo del siglo XIX sus predecesores buscaran perfeccionar, precisar y ordenar esta teoría, tal es el caso de Gauss, Legendre y Poisson quienes ampliaron los campos de aplicación de la probabilidad vinculándola al estudio de las rentas, seguros, anualidades y tablas de mortalidad entre otras.

Por otro lado, los trabajos de Laplace llevaron al surgimiento de corrientes para la interpretación de la probabilidad, destacando la corriente frecuentista completamente opuesta al enfoque bayesiano de probabilidad. Para la cual la probabilidad es entendida como el límite al cual convergen las frecuencias de ocurrencias observadas de un determinado suceso. Siendo el principal elemento de este enfoque la objetividad del concepto probabilidad, ajeno a la consideración de factores personales y sujeto a demostración práctica por medio de la experimentación. Bajo este enfoque destacan los aportes realizados por Venn el cual introduce la interpretación de probabilidades como frecuencias y von Mises quien desarrolla la teoría frecuentista de la probabilidad a partir de dos axiomas, el primero relacionado con la convergencia de series infinitas y el segundo relacionado con la asignación de azar de los elementos de dicha serie.

Pero aún había un aspecto que resolver y es el hecho de que la teoría clásica de probabilidades no proporciona los elementos necesarios para determinar la probabilidad cuando el conjunto de alternativas no son equiprobables y, por tanto, queda abierta a una aplicación inconsistente. Bajo esta perspectiva Keynes en 1921 y otros autores desarrollaron las teorías lógicas de probabilidad que buscaban responder a tal necesidad, para ellos la probabilidad es vista como una relación lógica entre dos proposiciones, de acuerdo con esta concepción "la probabilidad traduce un grado de creencia racional, es decir, 'la tasa de confianza' que conviene conceder a una proposición a la luz de la información aportada por otra proposición".

Como vemos esta teoría lógica de probabilidad se sitúa desde un enfoque bayesiano de la probabilidad, el cual se ve reafirmado a partir del tratamiento lógico de la probabilidad. En contraposición a la corriente frecuentista de la probabilidad se encuentra la corriente subjetiva de la probabilidad cuyo principal exponente fue De Finetti quien en 1937 defiende fuertemente esta corriente que no se basa en la frecuencia de ocurrencia de los sucesos sino en las creencias que puede tener un sujeto sobre la verdad de una determinada proposición, y que por lo tanto, no está determinada. Esta concepción de probabilidad tiene bastante similitud con la probabilidad lógica dado que ambas buscan representar el grado de creencia sobre un determinado suceso, pero su principal diferencia radica en que para la probabilidad lógica este grado de creencia se supone único, mientras que para la probabilidad subjetivista este grado de creencia es personal y se fundamenta en la experiencia de los sujetos, es decir, diferentes sujetos pueden asignar probabilidades distintas a un mismo suceso, en base a sus experiencias personales.

Finalmente, en 1951 Popper desarrolla la teoría de propensiones, dado que una carencia de la interpretación frecuentista de la probabilidad es que ésta es inaplicable a las probabilidades singulares, especialmente de aquellas de sucesos no repetibles. Es así como, Popper mediante la teoría de las propensiones busca dar respuesta a las probabilidades singulares.

A lo largo de este breve análisis del desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad, ha quedado en evidencia que la probabilidad desde sus inicios ha sido esencialmente dual ya que tiene que ver tanto con los grados de creencias como con las frecuencias estables. Surgiendo inicialmente de manera intuitiva a partir de los juegos de azar hasta ir adquiriendo poco a poco rigurosidad matemática hasta conformar lo que actualmente conocemos como teoría de las probabilidades. Este desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad se puede se puede visualizar mediante la línea de tiempo que se presenta en la figura 1.1

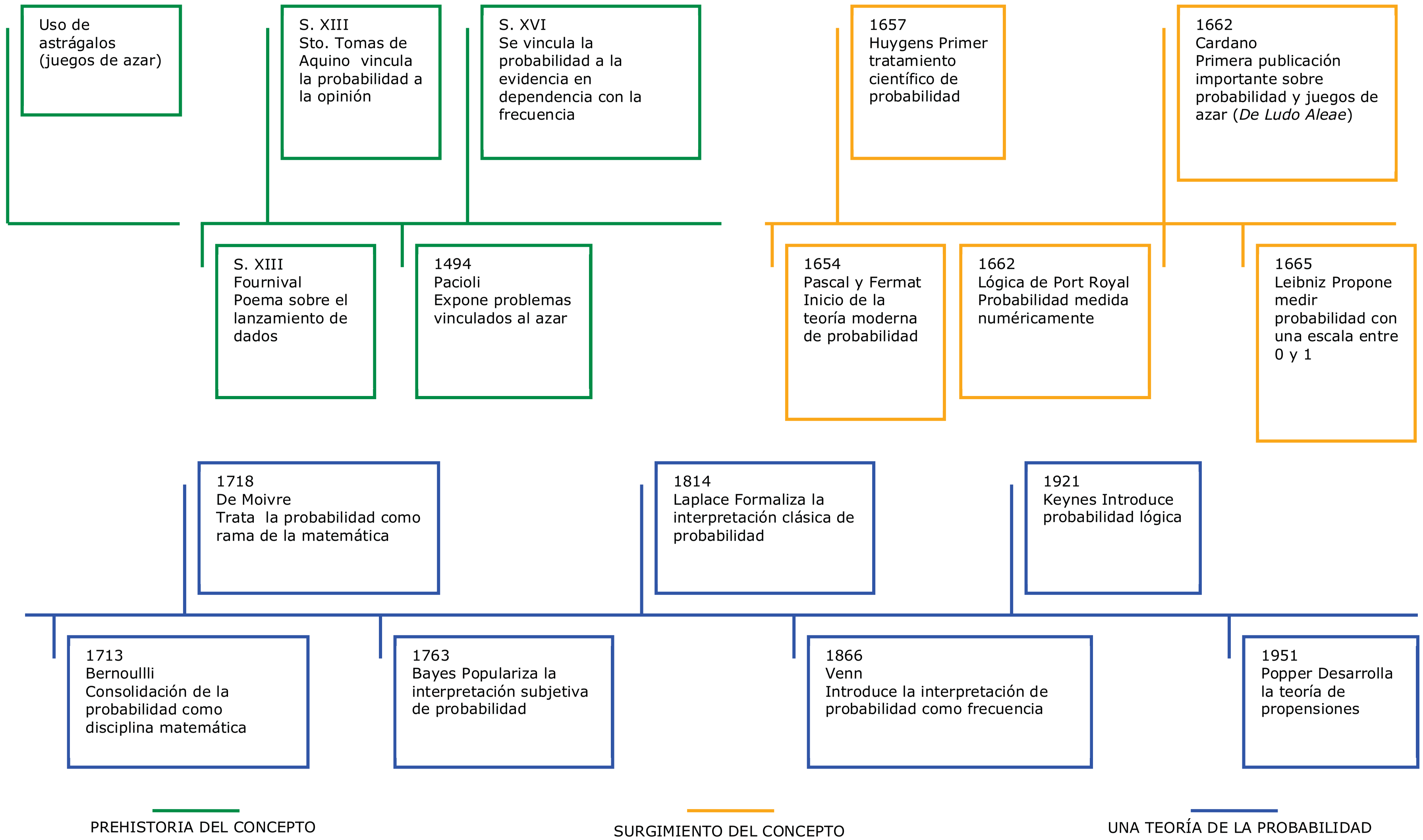


Figura 1.1 Visualización de los distintos hitos presentes en el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad

Si bien en muchos de los episodios a lo largo de la evolución de la probabilidad se ha tratado otorgar una interpretación netamente frecuentista, siempre se ha visto la necesidad de interpretarla también desde lo bayesiano. Esto queda de manifiesto a partir del análisis de las contribuciones posteriores a Pascal por parte de Bernoulli, Bayes, Leibniz, Laplace, De Finetti, von Mises, Keynes y Popper quienes a partir de sus trabajos muestran cómo se fue conformando poco a poco la probabilidad desde su dualidad de significados (Hacking, 1995). Aunque no siempre es fácil distinguir e identificar a ambas interpretaciones, en sus trabajos es posible observar claramente como se fue dando la dualidad de la probabilidad y cómo ésta siempre estuvo presente en el desarrollo del concepto. Dualidad que de acuerdo a lo planteado por Hacking (1995) dio origen a las definiciones posteriores de probabilidad tanto desde el punto de vista subjetivo como objetivo.

Así, a lo largo de las distintas etapas de su desarrollo ha sido posible observar distintos significados vinculados a la interpretación del concepto probabilidad (intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo, propensiones, lógico y matemático-axiomático) que en la actualidad coexisten, esto quizás se deba a que el desarrollo de la probabilidad, en comparación con otras ramas de la matemática como la geometría, el álgebra o el cálculo, es relativamente nuevo (Shaughnessy, 1992).

Lo anterior, nos lleva a pensar que para una adecuada comprensión de la probabilidad debería poder observarse claramente la presencia de algunos de estos significados, que son relevantes para las matemáticas escolares, en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto probabilidad, ya que de lo contrario no se estaría adquiriendo un aprendizaje de la probabilidad en toda su magnitud. Por lo que es necesario que los profesores estén en conocimiento de éstos significados, así como de las distintas problemáticas asociadas a ellos y de las manera de introducirlos de forma gradual desde los primeros años de escolaridad.

En el siguiente apartado realizamos un análisis de los significados más relevantes en el contexto de la matemática escolar como lo son: el significado intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y matemático-axiomático. Para ello, nos hemos basado, principalmente, en el desarrollo histórico-epistemológico antes descrito, además de los trabajos de Batanero (2005), Batanero *et al*. (2005) y Batanero y Díaz (2007) complementándolos con otros estudios.

1.3 Significados de la probabilidad

Dado que nuestra problemática se centra en el conocimiento matemático y didáctico de los profesores de educación primaria sobre probabilidad, es que consideramos necesario analizar los diversos significados históricos de la probabilidad, pues consideramos que el conocimiento y comprensión, por parte de los profesores, de los distintos significados y obstáculos presentes en el desarrollo de la probabilidad puede ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de la probabilidad. Ya que esta diversidad de significados "determinan implícitamente los comportamientos y respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de azar en las que deben poner en práctica sus intuiciones y conocimientos probabilísticos" (Batanero *et al*., 2005, p. 20) y deben ser tenidos en cuenta a la hora de enseñar este tema.

Así, a partir del desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad, descrito en el apartado anterior, y en concordancia con lo planteado por Batanero *et al*. (2005) y Batanero y Díaz (2007) es posible evidenciar diversos significados y/o interpretaciones del concepto probabilidad, de ellos a continuación se describen aquellos más relevantes en el contexto de la matemática escolar.

1.3.1 Significado intuitivo de la probabilidad

Por razones que se desconocen, el desarrollo de la probabilidad es bastante reciente si lo comparamos con otras ramas de la matemática, formalizándose como idea matemática recién a principios del siglo XVII, cuando se comienza a tratar de cuantificar los grados de creencia por medio de la asignación de números que buscaban comparar la posibilidad de ocurrencia de distintos sucesos. No obstante, las primeras ideas intuitivas se remontan a muchos siglos antes, ya en la época de las antiguas civilizaciones como los Sumerios se encuentran vestigios de que estas ideas intuitivas se encontraban presentes y estaban estrechamente ligadas a uno de los pasatiempos humanos más antiguos, los juegos de azar. Del mismo modo hoy en día utilizamos de forma innata una variedad de términos (posible, previsible, chance, presumible, factible, viable, etc.) de nuestro lenguaje común, para cuantificar y hacer referencia a la incerteza o certeza de determinados sucesos, y así por medio del uso de este tipo de frases coloquiales expresar el grado de creencia en relación a sucesos inciertos (Batanero, 2005).

Ya en esta primera etapa podemos evidenciar que el desarrollo de la probabilidad no ha estado ausente de conflictos que se centran, mayoritariamente, en la dualidad de significados (objetiva y subjetiva) en torno al concepto de probabilidad (Hacking, 1995). De este modo, el desarrollo de la probabilidad se ha dado de forma gradual surgiendo desde ideas intuitivas vinculadas a los juegos de azar, hasta ir adquiriendo poco a poco, como veremos más adelante, rigurosidad matemática llegando a conformar la teoría de probabilidad.

1.3.2 Significado laplaciano de la probabilidad

Generalmente, se cree que la probabilidad comienza en 1654, producto de la correspondencia entre Pascal y Fermat relacionada con la resolución de algunos problemas sobre juegos de azar. Sin embrago, contrario a lo que se piensa, esta creencia es errónea, pues:

> este tipo de problemas hacía ya bastante tiempo que eran conocidos y la clave de Pascal en su resolución –el triángulo aritmético– es algo que Pascal podría haber aprendido en la escuela y de lo que se había hablado en conferencias incluso un siglo antes. Pero, como tantas leyendas persistentes, la historia de 1654 encapsula la verdad. La década alrededor del 1660 es la fecha de nacimiento de la probabilidad (Hacking, 1995, p. 24).

Aunque Pascal y Fermat ya utilizaban la probabilidad, lo hacían de forma implícita al igual que otros autores contemporáneos como Huygens y Leibniz. La primera definición clásica de probabilidad fue de Moivre en su obra *Doctrine of Chances*:

> Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances con la que el suceso podría ocurrir y el denominador es el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (de Moivre, 1967/1718, p. 1).

Esta definición fue reformulada por Laplace quien en 1814 dio la definición que hoy conocemos con el nombre de "regla de Laplace", según la cual la probabilidad de un suceso que puede ocurrir en un número finitos de modalidades es: "la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles. Siempre que todos los resultados sean igualmente probables" (Laplace, 1985/1814, p. 28).

Hoy en día nos encontramos con esta definición en gran parte de los libros de texto, la cual se enuncia, por lo general, como sigue:

Sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Se define la probabilidad clásica del suceso A como el cuociente:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Donde $\# A$ denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A que son subconjuntos de Ω y $\# \Omega$ se refiere a la cardinalidad del espacio muestral, al primero le llamaremos "casos favorables" y al segundo "casos posibles".

Bajo este enfoque la suposición fundamental es que todos los posibles resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir y que el espacio muestral tiene cardinalidad finita.

Por ejemplo:

Supongamos que se tiene un dado equilibrado y se desea calcular la probabilidad del suceso A correspondiente a obtener un número par.

Para este experimento el espacio muestral está dado por $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $A = \{2,4,6\}$, entonces $P(A) = \dfrac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Luego, la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado es de $\dfrac{1}{2}$.

Sin embargo, de acuerdo a lo planteado en Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición fue encontrada inadecuada incluso en tiempos de Laplace, pues "además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidad de algunos sucesos sencillos" (Godino *et al*., 1987, p. 21). Por otro lado, esta definición dado los supuestos que asume no puede ser aplicada cuando nos encontramos ante experimentos con un número infinito de posibilidades (variable continua) o en que el espacio muestral es finito pero no simétrico, es decir, no cumple con la condición de equiprobabilidad. Es por esta razón, que la regla de Laplace puede ser aplicada en muy pocos casos fuera de los juegos de azar (Batanero *et al*., 2005).

1.3.3 Significado frecuencial de la probabilidad

Dados los problemas que presentaba la definición de probabilidad propuesta por Laplace, es que Bernoulli plantea la asignación de probabilidades de un suceso a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones del experimento, lo cual permitiría estimar la probabilidad del suceso observado (Bernoulli, 1987/1713). Planteamiento que conocemos como la Ley de los Grandes Números y contó con la aceptación de la comunidad científica de la época dado su carácter objetivo al despojar al concepto de probabilidad de factores personales, dejándolo ligado a demostración práctica por medio la experimentación (Godino *et al*., 1987). Este teorema indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas (Batanero, 2005).

Esta definición fue formalizada en 1928 por von Mises quien plantea que cuando un experimento aleatorio se puede repetir n veces, es decir, sea A un suceso cualquiera, denotemos por $n(A)$ el número de ocurrencias del suceso A, en las n realizaciones del experimento, entonces la probabilidad de A estará dada por:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

donde $P(A)$ es el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite, del cual la frecuencia relativa observada es un valor aproximado (von Mises, 1952/1928).

Así, la probabilidad de que ocurra un determinado suceso es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que ocurra ese suceso, si fuera repetido muchas veces.

Por ejemplo: Sea el experimento aleatorio "lanzamiento de una moneda". Cuando se lanza una moneda al aire hay sólo dos resultados posibles, cara o sello. El resultado no se puede predecir de antemano y variará cuando se lance en forma repetida, sin embargo, se observa una cierta regularidad en los resultados, una regularidad que sólo emerge luego de muchas repeticiones, como se ilustra en la figura 1.2.

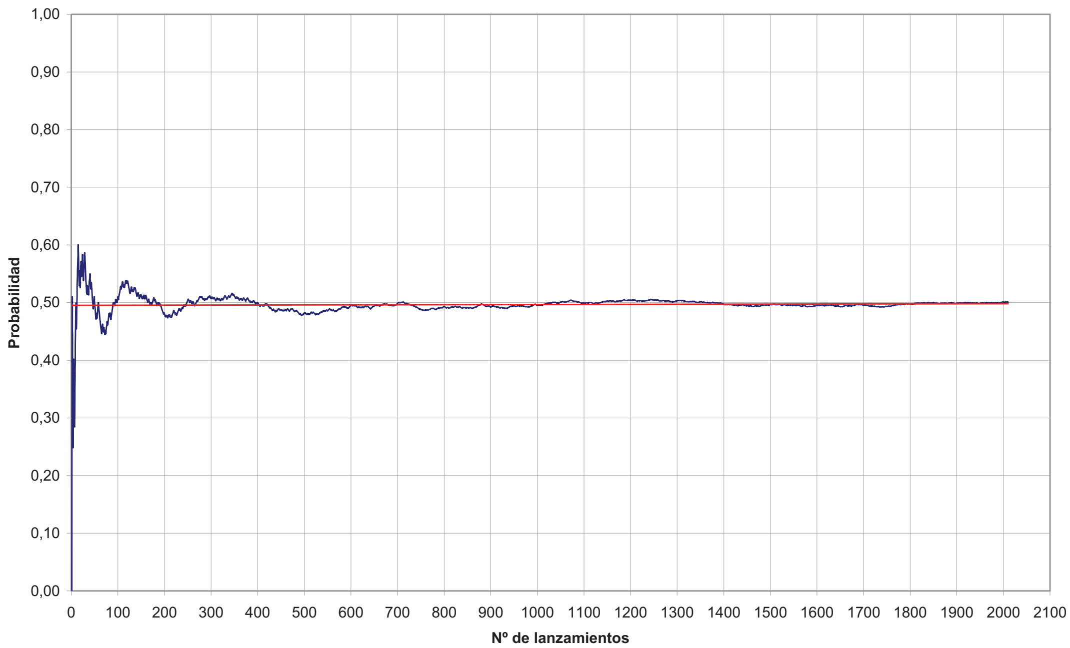


Figura 1.2 Regularidad observada al lanzar una moneda 2000 veces

Como se puede ver en la figura 1.2, luego de lanzar la moneda 2000 veces, la proporción de lanzamientos que dan "cara" es bastante variable al principio, pero a medida que se hacen más y más lanzamientos, ésta se estabiliza acercándose la proporción a 0,5 y manteniéndose en dicho valor. Por lo que se dice que la probabilidad de que salga "cara" es de 0,5, lo cual significa que el suceso "cara" ocurre la mitad de las veces después de muchos lanzamientos. De lo anterior, se puede decir que si lanzáramos una moneda al aire un gran número de veces, aproximadamente el 50% de las veces se observaría el resultado "cara".

Es importante señalar el hecho de que esta visión de la probabilidad presenta algunas limitaciones, en el sentido de que: (1) no siempre es posible realizar un experimento una infinidad de veces, bajo las mismas condiciones, para poder determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso cualquiera, (2) no se obtiene un valor exacto de la probabilidad sino solo aproximaciones, (3) se desconoce la cantidad necesaria de ensayos o repeticiones que llevan a una buena estimación, y (4) no se puede aplicar a algunos sucesos que si bien son aleatorios son irrepetibles, como por ejemplo en la econometría (Batanero *et al*., 2005).

1.3.4 Significado subjetivo de la probabilidad

Este significado de la probabilidad a diferencia del significado frecuencial, no se fundamenta en la repetición de experimentos, sino en la confianza que una persona sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que, no está unívocamente determinada (Godino *et al*., 1987).

Este significado aparece con el teorema de Bayes que fue publicado por primera vez en 1763 dos años después de la muerte de su creador Thomas Bayes.

El teorema de Bayes se puede desarrollar a partir de la definición de probabilidad condicional $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Se puede decir que ciertas causas ($A_1, A_2, ..., A_n$) tienen probabilidades *a priori* $P(A_k)$. Existe un efecto B, que no siempre ocurre cuando la causa está presente, por eso se habla de $P(B \mid A_k)$.

Cuando se usa la probabilidad condicional para invertir lo anterior, se calcula la probabilidad de una causa, dado el efecto, es decir, la probabilidad *a posteriori* $P(A_k \mid B)$.

Lo cual lleva a formular el teorema de Bayes de mediante la siguiente ecuación:

$$P\left(A_j \mid B\right) = \frac{P\left(A_j\right)P\left(B \mid A_j\right)}{\sum_{i=1}^{k} P\left(A_i\right)P\left(B \mid A_i\right)}, \quad j = 1,2,\ldots,k$$

El hecho de que el teorema de Bayes fuera divulgado dos años después de su muerte se debe a que Bayes se encontraba inseguro de dar a conocer esta idea, pues iba en contra a la objetividad que hasta ese momento caracterizaba a la probabilidad. Por lo que sus discípulos Keynes, Ramsey y de Finetti entre otros, son quienes dan a conocer este significado y describen la probabilidad subjetiva como grados de creencia personal en que la probabilidad es asignada a un suceso por una persona en particular, la cual puede ser bastante diferente de la probabilidad subjetiva que estipula otra persona, es decir, en este caso la probabilidad va a depender del observador, de lo que éste conoce del fenómeno o suceso en estudio. Interpretándose a la probabilidad bajo este enfoque como "el grado de creencia o de convicción con respecto a la ocurrencia de una afirmación. En este contexto, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible" (Canavos, 1988, p. 31). De este modo con este significado subjetivo de la probabilidad amplia su campo de aplicación a áreas como la medicina y al estudio de decisiones en economía, por mencionar algunas.

Esta visión de la probabilidad al igual que las anteriores presentó, en un comienzo, ciertas limitaciones, como por ejemplo, la dificultad para hallar una regla que permita asignar valores numéricos a los grados de creencia personal (Batanero, 2005). Esta dificultad llevó a que Ramsey (1926) y de Finetti (1937) elaboraran la teoría de decisión que permite inferir los valores de las probabilidades subjetivas por medio de un sistema de apuestas que separa las creencias de las preferencias.

La contribución de Bayes y sus discípulos ha sido un elemento clave para el desarrollo de la inferencia estadística, en la que se emplea la interpretación subjetiva de la probabilidad.

1.3.5 Significado matemático-axiomático de la probabilidad

Es durante el siglo XX que la probabilidad alcanza el carácter de una teoría matemática formalizada, esto se lo debemos, principalmente, a los matemáticos Borel y Kolmogorov quienes por medio de sus trabajos logran cristalizar a la probabilidad como una teoría matemática que puede ser utilizada para describir e interpretar la realidad de fenómenos aleatorios (Batanero, 2005).

Para Borel la probabilidad era concebida como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Mientras que Kolmogorov, a partir de las ideas de Borel, la teoría de la medida y de la teoría de conjuntos logra definir una axiomática satisfactoria para probabilidad que es aceptada por las diferentes escuelas, independientemente de la interpretación filosófica que éstas dieran a la probabilidad (Batanero y Díaz, 2007).

Es así como, bajo este enfoque, no se define de forma explícita, como en los casos anteriores, cómo calcular probabilidades, sino que se establecen las reglas que el cálculo de probabilidades debe satisfacer.

Los siguientes postulados o axiomas de probabilidad fueron establecidos por Kolmogorov en 1933, para quien los sucesos se pueden representar por medio de conjuntos, donde el espacio muestral (Ω) sería el conjunto total y los diferentes sucesos corresponderían a subconjuntos de éste. Desde esta perspectiva la probabilidad es considerada una medida normada, acotada entre 0 y 1, definida sobre estos conjuntos. Siendo posible entonces definir un σ-álgebra de sucesos ρ sobre dicho espacio muestral, en que cualquier función P definida sobre ρ cumple los siguientes tres axiomas de probabilidad (Canavos, 1988, p. 34):

i. La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o cero, es decir, $P(A) \geq 0$. La probabilidad mide, en cierta manera, lo difícil que es que ocurra un suceso *A* (como menor sea la probabilidad, más difícil es que ocurra).

ii. La probabilidad del suceso seguro es 1, es decir, $P(\Omega) = 1$. Así pues, la probabilidad siempre es mayor que 0 y menor que 1 (probabilidad cero quiere decir que no hay ninguna posibilidad de que pase (es un suceso imposible), y probabilidad 1, que siempre pasa (es un suceso seguro)).

iii. La probabilidad de la unión de un conjunto cualquiera de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de los sucesos. Esto es, si tenemos, por ejemplo, los sucesos A y B son incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ cuando $A \cap B = \varnothing$.

De este modo a cualquier función P que satisfaga los tres axiomas de Kolmogorov se le llama medida de probabilidad, o simplemente probabilidad. A partir de los axiomas anteriores, se desprenden las siguientes propiedades (Canavos, 1988, p. 35):

a. Para cualquier suceso A, $P(A^c) = 1 - P(A)$

b. $P(\varnothing) = 0$

c. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

d. Si $A \subseteq B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$

e. Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$

f. Para cualesquiera sucesos A y B, se cumple que
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

g. Para cualesquiera sucesos A, B y C, se cumple que
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

En los puntos anteriores ha sido posible observar los distintos significados complementarios que se puede dar al concepto probabilidad, los cuales han permitido, a través de los años, fundamentar y desarrollar lo que hoy se conoce como la Teoría de la Probabilidad, que nos otorga modelos para fenómenos donde la incertidumbre en los resultados es relevante. Lo que ha llevado a que en la actualidad la probabilidad sea una de las ramas más fecundas de la matemática (Godino *et al*., 1987). No obstante, como se ha podido evidenciar, el desarrollo de la probabilidad, dada su dualidad de significados, no ha estado ausente de debates filosóficos, que no han cesado, y continúan su discusión sobre el carácter objetivo y/o subjetivo de la probabilidad.

Sin embargo, es importante tener claridad que en relación a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad es fundamental adoptar una perspectiva de modelización de la probabilidad en que tales debates y diferentes significados se complementen, ya que una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse a uno de sus significados

(Steinbring, 1990; Batanero *et al.*, 2005). Por ello, es fundamental que los profesores cuenten con los conocimientos, tanto matemáticos como didácticos en relación a los distintos significados de la probabilidad, que les permitan orientar el proceso de enseñanza de una manera progresiva a partir de las ideas intuitivas de sus alumnos sobre el azar y probabilidad, para luego incorporar de manera gradual los diferentes significados e ir construyendo poco a poco el concepto de probabilidad, pues tal y como dijo Laplace: "el aprendizaje de la probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en la toma de decisiones y por ello no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación" (Laplace, 1986/1825, p. 206-207).

En síntesis, al describir los principales significados asociados al concepto de probabilidad a lo largo de su desarrollo histórico-epistemológico (intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y matemático-axiomático), hemos podido evidenciar que cada uno de ellos presenta diversos elementos que los caracterizan (ver tabla 1.1) y que pueden ser aplicados con cierta ventaja a una determinada situación en la que está presente la incertidumbre.

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜISTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	Sorteos Adivinación	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas, etc.	Lenguaje ordinario	Opinión impredecible, creencia	Suerte Destino
Laplaciano	Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar.	Combinatoria Proporciones Análisis *a priori* de la estructura del experimento.	Triángulo aritmético Listado de sucesos Formulas combinatorias	Cociente de casos favorables y posibles Equiprobabilidad de sucesos simples	Esperanza Equitatividad Independencia
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones.	Registros de datos estadísticos *a posteriori* Ajuste curvas matemáticas Análisis matemático simulación	Tablas y gráficos estadísticos Curvas de densidad Tablas de números aleatorios Tablas de distribuciones	Limite de las frecuencias relativas Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	Frecuencia relativa Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad
Subjetiva	Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	Teorema de Bayes	Expresión de la probabilidad condicional	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia	Probabilidad condicional Distribución *a priori* y *a posteriori*
Matemático-Axiomático	Cuantificación de incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos	Teoría de conjuntos Álgebra de conjuntos Teoría de la medida	Símbolos conjuntitas	Función medible	Espacio muestral Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel

Tabla 1.1 Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad (Batanero, 2005, p. 34)

Sin embargo, la mayoría de las veces en las que es necesario aplicar un razonamiento probabilístico nos encontramos con que el concepto de probabilidad queda situado entre sus significados extremos (frecuencial y subjetivo) por lo que se hace difícil poder percibir su significado en toda su amplitud. Este es un aspecto que no hay que olvidar al momento de enseñar probabilidad, pues el limitarse a uno de sus significados, llevaría a no adquirir el concepto en todas sus dimensiones.

1.4 Investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y educación primaria

Las investigación en relación al aprendizaje de la probabilidad y más específicamente al desarrollo de la cognición probabilística es muy amplia, por lo que nos centraremos en algunos de los trabajos más representativos y clásicos, que han tratado de caracterizar el razonamiento probabilístico en los niños, como los de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), considerando además otros más recientes, que al igual que los primeros, aportan información de interés para estudiar el conocimiento matemático y didáctico del profesor de educación primaria sobre probabilidad. Dado que el profesor al momento de planificar la enseñanza de la probabilidad, debe tener claridad sobre: ¿cómo se desarrolla el razonamiento probabilístico en los niños?, ¿cómo aprenden probabilidad los niños?, ¿cuáles son los errores y dificultades a los que sus alumnos pueden verse enfrentados?, ¿qué tipos de actividades puede desarrollar en relación a determinado tipo de concepto y según la edad de sus alumnos?. Para orientar parte de las respuestas a las preguntas anteriores, nos centraremos en el trabajo realizado por Cañizares (1997) pues en él encontramos una recopilación adecuada de las principales investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en alumnos de educación primaria.

El contar con este tipo de información es de gran importancia para una enseñanza idónea de la probabilidad, sobre todo si consideramos que el estudio de la probabilidad involucra el trabajo con ideas abstractas, como por ejemplo, la noción de aleatorio, que no siempre se encuentran conectadas a la experiencia directa de los niños, como ocurre con otros conceptos matemáticos que si pueden ser abordados de forma concreta, como por ejemplo la suma de dos números.

En este sentido, dentro de los estudios más significativos y clásicos en relación al desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, se encuentran los de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975).

Piaget e Inhelder (1951) entienden el aprendizaje como un proceso lento y gradual mediante el cual los alumnos deben verse enfrentados a nuevas ideas o situaciones problemas, que producen un conflicto cognitivo o desequilibrio al chocar con las ya existentes, que deben tratar de superar, resolver y comprender utilizando sus conocimientos previos, los que se acomodan y expanden producto de la asimilación, siendo considerados fundamentales para determinan el aprendizaje. Es así como Piaget e Inhelder (1951) plantean que el desarrollo cognitivo del niño puede ser clasificado en varias etapas, según el nivel de desarrollo intelectual que presenta en relación a la comprensión formal de los conceptos matemáticos: sensorio motor (0-2 años), pre operacional (2-7 años), operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (11-15 años). El orden de estas etapas es fijo, sin embargo la edad en que pueden ser alcanzadas puede variar de un niño a otro dependiendo de los contenidos. No obstante, el paso de una etapa a otra presenta siempre el mismo patrón el cual es producto de los procesos de asimilación y acomodación (Piaget, 1975).

- Etapa sensorio motor (0-2 años): se caracteriza por la relación sensorio motor que el niño tiene con su entorno, en la que los movimientos y sensaciones juegan un rol fundamental en el razonamiento del niño.
- Etapa pre operacional (2-7 años): en esta etapa son fundamentales las experiencias empíricas en que el niño debe manipular objetos para lograr de este modo una comprensión y aprendizaje de los nuevos conceptos. Durante esta etapa el niño no es capaz de entender e interpretar la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios, por lo que según Piaget e Inhelder es incapaz de determinar probabilidades a favor o en contra de sucesos aleatorios.
- Etapa de las operaciones concretas (7-11 años): esta etapa se caracteriza por el hecho de que el niño ya es capaz de identificar y realizar operaciones sobre objetos materiales, pero con dificultad para realizarlas en forma abstracta. Según Piaget e Inhelder en esta etapa los niños comienzan a entender la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios, entendiendo el azar como el resultado de la combinación de una serie de causas independientes que conducen a sucesos impredecibles. Por lo que

ya se encuentran en condiciones de resolver problemas sobre comparación de probabilidades de un mismo suceso *A* en dos experimentos diferentes en los que el número de casos favorables (o no favorables) a *A* son iguales en ambos experimentos.

- Etapa de las operaciones formales (11-15 años): esta etapa se caracteriza por el hecho de que ahora el adolescente es capaz de pensar de forma más abstracta, manipulando relaciones entre representaciones simbólicas, formular hipótesis y establecer conclusiones. Así, en esta etapa, de acuerdo a lo planteado por Piaget e Inhelder, el adolescente cuenta con los esquemas operacionales necesarios para comprender el azar y por ende el concepto de probabilidad.

Las características y planteamientos de las etapas anteriores se han podido constatar en base a distintos experimentos que Piaget e Inhelder (1951) plantean a niños en entrevistas clínicas con el propósito de estudiar sus razonamientos sobre variados conceptos relacionados con el razonamiento probabilístico, tales como: azar, comparación de probabilidades, razonamiento combinatoria, etc. es que los autores consideran que la idea de azar no se encuentra presente de forma *innata* en el niño, pues ésta es vista como complementaria a la relación causa-efecto, y al igual que la de probabilidad, no pueden ser totalmente comprendidas hasta la etapa de las operaciones formales (11- 15 años) en que se desarrolla el razonamiento combinatorio. Según Piaget e Inhelder (1951) para que un niño pueda comprender el azar, es necesaria una comprensión de operaciones irreversibles, en que el azar es considerado complementario a la composición lógica de operaciones reversibles, requiriendo, además, de un razonamiento combinatorio que permita identificar las distintas combinaciones que pueden darse en un fenómeno aleatorio. En consecuencia, un niño no sería capaz de diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas, pues:

> "el azar es debido a la interferencia de una serie de causas independientes y la no presencia de todas las interferencias posibles, salvo en el caso en que hubiera un gran número de repeticiones del experimento. Cada caso aislado es indeterminado o imprevisible, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Esta es la vía por la que aparece la idea de probabilidad como

razón entre las posibilidades de un caso y el conjunto de posibilidades" (Cañizares, 1997, p. 24).

Un experimento piagetano clásico, en el cual se puede observar la necesidad de esquemas combinatorios y de la apreciación del carácter irreversible de una mezcla, es el experimento de la bandeja. Este consiste en mostrar a los niños una bandeja con dos compartimentos; en uno de los cuales hay 8 bolas blancas y en el otro 8 bolas negras (figura 1.3).

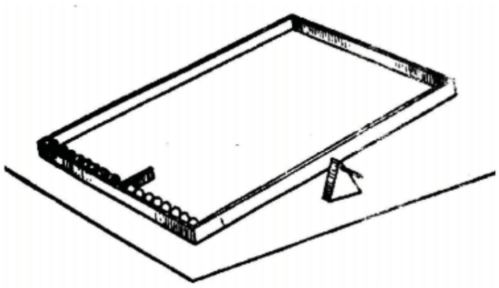


Figura 1.3 Experimento de la bandeja de Piaget e Inhelder, extraído de Godino *et al*., 1987, p. 38.

La bandeja se hace bascular hasta que las bolas se mezclan de manera progresiva. Al preguntar a los niños cuestiones del tipo ¿qué sucederá con las bolas blancas y negras si repetimos muchas veces el movimiento de la bandeja? Se pudo observar que los niños que se encuentran en la etapa pre operacional (2-7 años) afirman que luego de repetir muchas veces el movimiento de la bandeja las bolas volverán a su lugar original, o bien que las bolas negras quedarán en el lugar de las blancas y viceversa. Este tipo de respuesta es interpretado por Piaget e Inhelder como que el niño antes de los 7 años no es capaz de comprender la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria dado que su pensamiento aún es demasiado determinista, lo que les impediría comprender que al mover la bandeja repetidamente las bolas se mezclan en forma aleatoria. Esto a su vez se complementa con el hecho de que el niño a esta edad aún no comprenden del todo la relación causa-efecto, lo que les dificultaría entender por qué el movimiento de la bandeja lleva a que la bolas se mezclen. Por otro lado, dado que carecen de un razonamiento combinatorio completo (pues pueden realizar, de manera empírica, sólo algunas combinaciones, permutaciones y variaciones) durante la etapa pre operacional (2-7 años), tampoco son capaces de imaginar como se pueden dar las distintas permutaciones en este caso entre las bolas blancas y las bolas negras. Es producto de las razones antes expuestas que Piaget e Inhelder consideran que los niños durante esta etapa no cuentan con los mecanismos necesarios para alcanzar una apreciación del azar.

Es a partir de la etapa de las operaciones concretas (7-11 años) que el niño adquiere esquemas operacionales espacio-temporales comenzando a desarrollar un razonamiento lógico-matemático, que aunque se encontraría ligado al nivel concreto, le permitiría comprender en cierta medida algunos aspectos ligados al azar, como por ejemplo la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, en el caso del experimento de la bandeja, podría comprender que determinar la posición final de las bolas, luego de repetir muchas veces el movimiento de la bandeja, es impredecible. Sin embargo, aún no cuenta con un razonamiento combinatorio, que le permita imaginar todas las posibilidades de permutar las bolas. De acuerdo a lo expuesto por Piaget e Inhelder este tipo de razonamiento combinatorio se desarrolla en la etapa de las operaciones formales (11-15 años), pues durante esta etapa "el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos" (Godino *et al.*, 1987, p. 45). Esto le permitiría comprender la idea de azar, conduciéndole de este modo a lograr una comprensión adecuada del concepto probabilidad.

Sin embargo, Fischbein (1975) rechaza la opinión de Piaget e Inhelder pues discrepa en varios de aspectos. Sobre todo en lo que se refiere a la intuición primaria (que surge a partir de la experiencia del sujeto) del azar, es decir, la capacidad de distinguir entre un fenómeno aleatorio y uno determinista, la cual para él se encuentra presente antes de los 7 años y sin instrucción previa sobre el tema. Para afirmar esto se fundamenta en el hecho de que al observar la conducta de los niños al practicar juegos de azar sencillos, éstos son capaces de emitir juicios probabilísticos estimando de forma intuitiva las posibilidades a favor de algún suceso, llegando a elegir la opción con mayores probabilidades de ganar. Un ejemplo sencillo que se presenta en Godino *et al.,* (1987) mediante el cual se puede observar la intuición primaria del azar descrita por Fischbein, consiste en presentar a los alumnos experimentos en lo que, por ejemplo, debe elegir entre dos cajas con diferente contenido, y elegir aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola de un determinado color (figura 1.4).

Figura 1.4 Experimento de la caja con bolitas, extraído de Godino *et al*., 1987, p. 41.

En esta situación resulta interesante plantear a los niños preguntas del tipo: "Si debes sacar una bola de una de las cajas con los ojos cerrados. Ganas si obtienes una bola blanca. ¿de qué caja prefieres hacer la extracción?" A partir de las respuestas dadas por los niños a este tipo de experimentos, en los que hay que comparar probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con solo dos sucesos no equiprobables, queda de manifiesto su capacidad de establecer operaciones auxiliares de comparación para estimar, correctamente, probabilidades simples de forma intuitiva. Incluso en algunas investigaciones (Yost, Siegel y Andrews,1962; Davies, 1965; Goldberg, 1966; Falk, Falk y Levin, 1980) ha quedado en evidencia que el porcentaje de respuestas correctas a experimentos como el anterior, y contrariamente a lo que se pude pensar, el niño de educación infantil razona correctamente y de mejor manera que aquellos que han alcanzado la etapa de las operaciones formales (11-15 años). No obstante, si bien Fischbein señala que las intuiciones primarias sobre el azar se encuentran presentes en los niños antes de los 7 años, es después de esta edad cuando los niños alcanzan, poco a poco, una estructura conceptual distinta y organizada, producto de la enseñanza recibida sobre el tema, la cual desempeña un rol fundamental para el desarrollo completo del razonamiento probabilístico (intuición secundaria).

El efecto de la enseñanza en el desarrollo de los juicios probabilísticos intuitivos fue ampliamente estudiado por Fischbein demostrando que por medio de la instrucción se pueden alcanzar esquemas en la etapa de las operaciones concretas que de acuerdo a lo planteado por Piaget e Inhelder (1951) solo podían ser alcanzados en la etapa de las operaciones formales. Es bajo este enfoque que Fischbein, Pampu y Minzat (1970a) elaboran una serie de lecciones experimentales dirigidas a trabajar los siguientes conceptos con niños de 12 a 14 años: suceso, espacio muestral, suceso elemental y compuesto, probabilidad como medida del azar, frecuencia relativa y análisis combinatorio. La investigación consistió en comparar el razonamiento probabilístico del grupo al cual se aplicaron las lecciones con un grupo control que no recibió instrucción en el tema. Los resultados muestran un efecto positivo del proceso de instrucción, pues se exhibe una mejora del razonamiento probabilístico del grupo con instrucción. Además, se concluyó que con apoyo de instrucción elemental es conveniente enseñar probabilidad a partir de los 10 años, incluso en ausencia de la proporcionalidad. Sin embargo, si se desea enseñar comparación de probabilidades, es necesario que los alumnos tengan un dominio de la comparación de fracciones, por lo que será necesario presentar tareas de comparación de probabilidades que se organicen de acuerdo a los estadios que Noelting (1980 a y b) atribuye a cada etapa del desarrollo de la noción de fracción.

Algunos años más tarde Fischbein y Gazit (1984) deciden profundizar en el efecto que tiene la instrucción en las intuiciones y concepciones probabilísticas de un grupo de niños entre 10 y 13 años. Para esto se diseñaron 12 lecciones que presentaban situaciones de incertidumbre en diversos contextos (dados, monedas y urnas con bolas) vinculadas al concepto de suceso seguro, posible e imposible; sucesos en un experimento aleatorio; posibilidades; probabilidad y frecuencia relativa y la relación entre ellos, en las cuales los alumnos debían experimentar para calcular probabilidades. Una vez implementadas estas lecciones se aplicaron dos cuestionarios, el primero buscaba medir la eficacia de las lecciones, es decir, si los alumnos a los cuales se aplicó el programa especial de instrucción aprendieron los conceptos y si son o no capaces de aplicarlos. Mientras que el segundo cuestionario se aplicó a todos los alumnos, tanto a los del grupo experimental como a los del grupo control, pues con éste se buscaba medir el efecto indirecto que tiene cualquier programa de enseñanza sobre los errores intuitivos de los niños en relación a la probabilidad.

En base a los resultados obtenidos de la aplicación de ambos cuestionarios, se pudo observar que para los alumnos de 10 a 11 años la mayoría de las nociones fueron de gran dificultad pues no lograron dar ejemplo ni si quiera de nociones básicas como lo son las de suceso seguro, posible e imposible. Sin embargo, el grupo de alumnos de 11 a 12 años si fueron capaces de comprender y aplicar correctamente los conceptos involucrados, al igual que los alumnos de 12 a 13 años quienes comprendieron y aplicaron sin ninguna dificultad los distintos conceptos vinculados a la probabilidad. Por lo que Fischbein y Gazit concluyen que desde los 11 años en adelante un programa de instrucción sistemático tendría un efecto positivo en la mejora de los juicios e intuiciones probabilísticas de los alumnos. Para Fischbein el contar con un adecuado programa de instrucción es fundamental en el desarrollo del razonamiento probabilístico, planteando que sin una instrucción sistemática muchos adultos nunca alcanzarían un nivel formal de comprensión y estimación de probabilidades. Estos resultados respaldan completamente algunos planteamientos anteriores de Fischbein, en los que manifiesta que:

> En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede ser reducida, de forma rentable, a una interpretación unívocamente determinista de los sucesos. Una cultura científica eficaz exige una educación del pensamiento estadístico y probabilístico… Para ello, es necesario educar, desde la primera infancia, la compleja base intuitiva relevante para el pensamiento probabilístico; de esta manera se puede conseguir un balance genuino y constructivo entre lo posible y lo determinado, en el funcionamiento de la inteligencia (Fischbein, 1975, p. 131).

Así por medio de este estudio Fischbein y Gazit (1984) además de analizar el efecto de la enseñanza en los juicios probabilísticos, pudieron examinar algunos errores en relación a la asignación de probabilidades y al lenguaje probabilístico. Tales errores se manifiestan mayoritariamente en niños de 9 a 14 años, para quienes la noción de seguro presenta mayores dificultades que la de probable, dado que asocian esta noción con un resultado único y posible con variados resultados; caracterizando, además, raro con imposible, e imposible con incierto, esto se debería a que se basan en sus experiencias subjetivas o creencias. Estos resultados serían refutados, más tarde, por Truran (1994).
Los resultados de Piaget e Inhelder (1951) no tan solo fueron complementados por Fischbein en sus investigaciones, sino que han sido numerosos los estudios que buscan caracterizar el desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, a continuación se describen brevemente aquellos que consideramos más relevantes para nuestro estudio.

Yost, Siegel y Andrews (1962) realizan modificaciones al método experimental de Piaget, pues este no consideraba ciertos aspectos tales como las dificultades para expresarse verbalmente de niños pequeños, ni su capacidad de memorización para recordar la composición de los conjuntos, además de que la muestra de estudio es considerada muy pequeña y no se realizó un análisis estadístico apropiado de ella. Por lo que plantean analizar la presencia del razonamiento probabilístico en niños de educación infantil por medio de un experimento que consideró las limitaciones anteriores. Para ello, usaron dos cajas de plástico transparente (así los niños podían ver que había en su interior y no tenían que memorizar como se distribuía el contenido de las cajas) que contenían en su interior fichas de dos colores diferentes y en diferentes proporciones. El experimento consistía en pedir a 10 niños y 10 niñas de edades alrededor de los 5 años que señalaran en cuál de las dos cajas existía mayor posibilidad de extraer una bola de un determinado color. De esta manera se pudo concluir, contrariamente a lo expuesto por Piaget e Inhelder, que los niños desde los 4 años aún cuando no cuentan todavía con un concepto completo de probabilidad, si poseen las capacidades para realizar estimaciones intuitivas de posibilidades.

Por su parte Davies (1965) amplia los estudios de Yost, *et al*. (1962), a 112 niños cuyas edades fluctúan entre los 3 y 9 años, realizando con ellos un experimento que consistía en dar una recompensa a aquellos niños que en variadas situaciones escogían una bola de un determinado color. En base a este experimento pudo observar que en experimentos sencillos los niños manifiestan la existencia de una intuición probabilística, permitiéndoles incluso estimar posibilidades de ciertos sucesos en base ya fuera a la información percibida de forma directa o en base a su percepción. Por otro lado, corroboró que el concepto de probabilidad es adquirido de manera progresiva puesto que el porcentaje de respuestas correctas a las distintas situaciones incrementaba a medida que aumentaba la edad de los niños.

Goldberg (1966) reproduce la investigación de Yost, et al. (1962), evidenciado que los niños pequeños de educación infantil no basan sus elecciones en las proporciones, sino en la comparación de los valores absolutos. Asimismo, pudo constatar que en aquellas situaciones cercanas a la equiprobabilidad presentan una mayor dificultad para los niños de educación infantil, puesto que el número de respuestas incorrectas aumenta en este tipo de situaciones.

Hoemann y Ross (1975) sostienen la hipótesis de que los niños de educación infantil ante situaciones en las cuales deben emitir un juicio probabilístico, no basan sus respuestas en las probabilidades sino en la comparación de magnitudes absolutas. Por lo que deciden someter a un grupo de niños entre los 4 a 10 años de edad, a cuatro experimentos probabilísticos que permitan distinguir si los niños están dando sus respuestas en base a juicios probabilísticos o a partir de comparaciones perceptuales. Uno de los experimentos consistió en presentar a los niños dos ruletas de distinto tamaño, coloreadas con dos colores que se distribuyen en distintas proporciones. Luego dividen la muestra de niños en dos grupos, en el primero de ellos se estudia si utilizan una estimación probabilísticas para responder a la pregunta: si tuvieras que elegir una ruleta ¿en cuál de ellas hay una mayor probabilidad de que salga un determinado color?, mientras que al segundo grupo se plantea la pregunta ¿Cuál de las dos ruletas tiene mayor cantidad de un determinado color? Con esta preguntas se busca observar si los niños utilizan una estimación de magnitudes para fundamentar sus respuestas. Finalmente, al comparar las respuestas otorgadas por ambos grupos, los autores concluyen que no existe diferencia entre ellos, siendo la estimación de magnitudes suficiente para dar respuesta a las preguntas planteadas, sin necesidad de utilizar la comparación de proporciones ni la estimación de probabilidades para resolver las situaciones planteadas. Un segundo experimento consistió en presentar a los niños, una sola ruleta y preguntar sobre ¿en qué color consideraban se detendría la aguja? (comparación probabilística), además de ¿de qué color hay más? (comparación de magnitudes). A partir de las respuestas obtenidas, se pudo observar que para la pregunta de comparación probabilística el número de errores cometidos por los niños era mayor que en la pregunta de comparación de magnitudes. En consecuencia, los autores afirman que los juicios probabilísticos de los niños, entre los 4 y 8 años de edad, en los experimentos con ruletas son muy pobres. Los otros dos experimentos consistían en enfrentar a los niños a situaciones similares a las planteadas con las ruletas pero ahora con urnas con bolitas de colores. Los resultados obtenidos fueron similares a los anteriores, con la diferencia de que este tipo de experimento sí les permitió distinguir entre un razonamiento de tipo proporcional y uno de tipo probabilístico. Además, se pudo observar que la proporción de errores cometidos cuando se presentaba la situación con dos urnas era menor que cuando se trabajaba con una sola urna, según Hoemann y Ross (1975) esto se debe a que dado que se utilizan dos conjuntos el niño se limita solo a elegir de cuál de ellos prefiere realizar la extracción, mientras que cuando se debe focalizar en un solo conjunto, se centra en lo que se debe predecir.

Falk *et al*. (1980) plantean a un grupo de niños entre 4 y 11 años 9 problemas sobre comparación de probabilidades que involucran el uso de urnas, ruletas y peonzas. Estos problemas se encuentran clasificados de acuerdo al contexto y al tipo de fracción involucradas en la comparación con respecto a si la proporción es mayor, menor o igual a ½. De este modo los problemas se clasificaron según si: a) el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el conjunto de mayor probabilidad; b) el número de casos favorables es menor mayor o igual en el conjunto de menor probabilidad; c) los dos conjuntos son equiprobables y el número de casos favorables es menor, mayor o igual en el primer conjunto presentado. Los resultados observados muestran que desde los 6 años los niños presentan un razonamiento probabilístico, sin importar el contexto con el cual estuvieran realizando el experimento. Uno de los errores más frecuentes fue el inclinarse por elegir aquel conjunto con mayor número de casos favorables. Así a partir de lo anterior, los autores concluyen que el concepto de probabilidad se encontraría conformado por los subconceptos de azar y proporción. Sin embargo, para lograr una comprensión adecuada de la probabilidad, no basta con saber calcular proporciones, sino que además hay que poseer una comprensión acabada de la imposibilidad de controlar o predecir los resultados.

Kahneman *et al*. (1982) estudian desde el campo de la psicología la existencia de errores sistemáticos y conductas estereotipadas que se manifiestan al momento de tomar decisiones de tipo probabilístico. Los autores han identificado heurísticas y sesgos presentes en el razonamiento probabilístico, producto de factores que afectarían negativamente la forma de razonar en probabilidad, sus investigaciones se orientan a identificar dichas formas así como los factores que en ellas influyen. Puesto que la presencia de estas heurísticas y sesgos en algunos casos se muestra resistente a la enseñanza, imposibilitando de este modo la asimilación de los conceptos formales. Dentro de los tipos de errores más característicos se encuentran:

1) La heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982) que consiste en que los sujetos para asignar probabilidades a un suceso se basan en la semejanza o representatividad de éste con respecto ala población de la cual se extrae. Por medio del

uso de esta heurística es posible reducir situaciones probabilísticas a otras más simples para su resolución, utilizando la representatividad para predecir sucesos, pues es común que los sucesos más probables sean más representativos que los menos probables (Kahneman *et al*., 1982). Pero el uso inadecuado de la heurística de la representatividad puede dar origen a sesgos en los juicios probabilísticos. Estos sesgos no se originan por una falta de comprensión de la probabilidad sino porque, en muchas ocasiones, resulta más cómodo aplicar esta heurística ante el uso de cálculos matemáticos (Tversky y Kahneman, 1982). Los principales sesgos relacionados con la heurística de la representatividad son: a) insensibilidad al tamaño de la muestra, en el que el sujeto desconoce los efectos que tiene el tamaño de la muestra sobre la precisión de las estimaciones. Comúnmente ocurre que los sujetos que presentan este sesgo aplican la ley de los grandes números a muestras pequeñas, pues asumen que ésta representa las características de la población desde la cual provienen; b) concepciones erróneas de las secuencias aleatorias, consiste en creer que el proceso aleatorio se encuentra representado en su totalidad por unos pocos ensayos. Esto lleva a los sujetos a pensar que algunas secuencia que se presentan relativamente ordenadas no son aleatorias, pues creen que para que lo sea los resultados deben estar alternados (recencia negativa), o bien que en un experimento aleatorio luego de la aparición consecutiva de un símbolo este volverá a aparece la siguiente vez (recencia positiva). Los juicios probabilísticos vinculados a la recencia positiva y negativa se presentan en secuencias en las que hay dos tipos de símbolo, por ejemplo el lanzamiento de una moneda, desconociendo para ambas la independencia de las repeticiones de un experimento, pues el sujeto cree que el proceso tiene memoria (Fischbein, 1975). Un sesgo típico de este tipo es la falacia del jugador, que consiste en creer que los resultados obtenidos en un experimento aleatorio pueden afectar la probabilidad de sucesos futuros.

2) La heurística de la disponibilidad (Tversky y Kahneman, 1974), se refiere a la tendencia de realizar predicciones sobre la probabilidad de un suceso, basándose para ello en la mayor o menor facilidad con la que se pueden construir o recordar ejemplos de ese suceso. Donde la disponibilidad genera un sesgo sistemático en las estimaciones probabilísticas, pues los sujetos tienden a creer que son más probables aquellos resultados que pueden recordarse fácilmente. Para el caso de la heurística de la disponibilidad, los principales sesgos relacionados con ésta son: a) el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) que consiste en que el sujeto cree que para cualquier

experimento aleatorio los resultados son siempre equiprobables. De acuerdo a las investigaciones de Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990) esta creencia no se debería a una falta de razonamiento combinatorio, sino más bien a que los modelos combinatorios no se asocian correctamente a situaciones en las que interviene el azar, lo que lleva a los sujetos a creer que como el resultado de un experimento depende del azar, entonces estos son equiprobables; b) el enfoque en el resultado o *outcome approach* (Konold, 1991) consiste en estimar la probabilidad de un suceso de forma no probabilística, interpretando la probabilidad de un suceso como una predicción de si este sucederá o no. Es de esta perspectiva la probabilidad es interpretada desde su dualidad de significados, es decir, desde lo subjetivo y en forma frecuencial.

Green (1983) a diferencia de otros autores que se basan en experimento o entrevistas clínicas, construye un cuestionario especial de conceptos probabilísticos, con una amplia validez de contenido, que aplica a una muestra de 2930 niños elegidos en forma representativa y aplicando la técnica del escalograma de Guttman. Para así, analizar los conceptos o intuiciones aleatorias que se encuentran presentes en la mente de niños desde los 11 a 16 años de edad. Dicho cuestionario consta de 26 ítems, que abordan diversos aspectos para establecer niveles de razonamiento probabilístico y la edad promedio en que éstos son alcanzados, los cuales se clasifican en tres categorías: la capacidad de comprensión del niño del lenguaje de probabilidad y su aplicación a situaciones de incertidumbre, la capacidad de razonamiento combinatorio y probabilístico, así como las intuiciones de los alumnos sobre aleatoriedad. De esta forma, por medio de los ítems que conforman las distintas categorías, el autor logra situar a los niños en distintos niveles de razonamiento probabilístico, los cuales guardan cierta similitud con las etapas del desarrollo de la idea de azar propuestas por Piaget e Inhelder (1951). Dentro de los principales resultados de la investigación de Green 81983) podemos mencionar que: (1) el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico es inferior en las niñas; (2) los ítems que involucran realizar permutaciones de 4 o 5 objetos no lograron ser respondidos correctamente, por lo que la combinatoria es considerada uno de los conceptos vinculados a la probabilidad que mayor dificultad presenta para estos alumnos, además de la aplicación del principio multiplicativo y de los diagramas de árbol; (3) unos de los conceptos que se evidencia como fundamental para una adecuada comprensión de la probabilidad es el de razón; (4) existe un bajo dominio y comprensión del lenguaje vinculado a la probabilidad por parte de los alumnos. De esta manera a la luz de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario, es que el autor concluye que gran parte de los alumnos no alcanza el nivel de las operaciones formales en relación al concepto de razón, aún cuando han superado la edad esperada para alcanzar dicho nivel de acuerdo con las etapas piagetanas. Lo que conduce a Green a pensar que los alumnos finalizan su formación escolar estando en la etapa de las operaciones concretas para dicho concepto, lo que incide directamente en la adecuada comprensión de la probabilidad desde un punto de vista clásico. Bajo esta perspectiva es que Green (1983) propone desarrollar un programa de actividades de clase prácticas y vinculadas a la experimentación, que permitan eliminar los errores de pensamiento probabilístico y construir de manera progresiva, y acorde a cada edad, experiencias que conduzcan a desarrollar un razonamiento probabilístico desde las primeras edades.

Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier y Lipson (1993) estudian cómo entienden el concepto de probabilidad un grupo de estudiantes de primaria. Para ello, les presentan un problema vinculado al lanzamiento de una moneda honesta que es lanzada 5 veces, preguntándoles ¿qué resultado es el más y menos probable? de las siguientes secuencias: a) cccss, b) sccsc, c) scsss, d) cscsc y e) las cuatros secuencias son igualmente probables. En base a las respuestas se observó que gran parte de los estudiantes respondió correctamente la pregunta sobre el resultado más probable. Mientras que sólo un 38% respondió correctamente la pregunta sobre el resultado menos probable, justificando sus respuestas en base a la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982). Los resultados se atribuyen a que los estudiantes presentan un razonamiento probabilístico basado en los resultados.

Truran (1994) analiza la utilización de la comprensión probabilística por parte de un grupo de 32 estudiantes de 8 a 15 años, cuando se ven enfrentados a situaciones en las que deben elegir entre dos opciones, aquella urna que contiene una mayor proporción de bolas de un determinado color. Por medio de los resultados amplia notablemente la *gamma* de estrategias, que hasta ese momento habían sido descritas en investigaciones anteriores, incluyendo, entre otras, los siguientes tipos: no da razón para la elección, simple descripción del contenido de las urnas sin hacer una elección, respuesta correcta pero sin justificación (intuición), utilizar estrategias diferentes para cada caja, inclinación hacia el número menor, comparación de probabilidades entre las dos urnas, por mencionar algunas. Además, en su investigación evidencia que los niños de estas edades son capaces de utilizar adecuadamente el lenguaje probabilístico, así como de otorgar buenos argumentos para sucesos seguros e imposibles.

Watson y Collis (1994) analizaron las interpretaciones que los alumnos dan a los diagramas de barras para determinar si un dado es honesto o no, encontrándose con que gran parte de los alumnos argumentaban que debían experimentar con el lanzamiento del dado par determinar si éste es o no sesgado.

Fischbein y Schnarch (1996, 1997) estudian la evolución de las heurísticas y sesgos probabilísticos con la edad (Kahneman *et al*., 1982), con el objeto de dilucidar si éstas se forman durante la infancia o producto de una pobre instrucción en probabilidad. Para ello, administraron un cuestionario conformado por 7 problemas que se enfocaban en los errores probabilísticos de: representatividad, los efectos de recencia positiva y negativa (Fischbein, 1975; Fischbein, Nello y Marino, 1991), sucesos simples y compuestos (Lecoutre y Durand, 1988; Fischbein, Nello y Marino, 1991), la falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982; Shaughnessy, 1992), la influencia del tamaño de la muestra (Kahneman y Tversky, 1982), disponibilidad (Kahneman y Tversky, 1982) y la falacia del eje temporal (Falk, 1986 y Shaughnessy, 1992). Al analizar las respuestas de los estudiantes cuyas edades fluctuaban entre los 10 y 16 años se concluye que para los errores analizados, se dan tres tipos de evolución a medida que la edad aumenta: los que permanecen estables (sucesos simples y compuestos), los que disminuyen (la heurística de la representatividad y el efecto de recencia negativa y falacia de la conjunción) y los que se incrementan (influencia del tamaño de la muestra, disponibilidad y falacia del eje temporal). Según los autores estos resultados se deben a que existen esquemas intelectuales (principios generales) que con la edad se hacen mas claros e influyentes en sus decisiones.

Serrano (1996) analiza los significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial en la enseñanza de la probabilidad.

Para ello, entrevista a 10 alumnos de 16 años y les plantea problemas de probabilidad desde el punto de vista del enfoque frecuencial. Los resultados muestran que los alumnos de esta edad tienen un razonamiento combinatorio correcto a partir de la secuencia de resultados que se les presentó, además de comprender el carácter imprevisible de los fenómenos aleatorios y de la regularidad de las frecuencias de los posibles resultados. Pese a lo anterior estos alumnos muestran heurísticas incorrectas para la asignación de probabilidades, como la representatividad, además de ideas incorrectas que los llevan a generalizar la regla de Laplace a contextos en los que no es pertinente, es decir, presentan el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992), además del sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra. Así a partir de estos resultados Serrano (1996) diseña un cuestionario conformado por 10 ítems que permiten evaluar el reconocimiento y generación de secuencias aleatorias y la interpretación frecuencial de la probabilidad. Este cuestionario es aplicado a estudiantes de 13 y 17 años, observándose que en relación al reconocimiento y generación de secuencias aleatorias, los estudiantes esperan que éstas presenten alternancias entre distintas las distintas posibilidades y en ausencia de patrones establecidos, además de que esperan que la frecuencia relativa converja a la probabilidad teórica. Por último, en lo que se refiere a la interpretación frecuencial de la probabilidad, estos estudiantes presentaron dificultades para interpretar la probabilidad desde este enfoque.

Cañizares (1997) estudia la influencia del razonamiento proporcional y combinatorio, y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Para ello, realiza un análisis entre las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder (1951) y Green (1983) desde una perspectiva clásica de la probabilidad versus las de Fischbein (1975) realizadas desde una perspectiva intuitiva de la probabilidad, puesto que para la autora ambas perspectivas o significados son complementarios para el adecuado desarrollo en los niños de la probabilidad y de los conceptos vinculados a ésta. Además, realiza un análisis estructural de los instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico intuitivo de los niños utilizados en las investigaciones de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984) dilucidando que en el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) se otorga gran importancia a la aproximación intuitiva de la probabilidad basada en las creencias y factores culturales, incluyendo además contextos cotidianos como vinculados a las loterías. Tales aspectos y contextos no se encuentran presentes en el cuestionario de

Green (1983) pues este se centró mayoritariamente en abordar una amplia *gamma* de conceptos vinculados a la probabilidad, mientras que Fischbein y Gazit (1984) se abocaron solo a aspectos vinculados a la comparación de probabilidades. Luego de este análisis realiza una comparación experimental de los dos cuestionarios por medio del estudio de la correlación existente entre ambos instrumentos. Para ello, aplicó el cuestionario de Green (1983) a una muestra de 251 estudiantes de 11 a 14 años, y el cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) a una muestra ampliada a 320 niños entre los 10 y 14 años. En general, los resultados de ambas aplicaciones fueron mejores que los obtenidos por Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984), pues, ambas muestras de niños mostraron nociones intuitivas correctas en relación al carácter impredecible de experimentos aleatorios, comparación de probabilidades sencillas, probabilidades geométricas y condicional. Asimismo, se pudo observar que estos alumnos utilizan un mayor número de estrategias para la resolución de problemas avanzados que se fundamentan en un razonamiento de tipo proporcional, por otro lado muestran una mejor comprensión y utilización del lenguaje probabilístico a excepción de los términos improbable e imposible ante los cuales manifiestan cierta dificultad. Sin embargo, y pese a lo anterior, este grupo presentó grandes dificultades en varios aspectos, tales como: (1) el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos; (2) interpretación de diagramas de árbol; (3) independencia vinculada a los juegos de lotería; (4) comprensión de sucesos imposibles; (5) resolución de problemas que involucran permutaciones; (6) razonamiento combinatorio y proporcional escaso. También, se pudo observar la presencia de los sesgos clásicos de equiprobabilidad, representatividad, recencia positiva y negativa, además de concepciones erróneas en relación a la aleatoriedad semejantes a las reportadas por Serrano (1996).

En consecuencia, a partir de los resultados obtenidos de ambas aplicaciones, Cañizares (1997) concluye que si bien las intuiciones probabilísticas mejoran con la edad, algunos sesgos como la heurística de la representatividad o la incapacidad para reconocer independencia en contexto de juegos de loterías no mejorar, e incluso empeoran levemente con la edad. Dado lo anterior, “se confirma la hipótesis de complejidad del razonamiento probabilístico de los niños y la necesidad de un estudio específico de cada uno de los factores que lo configuran” (Cañizares, 1997, p. 94).

En relación a la comparación experimental de los dos cuestionarios el análisis factorial mostró la existencia de factores independientes en ambos cuestionarios, además de una falta de correlación entre ellos. Es por esta razón que Cañizares (1997) decide confeccionar un nuevo instrumento compuesto por 16 ítems, de los cuales 7 fueron tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984), 7 del cuestionario de Green (1983) y dos de elaboración propia. Este nuevo cuestionario, enfocado en la comparación de probabilidades simples y el uso de factores subjetivos en la asignación de probabilidades como componentes específicos del razonamiento probabilístico de los niños, fue aplicado a una nueva muestra de 143 niños de 10 a 14 años, de los cuales se eligieron a 8 alumnos a quienes se aplicó una entrevista en profundidad. Dentro de las conclusiones que se obtuvieron con la aplicación de este tercer cuestionario destacamos las siguientes: (1) se evidencia una adecuada comprensión de las nociones de suceso seguro, aunque en algunos casos es confundido con la noción de suceso posible; (2) se observó un escaso razonamiento combinatorio, además de una fuerte presencia del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y del enfoque en el resultado (Konold, 1989) los cuales aumentarían ligeramente con la edad; (3) el nivel de razonamiento proporcional involucrado en la resolución de problemas de comparación de probabilidades fue escaso en relación a los niveles propuestos por Noelting (1980); (4) a partir de las entrevistas se pudo observar casi nula relación entre la existencia de supersticiones y el nivel de razonamiento proporcional.

Falk y Wilkening (1998) investigan la asignación de probabilidades, en niños de 6 a 14 años, pero utilizando experimentos distintos a los comúnmente utilizados, proponiendo el uso de tareas de ajuste de probabilidad por medio de un juego de apuestas, que involucra dos urnas con diferente composición, donde la primera urna contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras, y la segunda 6 bolas negras. El experimento consiste en presentar ambas urnas a los niños y preguntarles ¿cuántas bolas habría que agregar a la segunda urna para que la probabilidad de extraer un bola blanca sea la misma en ambas urnas?. En base a las respuestas de los niños se pudo evidenciar que los niños de 6 a 7 años no fueron capaces de igualar las probabilidades de la segunda urna con la primera utilizando las nociones de proporcionalidad. Mientras que los niños de 9 a 10 años si bien lograron integrar las dimensiones de probabilidad y proporcionalidad, no lograron tomar una decisión correcta, pues se basaban en la diferencia entre el número de bolas blancas y negras en cada urna. Por su parte, los niños de 13 años tuvieron un desempeño casi perfecto al utilizar la proporcionalidad. Así, a partir de los datos, los autores concluyen que para un determinado nivel, la maestría en tareas de elección binaria precede a la habilidad de ajustar probabilidades.

Pratt (1998, 2000, 2005) analizan los significados que conceden a los fenómenos aleatorios niños de 10 y 11 años antes y después de un proceso de instrucción asistido por *software*. Para ello, entrevistó a los niños preguntándoles ¿qué significado dan al termino aleatorio?, los resultados muestran que para este grupo un fenómeno aleatorio es entendido como algo impredecible, irregular, incontrolable y equitativo. Luego de la entrevista se solicitó a los niños trabajar con un *software* que permite realizar simulaciones con dados, monedas y ruletas y de este modo establecer conjeturas sobre los resultados y sus relaciones con determinados conceptos probabilísticos. Una vez finalizado el experimento se observa que el *software* tuvo un efecto positivo en los niños, pues éstos comprenden de mejor manera qué es un fenómeno aleatorio, además de aprender algunos conocimientos sobre probabilidad frecuencial, el efecto del número de ensayos sobre las frecuencias relativas, así como distribuciones iniciales sobre probabilidades.

Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) analizaron la habilidad para identificar el espacio muestral de situaciones aleatorias en niños de 8 y 9 años, observando que alrededor del 40% de éstos no consideraba que todos los resultados del espacio muestral se pueden dar realmente en un experimento aleatorio simple. Según los autores esto se debería a que el concepto de espacio muestral es concebido desde un punto de vista determinista. Mientras que otro porcentaje importante de la muestra presentó problemas para determinar los elementos del espacio muestral, lo que de acuerdo con Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) puede deberse a una falta de razonamiento combinatorio, o bien a que es un concepto poco tratado dentro del currículo (English, 2005).

Amir y Williams (1999) estudian la influencia de los factores culturales, creencias religiosas o actitudes fatalistas en las heurísticas, sesgos y intuiciones probabilísticas, entrevistando para ello a 38 estudiantes de 11 y 12 años pertenecientes a distintas razas y diferentes contextos culturales y religiosos. A partir de las respuestas dadas por los alumnos se concluye que éstos utilizan, para la asignación de probabilidades, un razonamiento de tipo mixto (racional e irracional), el cual se vería fuertemente influenciado por las experiencias pasadas, y las creencias siendo éstas últimas las más influyentes en el razonamiento probabilístico.

Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999) analizan las concepciones sobre juego equitativo en niños de 10 y 14 años, para ampliar y profundizar los resultados obtenidos en estudios anteriores (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997; Cañizares y Batanero, 1998). Para ello realizaron entrevistas a los niños, en las que se pudo observar que algunos alumnos no son capaces de diferenciar entre un suceso equiprobable y uno no equiprobable, sin embargo, la gran mayoría muestra una concepción adecuada de juego equitativo, siendo capaz de resolver correctamente los problemas presentados.

Aspinwall y Tarr (2001) realizan un estudio sobre el efecto de un programa de instrucción cuyo objetivo es facilitar la comprensión de la ley de los grandes números en 23 estudiantes de 6º grado. Para cumplir con dicho objetivo el programa constaba de cinco sesiones en las que se abordaban tareas de simulación de fenómenos aleatorios, además de preguntas clave orientadas a visualizar si los estudiantes comprender el rol que juega el tamaño de la muestra en la estimación de probabilidades desde un enfoque frecuencial, y por último se les solicitaba un reporte escrito para analizar su razonamiento probabilístico en profundidad. Para analizar la eficacia de este programa se aplicó un pre test y un post test a los alumnos, arrojando una diferencia significativa entre ambos por lo que Aspinwall y Tarr concluyeron que el programa de instrucción tiene un efecto positivo en el aprendizaje de la ley de los grandes números en alumnos de 11 y 12 años.

Polaki (2002) comparó la comprensión de la probabilidad en dos grupos de 12 niños de 4º y 5º grado de educación primaria que recibieron instrucción sobre el tema pero con metodologías diferentes. El primer grupo recibió instrucción desde una perspectiva clásica, por medio de la generación de muestras pequeñas con datos experimentales a partir de los cuales se determinaban probabilidades considerando el espacio muestral generado. El segundo grupo recibió instrucción desde una perspectiva frecuencial en la que se realizaban simulaciones de experimentos por medio de un computador, de manera previa al análisis de la estructura del espacio muestral. Para analizar el efecto en el aprendizaje de las dos metodologías de instrucción se aplicó una prueba a ambos grupos. Los resultados reflejaron un efecto positivo de ambas metodologías en el desarrollo del pensamiento probabilístico de los niños, pues las diferencias de los resultados a la prueba entre ambos grupos no fueron significativas. Por otro lado, se evidenció que los niños de estos grados no lograron comprender el efecto que tiene en la convergencia de los datos el tamaño de la muestra, lo que lleva a pensar a los autores que el estudio de la probabilidad desde un enfoque frecuencial puede ser demasiado abstracto para niños de este nivel, sobre todo si no se encuentran familiarizados con el uso de la computadora para la simulación de experimentos aleatorios.

1.5 Investigaciones sobre formación de los profesores para enseñar probabilidad

Durante las últimas décadas la probabilidad ha cobrado importancia en los currículos de primaria y secundaria de numerosos países. Un aspecto clave para asegurar que las nuevas propuestas curriculares, que incorporan el tratamiento de la probabilidad desde muy temprana edad, tengan éxito, es la formación de los profesores. Sin embargo, la mayoría de los profesores, sobre todo de primaria, tienen poca o ninguna preparación en relación a probabilidad y su didáctica, lo que les proporciona inseguridad para tratar dichos temas y en consecuencia para lograr una enseñanza idónea de la probabilidad (Pierce y Chick, 2011). Producto de esta falta de preparación, en muchas ocasiones, la enseñanza de la probabilidad se omite, ya que es considerada un tema de menor importancia para la formación de los estudiantes (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006), y cuando se realiza se focaliza, principalmente, en la enseñanza de fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas (Batanero, Ortiz, Serrano, 2007).

Por otra parte, los documentos curriculares y los libros de textos, que en muchas ocasiones constituyen un apoyo para la labor del profesor, en el caso de la probabilidad, no ofrecen el apoyo suficiente, pues éstos en su mayoría presentan una visión sesgada o incompleta de la probabilidad (Ortiz, 1999; Cañizares, Ortiz, Batanero y Serrano, 2002; Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2005). Dado lo anterior, se limita a los estudiantes en el desarrollo de una experiencia estocástica basada en una metodología activa y exploratoria de fenómenos aleatorios, que permita el desarrollo de un razonamiento probabilístico desde la infancia, para lo que se requiere, en gran medida, de profesores que comprendan la probabilidad y los aspectos relacionados a su enseñanza, así como los posibles errores y dificultades a los cuales podrían verse enfrentados sus estudiantes. (Sthol, 2005).

Es dado lo anterior, que se requiere de investigaciones que den cuenta de la formación y de las necesidades de formación de los profesores para enseñar probabilidad, puesto que muchas de las actividades que realizan los profesores en el aula dependen directamente de su conocimiento didáctico y matemático en relación al tema en cuestión (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001). Aún cuando hay algunos estudios sobre el conocimiento que los profesores necesitan para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1990 y Kvatinsky y Even, 2002), las investigaciones sobre el conocimiento didáctico y matemático de los profesores en probabilidad y su enseñanza son escasas, sobre todo en lo que se refiere a profesores en activo de educación primaria, pues la mayoría se centra en profesores en formación. Es por esta razón que el *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) *Study 18, "Statistics Education in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education*" (Batanero, Burrill y Reading, 2008; Batanero, Burrill, Reading, 2011) ha impulsado el desarrollo de una línea de investigación centrada en la formación de profesores para enseñar estadística y probabilidad, lo que ha traído consigo un aumento paulatino de las investigaciones sobre la formación de los profesores para enseñar probabilidad, dentro de las cuales es posible distinguir, claramente, dos líneas de estudio dentro de este campo, aquéllas ligadas a las actitudes y creencias de los profesores frente a las probabilidades y su enseñanza, y las relacionadas con el conocimiento disciplinar y didáctico. Es en esta última en la cual nuestro estudio busca profundizar, puesto que de acuerdo a investigaciones recientes, se ha podido evidenciar que los profesores en formación presentan concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad y conceptos vinculados a ella (Ortiz, Mohamed y Serrano, 2010), lo que les lleva a abordar de manera inadecuada el proceso de enseñanza-aprendizaje de este tema; mientras que un grupo importante de profesores evita la enseñanza de la probabilidad debido a que le consideran un contenido de menor importancia, que podría representar dificultades para los estudiantes, o bien por falta de información y preparación (Serradó *et al*., 2006).

Esto se debería a que los programas de formación inicial, en gran parte, no incluyen dentro de sus mallas curriculares cursos relacionados a las probabilidades y su enseñanza, ya que éstas hasta hace un par de años formaban parte, casi únicamente, de la formación secundaria y no de la educación primaria como ocurre hoy en día (Batanero, Godino y Roa, 2004; Franklin y Mewborn, 2006).

Bajo esta perspectiva resulta interesante para nuestro estudio, el analizar las investigaciones que guardan relación con: el conocimiento probabilístico de los profesores, el conocimiento de la probabilidad en relación a los estudiantes y el conocimiento de la probabilidad en relación a su enseñanza.

1.5.1 Conocimiento probabilístico de los profesores

Gran parte de las actividades de enseñanza que realizan los profesores dependen directamente de su conocimiento matemático en relación al tema (Ball *et al*., 2001). Por lo que resulta de gran importancia que los profesores cuenten con un sólido conocimiento de la probabilidad, sobre todo si consideramos que es un tema que se ha incorporado recientemente en muchos currículos a nivel mundial y para el cual no todos los profesores han recibido formación didáctica y matemática durante su formación inicial. Las investigaciones al respecto son muy escasas y por lo general se centran en profesores en formación. Las investigaciones de las cuales se dispone se han llevado a cabo por medio de la aplicación de cuestionarios semejantes a los que han sido empleados en investigaciones sobre probabilidad en los estudiantes; y se centran principalmente en determinar si los futuros profesores cuentan o no con los conocimientos suficientes para llevar acabo una enseñanza idónea de la probabilidad.

Una de las primeras investigaciones en torno a las concepciones y el conocimiento probabilístico de futuros profesores de educación primaria fue realizada por Azcárate (1995) quien detectó concepciones erróneas y dificultades en relación a la noción de probabilidad; además de una baja comprensión de la noción de aleatoriedad y por ende en la comprensión del conocimiento probabilístico en una muestra de 57 futuros profesores. Esto se debía a que su razonamiento en relación a la noción de probabilidad, era más bien en base a un conocimiento de tipo cotidiano que en un conocimiento formal. Por otra parte, se detectaron serias dificultades en relación a la idea de juego equitativo, puesto que los futuros profesores, en su mayoría, no fueron capaces de diferenciar entre juego equitativo y no equitativo. Asimismo, se detectó la carencia de esquemas combinatorios y de instrumentos elementales para la asignación de probabilidades.

Los resultados de Azcárate (1995) se complementan con los obtenidos por Serrano (1996) quien evidencia dificultades, en un grupo de 10 futuros profesores, para realizar y evaluar experimentos aleatorios, encontrándose éstas principalmente ligadas al concepto de independencia de sucesos y al sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Investigación que más tarde es ampliada por Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998) quienes describen y analizan las respuestas, de 57 futuros profesores de educación primaria sin instrucción previa en el tema, a un cuestionario sobre sucesos aleatorios, encontrando que tales profesores presentan una concepción incompleta en relación a la aleatoriedad, pues en su mayoría no reconocen la aleatoriedad de los fenómenos presentados, sobre todo cuando se trata de fenómenos vinculados al contexto meteorológico y cotidiano, argumentando que "el sistema de condiciones que provoca el fenómeno no está modulado por el azar, al menos como elemento exclusivo y, por tanto, no es un fenómeno aleatorio" (Azcárate *et al*., 1998, p. 92), lo que deja entrever que el tipo de conocimiento que posee este grupo de futuros profesores, en relación a la noción de aleatoriedad, no está elaborado formalmente sino más bien a partir del sentido común. No obstante, perciben de manera correcta la existencia de multiplicidad de posibilidades, así como el carácter impredecible de los posibles resultados.

Carnell (1997), estudia la comprensión sobre la probabilidad condicional en un grupo de 13 profesores de secundaria en prácticas, observando que todos presentan dificultades y concepciones erróneas. Esto coincide con los resultados obtenidos por Falk (1988) quien al estudiar las dificultades y concepciones erróneas, de un grupo de estudiantes, vinculadas a los conceptos de independencia de sucesos y probabilidad condicional, determinó que gran parte de éstas se encontraban relacionadas con: la definición del evento condicionado, el orden temporal del evento condicionado, cuando el suceso condicionante ocurre después que el suceso que condiciona, y la confusión entre condicionalidad y causalidad (Batanero y Sánchez, 2005; Jones y Thornton, 2005; Tarr y Lannin, 2005). Desde esta perspectiva Jones (2005) plantea el interrogante de que si los profesores presentan las mismas dificultades y concepciones erróneas que los alumnos, ¿cómo pueden desarrollar lecciones y tareas apropiadas para facilitar la comprensión de la probabilidad condicional en sus alumnos?

Begg y Edward (1999) realizan entrevistas y aplican un cuestionario, a un grupo de 22 profesores australianos de primaria, quienes deben dar respuesta a tres situaciones relacionadas con ideas básicas de aleatoriedad, sucesos equiprobables e independencia. En base a las respuestas se detectó una escasa comprensión de la probabilidad y de las nociones que subyacen a ella, ya que alrededor de dos tercios de los profesores a quienes aplicaron el cuestionario, lograron dar respuesta satisfactoria a las situaciones planteadas. Además, fue posible evidenciar tres aspectos centrales, primero, que empleaban la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982), es decir, una confianza excesiva en el comportamiento de las pequeñas muestras, llevándolos a generalizar erróneamente para la población, segundo, la presencia de la creencia que todos los sucesos aleatorios son equiprobables (Lecoutre, 1992), y por último, dificultades para interpretar un enunciado de probabilidad de manera no probabilística (Konold, 1991). Sin embargo, este grupo de profesores manifestó estar más preocupados de conseguir ideas y actividades para enseñar en el aula, que de mejorar su propio conocimiento en relación a la probabilidad y su enseñanza. Es importante señalar que este tipo de dificultades y concepciones erróneas no solo se encuentran presentes en los profesores de primaria, sino también en los de secundaria y sobre todo en lo que se refiere a la comprensión de la probabilidad condicional.

Otro estudio que proporciona información relevante sobre el conocimiento de los profesores para enseñar probabilidad y estadística, es el realizado por Watson (2001) en Australia, quien al aplicar una encuesta a un grupo de 15 profesores de primaria y 28 de secundaria, logró dilucidar varios puntos importantes dentro de los cuales destaca el hecho de que los profesores de secundaria presentaban un mayor nivel de confianza en su capacidad para enseñar probabilidad que los profesores de primaria. Además de que al pedirles que eligieran un tema de datos y azar y que planificaran brevemente una lección, los profesores de primaria eligieron temas relacionados, principalmente, con ideas generales de azar y probabilidad en un contexto específico como el lanzamiento de una moneda; mientras que los profesores de secundaria eligieron ideas generales de azar y algunas distribuciones de probabilidad. Esto tendría su justificación en la casi nula preparación que reciben los profesores de primaria en relación a la probabilidad y su enseñanza, lo que les lleva a emplear una mentalidad determinista, a la hora de enseñar probabilidad, la cual se centra en un enfoque clásico orientado al cálculo de probabilidades *a priori*, aspectos que han sido ratificados por las investigaciones de Pereira-Mendoza (2002) sobre los conocimientos de probabilidad en profesores de primaria.

Batanero, Cañizares y Godino (2005), evaluaron la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico en una muestra de 132 futuros profesores, obteniendo como resultado que un 60% de los profesores en formación, a los que se aplicó el cuestionario, razonaban según la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982). Otro 60% de la muestra presentó el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992; Lecoutre y Durand, 1988), mientras que un 23% de los futuros profesores presentó un "*outcome approach*" dificultad para interpretar un enunciado probabilístico en forma no probabilística (Konold, 1991). Estos sesgos así como el razonamiento probabilístico, fueron reducidos y mejorados al utilizar metodologías de enseñanza basadas en la simulación, con dispositivos manipulativos, tablas de números aleatorios y utilización de *software*, como recurso didáctico que ayudó a superar las dificultades y concepciones erróneas.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evalúan las estrategias utilizadas para resolver problemas elementales de comparación de probabilidades, en 102 futuros profesores de educación primaria. Los resultados evidencian una mejora con respecto a investigaciones anteriores, aún cuando se observa, en un grupo importante de los participantes de la muestra, una falta de razonamiento proporcional para la resolución de algunos problemas, así como "la influencia de factores del problema que inducen a la asignación de probabilidades subjetivas" (Ortiz *et al*., 2006, p. 6). Los resultados de la evaluación a los futuros profesores fue comparada con los resultados obtenidos en la investigación de Cañizares (1997) realizada a alumnos de educación primaria. Pese a que los resultados de los futuros profesores son mejores que los de los alumnos, sus porcentajes de errores son muy altos, observándose en algunos casos que obtuvieron respuestas correctas en base a un razonamiento inadecuado.

Sáenz (1998) evalúa el conocimiento matemático de 140 futuros profesores de educación primaria. El instrumento de evaluación utilizado estaba conformado por ítems de la prueba PISA. Los resultados muestran que un 64% de los futuros profesores responde correctamente, lo que no es mucho mejor que los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba PISA. Por otro lado, el área temática que mayores dificultades presentó para los futuros profesores fue la de estadística y probabilidad.

Estrada y Díaz (2007) analizan los conocimientos probabilísticos de 65 futuros profesores de educación primaria sobre: cálculo de probabilidad simple; cálculo de una probabilidad condicional y cálculo de una probabilidad conjunta. Al analizar las respuestas se detecta un gran número de errores en todas ellas, sobre todo en las preguntas referidas a probabilidad condicional y conjunta.

El estudio de Estrada y Díaz (2007) es profundizado por Contreras (2011) quien se centra en el conocimiento sobre probabilidad condicional de 183 futuros profesores de educación primaria. Para lo cual, les propone un problema cuyos datos se encuentran presentados en una tabla de contingencia a partir de la cual deben calcular probabilidades simples, condicional y compuesta. Los resultados fueron peores que los de Estrada y Díaz (2007), puesto que los futuros profesores presentaron serias dificultades para leer la tabla y en el cálculo de las probabilidades pedidas.

Ortiz, Batanero y Contreras (2012) evalúan el conocimiento sobre la idea de juego equitativo de 167 futuros profesores de educación primaria. Para ello, analizan las soluciones dadas a dos problemas de respuesta abierta. Los resultados, a diferencia de los resultados obtenidos por Azcárate (1995), muestran que la gran mayoría de los futuros profesores tiene un conocimiento suficiente sobre la idea de juego equitativo y aplica estrategias, en su mayoría correctas, para decidir si un juego es o no equitativo. Los autores creen que esto se debe a que el problema que propuso Azcárate (1995) dificultó la tarea por falta de razonamiento combinatorio y no por falta de comprensión de la idea de juego equitativo.

Batanero, Gómez, Serrano y Contreras (2012) analizan las respuestas dadas por 157 futuros profesores de educación primaria a un problema sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad tomado de Green (1983). Los resultados muestran una mezcla de intuiciones y creencias correctas e incorrectas sobre la forma de percibir la aleatoriedad. Asimismo, se observan sesgos como la falacia del jugador o enfoque en el resultados, además de concepciones erróneas sobre la equiprobabilidad o la falta de comprensión de la independencia de sucesos.

Mohamed (2012) evalúa el conocimiento común del contenido de 283 futuros profesores de educación primaria en relación a la idea de juego equitativo, a través de sus respuestas a un problema extraído de un libro de texto de educación primaria. Los resultados evidencian que la mayoría de los futuros profesores tienen un escaso conocimiento común del contenido en relación a la idea de juego equitativo, puesto que son incapaces de identificar y aplicar correctamente la idea de juego equitativo a la resolución de los problemas planteados. Dentro de los errores y dificultades que aparecen con mayor frecuencia se encuentran: el sesgo de la equiprobabilidad y de la falacia del jugador, la incorrecta realización de cálculos de probabilidad, la falta de capacidad combinatoria que les ha impedido determinar completamente el espacio muestral. Por último, cabe destacar que casi un 25% de los futuros profesores no contestó el problema planteado.

Gómez (2014) evalúa el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de acuerdo con los distintos significados de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria, si bien los resultados son bastante alentadores, éstos indican un pobre razonamiento probabilístico y un predominio de las estrategias aritméticas.

1.5.2 Conocimiento de la probabilidad en relación a los estudiantes

Como hemos podido evidenciar en los apartados anteriores, son numerosos los estudios referidos al conocimiento de la probabilidad, y nos muestran que éste es un concepto complejo y difícil de entender, tanto para los profesores como para los estudiantes. Sin embargo, las investigaciones que evalúan el conocimiento del profesor de educación primaria referidas al conocimiento de la probabilidad en relación a los estudiantes, entendiendo por éste como "el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido en particular" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375), son todavía muy escasas.

Watson (2001) analizó en 15 profesores de educación primaria y 28 de educación secundaria, el conocimiento que estos tenían sobre las dificultades de los alumnos en relación a la probabilidad y la estadística. Al preguntarles por las dificultades de los alumnos para aprender probabilidad y estadística, tan solo dos profesores de educación primaria respondieron haber encontrado dificultades, mientras que trece profesores de secundaria manifestaron conocer dificultades de tipo procedimental o conceptual. Los resultados de este estudio concluyen que los profesores tienen un conocimiento de la probabilidad y la estadística en relación a los estudiantes adecuado. No obstante, manifiestan utilizar pocas actividades basadas en la simulación (en el caso de los profesores de secundaria) y no utilizar un enfoque adecuado hacia el estudio de los conceptos vinculados a la probabilidad (en el caso de los profesores de primaria). Puesto que se centran, principalmente, en el uso de algoritmos y procedimientos para la asignación de probabilidades.

Sthol (2005) examina las interpretaciones que dan 35 profesores de educación secundaria, al desempeño de los alumnos al trabajar con una herramienta de simulación. Estas interpretaciones reflejan que éstos solo identifican y critican la ausencia de ideas formales sobre probabilidad en los argumentos de sus estudiantes, dejando de lado algunos detalles de las interacciones de los alumnos con el *software* y del lenguaje empleado por éstos, que indican un desarrollo de ideas probabilísticas.

Mohamed y Ortiz (2012) evalúan el conocimiento del contenido y los estudiantes de 283 futuros profesores de educación primaria en relación a la idea de juego equitativo. Este tipo de conocimiento se infiere del análisis que realizan los futuros profesores sobre los contenidos matemáticos necesarios para resolver el problema y del análisis que éstos dan a respuestas correctas e incorrectas proporcionadas por alumnos de educación primaria que han resulto dichos problemas. Los futuros profesores muestran dificultad para discriminar entre las respuestas correctas e incorrectas dadas por los estudiantes al problema. En lo que se refiere a identificar las causas de los errores y dificultades presentes en las respuestas erróneas de los estudiantes, su desempeño fue insuficiente, esto quizás se deba a que "los futuros profesores carecen de habilidad para explicar los errores de los estudiantes y desconocen los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que trasmitirles, mediante una adecuada transposición didáctica previa" (Mohamed y Ortiz, 2012, p. 115).

Ortiz *et al*. (2012) evalúan el conocimiento del contenido y de los estudiantes en relación a la idea de juego equitativo de 167 futuros profesores de educación primaria. Bajo este propósito, solicitan a los futuros profesores determinar entre un grupo de respuestas realizadas por estudiantes de educación primaria, cuáles son correctas y cuáles son incorrectas. A diferencia de la investigación realizada por Mohamed y Ortiz (2012) estos futuros profesores muestran algunos, aunque escasos, conocimientos del contenido y los estudiantes en relación a la idea de juego equitativo. Puesto que logran identificar algunas de las posibles causas de los errores y dificultades, presentes en las respuestas incorrectas de los estudiantes, tales como el fallo en el razonamiento proporcional y la necesidad de jugar repetidamente para identificar si un juego es o no equitativo.

1.5.3 Conocimiento de la probabilidad en relación a su enseñanza

Dado que la probabilidad es un contenido nuevo en los currículos de educación primaria, las posibilidades que han tenido tanto los futuros profesores como los profesores en activo de desarrollar un conocimiento adecuado de la probabilidad y su enseñanza son pocas. Sobre todo si consideramos el hecho de que según Ponte (2008) un profesor adquiere las diversas componentes del conocimiento didáctico a lo largo del ejercicio profesional, lo que adquiere aún más gravedad si consideramos que la gran mayoría de los futuros profesores y sobre todo los profesores en activo no han recibido formación en el tema. Ahora, si consideramos el alto nivel de abstracción y complejidad que presentan la probabilidad y los conceptos vinculados a ella, veremos que el desarrollar un enfoque de enseñanza adecuado es una tarea bastante difícil, pues además de dicho nivel de abstracción y complejidad propias del concepto, se deben tener en cuenta diversos aspectos como por ejemplo, que existen distintos niveles de comprensión adecuados a cada edad (Steinberg, 1991).

Desde esta perspectiva, urge contar con investigaciones que den cuenta del conocimiento del contenido y la enseñanza, entendido como el conocimiento sobre los procesos adecuados para enseñar y evaluar un determinado contenido (Hill *et al*., 2008), sobre todo en temas como probabilidad y de este modo, levantar información que permita identificar elementos que posibiliten el desarrollo de este conocimiento en los profesores de educación primaria, de modo tal de entregarles las herramientas que les permita enseñar adecuadamente probabilidad a sus estudiantes.

> No se trata de conocer a fondo las teorías respectivas, cosa reservada a especialistas, sino de educar la intuición para que no parezcan cosas caprichosas ni milagrosas. Tal vez muchos de los inconvenientes del comportamiento global de grandes sectores de la población provenga de que la gran mayoría de los ciudadanos no han sido nunca educados en probabilidad y estadística (Santaló, 1977).

Sthol (2005) analiza cómo trabajan 35 profesores de educación secundaria al implementar una herramienta de simulación que permita desarrollar una enseñanza experimental de la probabilidad. Las observaciones muestran que los profesores fallan al implementar una metodología de enseñanza desde este enfoque, pues proponen a los estudiantes actividades en las que no era posible evidenciar la convergencia o en las que simplemente no se apreciaba la importancia del tamaño de la muestra, dado que utilizaban muestra demasiado pequeñas. Producto de esta falta de experiencia y de desconocimiento por parte de los profesores, los alumnos no lograron comprender la probabilidad desde un punto de vista frecuencial.

Batanero, Godino y Cañizares (2005) analizan el efecto de la implementación, en 132 futuros profesores de educación primaria, de un programa de trabajo basado en el uso de actividades de simulación con dispositivos manipulativos, tablas de números aleatorios y el *software Statgraphics*. Se concluyó que tuvo un efecto positivo pues los futuros profesores participantes mejoraron significativamente sus concepciones sobre probabilidad, lo que devela la importancia de la simulación como recurso didáctico para el estudio de la probabilidad en procesos de formación del profesorado.

López (2006) al analizar como profesores de educación primaria diseñan e implementan unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, observa que es una tarea de gran dificultad para éstos, pues no cuentan con los conocimientos matemáticos ni didácticos para enfrentarse a la enseñanza de conceptos que son nuevos para ellos.

Chick y Pierce (2008) realizan un estudio referido a la capacidad de los profesores para identificar los conceptos matemáticos centrales que pueden ser estudiados a partir de la resolución de un problema dado. Los resultados muestran que los profesores no son capaces de identificar los principales conceptos involucrados y menos aún hacer un uso didáctico adecuado de la situación problemática planteada, pues se limitaron a solicitar solo cálculos y gráficos a los estudiantes, en situaciones en las que no era pertinente.

Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) estudian la capacidad de futuros profesores de educación primaria para juzgar la idoneidad didáctica de procesos de instrucción sobre estadística y probabilidad. Se observó dificultad por parte de los futuros profesores para llevar acabo dicha evaluación, dada su escasa preparación sobre el tema y la complejidad del conocimiento didáctico del contenido. Por lo que se concluye que existe la imperiosa necesidad de mejorar la formación de los futuros profesores en relación a estos temas.

Contreras (2011) evaluó el conocimiento del contenido y la enseñanza sobre probabilidad condicional en 183 futuros profesores de educación primaria. Los resultados indican que estos futuros profesores cuentan con los conocimientos necesarios para identificar las variables didácticas que pudieran variar la dificultad del problema o variar el contenido, pero con gran dificultad, puesto que el número de respuestas correctas fue muy pequeño.

Ortiz, Batanero y Contreras (2012) evalúan el conocimiento de la idea de juego equitativo en relación a la enseñanza de 167 futuros profesores de educación primaria. Para lo que solicitan a éstos identificar los contenidos matemáticos puestos en juego para resolver los problemas propuestos. La gran mayoría logró reconocer en los problemas propuestos ideas sobre probabilidad y la regla de Laplace, un tercio reconoce la comparación de fracciones, y la gran minoría reconocer los conceptos de proporcionalidad, aleatoriedad, espacio muestral, comparación de probabilidades, juego equitativo, esperanza matemática, implícitos en los problemas. Estos resultados coinciden en cierta medida con los obtenidos por Chick y Pierce (2008), quienes, indican que los profesores no son capaces de identificar los principales conceptos involucrados en una situación didáctica, ya sea de estadística o probabilidad.

En este apartado hemos podido visualizar que son pocas las investigaciones que analizan el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria en activo, gran parte de los estudios existentes se centran en futuros profesores. Los resultados de tales investigaciones evidencian que el dominio del conocimiento para la enseñanza de la probabilidad es muy deficiente en los profesores de educación primaria, tanto a nivel disciplinar como didáctico, presentando en algunos casos, incluso los mismos errores y dificultades que los estudiantes de la etapa escolar.

Urge entonces, contar con profesores mejor preparados que tengan los conocimientos necesarios para llevar a cabo la implementación de los actuales currículos, sobre todo en temas como probabilidad, y que sean capaces de generar aprendizajes efectivos en sus estudiantes. Con esto no se quiere decir que sea necesario que los profesores cuenten con conocimientos matemáticos acabados de la probabilidad, como teoría de la medida, pero sí se requiere que tengan un conocimiento profundo y acabado del contenido a enseñar y de cómo enseñarlo. En nuestro caso un conocimiento y una comprensión profunda de la probabilidad y de ciertos aspectos básicos vinculados a ellas, entendiendo por comprensión profunda como aquellos "conocimientos que debería poseer un profesor, para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas" (Ma, 1999, p. 13), es decir, conocimientos vinculados a la enseñanza de la probabilidad, que le lleven a desarrollar de manera idónea la tarea de enseñar, ya que un profesor no puede enseñar lo que no sabe.

1.6 Modelos del conocimiento del profesor de matemáticas

Durante las últimas tres décadas, aproximadamente, son diversas las investigaciones que estudian en profundidad los conocimientos que los profesores deben poner en juego para enseñar matemáticas y provocar aprendizajes en sus estudiantes. Sobre todo si consideramos en los resultados de estudios como de los *Foundation for Success* (2008), reconociendo a los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores como un factor decisivo a la hora de lograr aprendizajes en sus estudiantes. Razón por la cual se hace necesario que los profesores conozcan y comprendan en profundidad la matemática que deben enseñar, así como aquellos tipos de conocimientos pedagógicos y didácticos necesarios para lograr una enseñanza eficaz. En este sentido, son variadas las investigaciones (Shulman, 1986, 1987; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Philipp, 2007; Sowder, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008 y Sullivan y Wood, 2008) de modelos que buscan identificar y caracterizar los componentes del conocimiento didáctico y matemático que un profesor debe tener para enseñar matemáticas de manera idónea. Sin embargo, aún no existe, al interior de la comunidad científica, un consenso sobre cuál es el modelo teórico más apropiado para describir y analizar los conocimientos didácticos y matemáticos que un profesor de matemática debe poseer.

> Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característico, …) los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 2009, p. 14).

Si nos situamos en el campo de la educación estadística y probabilística, es posible observar que son escasas las investigaciones (Godino, Batanero y Flores, 1999; Batanero, Godino y Roa, 2004; Burgess, 2008 y Lee y Hollebrands, 2008) que describen modelos referidos a los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores en relación a estos temas. Lo anterior, provocó que en el 2011 la *International Commission on Mathematics* (ICMI) y la *Association for Statistics Eduaction* (IASE) realizarán un llamado a la comunidad científica a impulsar las investigaciones centradas en la formación de los profesores de matemáticas para enseñar estadística y probabilidad. Puesto que si se quiere mejorar el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes, es necesario contar con profesores preparados, es decir, con un conocimiento adecuado sobre la probabilidad y sus didáctica (Sthol, 2005).

A continuación nos referimos, brevemente, a diferentes modelos teóricos de la didáctica de la matemática, que tratan sobre la formación y el conocimiento del profesor para enseñar matemáticas.

Shulman (1986) es reconocido como uno de los pioneros en realizar estudios en relación a los conocimientos del profesor para la enseñanza. Propone para ello tres tipos de conocimientos a considerar, que bautizó como: Conocimiento de los Contenidos (*Content knowledge*, CK), Conocimiento Pedagógico (*Pedagogical Knowledge*, PK) y Conocimiento Pedagógico de los Contenidos o Conocimiento Didáctico de los Contenidos (*Pedagogical Content knowledge*, PCK), al reconocer la necesidad de que los profesores deben aprender y manejar otros tipos de contenidos además del conocimiento matemático para una enseñanza eficaz de las matemáticas.

Según lo planteado por Shulman (1986) el Conocimiento Pedagógico de los Contenidos o Conocimiento Didáctico de los Contenidos, es aquel que se relaciona con las formas de enseñar el contenido, por lo tanto va más allá del contenido en cuestión, considerando sus representaciones, ejemplos, demostraciones, etc., colocando especial énfasis en cómo hacerlo comprensible para los estudiantes, para así enseñarlo mejor. Es decir, dicho contenido se refiere a:

> la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" o bien "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional (Shulman, 1986, p. 8-9).

Posteriormente, Shulman (1987) amplía y profundiza aún más en las categorías del conocimiento base que un profesor necesita para enseñar un determinado contenido, considerando como mínimo las siguientes:

- conocimiento del contenido;
- conocimiento pedagógico general, con énfasis en los principios generales y estrategias de gestión de aula y organización;
- conocimiento del currículo, especialmente lo referido a la comprensión, de materiales y programas que sirven como "herramientas del oficio" para los profesores;

- conocimiento pedagógico del contenido;
- conocimiento de los estudiantes y sus características;
- conocimiento de los contextos educativos, que va desde el trabajo del grupo o clase, hasta la administración y financiamiento escolar en distintas comunidades y culturas; y
- conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación, así como de sus fundamentos históricos y filosóficos (Shulman, 1987, p. 8).

Categorías que según Shulman (1987) pueden ser alcanzadas, por lo menos, a través de las siguientes fuentes: la formación académica en el contenido disciplinar a enseñar; el contexto del proceso educativo y materiales relacionados; investigaciones sobre educación, relacionadas con organizaciones sociales, aprendizaje humano, enseñanza y desarrollo y otros fenómenos sociales y culturales que influyen en la labor de los profesores; y por último, la sabiduría que otorga la propia práctica.

Hoy en día, la propuesta de categorías de Shulman (1986, 1987) continúa vigente, pese a que las interpretaciones iniciales han sufrido ciertos cambios, y algunas han cobrado mayor protagonismo en el desarrollo de investigaciones que otras, tal es el caso de la categoría “conocimiento pedagógico del contenido” la cual de acuerdo con lo planteado por Ponte y Chapman (2006) tuvo un importante desarrollo en la orientación de investigaciones relacionadas con caracterizar y analizar el conocimiento del profesor desde dicha perspectiva.

Durante los últimos años, destacan los trabajos desarrollados por Deborah Ball y su equipo (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), quienes basándose en los trabajos de Shulman (1986, 1987), introducen la noción de *“Mathematical knowledge for Teaching”* (MKT), el cual se define como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374).

Lo anterior, lleva a Hill *et al*. (2008) a proponer un modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (figura 1.5) en el que se caracteriza el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la matemática escolar, estableciendo, además, la existencia de una correlación positiva entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el logro de aprendizaje matemático en los estudiantes.

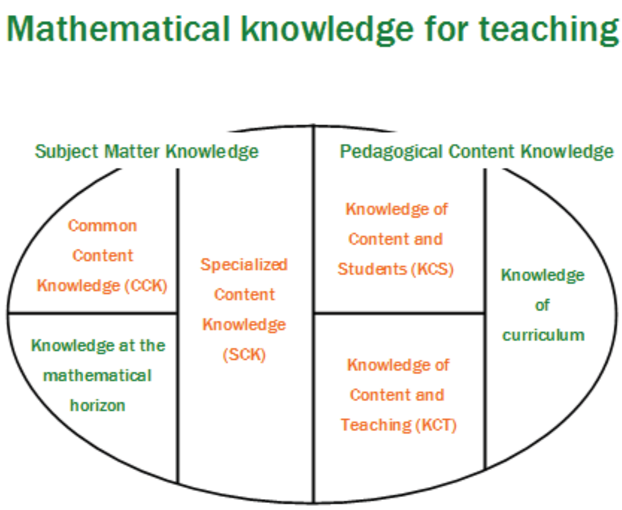


Figura 1.5 Conocimiento matemático para la enseñanza (Hill *et al*., 2008, p. 377)

En este modelo se distinguen dos grandes componentes del conocimiento matemático para enseñar. Por un lado (componentes de la izquierda), se encuentra el conocimiento del contenido disciplinar, el cual se encuentra compuesto, a su vez, por: el conocimiento común de los contenidos a enseñar (CCK), el conocimiento del horizonte matemático y el conocimiento disciplinar especializado (SCK); y por otro lado (a la derecha) se encuentran las componentes del conocimiento pedagógico del contenido, las cuales incluyen: el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), y por último el conocimiento del currículo que se enseña.

- Conocimiento común del contenido: se refiere a “aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas” (Hill *et al*., 2008, p. 377), es decir, es un conocimiento en relación a un determinado tema matemático, no es exclusivo de la enseñanza, que posee un matemático o cualquier persona que ha pasado por la educación escolar, y que es capaz de aplicarlo a la resolución de problemas de una amplia variedad de contextos (Ball *et al*., 2008).
- Conocimiento del horizonte matemático: se refiere al conocimiento utilizado por el profesor para establecer conexiones entre un contenido y otros temas del currículo, es decir, es un conocimiento que proporciona perspectiva al trabajo del profesor. En

otras palabras, es "una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y al instrucción presentes están situadas" (Ball y Bass, 2009, p. 6).

- Conocimiento especializado del contenido: este tipo de conocimiento es específico del profesor y es utilizado para articular tareas propias de la enseñanza. Es decir, se refiere "al conglomerado de conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza" (Ball *et al*., 2008, p. 400) e incluye aspectos centrales de la enseñanza tales como: "cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema" (Hill *et al*., 2008, p. 377-378).
- Conocimiento del contenido y los estudiantes: es entendido como "el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular" (Hill *et al*., 2008, p. 375). Es decir, se centra en doilucidar, por ejemplo, "cuál es la mejor manera de construir el pensamiento matematico en los estudiantes, o cómo solucionar los errores de los estudiantes. Está focalizado en la comprensión de los profesores de cómo los estudiantes aprenden un contenido particular" (Hill *et al*., 2008, p. 378).
- Conocimiento del contenido y la enseñanza: se refiere al conocimiento de las metodologías adecuadas para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de un determinado tema. En otras palabras:

> combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático para el diseño de la instrucción. Los profesores secuencian contenidos particulares para la instrucción. Los profesores eligen los ejemplos para comenzar con el proceso de enseñanza y aprendizaje, y los ejemplos que usan para ayudar a los estudiantes a profundizar en el contenidos. Los profesores evalúan las ventajas y desventajas instruccionales de las representaciones usadas para la enseñanza de ideas especificas e identifican los diferentes métodos y procedimientos permisibles en el proceso de instrucción. Cada una de esas tareas requiere una interacción entre una comprensión matemática específica y una comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes (Ball *et al*., 2008, p. 401).

- Conocimiento del currículo: se refiere a las características del currículo que el profesor debe conocer para así articular, de mejor manera, los distintos contenidos con otras asignaturas o dentro de su misma asignatura.

Sin duda alguna los componentes y categorías del conocimiento matemático para la enseñanza propuestas por Hill *et al*. (2008) constituyen un valioso aporte para el desarrollo de investigaciones que busquen caracterizar y analizar los conocimientos que debe tener un profesor para enseñar matemáticas de forma idónea. Sin embargo, aún hay varios aspectos, del conocimiento del profesor de matemáticas, que todavía permanecen abiertos, como por ejemplo, referidos a: establecer criterios de evaluación del conocimiento matemático para la enseñanza, cómo desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza en los profesores, la relación existente entre las distintas categorías, entre otros. Un indicador de esto es “el hecho de que muchos investigadores no ofrecen una descripción precisa y compartida del conocimiento pedagógico del contenido sino más bien intentan caracterizarlo con listas o ejemplos, esto es una indicación de que el concepto está aún mal definido” (Graeber y Tirosh, 2008, p. 124). Postura que coincide con el planteamiento de Silverman y Thompson (2008), quienes consideran que:

> aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores (Silverman y Thompson, 2008, p. 499).

Otro modelo que busca analizar los conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas es el elaborado por Schoenfeld y Kilpatrick (2008), quienes proponen la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas. Esta noción es entendida como la competencia profesional del profesor de matemáticas para ejercer una enseñanza de calidad. De acuerdo a lo planteado por Schoenfeld y Kilpatrick (2008), la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas se alcanza a través de la integración de las siguientes dimensiones: a) conocimiento de las matemáticas escolares con profundidad y amplitud; b) conocimiento de la forma en que piensan los

estudiantes; c) conocimiento de la forma en que aprenden los estudiantes; d) diseñar y gestionar entornos de aprendizaje; e) desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la "enseñanza para la comprensión"; y f) construir relaciones que apoyen el aprendizaje; g) reflexionar sobre la propia práctica.
Del mismo modo éstos autores plantean que por medio de nuevos refinamientos y elaboraciones la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas podría llegar a constituir una teoría de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas.

Es importante destacar que si bien los modelos del conocimiento matemático para la enseñanza, han ganado su espacio en la investigación y formación de profesores, estos aún son muy generales y no permiten contar con un análisis minucioso de los tipos de conocimientos que deberían poseer los profesores para lograr una enseñanza efectiva de las matemáticas, y más aún en el caso de la probabilidad. Es bajo esta perspectiva que Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) realizan un análisis de los principales modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, identificando en ellos ciertas limitaciones, por lo que elaboran, a partir del modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill *et al*., 2008) y de la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), un modelo teórico integrador sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor, desde la mirada del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En este modelo la expresión conocimiento didáctico-matemático es entendida como el conocimiento didáctico y las competencias profesionales que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar matemáticas, de modo de provocar aprendizajes en sus alumnos.

Godino (2009) profundiza en este modelo integrador y refina algunas de las nociones anteriormente consideradas, pues considera que éstas son aún demasiado generales, por lo que:

> sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar

> el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor (Godino, 2009, p. 19).

Dado lo anterior, el modelo del conocimiento didáctico-matemático comprende algunas de las categorías de los modelos antes descritos, que se complementan y desarrollan con elementos del EOS, ofreciendo de este modo nuevas herramientas de análisis para el conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Más tarde, este modelo del conocimiento didáctico-matemático evoluciona reinterpretando y refinando las premisas iniciales planteadas en Godino (2009), proponiendo una reestructuración más acabada de los componentes del MKT, en las que queda de manifiesto el vínculo e interacción entre ellas y las seis facetas o dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (este modelo se describe en el capítulo 2).

CAPÍTULO 2
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

2.1 Presentación

No es desconocido que los requerimientos de la sociedad varían muy rápidamente, cambiando al mismo tiempo lo que los alumnos necesitan aprender en la escuela. Estos cambios exigen una mayor preparación por parte de los profesores para ejercer la enseñanza en los distintos ciclos educacionales que conforman el sistema escolar. Tal es el caso de la probabilidad, que durante los últimos veinticinco años, aproximadamente, se ha ido incorporando fuertemente en los currículos de matemática a nivel parvulario, básico, medio y superior en gran parte de los países desarrollados. Dentro de los principales motivos por lo que se ha decidido incorporar la probabilidad de manera continua y progresiva en el currículo, se encuentra su utilidad y presencia en numerosas situaciones de la vida diaria, en las que es necesario disponer de un razonamiento crítico que permita interpretar y comunicar distintos tipos de información, además de su estrecho vínculo con distintas disciplinas. Esta iniciativa ha contado, desde 1989, con el apoyo del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) al ser este organismo pionero en incluir "Datos y Azar" como una área temática en el currículo de matemáticas *Currículum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989). Esta iniciativa ha ido cobrando fuerza con el transcurso de los años, generando una verdadera reforma en los currículos de matemática de diversos países que se ha plasmado, en la última década, en los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000).

Dada esta situación de cambios se hace necesario contar con profesores preparados que logren que sus alumnos alcancen estos nuevos requerimientos y que utilicen enfoques adecuados para enseñar los contenidos recientemente incorporados, como es el caso de la probabilidad. Esta transformación curricular representa un verdadero desafío para las instituciones formadoras, ya que la gran mayoría de profesores no ha contado durante su formación inicial con asignaturas que les permitan alcanzar una enseñanza eficaz de la probabilidad. Bajo esta perspectiva, es necesario contar con estudios sobre la enseñanza de la probabilidad en educación primaria, y más específicamente vinculados a los conocimientos didácticos-matemáticos que los profesores de primaria deben poner en juego a la hora de enseñar estos contenidos, sobre todo en países como Chile en el que tales estudios son aún muy escasos. Es en este escenario que surge esta investigación, a través de la cual se busca evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad de profesores en activo de educación primaria.

Comenzamos este capítulo con la definición de nuestro problema de investigación, para continuar con la presentación y descripción de algunos de los principales elementos que consideramos pertinentes del "Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática" (EOS), los cuales otorgarán el sustento teórico a nuestra investigación, más precisamente el modelo del conocimiento didáctico-matemático desarrollado por Godino y su equipo.

Así, a partir de dicho modelo y de las herramientas y elementos teóricos propios del EOS, hemos formulado los objetivos de investigación tanto general como específicos, a través de los cuales se busca dar respuesta a la pregunta que guía esta investigación. Además, se ha explicitado el enfoque metodológico y las distintas fases de la investigación, que permitirán alcanzar cada uno de los objetivos propuestos y responder a la pregunta de investigación.

Por último, se finaliza el capítulo exponiendo los objetivos de la investigación, así como una breve descripción del enfoque metodológico utilizado y de las distintas fases que conforman esta investigación. Puesto que, en el capítulo 4 se incluye una descripción en profundidad de la metodología utilizada para llevar a cabo este estudio.

2.2 Problema de investigación

Durante las últimas décadas, el estudio de la probabilidad se ha incorporado con mucha fuerza en los currículos de matemática escolar en los distintos niveles de enseñanza, caracterizándose por presentar un enfoque renovado en su enseñanza, pues se presenta de forma más experimental, de modo de poder incorporar su tratamiento y proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades. Lo anterior, ha generado una verdadera reforma en gran parte de los países desarrollados o en vías de desarrollo como es el caso de Chile.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) es el pionero al incluir, en 1989, como área temática en el currículo de matemáticas a "Datos y Azar" en el *Currículum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989) iniciativa que ha sido imitada por diversos países, y ha adquirido continuidad con los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000). Cuyo propósito es proveer de una visión y dirección necesarias para que todo los estudiantes obtengan una Educación Matemática de alta calidad. Para ello, se sugiere una base común de conocimientos y procesos matemáticos a desarrollar por los estudiantes a lo largo de toda su etapa escolar. Estos se concretan finalmente en estándares de contenidos que detallan los aprendizajes y el nivel de profundidad que los estudiantes deberían alcanzar, en relación a los ejes de Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad, y en los estándares de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación) a desarrollar en cada una de las distintas etapas de su educación escolar.

Estos estándares de procesos nos ofrecen un conjunto de herramientas (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación) que facilitan la adquisición y uso de contenidos matemáticos en los estudiantes, ya que a partir de los estándares de procesos los estudiantes se introducen progresivamente en las formas de pensar propias de las matemáticas como: razonar, argumentar, descubrir, representar, modelizar, demostrar, etc. Estos procesos de pensamiento matemático les permiten construir nuevos conocimientos y sobre todo otorgar aplicabilidad a los distintos contenidos tratados, vinculándoles no tan solo con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, sino también con contextos de la vida cotidiana (Alsina, 2012). En este punto es crucial la labor del profesor, pues éste debe ser capaz de lograr una correcta interacción entre los estándares de contendidos y los de procesos, para así contribuir al desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes. Lo cual de acuerdo con Niss (2002) implica desarrollar la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel.

Así por medio de estos estándares, se busca establecer un conjunto de conocimientos y competencias matemáticas que lleven a los estudiantes a una comprensión de la matemática escolar en profundidad, es decir, a desarrollar la capacidad de pensar y razonar matemáticamente. Tal como se indica en la versión española de los estándares americanos, "las matemáticas constituyen una disciplina altamente interconectada, las áreas descritas se superponen e integran. Los procesos pueden aprenderse con los contenidos, y los contenidos junto con los procesos" (NCTM 2003, p. 32-33).

Bajo esta perspectiva la labor del profesor es crucial tanto para la adquisición como el desarrollo de los conocimientos y procesos propuestos, pues el otorgar un determinado nivel de atención a los distintos estándares, a lo largo de todo el currículo escolar, permitirá tanto a estudiantes como a profesores establecer conexiones entre los distintos contenidos y procedimientos. Labor que se ve acrecentada, si consideramos la reciente incorporación de diversos conocimientos y competencias matemáticas vinculadas al estudio de la probabilidad por medio de la incorporación del eje de "Análisis de Datos y Probabilidad" (NCTM, 2003), pues muchos de los profesores que son llamados a enseñar los contenidos y procesos que subyacen a este eje pueden no haber tenido durante sus estudios universitarios una formación adecuada, que les permita responder a los actuales requerimientos de "desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos y por último, comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad en sus estudiantes" (NCTM, 2003, p. 51).

Lo anterior, nos lleva a preguntarnos ¿qué sucede con los profesores? ¿son sus conocimientos sobre la probabilidad y su enseñanza adecuados y suficientes para llevar a cabo la implementación de estos nuevos currículos?, pues no hay que olvidar que finalmente, son ellos los llamados a implementar y poner en marcha tales currículos, razón por la cual es necesario preguntarse ¿con qué nivel de conocimiento tanto disciplinar como didáctico cuentan los profesores, para responder a las actuales exigencias curriculares?, y a su vez responder ¿qué tipo conocimiento tanto disciplinar como didáctico es necesario trasmitirles, de manera que puedan responder a las actuales exigencias curriculares?

Pues creemos fehacientemente que para la implementación de estos currículos es necesario realizar un análisis tanto del conocimiento disciplinar como didáctico sobre la probabilidad que poseen los profesores, y así determinar cuáles son sus fortalezas y debilidades para entregarles una formación específica que permita, finalmente, mejorar la enseñanza de la probabilidad en las escuelas.

Chile, al igual que muchos países no se encuentra ajeno a estos cambios y necesidades, pues durante los últimos años su currículo escolar ha atravesado por un constante proceso de actualización, ajuste y revisión, el cual busca acercarlo a las tendencias internacionales. Es así como, el Ministerio de Educación (MINEDUC) mediante la actualización 2009 del Marco Curricular de Educación General Básica y Media (Decreto 256/2009 y 254/2009) incorporó y adelantó el tratamiento de muchos contenidos en el sector de matemática, En este sentido, se destaca el contenido de "Tratamiento de la Información" por sufrir las mayores modificaciones, pues se integró dentro del currículo como un nuevo eje temático, llamado "Datos y Azar", ya que de acuerdo con este ajuste curricular, los contenidos referidos a estadística deben ser abordados desde el Primer Ciclo de Educación General Básica a lo largo de los doce años de escolaridad. Mientras que el contenido de probabilidad deber ser estudiado a partir del Segundo Ciclo de Educación General Básica. No obstante, este proceso de ajuste curricular 2009, ha sido recientemente sustituido por la introducción de las nuevas Bases Curriculares de Educación Básica 2012 para la asignatura de matemática de 1º a 6º año básico. En ellas se observan nuevas exigencias para este nivel educativo, una de ellas es la incorporación del eje temático de "Datos y Probabilidades" como un continuo en la Educación General Básica. Con esto, el Mineduc busca "responder a la necesidad de que todos los estudiantes se inicien en temas relacionados con las probabilidades" (MINEDUC, 2012, p. 5) y a la vez aminorar los desfases existentes entre el currículo nacional e internacionales. Estos desfases han quedado de manifiesto, principalmente, con el análisis de los resultados obtenidos por nuestros estudiantes en mediciones tales como: *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) y *Programme for International Student Assessment* (PISA), si bien es cierto que los resultados de las últimas aplicaciones han experimentado una cierta mejoría, en ambas mediciones, nuestro país se ubica muy por debajo del promedio internacional en el área de matemáticas. Estos bajos resultados y niveles de logros obtenidos han sido una de las principales razones por las que el Ministerio de Educación ha decidido dar un vuelco a la tendencia de posponer el tratamiento de temas más desafiantes hacia los grados superiores, con un menor nivel de exigencia en los grados iniciales de la educación básica. Por lo que se decide incorporar el tratamiento de ciertos contenidos de manera temprana y continua a lo largo de los doce años del currículo nacional. Tal es el caso del estudio de la probabilidad la cual en nuestro actual currículo y en muchos currículos internacionales es introducida desde los primeros cursos de básica, puesto que:

> …este tipo de conocimiento es usado desde temprano en la vida de niños, niñas y jóvenes: "es posible, imposible, seguro o probable". Por otro lado, es de un uso creciente en la vida cotidiana para todos los ciudadanos y ciudadanas, ya sea en el manejo financiero o en la información de resultados de encuestas, sondeos de opinión u otras formas de uso de la información de tipo estadístico. (MINEDUC, 2009, p. 7)

Esta iniciativa representa un avance en materia de formación ciudadana dada su aplicabilidad en situaciones cotidianas, tales como: para la comprensión de noticias, hechos, etc., y para la toma de decisiones; como conocimiento base de distintas disciplinas científicas y tecnológicas y finalmente como herramienta para el desarrollo del razonamiento crítico. No hay que olvidar que dada la complejidad de muchos de los conceptos vinculados al estudio de las probabilidades y la conexión de éstos con otras áreas de las matemáticas y de distintas disciplinas, es finalmente la escuela quien debe asumir, ineludiblemente, el deber de preparar a los estudiantes en este ámbito.

Preparación que se debe desarrollar de manera progresiva desde los primeros años de escolaridad, para así lograr capacitar a todos los estudiantes para "comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad" (NCTM, 2003, p. 54).

Bajo esta perspectiva, es fundamental contar con profesores preparados que logren que sus estudiantes alcancen los objetivos planteados acordes a los nuevos programas de estudios. De este modo, se plantean nuevas exigencias de una mayor preparación para los profesores que enseñan matemáticas en los distintos ciclos educacionales que conforman el actual sistema escolar, ya que en su gran mayoría éstos no han contado en su formación inicial con asignaturas que les permitan alcanzar una enseñanza eficaz de la probabilidad. Entenderemos por enseñanza eficaz, a aquella que "requiere que el profesor sea capaz de comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender y, en consecuencia, les desafía y apoya para aprender bien los nuevos conocimientos" (NCTM, 2003, p. 17).

Así, dada la actual situación de cambios y requerimientos por la cual atraviesa el país, se hace necesario mejorar tanto los programas de formación inicial, como aquellos de formación continua del profesorado sobre todo en lo que se refiere a la probabilidad y los aspectos vinculados a su enseñanza. Esto cobra aún más relevancia, si consideramos que para Chile las cifras internacionales no son para nada alentadoras, puesto que revelan severas falencias en la calidad educativa en general y de manera particular en matemáticas. De hecho, según el Reporte de Competitividad Global 2011-2012 del *World Economic Forum*, en un ranking de 142 países, Chile se encuentra en el número 87 en calidad general de la educación, y en el número 124 en calidad de la educación de matemáticas/ciencias. Información que se ve reforzada con el informe 2010 de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), de acuerdo al cual nuestro país debe encauzar sus esfuerzos hacia la mejora de la formación de profesores en todo los niveles educativos, sobre todo en lo que se refiere a los profesores de educación básica. Puesto que éstos "reciben una formación general, y los conocimientos que adquieren sobre las materias no resultan suficientes ni siquiera para los cursos iniciales" (OCDE, 2010, p.10). Otra investigación que avala lo antes expuesto y que otorga más evidencia sobre la enseñanza eficaz de la matemática es el estudio comparativo internacional *Teacher Education and Development Study in*

Mathematics (TEDS-M), el cual en su informe de resultados *Breaking the Cycle, An Internacional Comparison of U.S. Mathematics Teacher Preparation* (2010), da a conocer resultados bastante preocupantes, en especial para nuestro país. Pues sitúa al desempeño de nuestros futuros profesores de enseñanza básica entre los peores del mundo, incluso muy por debajo de los resultados obtenidos por países con niveles de desarrollo iguales e inferiores al chileno.

Esta necesidad de mejoramiento no tan solo se ve avalada por cifras internacionales, sino también por estudios nacionales que al igual que los anteriores reflejan serias falencias en los programas de formación inicial docente de los profesores de educación básica. Tal es el caso de la Prueba Inicia la cual se aplica desde el año 2008 a los estudiantes recién egresados de Pedagogía en Educación Básica, y cuyo objetivo principal es el de verificar calidad de la formación inicial docente, para lo cual recurre a cuatro instrumentos de evaluación: 1) Pruebas de Conocimientos Disciplinarios (lenguaje y comunicación, matemáticas, historia, geografía y ciencias sociales, y ciencias naturales); 2) Prueba de Conocimientos Pedagógicos; 3) Prueba de Habilidades de Comunicación Escrita; y 4) Prueba de Habilidades Básicas TICs en ambiente pedagógico.

Es importante señalar que los contenidos evaluados por la prueba de conocimientos disciplinarios se encuentran definidos de acuerdo a los Estándares Orientadores para Egresados de Carreras de Pedagogía en Educación Básica (MINEDUC, 2011). Estos estándares, impulsados por el programa inicia, surgen como respuesta a las recomendaciones realizadas por el Consejo Asesor Presidencial para la calidad de la educación el año 2006. En ellos se señala qué debe “saber” y “saber hacer” un egresado de las carreras de Pedagogía en Educación General Básica para ser considerado competente en el ámbito de la enseñanza en la Educación Básica, destacando para ello, aquellos aspectos indispensables para desempeñarse en forma efectiva en el aula escolar.

Los resultados en la última aplicación de la prueba inicia 2011 son bastante preocupantes puesto que “un 69% de los recién egresados de Pedagogía en Educación Básica tienen conocimientos insuficientes en lenguaje, Matemática, Ciencia y Ciencias sociales, es decir, no demuestra conocimientos y habilidades necesarios para iniciar el ejercicio de la profesión docente" (MINEDUC, 2012).

Es en este escenario de cambios y desafíos que surge esta investigación, a través de la cual se busca responder a la pregunta:

¿Qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo?

Para así, aportar evidencias con sustento teórico, orientadas al cambio y a la mejora de la práctica educativa, que permitan, finalmente, contribuir a mejorar los procesos de formación inicial y continua del profesorado en probabilidad, y por ende contribuir a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de educación básica. Pues el contar con profesores idóneamente capacitados es fundamental para el logro de las exigencias curriculares del mundo actual, acordes a los requisitos chilenos.

2.3 Marco Teórico

2.3.1 Introducción

En este apartado se presentan los fundamentos teóricos de nuestra investigación, que nos permitirán analizar el conocimiento didáctico-matemático (CDM) que poseen los profesores de educación primaria para enseñar probabilidad, y analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo y los libros de texto de educación primaria. Para luego, en base a los análisis realizados aportar evidencias que permitan otorgar directrices que contribuyan al desarrollo en profesores de educación primaria de un conocimiento didáctico-matemático idóneo para la enseñanza de la probabilidad. Para de este modo contribuir a orientar los procesos de formación tanto inicial como continua del profesorado respecto a este contenido y de este modo mejorar la práctica educativa. Para ello, consideraremos aspectos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

Dado que la problemática de esta investigación es de tipo cognitivo e instruccional, pues se busca, por un lado, estudiar en profundidad el conocimiento didáctico-matemático de los profesores para el logro de una enseñanza idónea de la probabilidad en educación primaria, y por otro, analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo y los libros de texto, es que comenzaremos este apartado describiendo algunos de los elementos teóricos que utilizaremos en nuestra investigación y que forman parte del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), referente teórico, que da sustento a esta investigación. Pues este lente teórico de la Didáctica de la Matemática, nos brinda un modelo de categorías de análisis para estudiar en detalle todos aquellos aspectos que se relacionan con el conocimiento didáctico-matemático de los profesores. Puesto que considera las diversas facetas implicadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. De esta manera, es posible evaluar, identificar, clasificar y analizar tanto los conocimientos que necesitan los profesores para las enseñanza, como aquellos conocimientos que ponen en juego a la hora de enseñar un determinado contenido, en nuestro caso los vinculados a la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.

2.3.2 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática es un marco teórico de la didáctica de la matemática que se inicia a principios de los años 90 (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), quienes desde 1994 han continuado ampliando, profundizando y desarrollando este modelo integrativo de distintos puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje.

Este marco surge a partir de la necesidad de articular puntos de vista y nociones teóricas de las diversas aproximaciones teóricas que existen en didáctica de la matemática y construir así un núcleo sólido de conceptos y métodos de análisis, lo que se cristaliza finalmente en un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática. Por medio de este enfoque ontológico-semiótico se busca "aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo" (Godino, 2002, p. 5). Para ello, Godino propone llevar a cabo el análisis de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de las dimensiones: epistemológica, cognitiva e instruccional. Abordándose cada una de ellas por medio de herramientas teóricas que se encuentran agrupadas en los modelos teóricos de:

- Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a y b);
- Teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Font, Godino y D'Amore, 2007)
- Teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Font, Planas y Godino, 2010).
- Además de la reciente incorporación de un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor (Godino, 2009).

Con estas herramientas se busca abordar los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por medio de la modelización de los conocimientos a enseñar y de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. Para lo cual adopta una perspectiva global que contempla: un modelo epistemológico que se basa en supuestos antropológicos y socioculturales; un modelo de cognición sobre bases semióticas; un modelo instruccional sobre bases socio-constructivistas y por último un modelo sistémico-ecológico que estudia las relaciones entre sí de los modelos anteriores.

Es importante señalar que para el logro de lo anteriormente descrito el EOS concibe a la matemática desde tres puntos de vista:

- Como una actividad matemática, socialmente compartida, vinculada a la resolución de problemas, ya sean internos o externos a las matemáticas.
- Como un lenguaje simbólico particular de las matemáticas que permite expresar y comunicar ideas y conceptos matemáticos.
- Como un sistema conceptual que se encuentra lógicamente organizado.

Centrando su interés en los objetos matemáticos que emergen a partir de las prácticas matemáticas involucradas en la resolución de un problema, donde cobra gran relevancia la noción de situación-problemática, entendida ya sea como un problema, proyecto, ejercicio, tarea, etc. que requiere de la actividad matemática para su solución. Es así como, a partir de la noción de situación-problemática, se definen conceptos que son fundamentales para este marco teórico, tales como los conceptos de: prácticas, objetos (personal e institucional) y significados.

2.3.2.1 Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

Bajo el enfoque del EOS se considera como práctica matemática a “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Dichas prácticas pueden ser comunes dentro de una institución o comunidades de prácticas que se interesan en resolver un mismo tipo de situaciones-problemáticas, o bien pueden ser particulares a una persona en específico. Sin embargo, en el estudio de las matemáticas más que las prácticas en sí, lo que interesa estudiar son los sistemas de prácticas vinculados a la actuación de las personas ante la resolución de determinados tipos de situaciones-problemáticas, es decir, se busca dar respuesta a los interrogantes ¿qué es un determinado objeto matemático?, a modo de ejemplo, en nuestro caso ¿qué es la probabilidad? o ¿qué significa o representa una determinada expresión?, ya sea a nivel personal o institucional, pregunta que se responde por medio del análisis del sistema de prácticas, involucradas para resolver una situación-problemática (que podría ser el asignar una probabilidad de ocurrencia a un determinado evento), que realiza una persona (significado personal) o por medio del análisis del sistema de prácticas al interior de una institución (significado institucional) vinculadas con dicho objeto.

Cabe destacar que dichos significados (personal e institucional) serán relativos, puesto que dependerán y se verán influenciados en cierta medida de los contextos sociales y de los sujetos involucrados, lo que lleva a introducir una tipología de significados institucionales y personales (Godino, 2003, p. 141) que ha sido esquematizada en la figura 2.1:

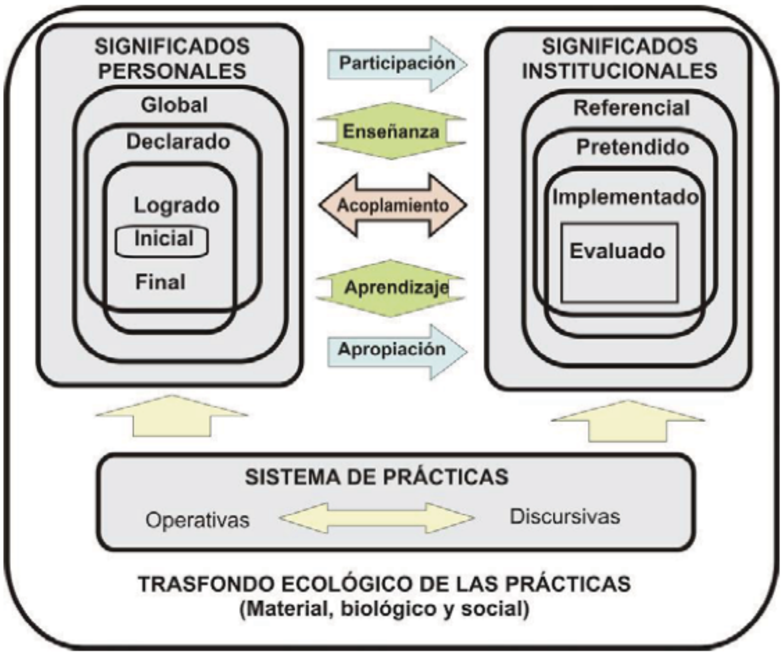


Figura 2.1 Tipos de significados institucionales y personales (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 6)

En ellas se distinguen claramente distintos tipos de significados institucionales y personales. Proponiendo los siguientes tipos de significados institucionales: referencial (vinculado al sistema de prácticas que es considerado en una enseñanza o investigación de la probabilidad), pretendido (lo que se pretende enseñar de probabilidades), implementado (aquello que realmente el profesor logra enseñar) y evaluado (lo que se evalúa). Mientras que para los significados personales se consideran los siguientes tipos: global (asociado a la totalidad del sistema de prácticas que un sujeto conoce y que es capaz de manifestar en relación a la probabilidad), declarado (lo que se puede evaluar que un sujeto sabe sobre probabilidad, a partir de las respuestas correctas e incorrectas dadas a una evaluación) y logrado (aquello que el sujeto es capaz de manifestar de acuerdo con los significados institucionales, como un diferencial entre los significados personales iniciales de los estudiantes, en relación a la probabilidad, y aquellos que finalmente han sido alcanzados).

Así a partir del acoplamiento, de manera progresiva, entre los distintos tipos de significados institucionales y personales, antes descritos, es posible establecer relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, donde según Godino (2002) la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

2.3.2.2 Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Así a partir de los sistemas de prácticas, tanto operativas como discursivas, emergen nuevos objetos matemáticos (Godino *et al*., 2007) que contemplan las dimensiones social y personal del conocimiento, puesto que pueden ser considerados objetos institucionales si emergen desde los sistemas de prácticas compartidos en una institución, o personales si emergen desde los sistemas de prácticas de una persona.

Bajo esta perspectiva los autores proponen tipos de objetos matemáticos o entidades primarias que se pueden observar en un texto matemático (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos), los cuales se configuran como se muestra en la figura 2.2.

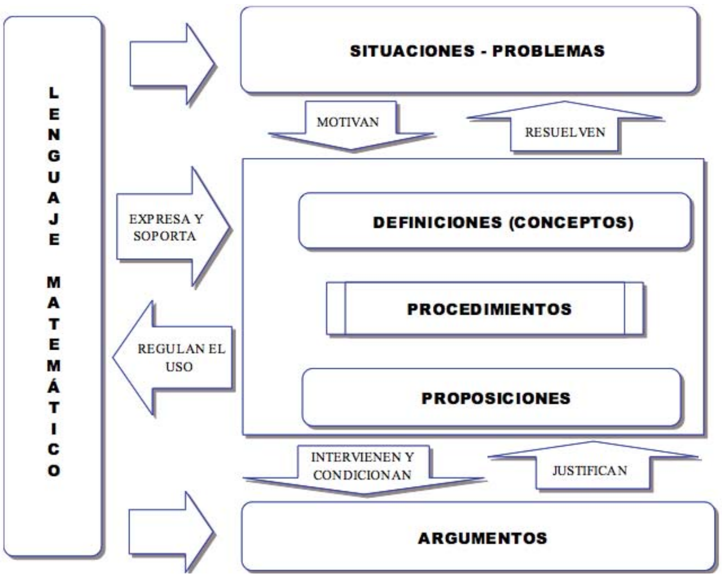


Figura 2.2 Configuración de objetos primarios (Font y Godino, 2006, p. 69).

Donde la tipología de objetos primarios propuesta consiste en:

- Elementos lingüísticos: entendidos como aquellos términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. que son empleados para enunciar o resolver problemas, ya se de forma escrita, oral, gestual, etc.
- Situaciones-problemas: abarca todas las aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, tareas, etc. que llevan a desarrollar una actividad matemática.

- Conceptos-definición: se refiere a las definiciones y conceptos vinculados a un objeto matemático que los alumnos deben recordar y aplicar para dar solución a un problema matemático.
- Proposiciones: concierne a los enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que deben ser utilizados para la resolución de problemas matemáticos.
- Procedimientos: se refiere a los algoritmos, operaciones, técnicas de calculo, etc. que los alumnos deben conocer y aplicar para la resolución de problemas matemáticos.
- Argumentos: son los enunciados utilizados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, o bien la solución de los problemas.

A partir de lo anterior, se introduce la noción de configuración de objetos y significados, la cual permite describir los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema matemático, es decir, "identificar los objetos matemáticos puestos en juego y significados dados a los mismos en los procesos de formulación y resolución de problemas matemáticos específicos" (Rivas y Godino, 2010, p. 194). Es así como, surge la "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS) (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) como una herramienta de análisis didáctico, que permite, por medio de una tabla de dos columnas (tabla 2.1), identificar los tipos de objetos (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) puestos en juego en la resolución del problema con los significados a los que se refieren.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, tareas, etc. que llevan a desarrollar una actividad matemática)	
Elementos Lingüísticos (términos y expresiones matemáticas, símbolos representaciones graficas, etc.)	
Conceptos-Definición (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Propiedades (enunciados para los cuales se requiere una justificación o prueba)	

Procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos)	
Argumentos (justificaciones, demostraciones o pruebas de las proposiciones usadas)	

Tabla 2.1 Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados

Así, por medio del empleo de la GROS es posible identificar potenciales conflictos de significados, que facilitarían la identificación de posibles errores, dificultades y concepciones erróneas que podrían surgir durante la resolución del problema.

Según lo planteado por Godino *et al*. (2007) es posible evidenciar ciertas relaciones entre los distintos tipos de objetos, que llevan a conformar configuraciones o redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas; que los autores clasifican en epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). A su vez cada uno de los objetos antes descrito, tiene asociado un proceso matemático: problematización, comunicación, definición, enunciación, argumentación y algoritmización (Godino, 2002; Godino *et al*., 2007; Godino y Font 2007). Y por último, tanto los objetos intervinientes como emergentes pueden ser considerados desde diferentes facetas o dimensiones duales que dan origen a la siguiente tipología secundaria de los objetos:

- Personal – institucional: si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338).
- Ostensivo – no ostensivo: referido a los objetos que pueden ser materializados de alguna manera, que pueden ser mostrados a otros, ya sea por medio del uso de los ostensivos asociados al objeto (notaciones, símbolos, gráficos, etc.) o implícitamente en el discurso matemático.
- Expresión – contenido: son considerados bajo esta dualidad aquellos objetos que se encuentran en relación con otros por medio de una función semiótica, donde una persona o institución distingue en base a un determinado criterio entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado).
- Extensivo – intensivo: esta dualidad permite explicar y centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general.

- Unitario – sistémico: son considerados desde esta dimensión aquellos objetos que bajo ciertas circunstancias son considerados unitarios y bajo otras compuestos de varios objetos.

Así como la tipología de objetos primarios tiene asociado procesos matemáticos, en la tipología de objetos secundarios también es posible distinguir ciertos procesos cognitivos/epistémicos asociados a las dualidades antes descritas: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización/concreción – idealización/abstracción; expresión/representación – significación (figura 2.3).

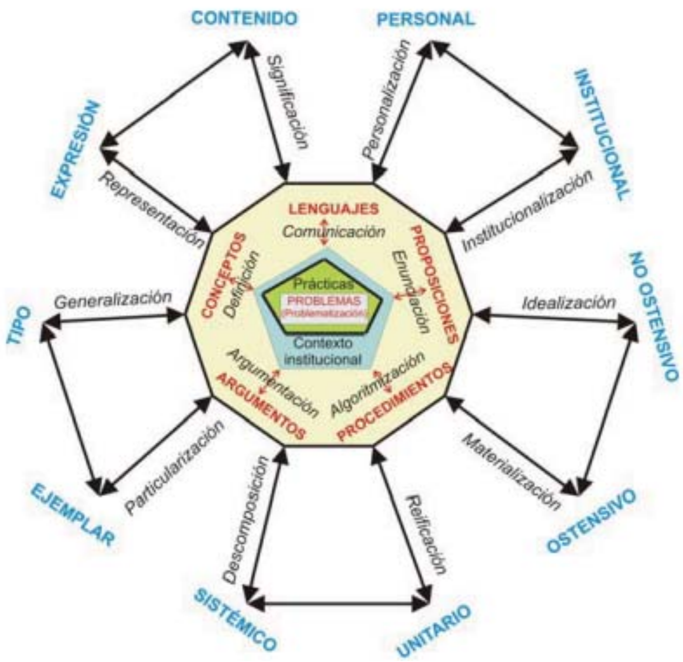


Figura 2.3 Configuración de objetos y procesos (Godino *et al*., 2007, p. 10)

En la figura 2.3 es posible apreciar una panorámica general de los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, y de las configuraciones de objetos y procesos involucrados, anteriormente descritos.

2.3.2.3 Noción de idoneidad didáctica, componentes e indicadores

Otra herramienta teórica del EOS importante de analizar, dada la naturaleza de este estudio, es la noción de idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006), pues esta es una valiosa herramienta para la reflexión del profesor acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje y su pertinencia o adecuación al proyecto de enseñanza, así como de los distintos factores que en él influyen. Esta noción permite estudiar, de manera sistemática, los problemas relacionados con el diseño, desarrollo y evaluación de situaciones didácticas y procesos de enseñanza y aprendizaje. Su principal finalidad es mejorar, de manera paulatina, las prácticas de enseñanza de las matemáticas, y de este modo pasar de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa.

En concordancia con la finalidad de la idoneidad didáctica, Godino y su equipo definen la noción de idoneidad didáctica como "un *criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados"* (Godino, Batanero y Font, 2006, p. 133; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005, p. 15).

Proponiendo estudiar la idoneidad didáctica (idoneidad global) de un proceso de estudio (enseñanza y aprendizaje) o de instrucción matemática, por medio de la articulación de los siguientes seis componentes (Godino *et al*., 2007):

- Idoneidad epistémica: con ella se busca medir el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), en relación a un significado de referencia, es decir, en qué medida los significados de los objetos matemáticos involucrados en un proceso de estudio son apropiados desde el punto de vista de la matemática.
- Idoneidad cognitiva: se refiere al grado en que los significados pretendidos (o implementados) en un proceso de estudio pueden ser alcanzados o aprendidos por los estudiantes, así como la proximidad entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados pretendidos (o implementados) por el profesor.
- Idoneidad interaccional: considera que un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor idoneidad, desde el punto de vista interaccional, si la forma en que se encuentra estructurado el proceso de enseñanza y aprendizaje permite, identificar conflictos semióticos potenciales (*a priori*), y a la vez dar solución a aquellos conflictos que se presentan durante el proceso de instrucción.

- Idoneidad mediacional: se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Idoneidad afectiva: alude al grado de interés o motivación de los estudiantes en el proceso de estudio, relacionándose con factores que dependen de la institución, y con factores que dependen básicamente del estudiante y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica: se refiere a la coherencia entre el proceso de enseñanza-aprendizaje y el proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

La noción de idoneidad didáctica junto a sus componentes, es esquematizada por medio de la figura 2.4 que resume sus principales características. A partir de ella podemos observar que los autores representan la idoneidad didáctica de un proceso de estudio por medio de un hexágono regular que considera *a priori* el máximo grado de idoneidad para cada uno de sus componentes; donde el hexágono irregular al interior representa el grado de idoneidad real, es decir, aquel que finalmente ha sido logrado durante la implementación de un proceso de estudio. Dado que todo proceso de estudio contempla el desarrollo de conocimientos específicos, es que se han situado en la base del hexágono las idoneidades cognitiva y epistémica.

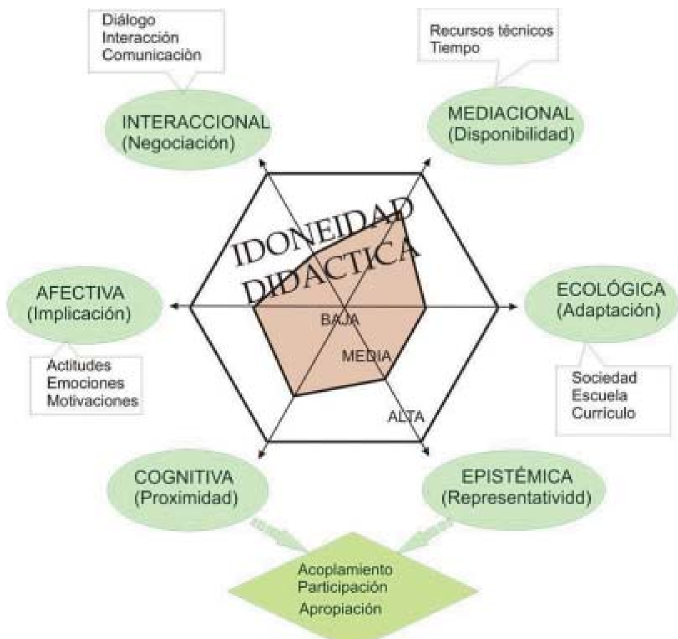


Figura 2.4 Idoneidad didáctica y sus componentes (Godino *et al*., 2006, p. 6).

Es importante destacar que el logro de una alta idoneidad en una de las dimensiones no garantiza la idoneidad didáctica del proceso de estudio, pues se debe prestar atención a los distintos componentes y sus relaciones, dado que la idoneidad didáctica busca interrelacionar las distintas facetas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) que inciden en el diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Como vemos el análisis del grado de idoneidad didáctica de un proceso de estudio es un proceso complejo, ya que se requiere del análisis de distintas facetas y componentes, así como de las interrelaciones que se dan entre ellas. Factores que no son fácilmente observables, razón por la cual Godino (2011) ha desarrollado un conjunto de componentes e indicadores empíricos de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que hacen operativas cada una de las idoneidades descrita y que pueden servir de guía ya sea para el diseño, implementación o evaluación de procesos de estudio. Tales componentes e indicadores se describen a continuación:

a) Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

Como se ha descrito en los puntos anteriores, la idoneidad epistémica busca medir el grado de representatividad de los significados implementados respecto de un significado de referencia. Para ello es importante precisar un significado de referencia con respecto al cual se va a realizar el análisis del proceso de estudio, para luego fijar la atención en la distribución que se da a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje a tales significados, es decir, en los contenidos matemáticos, en el orden y frecuencia con que se presentan, además del nivel de profundidad y pertinencia con que son abordados de acuerdo al nivel educativo.

Desde esta perspectiva Godino (2011) presenta los siguientes componentes e indicadores que permiten evaluar la idoneidad epistémica (tabla 2.2). A partir de la tabla, se observa gran protagonismo de las situaciones-problemas, en concordancia con la concepción antropológica que otorga a la matemática el EOS, en la que “los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinadas tareas problemáticas” (Godino, 2011, p. 8).

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, etc.) traducciones y conversiones entre las mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

Tabla 2.2 Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática) (Godino, 2011, p. 9)

De lo anterior, se desprende que para el logro de una alta idoneidad epistémica es fundamental una correcta y minuciosa selección y adaptación de las situaciones-problemas que se presentan a los alumnos, pues estas deben ser capaces de lograr en ellos un aprendizaje matemático por medio de la resolución de problemas en los que sea necesario aplicar y establecer relaciones entre distintos conceptos, sin dejar por ello de lado otros elementos que también son importantes en el aprendizaje de las matemáticas como los distintos tipos de representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos.

b) Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Dado que la idoneidad cognitiva expresa al grado en que los significados pretendidos en un proceso de enseñanza y aprendizaje pueden ser alcanzados por los alumnos, es que Godino (2011) propone los siguientes componentes e indicadores para la idoneidad cognitiva (tabla 2.3):

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (viene se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se puede alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversos componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; influencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva. - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Tabla 2.3 Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva (Godino, 2011, p. 10)

En la tabla 2.3 es posible observar que para valorar la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio, es de gran importancia el grado de dificultad de las situaciones-problemas o tareas que se presentan a los alumnos, sin dejar de lado el hecho de que éstas sean un desafió para los estudiantes, el cual debe ser adecuado a su nivel y conocimientos previos. Además del alcance que se otorga a la evaluación como herramienta de retroalimentación que permite evidenciar, en cierta medida, la apropiación por parte de los estudiantes de los contenidos pretendidos, permitiendo de este modo proponer actividades y situaciones, ya sea de refuerzo o de ampliación de los contenidos según sean las necesidades de los estudiantes, y así garantizar el aprendizaje de los contenidos pretendidos.

c) Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Con esta idoneidad se busca fijar la atención en las actitudes, emociones, afectos, intereses y necesidades que presentan los estudiantes en relación a los objetos matemáticos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, razón por la cual es imprescindible que el profesor contemple estas componentes al momento de planificar el proceso de estudio, puesto que durante la búsqueda de la resolución de un problema matemático no tan solo es importante considerarlas prácticas operativas y discursivas, sino también las creencias, actitudes, emociones, etc. de los estudiantes que afectan en cierta medida la respuesta cognitiva requerida. Es por esta razón que Godino (2011) además de identificar las componentes que afectan a la idoneidad afectiva, propone los siguientes indicadores (tabla 2.4) que pueden ser de ayuda para orientar el trabajo del profesor en este sentido.

Componentes	**Indicadores**
Intereses y necesidades	- Las tareas tienen interés para los alumnos - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 2.4 Componentes e indicadores de idoneidad afectiva (Godino, 2011, p. 11)

Como es posible apreciar en la tabla anterior, por medio de los indicadores propuestos se busca dar algunas directrices que ayudarían a mejorar las distintas componentes de la afectividad hacia las matemáticas en los estudiantes, y de este modo favorecer desde esta perspectiva el aprendizaje de las matemáticas.

d) Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Como sabemos la idoneidad interaccional se orienta a identificar el grado en que la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje contempla *a priori* posibles conflictos semióticos, además de la capacidad de dar solución a aquellos conflictos que se presenten durante el proceso de instrucción, es decir, sobre la marcha. En la tabla 2.5 se presentan algunos indicadores de idoneidad interaccional que permiten dar cuenta de las interacciones entre los distintos protagonistas del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Componentes	Indicadores
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	- Se favorece el dialogo y comunicación entre los estudiantes. - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. - Se favorece la inclusión en e grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Tabla 2.5 Componentes e indicadores de idoneidad interaccional (Godino, 2011, p. 12)

Tales indicadores permiten dilucidar tanto las interacciones entre el profesor y los estudiantes como entre los propios estudiantes. Desempeñando la evaluación formativa un rol fundamental pues a través de ella el profesor aprenderá a conocer a sus estudiantes, así como ciertos rasgos del pensamiento de éstos en relación a la manera en que aprenden, lo que le permitirá tomar decisiones acerca de cómo orientar y continuar con el proceso de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva socio-constructivista, de modo de favorecer la autonomía de aprendizaje en sus estudiantes por medio del desarrollo de competencias comunicativas.

e) Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Por medio de la idoneidad mediacional se pretende observar en qué medida el empleo de recursos materiales y temporales determinan la idoneidad mediacional del proceso de enseñanza y aprendizaje, para lo cual se han planteado los siguientes componentes e indicadores (tabla 2.6):

Componentes	Indicadores
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones de aula	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos mas importantes del tema. - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Tabla 2.6 Componentes e indicadores de idoneidad mediacional (Godino, 2011, p. 13)

A partir de la tabla 2.6 se puede observar que el uso de recursos materiales, así como la cantidad de estudiantes, el horario del curso, las condiciones físicas del aula y el empleo del tiempo son factores determinantes de la idoneidad mediacional de un proceso de enseñanza y aprendizaje, pues un proceso de estudio que considere dichos componentes tendría un mayor grado de idoneidad mediacional, que otro tradicional en el que el profesor no utilice recursos materiales, limitándose única y exclusivamente a la reproducción de contenidos, otorgando un rol exclusivamente pasivo a los estudiantes.

f) Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Un proceso de estudio tiene una alta idoneidad ecológica, cuando el método para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se aplica, es decir, se adapta al proyecto educativo del centro, a las directrices curriculares, condiciones del entorno social, etc., componentes que finalmente condicionan la actividad que se realiza al interior del aula. Algunos de estos componentes pueden ser evidenciados por medio de los siguientes indicadores (tabla 2.7):

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Tabla 2.7 Componentes e indicadores de idoneidad ecológica (Godino, 2011, p. 14)

Como se puede observar en la tabla anterior, para el logro de una idoneidad ecológica alta es fundamental que los diseños instruccionales incorporen la práctica reflexiva y los avances e investigaciones del campo de la didáctica de la matemática, en relación a los contenidos matemáticos que se pretenden enseñar, sobre todo en lo que se refiere a la incorporación del uso y manejo de nuevas tecnologías. Por otro lado, es necesario que los procesos de estudio incorporen contenidos matemáticos que se conecten con otras áreas curriculares y que a la vez se relacionen con situaciones de la vida cotidiana, para así fomentar por medio de los diseños instruccionales la formación y desarrollo de ciudadanos informados, competentes y con un pensamiento crítico.

Por medio de la aplicación de los componentes e indicadores de las idoneidades parciales, anteriormente descritos, es posible realizar análisis referidos a: la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje, planificaciones de unidades didácticas, de un curso o una propuesta curricular. O más puntualmente en el análisis de materiales didácticos para el desarrollo de una unidad en específico.

Cabe destacar, además, el hecho de que tales componentes e indicadores son herramientas muy importante para el trabajo del profesor, pues no tan solo les sirven para orientar el diseño, implementación y evaluación de los procesos de estudio, sino que además les permiten reflexionar sobre su propia práctica .

2.3.3 Modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor

Durante las últimas décadas la necesidad de mejorar la calidad de la educación escolar, sobre todo en lo que se refiere a la asignatura de matemática ha traído consigo el desarrollo de investigaciones orientadas a identificar y analizar el tipo de conocimiento que los profesores requieren para lograr una enseñanza idónea de las matemáticas, que genere los aprendizajes deseados en sus estudiantes.

Bajo esta perspectiva es que Godino junto a su equipo (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008), por medio de la integración entre las nociones teóricas del EOS (Godino, 2002; Godino *et al*., 2007), la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008), elaboran un modelo integrador para el conocimiento del profesor de matemáticas que designan como modelo de conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009), entendido como:

> la trama de relaciones que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas matemáticos, para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (Pino-Fan, Godino, Font, 2011, p. 144).

Esta trama de relaciones da origen al conocimiento didáctico-matemático del profesor, que nace de la articulación entre el conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*) y el conocimiento pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*), puesto que cada uno de estos conocimientos, por sí solos, no consideran la totalidad de componentes o facetas (epistemológica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, que un profesor debe conocer a la hora de enseñar un determinado tema. Lo anterior, lleva a que Godino y su equipo profundicen en dichos modelos y refinen algunas de las nociones anteriormente consideras, planteando así un sistema de categorías de análisis de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor (Godino, 2009) fundamentadas en el EOS.

El modelo del conocimiento didáctico-matemático plantea el análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor a partir de la interacción de un conjunto de facetas (figura 2.5) donde cada uno de los elementos presentes puede ser considerado como categorías o componentes del conocimiento didáctico-matemático de los profesores, sistema que tendremos en cuenta para el caso de la probabilidad, objeto matemático central en esta investigación.

Figura 2.5 Facetas y niveles del conocimiento del profesor (Godino, 2009, p. 21).

Se propone tener en cuenta las siguientes seis facetas o dimensiones implicadas en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2009, p. 21):

- Epistémica: conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos)
- Cognitiva: conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.

- Afectiva: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- Interaccional: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- Mediacional: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- Ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Por medio de estas facetas se busca analizar los procesos de instrucción matemática, asumiendo para ello, algunos presupuestos antropológicos/socioculturales en el caso de las facetas epistémica y ecológica, mediante las cuales se busca analizar, por un lado, el conocimiento matemático desde un contexto institucional y la distribución temporal de sus componentes, y por otro, las relaciones con el entorno que condiciona el proceso de estudio. Por su parte, las facetas cognitiva y afectiva son estudiadas bajo supuestos semióticos, ya que con ellas se busca analizar los conocimientos y aprendizajes de cada estudiante, así como, las actitudes, emociones, creencias y valores de estos en torno a los objetos matemáticos y su aprendizaje. Finalmente, para las facetas interaccional y mediacional se opta por una perspectiva socio-constructivista, pues a través de éstas se busca indagar en las relaciones e interacciones entre profesor-estudiantes, entre los mismos estudiantes y la relación de estos actores con un determinado contenido, con el uso de recursos tecnológicos, en fin todos aquellos elementos que desde esta perspectiva influirían con el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Este modelo considera como elementos clave a las facetas epistémica y cognitiva, consideradas desde un punto de vista antropológico y semiótico, puesto que la matemática es vista "como una actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones-problemas específicos" (Godino, 2009, p. 21), sin dejar por ello de lado a las facetas restantes. Además, dada la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Godino (2009) propone examinar las facetas anteriores en diversos niveles que permiten el análisis del CDM del profesor, que pueden ser utilizados en los ámbitos de formación de profesores, evaluación de su conocimiento o como herramienta para la autorreflexión y mejora de su propia práctica:

- Prácticas matemáticas y didácticas: a través de las cuales se busca identificar y analizar las acciones involucradas en la resolución de tareas matemáticas cuyo propósito es el de contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. Además, con este nivel se pretende describir las líneas generales de actuación entre profesores y estudiantes.
- Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos): este nivel se focaliza en los objetos y procesos involucrados en la realización de las prácticas, además de los que puedan emerger de ellas. Buscando explicar y dar a conocer la complejidad de los objetos y significados presentes en las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
- Normas y metanormas: este nivel se centra en la identificación de aquellas normas que condicionan y hacen posible el procesos de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
- Idoneidad: por medio de este nivel se pretende identificar mejoras potenciales del proceso de estudio, con las cuales se busca incrementar la idoneidad didáctica.

Desde esta perspectiva el EOS nos ofrece un conglomerado de herramientas para evaluar, analizar y desarrollar de manera sistemática, a partir de un sistema de categorización, los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor. Utilizando categorías de análisis explicitas para las dimensiones epistémica y cognitiva desde una perspectiva pragmática-antropológica de la matemática, en la que el objeto matemático es entendido como una entidad emergente e interviniente en las prácticas. De esta manera, el modelo se vale de las categorías de objetos y procesos del EOS para llevar a cabo el análisis tanto de la actividad matemática como de los conocimientos presentes en una enseñanza idónea de las matemáticas. Desde esta perspectiva, Godino (2009) propone un conjunto articulado de facetas del conocimiento didáctico-matemático, planteando, además, una "guía para el enunciado de consignas" (Godino, 2009) a partir de las cuales es posible evidenciar una reestructuración del MKT, algo implícita, donde:

El conocimiento del contenido se fundamenta en la faceta epistémica del conocimiento del profesor, a través del cual se espera indagar en los conocimientos matemáticos correspondientes al contexto institucional en el que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello se elaboran consignas (tabla 2.8) orientadas a identificar, clasificar y evaluar aspectos específicos del conocimiento que se pone en juego para resolver tareas o problemas matemáticos (conocimiento común); del conocimiento especializado del contenido el cual considera las distintas formas de representar (lenguajes) ideas y problemas matemáticos, así como los distintos procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos que permiten alcanzar su solución; y por último el conocimiento ampliado del contenido que pretende evidenciar la relación entre el contenido a enseñar con ideas matemáticas más avanzadas.

	Faceta epistémica	**Consigna**
Conocimiento del Contenido (común, especializado y ampliado)	Conocimiento común	Resuelve la tarea
	Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
	Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
	Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
	Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales)
	Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
	Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
	Conocimiento ampliado: Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Tabla 2.8 Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado) (Godino, 2009, p. 25)

Como se puede observar en la tabla 2.8 por medio de las consignas propuestas es posible contar con un análisis detallado del conocimiento del contenido de los profesores para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema probabilidad, además de las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego a la hora de enseñar este contenido, necesarias para realizar la planificación del proceso de estudio. Lo anterior permitiría orientar la reflexión, por parte de los profesores, sobre las posibles generalizaciones, particularizaciones y conexiones de las probabilidades con temas más avanzados.

El conocimiento del contenido en relación a los estudiantes se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del profesor, por lo que se incluyen conocimientos relativos a los conocimientos personales de los alumnos, errores, dificultades y conflictos presentes en sus aprendizajes y su progresión, además de las actitudes, emociones, creencias y valores vinculados al proceso de estudio y a los objetos matemáticos vinculados al estudio de un determinado tema, en nuestro caso de la probabilidad en la educación primaria.

	Faceta cognitiva + afectiva	**Consigna**
Conocimiento del Contenido en relación a los estudiantes (aprendizajes)	Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones, etc.)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
	Errores dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones.	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
	Evaluación de aprendizajes	Formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos)
	Actitudes, emociones, creencias, valores.	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

Tabla 2.9 Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (Godino, 2009, p. 26)

Como se puede apreciar, por medio de las consignas expuestas en la tabla 2.9 es posible analizar el conocimiento del profesor para realizar una reflexión sistemática, sobre el aprendizaje de sus estudiantes, es decir, de cómo éstos aprenden y las dificultades y errores a los cuales podrían verse enfrentados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un determinado tema. Para ello se requiere que el profesor tenga un amplio conocimiento del contenido en cuestión (faceta cognitiva) y de sus estudiantes (faceta afectiva).

El conocimiento del contenido en relación a la enseñanza se fundamenta en las facetas interaccional y mediacional del conocimiento del profesor, por lo que involucra conocimientos relativos a los patrones de interacción entre el profesor y sus alumnos, su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados, además de aspectos vinculados a los conocimientos del profesor en relación a los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

Conocimiento del Contenido en relación a la enseñanza	**Faceta instruccional (interaccional + mediacional)**	**Consigna**
	Configuración didáctica: Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido. Modos de interacción profesor-alumnos; alumnos-alumnos. Recursos materiales Tiempo asignado	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
	Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Tabla 2.10 Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza (Godino, 2009, p. 27)

Como se observa en la tabla 2.10 con las consignas propuestas se busca indagar en el conocimiento que el profesor posee sobre las relaciones que se dan entre la enseñanza y el aprendizaje, y de su capacidad para identificar los efectos que pueden tener los modos de gestionar la clase (tiempo, materiales, trayectoria didáctica) sobre el aprendizaje de sus alumnos.

El conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares tiene sus fundamentos en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, pues considera aspectos del currículo, entorno social, político, económico, etc. que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, las actividades y tareas que se proponen para lograr los objetivos planteados.

	Faceta ecológica	**Consigna**
Conocimiento del Currículo y conexiones intra e interdisciplinares	Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos)
	Conexiones intradisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
	Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
	Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Tabla 2.11 Conocimiento del currículo (Godino, 2009, p. 27)

Por medio de la formulación de las consignas que se presentan en la tabla 2.11 es posible realizar un análisis del conocimiento del profesor en relación al tratamiento que se otorga a un determinado tema, en nuestro caso al estudio de la probabilidad en la educación primaria, de acuerdo a las actuales orientaciones curriculares (MINEDUC, 2012), además de las conexiones que es capaz de establecer entre dicho tema con otros temas tanto de las matemáticas como de otras áreas del saber.

Como es posible apreciar en las consignas antes expuestas abordan por medio de la resolución de situaciones problemáticas, aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje, que llevarían a conocer las competencias profesionales de los profesores de matemáticas, es decir, el nivel de su conocimiento en relación a cada una de las categorías de conocimientos que conforman el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas. De este modo y como se puede apreciar en el trabajo de Godino (2009) el modelo CDM propone una reestructuración inicial del MKT. No obstante, al igual que otros modelos (Shulman (1986, 1987); Fennema y Franke (1992); Ball (2000); Ball, Lubienski y Mewborn (2001); Rowland, Huckstep y Thwaites (2005); Llinares y Krainer (2006); Ponte y Chapman (2006); Philipp (2007); Sowder (2007); Ball, Thames y Phelps (2008); Hill, Ball y Schilling (2008); Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Sullivan y Wood (2008)) a través de los cuales se busca identificar los conocimientos que debería tener el profesor para enseñar un determinado tema del área de las matemáticas

> no se ve claramente la relación e interacción entre cada una de las facetas o dimensiones incluidas en el modelo CDM. Aunado a lo anterior, se encuentra el hecho de que la sugerencia de pautas para la creación de ítems para evaluar y analizar cada una de las facetas del CDM son genéricas y éstas deberían atender a la relatividad de un tema matemático determinado (Pino-Fan, Font y Godino, 2013, p. 144).

En consecuencia y atendiendo a estos aspectos, el modelo inicialmente propuesto en Godino (2009) evoluciona a partir de los resultados obtenidos en diversas investigaciones (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2012; Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2013). Es así como recientemente Godino y Pino-Fan (2013), reinterpretan y refinan las premisas planteadas en Godino (2009) proponiendo una reestructuración más acabada de los componentes del MKT, en las que queda de manifiesto el vínculo e interacción entre ellas y las seis facetas o dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como se puede observar en la figura 2.6:

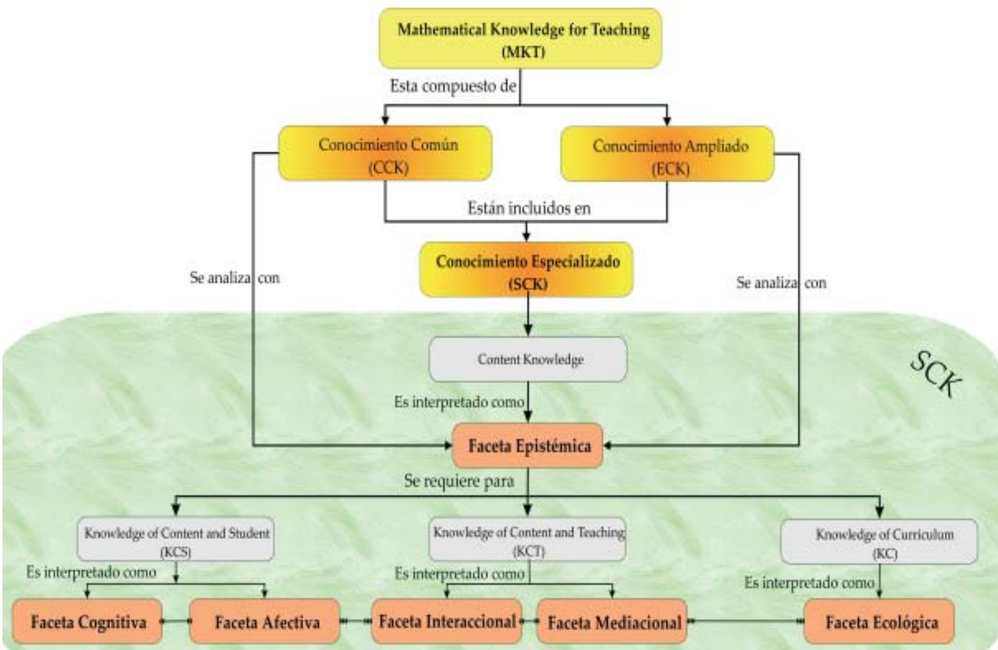


Figura 2.6 Relación entre las categorías del conocimiento del MKT y el CDM (Pino-Fan *et al.*, 2013, p. 147).

Así en base a esta reestructuración, más refinada, Pino-Fan, Godino y Font (2013) proponen las siguientes tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático:

1) *conocimiento común del contenido*: este tipo de conocimiento se analiza a través de la faceta epistémica y se refiere a los conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones problemáticas en relación a un tema específico de las matemáticas. Por ejemplo, en el caso de que un profesor deba enseñar probabilidad, debe ser capaz de resolver situaciones problemáticas que requieran del dominio de ciertos conceptos básicos acordes al nivel educativo en el que se desempeña.
2) *conocimiento ampliado del contenido*: al igual que el conocimiento común del contenido, este tipo de conocimiento es de tipo matemático y se analiza a través de la faceta epistémica, y se refiere a que el profesor además de saber resolver las situaciones problemáticas sobre un determinado tema, para un cierto nivel en el cual impartirá clases, debe poseer conocimientos más avanzados de este tema en el currículo, siendo capaz de establecer conexiones con temas más avanzados del currículo (con los cuales el alumno se encontrará en los años que vienen de su etapa escolar) en el cual enseña.
3) *conocimiento especializado*: este tipo de conocimiento es interpretado por medio de la faceta epistémica y se refiere a aquel conocimiento adicional que el profesor debe saber, aparte del conocimiento común y ampliado del contenido, que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas pero que no son profesores. Este conocimiento especializado además de implicar conocimiento común y parte del conocimiento ampliado, "debe incluir la pluralidad de significados del objeto, la diversidad de configuraciones de objetos y procesos inherentes a tales significados y las necesarias articulaciones inherentes entre los mismos" (Pino-Fan *et al*., 2013, p. 6). Por su parte, el conocimiento especializado incluye cuatro subcategorías:

   3.1) *conocimiento del contenido especializado*: este tipo de conocimiento de acuerdo a lo planteado por Pino-Fan, Font y Godino (2013) se refiere a que un profesor no solo debe ser capaz de resolver situaciones problemáticas en relación a un determinado contenido aplicando diversos significados parciales vinculados al objeto matemático en cuestión, diferentes tipos de representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, sino que además debe ser capaz de identificar los conocimientos puestos en juego (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) en la resolución de una determinada situación problemática.

3.2) *conocimiento del contenido en relación con los estudiantes*: se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva, y se refiere a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre el aprendizaje de los estudiantes, lo que de acuerdo a Godino (2009) implica la capacidad del profesor para: describir los tipos de configuraciones cognitivas que los estudiantes han desarrollado al resolver la situación problemática propuesta, describir los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de un cierto tipo de situaciones problemáticas por parte de los estudiantes, formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los estudiantes al resolver cierto tipo de situaciones problemáticas, así como describir estrategias que se pueden implementar para promover que los estudiantes se involucren el solución de situaciones problemáticas o en el estudio de un determinado tema.

3.3) *conocimiento del contenido en relación con la enseñanza*: se fundamenta en la faceta interaccional y mediacional, y se refiere según Godino (2009) a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modelos de gestión de la clase.

3.4) *conocimiento del contenido en relación con el currículo* se fundamenta en la faceta ecológica y se refiere al contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje.

Para el análisis en detalle de estas categorías se emplean herramientas teóricas del EOS, por ejemplo, para un análisis en detalle de las categorías: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, y de la subcategoría conocimiento del contenido especializado, podemos utilizar herramientas como, por ejemplo, la noción de configuración de objetos y procesos por medio de la aplicación de la "guía para el reconocimiento de objetos y procesos" (Godino, Gonzato y Fernández, 2010). Mientras que las categorías restantes pueden ser analizadas, más detalladamente, mediante las herramientas teóricas y metodológicas que el EOS entrega para las distintas facetas (figura 2.7): cognitiva y afectiva (conocimiento del contenido en relación a los estudiantes), interaccional y mediacional (conocimiento del contenido en relación a la enseñanza), y ecológica y epistémica (conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto), sin olvidar que por medio de la guía para el enunciado de consignas (tablas 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11) es posible orientar la formulación de ítems de evaluación o propuestas de actividades que permitirían obtener información sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor.

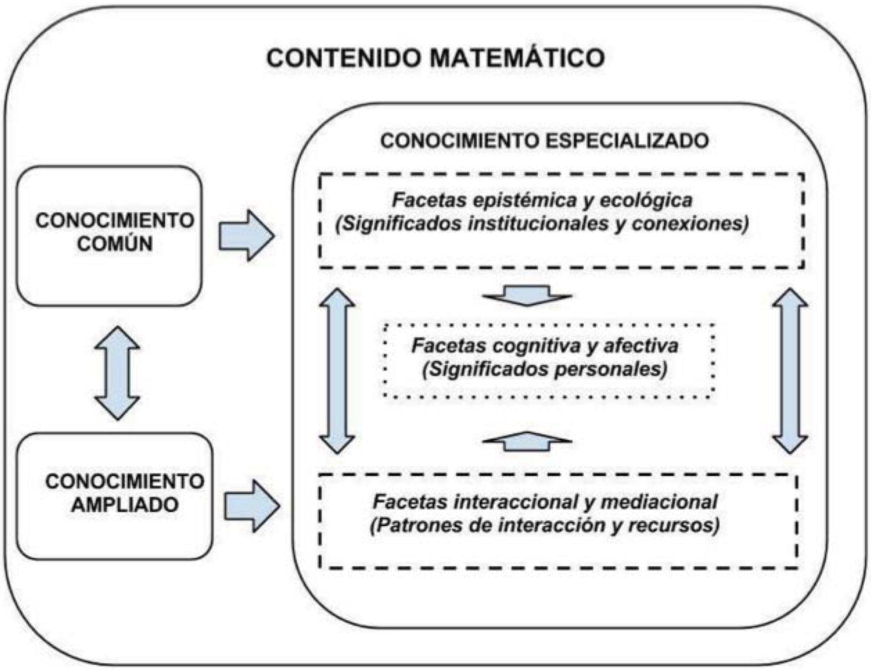


Figura 2.7 Componentes del Modelo del conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan *et al*., 2013, p.7)

De este modo, por medio del uso y/o adecuación de las consignas anteriormente expuestas, y de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, es posible realizar una evaluación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores. En nuestro caso utilizaremos este conjunto de consignas y herramientas para seleccionar situaciones problemáticas, así como para la formulación de los ítems de nuestro cuestionario que pretende evaluar el CDM para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Además de utilizaremos la metodología sugerida por Godino (2009) para la evaluación del CDM que consiste en los siguientes dos pasos:

1º) Elegir una tarea matemática (un proyecto o secuencia de actividades) que lleve a los profesores a poner en juego, por medio de la solución de la tarea, aquellos aspectos más relevantes en relación al tema probabilidades que se pretende evaluar o de las competencias que desean desarrollar.

2º) Formulación de los ítems de evaluación o propuestas de actividades que contemplen las distintas facetas y niveles del conocimiento del profesor que se desean evaluar y analizar.

2.4 Objetivos

En base a las investigaciones previas y antecedentes presentados en el capítulo 1, y acorde a la problemática de investigación formulada y el referente teórico de la Didáctica de la Matemática, que da sustento a esta investigación, presentados en los apartados anteriores de este capítulo, hemos planteado, para nuestra investigación, los siguientes objetivos que a continuación se presentan:

2.4.1 Objetivo general y específicos de la investigación

Dado que con esta investigación se busca valorar si los profesores de educación primaria en activo cuentan con los conocimientos didáctico-matemáticos necesarios para abordar de manera idónea la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria, es que nos hemos planteado el siguiente objetivo general de la investigación:

OG: *Evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo.*

La principal finalidad de este objetivo general es utilizar la información recogida para otorgar directrices que permitan contribuir al desarrollo de un conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad en profesores de educación primaria, para así orientar los procesos de formación del profesorado respecto a este contenido y de este modo aportar a mejorar la práctica educativa

Para el logro del objetivo general, antes señalado, es necesario plantearse objetivos más específicos que a continuación se indican:

OE_1: *Recopilar y sintetizar los conocimientos aportados en investigaciones previas sobre aprendizaje de la probabilidad y la formación del profesorado para enseñar probabilidad en educación primaria.*

Por medio del logro de este objetivo será posible contar con un marco de referencia sobre la formación del profesorado para enseñar probabilidad en la educación primaria, entregándonos, además, información de interés sobre los posibles errores y dificultades presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad tanto a nivel escolar como de la formación del profesorado. El disponer de este tipo de información será de interés al momento de construir el instrumento de evaluación.

OE_2: *Analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de textos de educación primaria.*
Dado que esta investigación busca evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en activo de educación primaria sobre probabilidad, es necesario contar con información que reflejen el énfasis dado al estudio de la probabilidad en la educación primaria, de ahí la importancia de analizar cuál es el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo y en los libros de textos, ya que éstos son un referente importante para los profesores a la hora de planificar sus clases y seleccionar métodos de enseñanza (Shield y Dole, 2009) constituyéndose muchas veces en un tipo de institución de referencia inmediata. El contar con este tipo de información nos será de gran utilidad para la construcción de un instrumento que permita medir los conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad.

OE_3: *Construir un instrumento para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado sobre probabilidad en profesores de educación primaria en activo.*
Para alcanzar el objetivo general de esta investigación es necesario disponer de un instrumento de medida que permita evaluar las tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático pertenecientes al modelo del conocimiento didáctico-matemático. Puesto que no se cuenta con un instrumento que permita evaluar las tres categorías, es que se ha decidido construir un instrumento con tal finalidad.
El proceso de construcción de dicho instrumento se describe en detalle en el capítulo 4.

2.5 Enfoque metodológico y fases de la investigación

Esta investigación es de tipo exploratorio, puesto que los pocos estudios existentes sobre el tema se centran solo en ciertos aspectos del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad pero de futuros profesores de educación primaria, mientras que nuestro estudio aborda los distintos componentes del modelo del conocimiento didáctico-matemático en profesores de educación primaria en activo (conocimiento común, conocimiento ampliado y conocimiento especializado).

Para el logro del objetivo general y de los objetivos específicos propuestos, hemos organizado la investigación en una parte teórica (fundamentos) y una parte empírica, las cuales incluyen a su vez distintas fases de la investigación como se muestra en la figura 2.8. La primera parte se centra en alcanzar el OE_1 mediante el análisis de la evolución histórico-epistemológica de la probabilidad, el estudio de los distintos significados de la probabilidad, el análisis de los principales aspectos vinculados al aprendizaje de la probabilidad y el estudio de la probabilidad en la formación del profesorado, describiéndose además los principales resultados de investigaciones previas relacionadas con nuestro tema de estudio y en las cuales nos hemos basado.

Lo anterior, nos ha permitido justificar y delimitar nuestra problemática de estudio, y al mismo tiempo, identificar el referente teórico de la Didáctica de la Matemática que utilizaremos para orientar la investigación, siendo éste el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática.

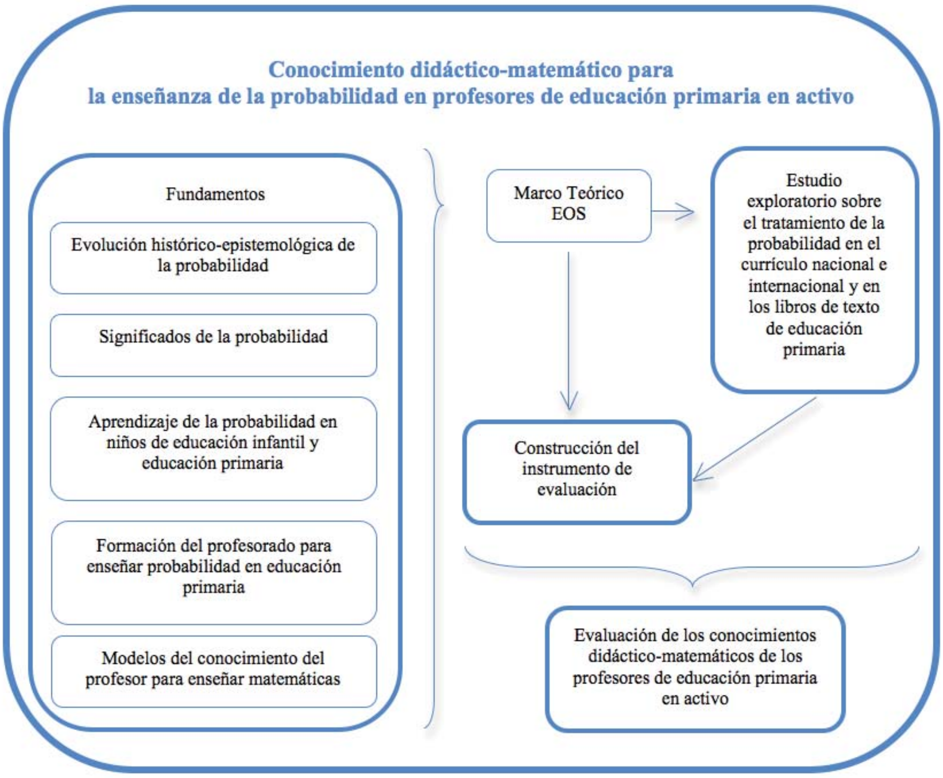


Figura 2.8 Fases de la investigación

La segunda parte se organiza en tres estudios: (1) un estudio exploratorio sobre el tratamiento de la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de texto de educación primaria chilenos, (2) construcción de un cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en educación primaria, y (3) un estudio de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores de educación primaria en activo. Estos estudios se describen a continuación:

Estudio 1: *Análisis sobre el tratamiento de la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de texto de educación primaria chilenos.* Con este estudio que se presenta en el capítulo 3 se pretende abordar el OE_2. La importancia de este análisis radica en que tanto el currículo como los libros de texto, de acuerdo a lo planteado por Guillén, González y García (2009), son un recurso de gran importancia para los profesores y ampliamente utilizado, es que por medio de este análisis se busca obtener información sobre la forma en que se propone el estudio de la probabilidad en educación primaria. Para ello, se analizaron los currículos de Chile, España y Estados Unidos, además de los libros de textos de matemáticas de 1º a 6º año básico distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación chileno.

Estudio 2: *Construcción de un cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en educación primaria.* Por medio de este estudio se da cumplimiento al OE_3, dicho proceso se describe en el capítulo 4..
Para el diseño del instrumento se consideró, por un lado, el análisis de las tareas propuestas de diversas investigaciones (descritas en el capítulo 2) vinculadas con nuestra problemática y por otro, los resultados obtenidos del estudio exploratorio sobre el tratamiento de la probabilidad en los libros de texto de educación primaria chilenos. Así por medio de dichos análisis y la aplicación del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor propuesto por el EOS, hemos determinado aquellos componentes que nos interesa evaluar, para luego seleccionar aquellas situaciones problemáticas que mejor se adecuan a nuestro propósito y que, posteriormente, formarán parte de nuestro instrumento. Lo anterior, nos permitió además, primeramente, elaborar la tabla de contenidos en base al significado de referencia local, para luego proponer un banco inicial de ítems, algunos extraídos de otras investigaciones, otros de elaboración propia y reformulaciones. Para luego someter el instrumento al juicio de

expertos, con el propósito de validar la tabla de contenidos y la selección de ítems de acuerdo a los distintos componentes del conocimiento didáctico-matemático, además de realizar reformulaciones en caso de ser necesario. Por último, se aplicó el instrumento a una muestra de profesores de educación primaria en activo, lo que en conjunto a las etapas antes descritas nos llevó a refinar el instrumento llegando así a contar con la versión final de éste.

Estudio 3: *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo*, descrito en el capítulo 5. Este estudio responde en su totalidad al OG y se refiere a la aplicación del cuestionario final sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en educación primaria a un grupo de 93 profesores de educación primaria en activo y al análisis de los resultados obtenidos. Para el análisis de los resultados de la aplicación del instrumento, se realizó previamente un análisis *a priori* aplicando herramientas teóricas del EOS para los distintos ítems que componen el cuestionario en su versión final, lo cual nos permitió, posteriormente, interpretar las respuestas de los profesores a la luz de dicho análisis. Aparte de analizar en detalle los distintos tipos de conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad de los profesores de educación primaria en activo, hemos considerado relevante realizar un análisis de los distintos tipos de conocimientos que componen el conocimiento didáctico-matemático, en función de las características de los profesores, a los cuales se les ha aplicado el instrumento. La finalidad de este subanálisis es identificar si existen o no diferencias en el tipo de conocimiento manifestado, en función con las características de los profesores (título profesional, género, años de experiencia, etc.).

Es importante señalar que además de realizar un análisis interpretativo de las respuestas de los profesores, estas respuestas serán evaluadas atendiendo tanto a variables cuantitativas (por medio de la variable "grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas") como cualitativas (por medio del análisis de los diferentes tipos de justificaciones, errores, etc.), para los distintos tipos de conocimientos que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático. Por lo cual, el enfoque metodológico general de esta investigación es mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009; Johnson y Onwuegbuzie, 2004), es decir, "combina técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos o lenguajes, cuantitativos y cualitativos dentro de un mismo estudio" (Johnson y Onwuegbuzie, 2004, p. 17).

CAPÍTULO 3
LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO Y EN LOS LIBROS DE TEXTO

3.1 Presentación

En el capítulo 1 hemos recopilado y sintetizado los conocimientos aportados por las investigaciones previas en relación al aprendizaje de la probabilidad y la formación del profesorado para enseñar probabilidad en la educación primaria. Ésto nos ha permitido establecer un marco de referencia sobre la formación del profesorado para enseñar probabilidad en la educación primaria, y a la vez contar con información de interés sobre los posibles errores y dificultades a los que se ven enfrentados los alumnos de educación primaria durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. No obstante, es importante para cumplir con nuestro objetivo general el disponer de información que nos indique cuál es el énfasis dado al estudio de la probabilidad en la educación primaria, de ahí la importancia de analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo y en los libros de textos. De este modo en este capítulo abordamos el objetivo de *analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de textos de educación primaria.* El contar con este tipo de información nos permitirá, junto a los estudios presentados en el capítulo 1 y al marco teórico seleccionado para esta investigación, establecer el significado de referencia institucional de la probabilidad en la educación primaria, para así llevar a cabo la construcción de un instrumento de evaluación que permita medir los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo.

Es así como, en este capítulo presentamos un análisis curricular, que considera el análisis de las orientaciones curriculares nacionales e internacionales, además del análisis de libros de texto de educación primaria chilenos, ya que se supone que éstos interpretan, desarrollan y aplican tanto las orientaciones curriculares como los resultados provenientes de la investigación especializada.

3.2 La probabilidad en el currículo

En el capítulo 1 hemos situado a la probabilidad en el campo del conocimiento matemático, de sus significados y de su contexto histórico, el cual nos ha mostrado cómo ésta se fue desarrollando, adquiriendo un carácter matemático a lo largo de la historia. Sin embargo, un punto central en este estudio es el relacionado con la presencia y el rol otorgado a la probabilidad dentro del currículo escolar tanto a nivel internacional como nacional.

En esta sección se describen los contenidos vinculados al estudio de la probabilidad en las orientaciones curriculares del NCTM (2000), en los Estándares Comunes (CCSSI, 2010), en el currículo español para la educación primaria (MEC, 2007) y por último en el currículo chileno para la educación básica (MINEDUC, 2012). Esto nos permitirá contar con una visión panorámica en torno al tratamiento otorgado al estudio de la probabilidad, y de este modo tener claridad, en parte, acerca del conocimiento de la probabilidad y su enseñanza que necesitan tener los profesores de primaria para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje con sus estudiantes.

3.2.1 La probabilidad en el currículo internacional

Para establecer la presencia y el rol otorgado a la probabilidad en el currículo escolar internacional, se analizan los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), y los Estándares

Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standard Initiative* (CCSSI, 2010), al tratarse de documentos de referencia que han tenido gran influencia no tan solo en el currículo de EEUU sino que en el de muchos otros países, incluidos España y Chile.

Actualmente existe un acuerdo generalizado en que la probabilidad, debido a sus múltiples aplicaciones en distintas áreas del saber, es parte importante de la matemática, por lo que es necesario que el pensamiento probabilístico se desarrolle desde las primeras edades (nivel parvulario). Esta tendencia ha sido adoptada por el NCTM desde 1989, al incluir como área temática en el *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* a Datos y Azar (NCTM, 1989), iniciativa que desde entonces ha cobrado fuerza y se ha plasmado, últimamente, en los *Principles and Standard for School Mathematics* (2000). Por medio de tales Principios y Estándares, se busca "describir las características particulares de una educación matemática de gran calidad", además de "describir los contenidos y procesos matemáticos que deberían aprender los estudiantes" (NCTM 2000, p. 11). Para lograr este propósito se proponen los principios de: igualdad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología para las matemáticas escolares. Además, se incluyen también un conjunto de conocimientos y competencias matemáticas que buscan desarrollar en los estudiantes, la capacidad de pensar y razonar matemáticamente. Es así como emergen los Estándares de Contenidos y los Estándares de Procesos. Los primeros describen explícitamente los contenidos que deberían aprender los estudiantes desde el *Prekindergarten* al nivel 12, en relación a Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y probabilidad, mientras que los segundos exponen distintas formas de adquisición y usos de dichos contenidos, como un continuo en el currículo escolar, por medio de los procesos de:

- Resolución de problemas: cuyo énfasis esta puesto en la construcción de nuevos conocimientos a partir de la exploración de métodos de resolución de problemas ya sea del ámbito de la matemática o de otros contextos, lo que permitirá que los estudiantes reflexionen y apliquen sus conocimientos y estrategias en busca de una solución.
- Razonamiento y prueba: por medio de este estándar se pretende capacitar a los estudiantes para reconocer la importancia del razonamiento y la demostración en el

desarrollo de la matemática, como herramientas que permiten formular, desarrollar y evaluar distintos tipos de argumentos matemáticos.

- Comunicación: entendida como una parte esencial de las matemáticas, pues a través de ella los estudiantes estarían capacitados para organizar, comunicar, analizar y evaluar, de forma rigurosa, tanto su pensamiento matemático como el de los demás.
- Conexiones: este estándar busca que los estudiantes sean capaces de vincular distintas ideas matemáticas entre sí, generando nuevas ideas. Además de reconocer la aplicabilidad en contextos no matemáticos.
- Representación: a través de este estándar se busca mejorar la comprensión de distintos tipos de ideas matemáticas por medio de amplio espectro de representaciones otorgadas a los estudiantes de modo que estos sean capaces de seleccionar, aplicar y traducir aquellas que sean mas adecuadas a un determinado problema.

Estos diez estándares se encuentran presentes de forma continua y gradual a lo largo de todo el currículo escolar, respondiendo a las distintas necesidades presentes en cada una de las distintas etapa de la formación escolar, tal y como es posible apreciar en la figura 3.1.

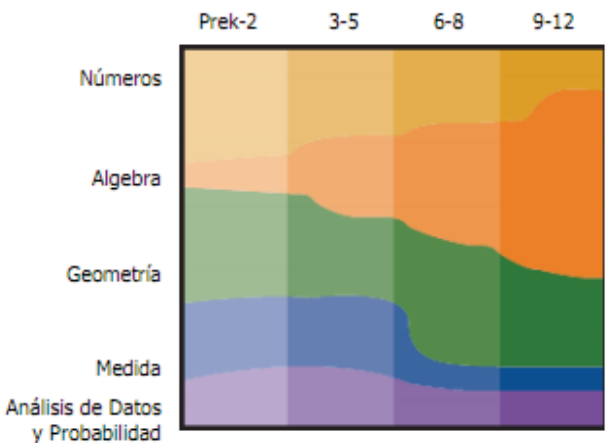


Figura 3.1 Nivel de atención que deberían recibir los diferentes Estándares de contenidos desde *Prekindergarten* al nivel 12. (NCTM 2000, p. 32).

Dado que nuestro estudio se centra específicamente en el contenido de probabilidad, nos focalizaremos en el estándar de contenido de Análisis de datos y probabilidad (NCTM, 2000). En él se abordan conceptos básicos y distintas aplicaciones de las probabilidades que deben permitir establecer, de manera progresiva, conexiones entre las matemáticas y otros ámbitos del saber, así como con experiencias de la vida diaria. De esta forma, al finalizar su formación escolar, los estudiantes podrán poseer una sólida formación en lo que se refiere al análisis de datos y probabilidad. Es por esta razón que este estándar propone:

> capacitar a los estudiantes, en las distintas etapas, para:
> - formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas;
> - seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos;
> - desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos;
> - comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad (NCTM 2003, p. 51).

Para lo cual se propone iniciar el estudio de la probabilidad a partir del *Prekindergarten* (educación infantil) como un continuo hasta el nivel 12 (bachillerato), de tal manera que se favorezca la adquisición progresiva de los siguientes contenidos:

	Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos	**Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad**
Pre K-2 (5 a 7 años)	Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.	
3–5 (8 a 10 años)	Proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos, y diseñar estudios para investigarlas más a fondo.	Describir sucesos como probables o no probables, y discutir su grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable; Predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos, y someter a prueba tales predicciones; Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1.
6–8 (11 a 13 años)	Utilizar observaciones relativas a las diferencias entre dos o más muestras, para formular conjeturas sobre las poblaciones de las que se han extraído; Formular conjeturas sobre las posibles relaciones entre dos características de una	Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes; Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para

	muestra, a partir de nubes de puntos de los datos y líneas de ajuste aproximadas; Utilizar las conjeturas para formular nuevas preguntas y programar nuevos estudios para contestarlas.	formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones; Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos, utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.
9–12 (14 a 17 años)	Utilizar simulaciones para explorar la variabilidad de muestras estadísticas de una población conocida, y para construir distribuciones muestrales; Comprender cómo las muestras estadísticas reflejan los valores de los parámetros de la población, y utilizar las distribuciones muestrales como base para inferencias informales; Evaluar informes basados en datos, examinando el diseño del estudio, lo apropiado del análisis de los datos y la validez de las conclusiones; Comprender cómo se utilizan técnicas estadísticas básicas en los lugares de trabajo, para controlar características del proceso de producción.	Comprender los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad, y construir espacios muestrales y distribuciones en casos sencillos; Utilizar simulaciones para construir distribuciones de probabilidad empíricas; Calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos sencillos; Comprender los conceptos de probabilidad condicionada y sucesos independientes; Comprender cómo se calcula la probabilidad de un suceso compuesto.

Tabla 3.1 Contenidos en relación al tema de probabilidad desde Prekindergarten al nivel 12 (NCTM, 2000)

Como se puede apreciar en la tabla 3.1 el desarrollo de los conceptos básicos de probabilidades se inicia de manera informal en los primeros niveles, introduciendo primeramente el vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad por medio de actividades centradas en los juicios que emiten los estudiantes en base a sus propias experiencias, llevándoles a responder preguntas sobre la probabilidad de sucesos, en las que las respuestas consideren el empleo de términos tales como: más probable, menos probable o imposible. Con este propósito se sugiere a los profesores presentar a los estudiantes situaciones y preguntas que provengan de sus propias experiencias, por ejemplo, “Durante el invierno, la pregunta ¿es probable que nieve mañana?” (NCTM, 2003, p. 118).

En etapas posteriores se pasa a la realización de experimentos aleatorios con material concreto como bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc. y de este modo se empieza a aprender cómo cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso. Para conseguir este propósito se propone al profesor plantear cuestiones del tipo: "¿Cuál es la probabilidad de que una ruleta de colores se pare sobre un color determinado?" (NCTM, 2003, p. 185). Por medio de este tipo de situaciones se espera que los estudiantes comiencen a comprender que la probabilidad de un suceso imposible se designa por medio del 0 y la de un suceso seguro por medio del 1, y que por medio del usos de fracciones comunes pueden representar la probabilidad de sucesos que no son ni imposibles ni seguros. De esta manera se propone vincular a los estudiantes con la asignación numérica de probabilidades a la ocurrencia de ciertos sucesos. Se finaliza la educación primaria con el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos. Por ejemplo, se sugieren problemas tales como:

> supón que tienes una caja con 100 papelitos numerados del 1 al 100. Si eliges uno al azar: ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5? ¿cuál que sea múltiplo de 8? ¿y de que no sea múltiplo de 5? ¿y de que sea múltiplo de 5 y de 8? (NCTM, 2003, p. 258).

Para la etapa de la educación secundaria se deja el cálculo de probabilidades de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

A partir de lo anterior se aprecia que el NCTM (2003) propone que el estudio de la probabilidad se desarrolle desde un significado intuitivo centrado en las propias experiencia de los estudiantes para que poco a poco, y de manera progresiva, mediante la realización de experimentos aleatorios sencillos y de la manipulación de generadores de azar complementen su compresión de la probabilidad desde el significado frecuencial, para finalizar la educación primara con el cálculo de probabilidades desde su significado clásico.

La adquisición de los contenidos antes descritos se ve complementada con los estándares de procesos, pues éstos ofrecen un conjunto de herramientas (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación) que facilitan la adquisición y uso de tales contenidos en los estudiantes, ya que a partir de los estándares de procesos los estudiantes se introducen progresivamente en las formas de pensar propias de las matemáticas como: razonar, argumentar, descubrir, representar, modelizar, demostrar, etc. Estos procesos de pensamiento matemático les permiten construir nuevos conocimientos y sobre todo otorgar aplicabilidad a los distintos contenidos tratados, vinculándoles no tan solo con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, sino también con contextos de la vida cotidiana (Alsina, 2012). En este punto es crucial la labor del profesor, pues éste debe ser capaz de lograr una correcta interacción entre los estándares de contendidos y los de procesos, para así contribuir al desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes, lo cual de acuerdo con Alsina (2009) implica:

- Pensar matemáticamente: construir conocimiento matemático en situaciones donde tenga sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y abstraer.
- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones, así como los procesos y las técnicas.
- Plantear y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas, planificar y desarrollar estrategias de resolución y validar soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Usar técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) e instrumentos (calculadoras y tecnologías de la información, de dibujo y medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático.

Es precisamente en este punto donde todo lo anterior es de gran relevancia para esta investigación, pues uno de los principales objetivos de este estudio es proporcionar información sobre el conocimiento didáctico-matemático que necesitan los profesores de educación primaria para enseñar probabilidad, es decir, del conocimiento necesario para propiciar el desarrollo de la competencia matemática en sus estudiantes.

Otro referente internacional en esta línea son los *Common Core State Standards for Mathematics* o Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI, 2010). Estos estándares describen los conocimientos y habilidades que los profesores deben ser capaces de desarrollar en sus estudiantes en cada nivel, es decir, "lo que se espera que los estudiantes aprendan y sean capaces de hacer" (CCSSI, 2010, p. 5). Se trata de un conjunto de orientaciones para la práctica de matemáticas y del contenido en matemáticas, con el objeto de lograr una educación de alta calidad que permita a los estudiantes acceder a los conocimientos y habilidades necesarios para sus vidas después de la escuela, ya sea en la universidad o en el mundo laboral.

Los estándares para la práctica de matemáticas buscan describir la variedad de experiencias (habilidades) que los profesores deben desarrollar en todos sus estudiantes desde la educación infantil hasta el décimo segundo grado (nivel 12), para que éstos puedan aplicar los conocimientos matemáticos, es decir, sean matemáticamente competentes. Tales estándares se basan, por un lado en los estándares de procesos del NCTM, y por otro en las competencias matemáticas descritas en el informe *Adding It* del *National Council Research*, surgiendo de esta manera los siguientes ocho estándares para la práctica de matemática, que a continuación se describen:

- Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos
- Desarrollar un razonamiento abstracto y cuantitativo
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros
- Modelar usando matemáticas
- Usar herramientas adecuadas de manera estratégica
- Reconocer la importancia de la precisión
- Buscar y hacer uso de una estructura
- Buscar y expresar regularidades en un razonamiento repetido

Mientras que los estándares para la práctica de matemáticas definen las experiencias que los profesores deberían desarrollar en sus estudiantes, los estándares para el contenido en matemáticas presentan una combinación equilibrada entre los procedimientos y la comprensión de conceptos centrales en la formación de los estudiantes, es decir, lo que los estudiantes saben sobre matemáticas. Así, se busca conectar las prácticas con los contenidos, estableciendo un conjunto de estándares específicos para cada nivel, desde el Pre-K-2 al nivel 12, en los distintos dominios (Conteo y cardinalidad, operaciones y pensamiento algebraico, números y operaciones en base diez, números y operaciones-fracciones, medición y datos, geometría, razones y relaciones proporcionales, sistema de numeración, expresiones y ecuaciones, funciones y estadística y probabilidad) definidos para el aprendizaje de las matemáticas.

En el caso de los contenidos vinculados al estudio de las probabilidades, a diferencia de los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), éstos no son considerados en la educación primaria, iniciándose su estudio en la educación secundaria en el dominio de estadística y probabilidad. Sin embargo, en el caso de la educación primaria encontramos, dentro del dominio de medición y datos, estándares de contenidos vinculados únicamente a la estadística, con gran énfasis en la recolección y análisis de datos, clasificación y organización de datos utilizando distintos tipos de representación como: dibujos, tablas, gráficos, diagramas, etc.

Como se puede apreciar, en términos generales los referentes internacionales analizados ponen de manifiesto un constante énfasis en el estudio de la probabilidad dada su utilidad como herramienta que permite modelar diversas situaciones en las que existe incertidumbre, y a la vez desarrollar el pensamiento matemático e interpretar distintos tipos de información tanto del ámbito de otras disciplinas como en lo cotidiano y el mundo laboral.

3.2.2 La probabilidad en el currículo español para la educación primaria

La Educación Primaria en España tiene carácter obligatorio y gratuito, con una duración de seis cursos académicos, de los 6 a los 12 años de edad. El currículo español se organiza en tres ciclos de dos años cada uno, y en cuatro bloques de contenidos para cada ciclo: Números y operaciones; Medida; Geometría; Tratamiento de la información, azar y probabilidad (MEC, 2007). El bloque 4, como su nombre indica, se organiza en base a dos aspectos: a) tratamiento de la información (gráficos estadísticos en el primer ciclo; gráficos y tablas en el segundo ciclo; y gráficos y parámetros estadísticos en el tercer ciclo); y b) azar y probabilidad (carácter aleatorio de algunas experiencias en el primer y segundo ciclo, e introducción al lenguaje del azar en el segundo ciclo; y carácter aleatorio de algunas experiencias y estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso).

Como se indica en dichas orientaciones curriculares, en el currículo español los contenidos del bloque 4 en general, y los que se refieren a azar y probabilidad en particular, adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios. En la Tabla 3 se exponen los contenidos que hacen referencia explícita a aspectos de probabilidad en Educación Primaria, y que se han obtenido a partir del análisis de la ORDEN ECI/2211/2007, del 12 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria (MEC, 2007):

Ciclo	Contenidos
Primer ciclo	Carácter aleatorio de algunas experiencias: - Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad. - Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.
Segundo ciclo	Carácter aleatorio de algunas experiencias: - Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar: - Constatación del carácter aleatorio de algunas experiencias. - Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica.
Tercer ciclo	Carácter aleatorio de algunas experiencias: - Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación y expresión del grado de probabilidad de un suceso. - Utilización del lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar. - Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas. - Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.

Tabla 3.2 Contenidos en relación al tema de azar y probabilidad en Educación Primaria (MEC, 2007)

A partir de los contenidos expuestos la tabla 3.2 podemos identificar la presencia de cuatro significados de la probabilidad: intuitivo en el primer ciclo, intuitivo y frecuencial en el segundo ciclo y frecuencial, clásico y subjetivo en el tercer ciclo.

3.2.3 La probabilidad en el currículo chileno para la educación básica

Durante el 2013 se da por completada la implementación del las nuevas bases curriculares 2012 para la enseñanza básica (6 a 11 años de edad). Estas nuevas bases se encuentran estructuradas por Objetivos de Aprendizaje, que describen los desempeños mínimos que deberán alcanzar los estudiantes, por medio del desarrollo de ciertas habilidades, conocimientos y actitudes propias para cada asignatura, en sus distintos ejes temáticos.

Para alcanzar los distintos objetivos de aprendizaje el Ministerio de Educación ha desarrollado nuevos programas de estudios de 1º a 6º básico, con los que se busca apoyar a los profesores en la implementación de las nuevas bases curriculares. En tales programas se encuentra una planificación anual que contiene indicadores de evaluación para cada objetivo de aprendizaje, además de actividades, ejemplos de evaluación, material sugerido y material educativo descargable en www.curriculumenlinea.cl. Así, las nuevas bases curriculares para la asignatura de Matemática, consideran que la formación matemática, en la educación básica, se logra por medio del desarrollo del pensamiento matemático, el cual involucra las siguientes cuatro habilidades que se integran con los objetivos de aprendizaje y están interrelacionadas entre si (MINEDUC, 2012):

- Resolver problemas: esta habilidad tiene por objetivo el que los estudiantes sean capaces de dar solución, de manera autónoma, a distintos tipos de situaciones problemáticas, por medio de la aplicación de distintos tipos de estrategias como: la experimentación, ensayo y error, transferencia des problemas similares ya resueltos, etc. siendo capaces de comparar los distintos caminos de solución y evaluar las respuestas obtenidas y su pertinencia.
- Argumentar y comunicar: con esta habilidad se busca que los estudiantes sean capaces de verbalizar y comunicar, progresivamente, sus intuiciones y conclusiones, así como también detectar aquellas informaciones erróneas.

- Modelar: con el desarrollo de esta habilidad se pretende que los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema, usualmente más complejo, pero que capture los patrones claves y los exprese mediante lenguaje matemático.
- Representar: esta habilidad tiene por objetivo que los estudiantes aprendan a utilizar una amplia variedad de tipos de registros que le permitan representar distintos tipos de datos de acuerdo a las necesidades que presente cada situación problemática.

Las habilidades descritas juegan un rol fundamental tanto en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, como en la aplicación de conocimientos para la resolución de problemas en diversas áreas. Por otro lado, el desarrollo de estas habilidades permitirá obtener desempeños medibles y observables de los aprendizajes de los estudiantes, en los cinco ejes temáticos definidos para la asignatura de matemáticas: Números y operaciones, Patrones y álgebra, Geometría, Medición, y Datos y probabilidades, es en éste último que nos centraremos dada la naturaleza de nuestro estudio.

Para el eje de Datos y probabilidades el MINEDUC (2012) se ha planteado el objetivo de que:

> todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos (MINEDUC 2012, p. 5).

Lo anterior, permitirá desarrollar en los estudiantes, de manera paulatina a lo largo de toda su etapa escolar, un pensamiento estadístico y probabilístico necesarios para el ciudadano actual, pues éste se ve diariamente enfrentado a situaciones de incertidumbre ante las cuales es necesario que cuente con una actitud crítica que le permita identificar informaciones erróneas que muchas veces aparecen en los distintos medios de comunicación. Siendo esta una de las principales razones de la reciente incorporación de la probabilidad a muy temprana edad en los currículos de diversos países. Como hemos visto, Chile no se ha quedado ajeno a esta tendencia, planteándose los siguientes objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación en los distintos niveles educativos relacionados con el tema de probabilidades:

Nivel	**Objetivo de Aprendizaje**	**Indicadores de Evaluación Sugeridos**
	Se espera que los estudiantes sean capaces de:	Los estudiantes que han alcanzado este aprendizaje:
1º básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.	Recolectan datos acerca de situaciones sobre sí mismo y del entorno. Formulan preguntas sobre sí mismo y los demás que pueden ser respondidas a partir de recolección de información. Registran datos, usando bloques y tablas de conteo. Recolectan y organizan datos, usando material concreto, registros informales y tablas de conteo. Responden preguntas, utilizando la información recolectada.
2º básico	Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.	Recolectan datos acerca de lanzamientos de dados y monedas. Registran datos en una tabla de conteo acerca de datos de lanzamientos de monedas y dados. Registran datos acerca de lanzamientos de dados y monedas, usando cubos apilables. Responden preguntas en el contexto de juegos con monedas, usando registros expresados en cubos apilables.
	Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.	Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en tablas. Registran resultados de juegos aleatorios con dados y monedas en gráficos de barra simple.
3º básico	Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.	Realizan juegos aleatorios con dados de diferentes formas (cubos, tetraedros u otros) y monedas, registrando los resultados en tablas de conteo y diagramas de punto.

4º básico	Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.	Realizan experimentos con dados cúbicos u de otra forma regular como tetraedro, dodecaedro, etc. Extraen naipes al azar con y sin devolver. Pesan piedritas de un saco de gravilla y determinan la frecuencia absoluta de las masas de 5 g, 10 g, etc. Reconocen que los resultados de experimentos lúdicos no son predecible. Realizan repeticiones de un mismo experimento, determinan la frecuencia absoluta y la representan en gráfico. Usan software educativo para simular experimentos aleatorio.
5º básico	Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible - imposible. Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.	Describen eventos posibles en el resultado de un juego de azar; por ejemplo: al lanzar un dado, indican los resultados posibles incluidos en el evento: "que salga un número par". Se refieren a la posibilidad de ocurrencia de un evento, mediante expresiones simples como seguro, posible, poco posible o imposible. Dan ejemplos de eventos cuya posibilidad de ocurrencia es segura, posible, poco posible o imposible. Dan ejemplos de eventos cuya probabilidad de ocurrencia es mayor que la de otros eventos, sin calcularla. Juegan a lanzar dados o monedas y, frente a eventos relacionados con estos lanzamientos, dicen, sin calcular, cuál es más probable que ocurra. Hacen apuestas entre alumnos y dicen, sin calcular, quién tiene más probabilidad de ganar.
6º básico	Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.	Enumeran resultados posibles de lanzamientos de monedas o dados con ayuda de un diagrama de árbol. Por ejemplo, al lanzar tres veces una moneda, o una vez dos dados. Realizan de manera repetitiva experimentos con monedas para conjeturar acerca de las

		tendencias de los resultados. Conjeturan acerca de porcentajes de ocurrencia de eventos relativos a lanzamientos de monedas o dados.

Tabla 3.3 Contenidos en relación al tema de probabilidad en Educación Básica (MINEDUC, 2012)

A partir de la tabla 3.3 se observa que el tratamiento de la probabilidad se inicia por medio del estudio con datos, tablas y gráficos, para luego iniciar el desarrollo de experimentos aleatorios que darán paso a describir la probabilidad a partir del grado de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso, a partir de situaciones cotidianas, presenciándose de este modo una visión de la probabilidad desde su significado intuitivo. En niveles posteriores se prosigue con la comparación de probabilidades, pero sin calcularlas, ya que es a partir de conjeturas acerca de las tendencias de resultados obtenidos de un mismo experimento, que se pretende que los alumnos lleguen a estimar la probabilidad teórica de un evento.

Así, en base a lo anterior, se desprende que para el currículo chileno de educación primaria, es posible observar la presencia del significado intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico de la probabilidad, los cuales son abordados de manera muy general a lo largo de los distintos niveles que conforman la educación primaria.

A partir de este análisis, hemos identificado los siguientes objetos matemáticos asociados al estudio de la probabilidad (tabla 3.4) presentes en el currículo chileno para la educación primaria en relación a los significados intuitivo (I), subjetivo (S), frecuencial (F) y clásico (C) de la probabilidad. Para identificar los objetos matemáticos vinculados al estudio de la probabilidad en el currículo chileno para la educación primaria, hemos utilizado como herramienta la "guía para el reconocimiento de objetos y significados" (GROS) (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008).

Objeto matemático probabilidad en la educación primaria chilena	**Curso**					
	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Situaciones-Problemas						
Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas. (I)	x	x	x	x	x	x
Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la		x	x	x	x	x

información de la cual se dispone. (I, S)						
Hacer predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio. (F)				x	x	x
A partir de los resultados observados en un experimento determinar la probabilidad teórica de ocurrencia (C).					x	x
Cálculo de probabilidades (C).					x	x
Elementos lingüísticos						
Lenguaje común (I, S, F, C)	x	x	x	x	x	x
Lenguaje probabilístico (I, S, F, C)	x	x	x	x	x	x
Representación en tablas y gráficos (F)	x	x	x	x	x	x
Representación numérica (C)					x	x
Diagrama de árbol (C)					x	x
Conceptos-Definición						
Suerte/azar (I)		x	x	x	x	x
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible (I)				x	x	x
Resultados posibles (I)		x	x	x	x	x
Suceso incierto (S)			x	x	x	x
Experimento aleatorio (F)			x	x	x	x
Frecuencia absoluta y relativa (F)				x	x	x
Espacio muestral (C)				x		x
Casos favorables y no favorables (C)					x	x
Juego justo e injusto (C)					x	x
Probabilidad (C)					x	x
Propiedades						
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible (I)				x	x	x
Suceso incierto (S)			x	x	x	x
Independencia de sucesos (F)						x
Estabilización de frecuencias (F)					x	x
Casos posibles, favorables y no favorables (C)					x	x
Probabilidad de ocurrencia (C)						x
Probabilidad como medida cuantitativa (C)						x
Regla de Laplace (C)						x
Procedimientos						
Manipulación de generadores de azar: dados, monedas, bolitas (I)	x	x	x	x	x	x
Distinguir experimento aleatorio (I)			x	x	x	x
Reconocer distintos tipos de sucesos (I)				x	x	x
Valorar la posibilidad de ocurrencia de un suceso (I)		x		x	x	x
Comparar posibilidad de ocurrencia de sucesos (I)					x	x
Realizar predicción a partir de los datos observados (F)			x	x	x	x
Realizar repeticiones de un mismo experimento aleatorio (F)			x	x	x	x
Tablas de frecuencias (F)		x	x	x	x	x
Elaboración de diagramas de barras (F)		x	x	x	x	x
Construcción de espacio muestral (C)						x
Distinguir entre casos favorables y no favorables (C)			x		x	x
Aplicación de la Regla de Laplace para calcular						x

probabilidades en experimentos aleatorios sencillos (C)						
Argumentos						
Convención social (I, S, F, C)		x	x	x	x	x
Análisis de ejemplos (I, S, F, C)		x	x	x	x	x
Simulación de experimentos (F)		x	x	x	x	x
Simulaciones mediante el usos de software (F)				x	x	x

Tabla 3.4 Objetos matemáticos asociados al estudio de la probabilidad en el currículo chileno

En la tabla 3.4 se observa que el estudio de la probabilidad en la educación básica chilena está relacionado con los significados intuitivo, subjetivo, clásico y frecuencial de la probabilidad. Es así como, desde 1º a 6º año, los alumnos resuelven diversas situaciones problemáticas que involucran tales significados ya sea implícita o explícitamente. Además, observamos que los objetos matemáticos presentes en el currículo muestran una evolución del trabajo matemático que estructura el estudio de la probabilidad en la educación primaria. Esta evolución entre los distintos cursos (1º a 6º) depende de varios aspectos, objetos y significados que progresan paulatinamente, permitiendo así, consolidar los conocimientos de los alumnos sobre probabilidad.

En consecuencia, como puede apreciarse en las Tablas 3.1, 3.2 y 3.3, en ambos países (España y Chile) las directrices curriculares incluyen los temas de probabilidad a partir de los primeros niveles de la enseñanza primaria. La estructura de los contenidos es gradual y, en términos generales, en ambos países hacen alusión a la utilización de nociones de azar y probabilidad, realización de experimentos aleatorios y el cálculo de la probabilidad de un suceso. Además, se sugiere la incorporación del uso de herramientas tecnológicas como apoyo para fomentar la comprensión de los contenidos propuestos.

De forma más pormenorizada, al revisar los contenidos de probabilidad de ambos países se observa, de acuerdo con Morales y Ruíz (2013), que en los dos primeros años de educación primaria del currículo chileno se fomenta el estudio de datos, tablas y gráficos, presentando los experimentos aleatorios como una fuente para obtener información. En cambio, en el primer ciclo del currículo español se comienza a introducir el lenguaje que se utiliza para describir conceptos probabilísticos como: imposible, seguro y aquello que es posible pero no seguro. Tanto en los niveles de tercero y cuarto de educación básica en Chile como en el segundo ciclo del currículo español se incluye la realización de experimentos aleatorios, y en el caso español se enfatiza de nuevo el uso de los términos relacionados con el azar y la probabilidad, que en el currículo chileno se introducen en 5º básico. En los dos últimos años de la enseñanza primaria chilena, además de incidir en la descripción de la ocurrencia de un evento usando el lenguaje apropiado, se hace alusión también a la comparación de probabilidades de un mismo evento sin calcularlas y a la realización de conjeturas acerca de la tendencia de resultados obtenidos a partir de la repetición de un mismo experimento, mientras que en el currículo español no se alusión explícita a las conjeturas para, por ejemplo, llegar a deducir la ley de los promedios, pero sí que se incide en el uso de software educativo para favorecer la comprensión de este tipo de contenidos. Por otro lado, en el currículo español se menciona, como en el chileno, al uso de lenguaje adecuado para describir experiencias relacionadas con el azar, y se subraya la importancia de relacionar estos aspectos con la vida cotidiana.

Bajo este enfoque y atendiendo tanto a las orientaciones nacionales e internacionales, según Alsina (2013) es importante tener en cuenta a la hora de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad algunas ideas claves como la importancia de centrarse, primeramente, en el desarrollo informal de la probabilidad a partir de la intuición y del planteamiento de actividades a partir de lo cotidiano, de un contexto cercano para los estudiantes, para así, posteriormente (Batanero y Godino, 2004):

- Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
- Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
- Organizar la recogida de datos de experimentación de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
- Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
- Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Y de este modo alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados. No obstante, es importante destacar que dado lo reciente de la incorporación de la probabilidad en el currículo de primaria, son muchos los profesores que no han tenido la posibilidad de adquirir los conocimientos disciplinares y didácticos, ya sea durante el ejercicio de la docencia o por medio de cursos de educación continua, que les permitan desarrollar de manera efectiva las ideas claves antes expuestas. Esta es la principal razón por la cual es necesario contar con directrices claras que permitan orientar tanto los procesos de formación inicial como continua del profesorado, de manera que permitan transformar su práctica docente. Desde esta perspectiva es de gran importancia el contar con antecedentes en relación al conocimiento didáctico-matemático de los profesores para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.

3.3 La probabilidad en los libros de texto de educación primaria chilenos

En el apartado anterior hemos analizado la forma en que las orientaciones curriculares internacionales y nacionales proponen el estudio de la probabilidad en la educación primaria. A nivel general hemos visto que las orientaciones curriculares proponen iniciar el estudio de la probabilidad de manera progresiva, comenzando desde ideas intuitivas de los propios estudiantes sobre azar y probabilidad hasta llegar a una visión frecuentista y en algunos casos a un enfoque laplaciano o clásico de la probabilidad. Cabe señalar que este tránsito entre los distintos significados no es lineal sino más bien busca complementar los distintos significados atendiendo al hecho de que éstos se encuentran ligados dialécticamente.

Hemos decidido ampliar este estudio sobre los objetos y significados vinculados al estudio de la probabilidad en la educación primaria con el análisis de textos, ya que el libro de texto escolar constituye para el profesor, en muchas ocasiones, un recurso preponderante en el momento de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Remillard, 2000). Todo ello, bajo el supuesto de que en los libros de texto se plasman los resultados de investigaciones didácticas recientes, considerándose además interpretaciones y aplicaciones de los referentes curriculares, constituyéndose de este modo en un elemento que condiciona directamente la labor del profesor y el proceso de estudio de los contenidos matemáticos, en nuestro caso, de la probabilidad.

Las investigaciones relacionadas con el análisis de la probabilidad en libros de texto de primaria son prácticamente inexistentes, y en el caso de los textos de primaria chilenos más aún, quizás debido a la reciente incorporación del estudio de la probabilidad en la educación primaria. Al reunir antecedentes de investigaciones relacionadas con el análisis de la probabilidad en los libros de textos nos hemos encontrado solo con estudios referidos a libros de texto de educación secundaria o bachillerato. De los estudios de los cuales disponemos de información destacan los realizados por Ortiz, Batanero y Serrano (2001), quienes investigan acerca del lenguaje vinculado al estudio de la probabilidad en dos libros de texto de educación secundaria. Los autores observan que en aquel texto que se da una mayor importancia al lenguaje de lo aleatorio, se presenta un mejor tratamiento de la probabilidad. Más tarde, Ortiz (2002) analiza el significado institucional de los conceptos probabilísticos básicos y de su transposición didáctica en los libros de texto españoles de primer curso de bachillerato del período 1975-1991. Dentro de los resultados obtenidos se encuentra el hecho de que gran parte de los libros analizados realizan un tratamiento de la probabilidad mayoritariamente desde su significado clásico y frecuencial. Además pone de manifiesto la presencia de ciertos sesgos en relación a los significados de la probabilidad. Otra investigación sobre el estudio de la probabilidad en los libros de texto de educación secundaria obligatoria es la de Azcárate y Serradó (2006), quienes se encuentran con que en algunos libros de textos el estudio de la probabilidad se presenta de manera lineal, de forma más bien deductiva, abordando primeramente el estudio de conceptos y luego la aplicación de estos a la resolución de problemas. Mientras que en otros la probabilidad es presentada de forma mas bien inductiva, alternando actividades y conceptos que se complementan con la realización de recursos manipulativos y el trabajo cooperativo entre los estudiantes. Recientemente, Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizan el lenguaje de la probabilidad en dos series de libros de texto españoles de educación primaria. De sus resultados destacan la diversidad y predominancia de expresiones verbales y sobre todo las de tipo coloquial, además de la presencia de los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo presentes en el estudio de la probabilidad.

Desde esta perspectiva resulta interesante plantearse interrogantes del tipo: ¿cuáles son los objetos matemáticos vinculados a la probabilidad presentes en los libros de texto de primaria?, ¿cómo se introduce su estudio?, ¿se tienen en cuenta sus distintos significados, en la construcción del concepto?

Para dar respuesta a estos interrogantes hemos decidido, dada su cobertura e impacto, analizar los libros de textos escolares de la unidad de currículo y evaluación del Ministerio de Educación, entregados por el Estado chileno. Estos textos escolares son distribuidos de manera sistemática y gratuita a todos los estudiantes y profesores de los establecimientos educacionales municipales y subvencionados del país, alcanzando una cobertura total anual de 3 millones 200 mil estudiantes, pertenecientes a más de 10.700 establecimientos educacionales, aproximadamente, en todo el país.

Es por esta razón que analizaremos la serie completa de los textos escolares para la asignatura de matemática de 1º a 6º año básico entregados por el Ministerio de Educación durante el año escolar 2013 (tabla 3.5).

Código	**Título**	**Autores**	**Editorial**	**Edición**
[A]	Matemática 1º básico	María Rodríguez y Ximena Carreño.	Pearson Educación de Chile Ltda.	2013
[B]	Matemática 2º básico	María Rodríguez y Ximena Carreño.	Pearson Educación de Chile Ltda.	2013
[C]	Matemática 3º básico	María Rodríguez y Ximena Carreño.	Pearson Educación de Chile Ltda.	2013
[D]	Matemática 4º básico	María Rodríguez y Ximena Carreño.	Pearson Educación de Chile Ltda.	2013
[E]	Matemática 5º básico	Paola Rocamora, Marco Riquelme, Victoria Ainardi, Vilma Aldunate, Pamela Falconi y Jorge Chala.	Galileo	2013
[F]	Matemática 6º básico	Paola Rocamora, Marco Riquelme, Victoria Ainardi, Vilma Aldunate, Pamela Falconi y Jorge Chala.	Galileo	2013

Tabla 3.5 Serie de libros de texto del ministerio de educación chileno, año escolar 2013

De esta manera, el análisis del tratamiento otorgado a la probabilidad en los libros de textos, nos permitirá obtener información acerca de cómo se da el proceso de enseñanza y aprendizaje en la educación primara, puesto que:

> para muchos profesores, la elección de un libro de texto supone su decisión curricular más importante, por lo que no es raro que este instrumento ejerza un efecto poderoso sobre sus enfoques docentes y sobre las estrategias de aprendizaje de los alumnos (Campanario, 2001, p. 352).

Para realizar este análisis hemos considerado algunos de los pasos de la metodología de análisis de libros texto propuesta por Cobo (2003):

- Seleccionar aquellos capítulos en los que se tratan la probabilidad y los objetos matemáticos vinculados a su estudio.
- Lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen: situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos presentes, utilizando como base los objetos matemáticos identificados en las orientaciones curriculares chilenas, las cuales constituyen nuestro significado de referencia institucional.

Comenzamos este análisis de los objetos matemáticos presentes en los libros de texto presentando una panorámica de los contenidos relacionados con la enseñanza de la probabilidad en los distintos cursos.

Curso	Unidad	Lecciones	Páginas
1º básico	No se presentan contenidos relacionados con el estudio de la probabilidad.		
2º básico	Unidad 10: Gráficos y probabilidad.	Lección 10.6: eventos probables, y poco probables. Lección 10.7: Seguro, probable e imposible	236 – 243
3º básico	Unidad 7: Medición Unidad 8: Fracciones	Lección 7.1: Hora, media hora y cuarto de hora. Lección 8.6: Hacer una tabla y buscar un patrón.	172 – 173 204 –

	Unidad 9: Datos y gráficas	Lección 9.8: Usar tablas y gráficos para sacar conclusiones	205 226 – 227
4º básico	Unidad 11: Gráficos y probabilidad	Lección 11.6: resultados y experimentos	256 – 275
5º básico	Unidad 15: Probabilidad	Lección 1: resultados posibles Lección 3: Hacer predicciones Lección 4: Probabilidad como una fracción Lección 5: Probabilidad experimental	364 – 388
6º básico	No se presentan contenidos relacionados con el estudio de la probabilidad.		

Tabla 3.6 Unidades y lecciones vinculadas al estudio de la probabilidad en los libros de textos a analizar

A partir de la tabla 3.6 observamos la presencia de distintos contenidos relacionados con el estudio de la probabilidad en educación básica. Ésto nos da una primera aproximación acerca de cuáles son los contenidos relacionados con la probabilidad que pretenden desarrollar estos libros de educación primaria. En algunos casos, los contenidos se presentan de forma explícita en unidades y lecciones dedicadas por completo a ello, como es el casos de 2º, 4º y 5º año básico. En cambio en otros se presenta de manera implícita, como lo es el caso 3º año básico, en el cual se desarrolla el concepto de probabilidad por medio de la resolución de problemas vinculados a otras unidades. Además observamos que en los libros de texto de dos cursos, 1º y 6º año básico, no se presentan contenidos relacionados con probabilidad, lo que muestra un vacío de contenido no justificado por el currículo.

Al igual que para las orientaciones curriculares, hemos utilizado la GROS para identificar los objetos y significados vinculados al estudio de la probabilidad presentes en los libros de texto de educación primaria, dicha información se resume en la tabla 3.7.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS
Situaciones-Problemas	
Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas.	Desarrollo de competencias de reconocimiento del azar y grados de posibilidad de ocurrencia, intuiciones probabilísticas en juegos de azar.
Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la información de la cual se dispone.	Desarrollo de competencias de análisis de datos
Predicción de los resultados de un experimento aleatorio observando los resultados posibles.	
Analizar los datos obtenidos en una experiencia empírica en un juego con dados o monedas, para a partir de los resultados, determinar la probabilidad teórica de ocurrencia.	Reflexión sobre las propiedades de la convergencia en pequeñas muestras.
Cálculo de probabilidades.	Aplicación de regla de Laplace.
Elementos Lingüísticos	
Lenguaje común Lenguaje probabilístico Representación numérica Representación en tablas	Diversos términos y expresiones verbales con un significado matemático asociado a la probabilidad.
Conceptos-Definición	
Azar	Ocurrencia de un suceso no condicionada por la relación de causa y efecto.
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible. Posibilidad de ocurrencia de un suceso.	Grados de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso.
Resultados posibles	Conjunto de resultados posibles a obtener en la realización de un experimento aleatorio.
Experimento aleatorio	Lanzar dados y observar el resultado Lanzar moneda y observar el resultado Girar la ruleta y observar el resultado Extraer una bolita y observar el resultado
Frecuencia absoluta y relativa	Número de veces que se repite un determinado suceso; cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.
Casos favorables y no favorables	Un resultado es favorable a un suceso o evento cuando observar este resultado implica la ocurrencia del suceso o evento.
Probabilidad Probabilidad como grado de creencia personal	Proporción de casos favorables entre posibles; número al que tiende la frecuencia en una serie larga; grado de creencia de que un suceso ocurra.
Juego justo e injusto	Juego de azar en el que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar.

Propiedades	
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible.	Grados de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso.
Probabilidad como medida cuantitativa.	La probabilidad corresponde a una medida cuantitativa de las posibilidades de que ocurra una situación. Sus valores están entre 0 y 1.
Regla de Laplace	Cuando los resultados de un experimento son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad de ocurrir, se puede obtener la probabilidad de un suceso como: número de resultados favorables al suceso/ número de resultados posibles.
Procedimientos	
Manipulación de generadores de azar: dados, monedas, bolitas.	Experimentación con algunos dispositivos generadores de resultados aleatorios como dados, monedas, ruletas, etc., para comprender la imprevisibilidad de resultados.
Reconocer distintos tipos de sucesos. Valorar la posibilidad de ocurrencia de un suceso.	Identificar sucesos imposibles, poco posibles, posibles, muy posibles y seguros.
Comparar posibilidad de ocurrencia de sucesos.	Comparar la posibilidad de ocurrencia de sucesos por medio de la comparación de cantidades absolutas de casos favorables.
Realizar predicción a partir de los datos observados. Realizar repeticiones de un mismo experimento aleatorio.	Estimar la probabilidad de ocurrencia a partir de los resultados presentados u obtenidos en un experimento aleatorio.
Tablas de frecuencias	Representar por medio de tablas de frecuencia o de conteo las frecuencias absolutas y/o relativas de un experimento aleatorio.
Distinguir entre casos favorables y no favorables.	Diferenciar casos favorables de los no favorables.
Aplicación de la Regla de Laplace para calcular probabilidades en experimentos aleatorios sencillos.	Cálculo de probabilidades por medio de la Aplicación de la regla de Laplace, de manera implícita.
Argumentos	
En base a hechos y datos presentados	Fundamentación en los datos y hechos presentados para justificar propiedades y resultados.

Tabla 3.7 Objetos matemáticos y sus significados identificados en los libros de texto analizados

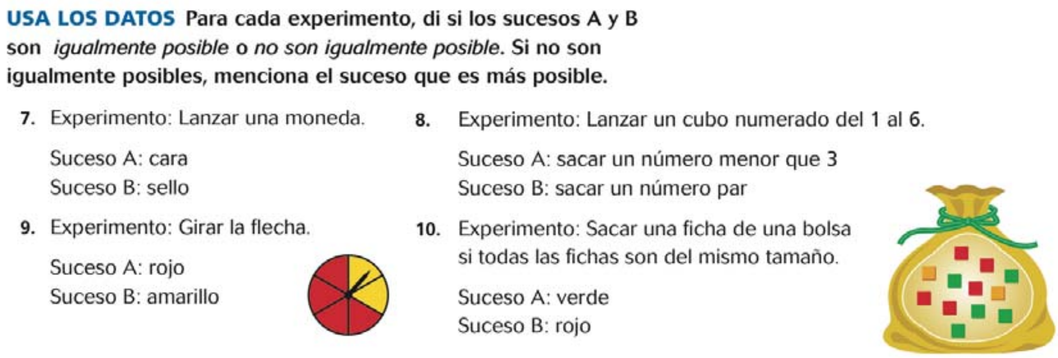
A continuación se describen los distintos objetos matemáticos vinculados a la probabilidad identificados en los libros de texto.

3.3.1 Situaciones-Problemas presentes en los libros de texto

En el análisis de las orientaciones curriculares identificamos cinco tipos de situaciones-problemas relacionadas con los significados intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico de la probabilidad. Estos tipos de situaciones-problemas se encuentran presentes es su totalidad en las actividades y problemas de los libros de textos analizados, y se basan principalmente en juegos con monedas y dados, además de la resolución de problemas de la vida cotidiana. A continuación presentamos algunos de ellos a modo de ejemplo.

Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas.

En los cuatro cursos, correspondientes a los libros de texto analizados, se proponen actividades que involucran la estimación y comparación de posibilidades de ocurrencia mediante la utilización y manipulación de dispositivos aleatorios tales como dados, monedas, ruletas, etc. Sin embargo, se concentran mayoritariamente en los textos de 3º y 4º año básico. Un ejemplo de este tipo de actividad es el que se muestra en la figura 3.2.


USA LOS DATOS Para cada experimento, di si los sucesos A y B son *igualmente posible* o *no son igualmente posible*. Si no son igualmente posibles, menciona el suceso que es más posible.

7. Experimento: Lanzar una moneda.
   Suceso A: cara
   Suceso B: sello
8. Experimento: Lanzar un cubo numerado del 1 al 6.
   Suceso A: sacar un número menor que 3
   Suceso B: sacar un número par
9. Experimento: Girar la flecha.
   Suceso A: rojo
   Suceso B: amarillo
10. Experimento: Sacar una ficha de una bolsa si todas las fichas son del mismo tamaño.
    Suceso A: verde
    Suceso B: rojo

Figura 3.2 Estimación de posibilidades de ocurrencia (Texto [E], p. 374)

A partir de este tipo de actividad, se pide a los alumnos que estimen y comparen posibilidades de ocurrencia de ciertos sucesos en base a la información que se les presenta, asociando la posibilidad de ocurrencia con diferentes grados de posibilidad de que ocurra cierto resultado, en este caso igualmente posible y más posible. El propósito de este tipo de actividades se centra en el desarrollo de competencias de reconocimiento del azar y grados de posibilidad de ocurrencia, además de las intuiciones probabilísticas en juegos de azar. En general en las distintas actividades de este tipo que se presentan, los diferentes grados de posibilidad van desde lo imposible hasta lo seguro, moviéndose a través de grados intermedios. Este tipo de actividades se fundamenta en el significado intuitivo de la probabilidad.

Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la información de la cual se dispone.

Este tipo de situación-problema, al igual que el anterior, se fundamenta en el significado intuitivo de la probabilidad, con la diferencia que se estudia la posibilidad de ocurrencia de diversos eventos o sucesos a partir de la información entregada en figuras, gráficos o tablas. Este tipo de actividades se encuentran presentes principalmente en los textos de 2º y 3º año básico, como un modo de afianzar la comprensión de la relación existente entre grados de posibilidad de ocurrencia de un determinado evento o suceso y probabilidad de ocurrencia. Un ejemplo de este tipo de actividad es el que se muestra en la figura 3.3.

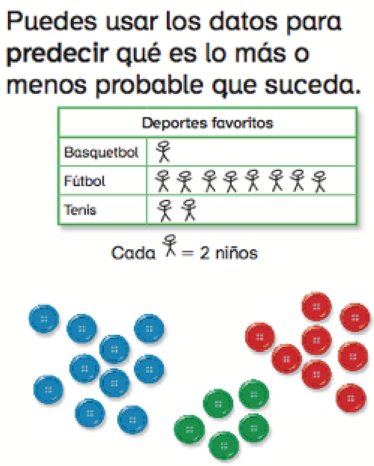


Figura 3.3 Posibilidades de ocurrencia a partir de datos (Texto [B], p. 225)

Como se observa, por medio de este tipo de actividades se busca que el alumno logre visualizar los posibles resultados de un determinado experimento aleatorio. Este tipo de actividades tiene por propósito que los alumnos desarrollen la competencia de análisis de datos, para la posterior formalización del cálculo de probabilidades desde un enfoque frecuencial.

Es importante destacar que dentro de este tipo de situaciones-problemas no solo se encuentran aquellas vinculadas al significado intuitivo de la probabilidad, sino que también, aunque en menor medida, aquellas vinculadas al significado subjetivo, en que las experiencias personales de los propios alumnos o del contexto podrían hacer variar la respuesta. Ejemplos de este tipo de situación-problema son los que se muestra en las figuras 3.4 y 3.5.

¿Qué será más probable: que el autobús llegue a la escuela a las 8:30 A.M. o a las 8:30 P.M.?

¿Qué será más probable: que el autobús salga de la escuela a las 2:45 A.M. o a las 2:45 P.M?

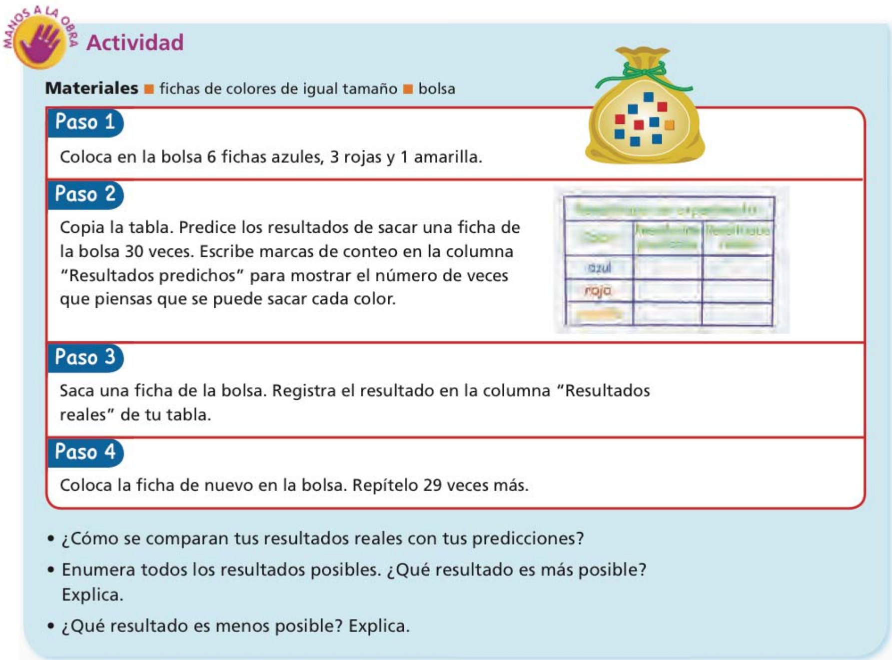
Figura 0.4 Posibilidades de ocurrencia a partir de datos (Texto [C], p. 172)

Una mañana de octubre, la Sra. Madariaga dijo, "Es imposible que vaya a nevar hoy". ¿Estás de acuerdo con la Sra. Madariaga?

Figura 3.5 Posibilidades de ocurrencia a partir de datos (Texto [E], p. 375)

Predicción de los resultados de un experimento aleatorio observando los resultados posibles.

Por medio de este tipo de situaciones se pretende que los alumnos sean capaces de realizar estimaciones o predicciones acerca del grado de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso o fenómeno, a partir de la información que se le proporciona. Este es el tipo de situación-problema que más aparece en los libros de texto analizados. Un ejemplo de este tipo de situación es la que se muestra en la figura 3.6.


MANOS A LA OBRA

Actividad

Materiales ■ fichas de colores de igual tamaño ■ bolsa

Paso 1

Coloca en la bolsa 6 fichas azules, 3 rojas y 1 amarilla.

Paso 2

Copia la tabla. Predice los resultados de sacar una ficha de la bolsa 30 veces. Escribe marcas de conteo en la columna "Resultados predichos" para mostrar el número de veces que piensas que se puede sacar cada color.

Paso 3

Saca una ficha de la bolsa. Registra el resultado en la columna "Resultados reales" de tu tabla.

Paso 4

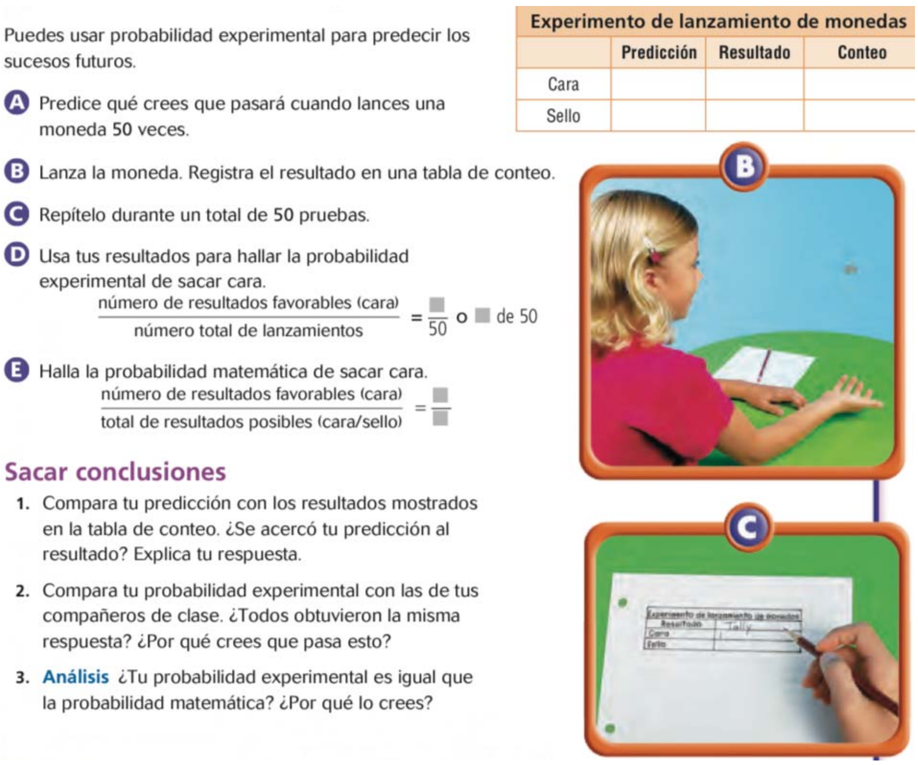
Coloca la ficha de nuevo en la bolsa. Repítelo 29 veces más.

- ¿Cómo se comparan tus resultados reales con tus predicciones?
- Enumera todos los resultados posibles. ¿Qué resultado es más posible? Explica.
- ¿Qué resultado es menos posible? Explica.

Figura 3.6 Predicción de resultados a partir de datos (Texto [E], p. 373)

A partir de los resultados observados en un experimento determinar la probabilidad teórica de ocurrencia

Por medio de este tipo de situaciones-problemas se busca acercar a los alumnos al cálculo de la probabilidad teórica de un experimento aleatorio, desde un enfoque frecuentista de la probabilidad, haciendo un primer acercamiento a través del experimento de lanzar una moneda. Este tipo de situaciones se presenta únicamente en el libro de 5º año básico, y se pretende que los alumnos comprendan que al repetir un numero suficientemente grande de veces el experimento, de manera independiente y bajo las mismas condiciones, las frecuencias relativas de ocurrencia de una situación dada, por ejemplo obtener cara, se estabilizan, tendiendo o acercándose cada vez más a cierto valor, el cual corresponde a la probabilidad de ocurrencia. Un ejemplo de este tipo de actividad se presenta en la figura 3.7.



Puedes usar probabilidad experimental para predecir los sucesos futuros.

A Predice qué crees que pasará cuando lances una moneda 50 veces.

B Lanza la moneda. Registra el resultado en una tabla de conteo.

C Repítelo durante un total de 50 pruebas.

D Usa tus resultados para hallar la probabilidad experimental de sacar cara.

$$\frac{\text{número de resultados favorables (cara)}}{\text{número total de lanzamientos}} = \frac{\blacksquare}{50} \text{ o } \blacksquare \text{ de } 50$$

E Halla la probabilidad matemática de sacar cara.

$$\frac{\text{número de resultados favorables (cara)}}{\text{total de resultados posibles (cara/sello)}} = \frac{\blacksquare}{\blacksquare}$$

Experimento de lanzamiento de monedas			
	Predicción	Resultado	Conteo
Cara			
Sello			

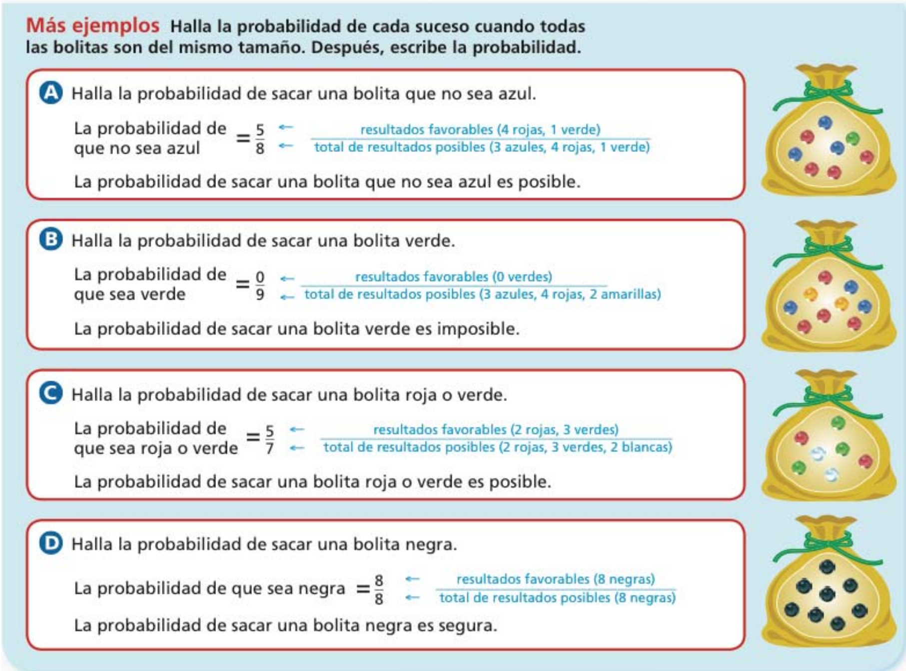
Sacar conclusiones

1. Compara tu predicción con los resultados mostrados en la tabla de conteo. ¿Se acercó tu predicción al resultado? Explica tu respuesta.
2. Compara tu probabilidad experimental con las de tus compañeros de clase. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? ¿Por qué crees que pasa esto?
3. **Análisis** ¿Tu probabilidad experimental es igual que la probabilidad matemática? ¿Por qué lo crees?

Figura 3.7 Probabilidad experimental y teórica (Texto [E], p. 380)

Cálculo de probabilidades

Por último, nos encontramos con aquellas situaciones-problemas a través de las cuales se busca que el alumno calcule directamente probabilidades de ocurrencia de un determinado sucesos o evento en base a un enfoque clásico o laplaciano de la probabilidad. Este tipo de situaciones se encuentra presente en el texto de 5º año básico. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 3.8.



Más ejemplos **Halla la probabilidad de cada suceso cuando todas las bolitas son del mismo tamaño. Después, escribe la probabilidad.**

A Halla la probabilidad de sacar una bolita que no sea azul.

La probabilidad de que no sea azul $= \frac{5}{8}$ ← resultados favorables (4 rojas, 1 verde) ← total de resultados posibles (3 azules, 4 rojas, 1 verde)

La probabilidad de sacar una bolita que no sea azul es posible.

B Halla la probabilidad de sacar una bolita verde.

La probabilidad de que sea verde $= \frac{0}{9}$ ← resultados favorables (0 verdes) ← total de resultados posibles (3 azules, 4 rojas, 2 amarillas)

La probabilidad de sacar una bolita verde es imposible.

C Halla la probabilidad de sacar una bolita roja o verde.

La probabilidad de que sea roja o verde $= \frac{5}{7}$ ← resultados favorables (2 rojas, 3 verdes) ← total de resultados posibles (2 rojas, 3 verdes, 2 blancas)

La probabilidad de sacar una bolita roja o verde es posible.

D Halla la probabilidad de sacar una bolita negra.

La probabilidad de que sea negra $= \frac{8}{8}$ ← resultados favorables (8 negras) ← total de resultados posibles (8 negras)

La probabilidad de sacar una bolita negra es segura.

Figura 3.8 Cálculo de probabilidades (Texto [E], p. 377)

Finalmente, a partir de los análisis anteriores, hemos confeccionado la tabla 3.8 que muestra la presencia o ausencia de las distintas situaciones-problemas para cada uno de los libros de textos analizados.

Situaciones-Problemas	**Libros de texto**			
	2º	3º	4º	5º
Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas (I).	x	x	x	x
Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la información de la cual se dispone (I, S).	x	x	x	x
Hacer predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio (F).			x	x
A partir de los resultados observados en un experimento determinar la probabilidad teórica de ocurrencia (C).				x
Cálculo de probabilidades (C).				x

Tabla 3.8 Situaciones-problemas identificadas en los libros de texto analizados

Como se observa en la tabla 3.8 existe coherencia entre las situaciones-problemas identificadas en las orientaciones curriculares chilenas y los libros de textos analizados.

No obstante, hay algunas situaciones-problemas que aparecen muy poco en los libros de texto, tal es el caso de aquellas vinculadas con el enfoque subjetivo de la probabilidad, la cual aparece únicamente en el libro de tercer año en un par de oportunidades. Mientras que la situación-problema que aparece mayoritariamente es aquella vinculada al significado frecuentista de la probabilidad, al cual se otorga un gran énfasis en estos libros de texto.

3.3.2 Elementos lingüísticos presentes en los libros de texto

Otro punto a considerar dentro de nuestro análisis son los elementos lingüísticos (términos y expresiones matemáticas, símbolos representaciones graficas, etc.) vinculados a la probabilidad presentes en los libros de texto. De acuerdo con Font y Godino (2006), estos elementos son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos al resolver situaciones-problemas. A la vez, permiten representar por medio de objetos concretos (representaciones) aquellos objetos más abstractos, posibilitando de este modo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado.

En el análisis de las orientaciones curriculares identificamos los siguientes cinco elementos lingüísticos: lenguaje común, lenguaje probabilístico, representación en tablas y gráficos, representación numérica y diagrama de árbol. De estos elementos lingüísticos solo cuatro se encuentran presentes en los libro de texto analizados, a continuación los ejemplificamos.

Lenguaje de uso común asociado al estudio de la probabilidad

En concordancia con lo planteado por Ortiz, Batanero y Serrano (2001) consideramos que el lenguaje desempeña un rol fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y sobre todo de la probabilidad, debido a la estrecha relación que existe entre las expresiones de uso común y el lenguaje de corte más matemático o probabilístico.

Dentro del lenguaje utilizado en los libros de texto, hemos encontrado una predominancia del lenguaje de uso común y cotidiano por sobre del lenguaje de corte probabilístico o formal. Dentro de las expresiones identificadas de uso común asociadas al estudio de la probabilidad se encuentran las que se muestran en la tabla 3.9.

Significado intuitivo	Significado frecuencial	Significado clásico
Más probable, menos probable, igualmente probable Probabilidad Seguro, casi seguro, posible, poco posible, imposible Azar Resultados Elegir Sin ver Juego justo e injusto	Cuántos Predecir Seguro, casi seguro, posible, poco posible, imposible Comparar Lanzamiento de un dado Lanzamiento de una moneda Girar una ruleta Frecuencia Tabla de datos Juego justo e injusto Datos	Fracción Cuántos Más probable, menos probable, igualmente probable Sin ver Resultados favorables Resultados posibles Total de resultados posibles Juego justo e injusto Calcular probabilidad Comparar probabilidad Sacar una bolita Elegir Girar una ruleta Lanzamiento de un dado Lanzamiento de una moneda

Tabla 3.9 Lenguaje de uso común asociado al estudio de la probabilidad identificado en los libros de texto

La tabla 3.9 da cuenta de una gran diversidad de objetos, agrupados por tipo de significado, asociados a un lenguaje común de la probabilidad, que de acuerdo a lo planteado por Shuard y Rothery (1984) son expresiones que si bien aparecen en las matemáticas y en el lenguaje común, tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Como se observa en la tabla 3.9, en los libros de texto analizados predominan las expresiones vinculadas al significado frecuencial y clásico de la probabilidad en coherencia a lo planteado en las orientaciones curriculares chilenas, en las que se otorga gran énfasis a la experimentación asociada al enfoque frecuentista de la probabilidad, para una posterior formalización de ésta a un enfoque clásico.

Lenguaje probabilístico

En esta categoría hemos considerado todas aquellas expresiones que son específicas de la matemática, y que por lo general no forman parte del lenguaje común. Sin embargo, tal y como plantean Shuard y Rothery (1984), en algunos casos estas expresiones también aparecen en el contexto cotidiano con significados muy próximos. Dentro de las expresiones identificadas encontramos las que se presentan en la tabla 3.10.

Significado intuitivo	Significado frecuencial	Significado clásico
Más probable, menos probable, igualmente probable Eventos Probabilidad Azar Resultados Sucesos Juego justo e injusto	Gráfico Experimento Predecir Seguro, casi seguro, posible, poco posible, imposible Probabilidad experimental Frecuencia Tabla de datos Juego justo e injusto	Fracción Más probable, menos probable, igualmente probable Equiprobable Probabilidad matemática Resultados favorables Resultados posibles Total de resultados posibles Juego justo e injusto Calcular probabilidad Comparar probabilidad Girar una ruleta Lanzamiento de un dado Lanzamiento de una moneda

Tabla 3.10 Lenguaje probabilístico identificado en los libros de texto

En la tabla 3.10 se observa la predominancia de las expresiones vinculadas al significado clásico o laplaciano de la probabilidad.

En consecuencia, a partir de las tablas 3.9 y 3.10 se observa que la mayoría de las palabras se encuentran en una categoría mixta, es decir, pertenecen tanto al lenguaje propio de la matemática como a un lenguaje de uso más común, puesto que sus significados son muy próximos en ambos contextos. Además se observa también una mayor predominancia, en ambos casos, de las expresiones vinculadas al significado frecuentista y laplaciano de la probabilidad, lo que deja de manifiesto un mayor énfasis, en estos libros de texto, en el desarrollo de la probabilidad desde dichos enfoques. Así, pues, se otorga una menor importancia, a nivel de lenguaje, al significado intuitivo de la probabilidad, el cual de acuerdo con las orientaciones internacionales es el más próximo en las primeras edades.

Representaciones numéricas

Dentro de las distintas representaciones numéricas que admite la probabilidad se encuentran los números enteros, si consideramos que la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso corresponde a una medida cuantitativa de la posibilidad de ocurrencia de ésta, la cual de acuerdo con el primer axioma de probabilidad corresponde a un valor entre 0 y 1. También puede expresarse como 0% y 100% de modo que una situación catalogada como imposible tendrá probabilidad de ocurrencia 0 y, en el otro extremo, una situación catalogada como segura tendrá probabilidad de ocurrencia 1. En la medida en que una situación tiene mayor posibilidad de ocurrir, su probabilidad de ocurrencia se acercará a 1. Y además, podemos expresar la probabilidad de ocurrencia mediante una fracción o número decimal, puesto que al repetir un número suficientemente grande de veces un experimento aleatorio, de manera independiente y en las mismas condiciones, las frecuencias relativas de ocurrencia de una situación dada se estabilizan, tendiendo o acercándose cada vez más a cierto valor que se puede expresar mediante una fracción. O bien como una proporción entre el número de casos favorables y el total de casos posibles.

Así, a partir del análisis de los libros de texto, hemos observado que las únicas representaciones numéricas utilizadas son la de probabilidad como proporción entre casos favorables y total de casos posibles y la probabilidad como fracción, presentándose éstas solo en el libro de texto de quinto año básico, pues en los cursos anteriores solo se habla de probabilidad como una medida cualitativa y no cuantitativa. Un ejemplo de este tipo de representación numérica es el que se presenta en la figura 3.9.

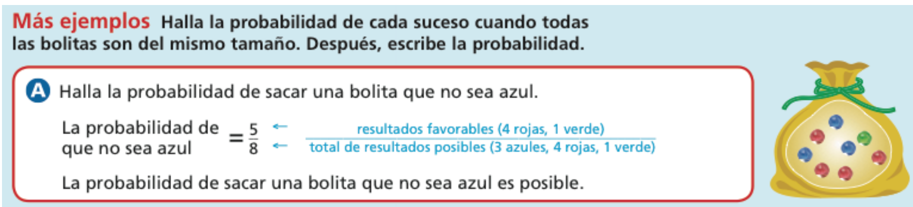


Figura 3.9 Representación numérica de la probabilidad (Texto [E], p. 377)

Representación en tablas

Otro tipo de representación con el cual nos hemos encontrado es el uso de tablas y gráficos, los cuales aparecen asociados al estudio de la probabilidad en los libros de texto de 4º y 5º año básico y vinculados a un enfoque frecuentista de la probabilidad. Se identifican principalmente, tablas de conteo y tablas de frecuencia que tienen por propósito resumir las frecuencias absolutas y relativas obtenidas a partir de la realización de un experimento aleatorio. Un ejemplo de este tipo de representación es el que se presenta en la figura 3.10.

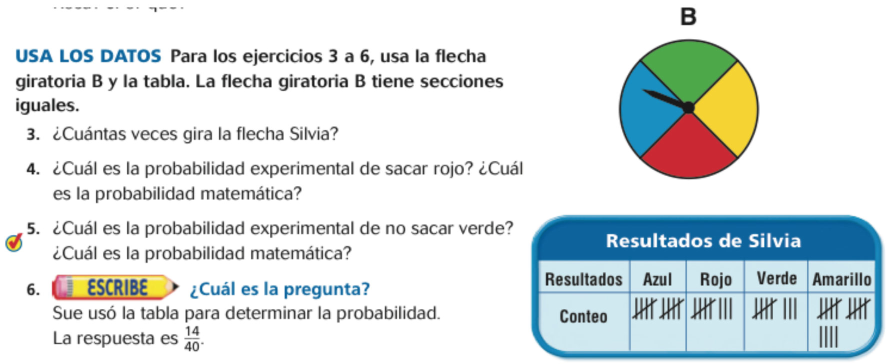


Figura 3.10: Representación de la probabilidad (Texto [E], p. 381)

En lo que respecta a las representaciones gráficas, estas se encuentran ausentes en lo que al estudio de la probabilidad se refiere, siendo los grandes ausentes, pese a que los libros de textos se centran bastante en el trabajo a partir de experimentos aleatorios, como el lanzamiento de dados y moneadas y en la asociación del cálculo de probabilidad a partir de la estabilización de las frecuencias relativas, no se utilizan las representaciones gráficas como un medio de apoyo al aprendizaje de la probabilidad.

Finalmente, a partir de los análisis anteriores, hemos confeccionado la tabla 3.11 que muestra la presencia o ausencia de los distintos elementos lingüísticos para cada uno de los libros de textos analizados.

Elementos lingüísticos	**Libros de texto**			
	2º	3º	4º	5º
Lenguaje común	x	x	x	x
Lenguaje probabilístico		x	x	x
Representación numérica				x
Representación en tablas			x	x
Representación en gráficos				
Representación en diagramas de árbol				

Tabla 3.11 Elementos lingüísticos identificados en los libros de texto

Como se observa en la tabla 3.11 se evidencia, a nivel general, que faltan ciertos elementos lingüísticos fundamentales asociados al estudio de la probabilidad en la educación primaria, que si bien se especifican en la orientaciones curriculares, no aparecen en los libros de texto. Tal es el caso, por ejemplo, de las representaciones gráficas y de los diagramas de árbol. También se observa que se otorga gran énfasis, por sobre otros elementos lingüísticos, a la adquisición de expresiones del lenguaje común vinculadas a la probabilidad.

3.3.3 Conceptos y definiciones presentes en los libros de texto

Hemos analizado los diversos tipos de entidades matemáticas para las cuales es posible formular una definición, presentadas ya sea explicita o implícitamente a los alumnos en los libros de textos analizados. Puesto que son muy pocas las definiciones que aparecen de manera explícita, en tanto que la mayoría se presentan como resultados o conclusiones a problemas resueltos, o bien como conclusiones a extraer y formular en problemas propuestos. Dentro de los conceptos y definiciones identificadas se encuentran las que se presentan de manera agrupada, según el significado de la probabilidad al cual se vinculan, en la tabla 3.12.

Significado intuitivo	**Significado Subjetivo**	**Significado Frecuencial**	**Significado Clásico**
Azar Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible Posibilidad de ocurrencia de un suceso	Probabilidad como grado de creencia personal	Experimento aleatorio Frecuencia absoluta y relativa Probabilidad experimental	Resultados posibles Casos favorables y no favorables Probabilidad matemática Juego justo e injusto

Tabla 3.12 Conceptos y definiciones identificadas en los libros de texto

A partir de la tabla 3.12 se observa que gran parte de los conceptos y definiciones se encuentran asociados a los significados intuitivo, frecuentista y clásico de la probabilidad, siendo las que presentan una menor presencia las asociadas al significado subjetivo, lo que concuerda también con la poca presencia de situaciones-problemas asociadas a este significado.

Cabe señalar que en los textos de 2º, 3 y 4º básico se da mayor importancia a conceptos y definiciones vinculadas al significado intuitivo, mientras que en el texto de 5º básico existe mayor predominancia de los conceptos y definiciones vinculados al significado frecuencial y clásico de la probabilidad. Algunos ejemplos de estos tipos de definiciones son los que se muestran a continuación.

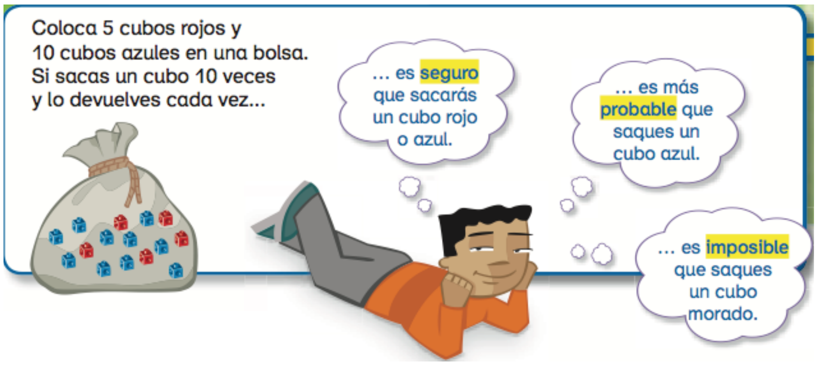


Figura 3.11 Definición asociada al concepto de sucesos seguro, probable e imposible (Texto [B], p. 238)

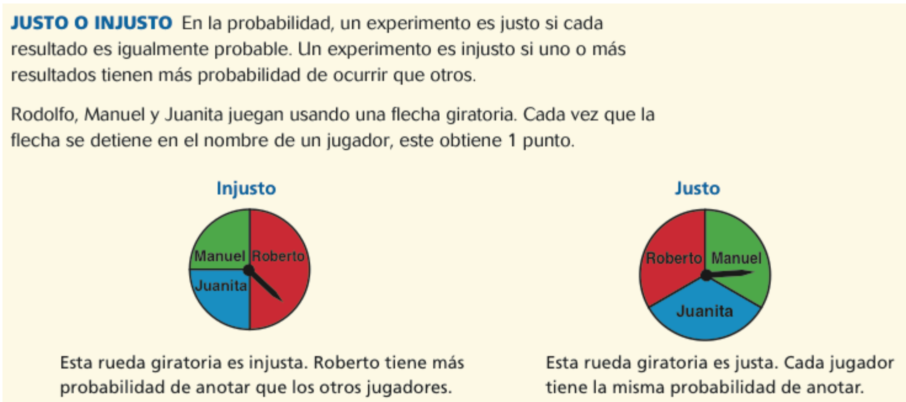


Figura 3.12 Definición a experimento o juego justo e injusto (Texto [E], p. 379)

A partir de lo antes expuesto, hemos elaborado la tabla 3.13 que muestra la presencia o ausencia de los distintos conceptos y definiciones para cada uno de los libros de textos analizados.

Conceptos-Definición	**Libros de texto**			
	2º	3º	4º	5º
Azar	x	x	x	x
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible	x	x	x	x
Posibilidad de ocurrencia de un suceso	x	x		
Probabilidad como grado de creencia personal		x	x	x
Experimento aleatorio				x
Frecuencia absoluta y relativa				x
Probabilidad experimental				x
Resultados posibles				x
Casos favorables y no favorables				x
Probabilidad matemática				x
Juego justo e injusto				x

Tabla 3.13 Conceptos y definiciones identificados en los libros de texto

Como se observa en la tabla 3.13 los conceptos y definiciones asociadas al significado intuitivo y subjetivo se concentran mayoritariamente en 2º, 3º y 4º básico, mientras que las ligadas al significado frecuencial y clásico se presentan mayoritariamente en 5º básico.

Por otro lado, al analizar la coherencia de los conceptos y definiciones presentes en los libros de texto, en relación con las orientaciones curriculares, se observa que no se abordan todos los conceptos y definiciones presentes en tales orientaciones, dejando algunos de ellos de lado, como es el caso de el concepto de suerte asociado al azar y el concepto de espacio muestral, el cual no se formaliza y se trabajo solo de forma intuitiva.

3.3.4 Propiedades presentes en los libros de texto

En los libros de texto analizados hemos identificado solo tres propiedades, las cuales aparecen enunciadas de manera muy informal y sin considerar ningún tipo de justificación o prueba. Las propiedades identificadas corresponden a los significados intuitivo y clásico de la probabilidad, respectivamente. A continuación presentamos las propiedades identificadas.

Suceso posible, poco posible, imposible, equiprobable y seguro

Como se observa en la figura 3.13 esta propiedad se presenta de manera conjunta para los cinco tipos de sucesos, enunciándose de manera muy superficial y sin hacer alusión a ningún tipo de justificación, prueba o demostración.

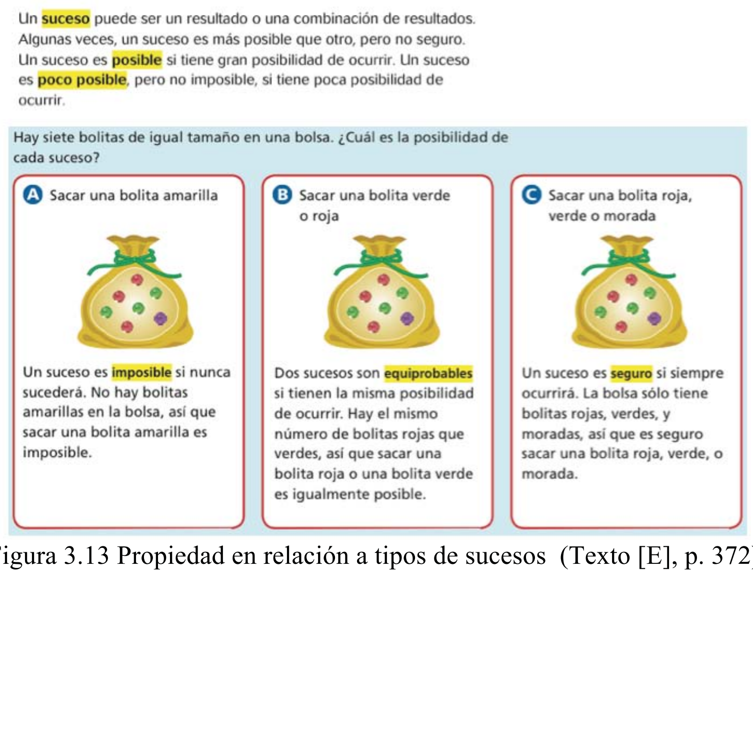


Figura 3.13 Propiedad en relación a tipos de sucesos (Texto [E], p. 372)

Probabilidad como medida cuantitativa, entre 0 y 1, de las posibilidades de que ocurra una situación.

Como se observa en la figura 3.14 esta propiedad formal de probabilidad, al igual que las anteriores, es dada de forma superficial y sin una justificación de por medio.

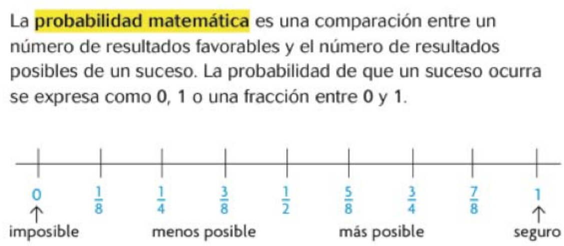


Figura 3.14 Propiedad en relación a probabilidad como medida (Texto [E], p. 376)

Regla de Laplace

Si bien la regla de Laplace no se presenta de manera explicita, sí se muestra por medio de ejemplo en el que se indica que para calcular la probabilidad matemática de que un suceso ocurra, se puede expresar dicha probabilidad por medio de una fracción. Un ejemplo de ésto se muestra en la figura 3.15.

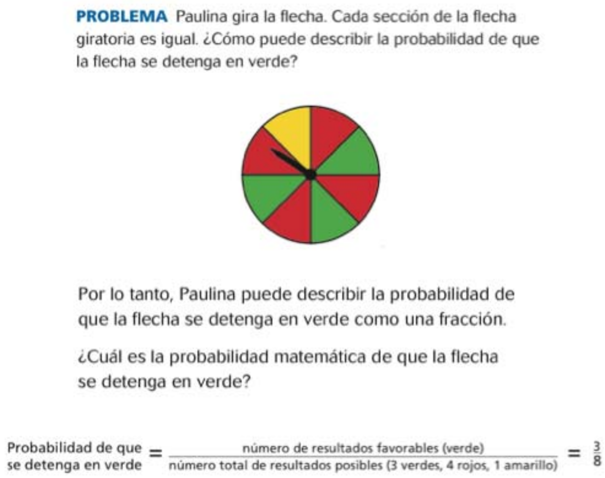


Figura 3.15 Regla de Laplace presentada implícitamente (Texto [E], p. 376)

Finalmente, a partir de lo antes expuesto, hemos elaborado la tabla 3.14 que muestra la presencia o ausencia de las distintas propiedades identificadas en las orientaciones curriculares para cada uno de los libros de textos analizados.

Propiedades	Libros de texto			
	2º	3º	4º	5º
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible	x		x	x
Suceso incierto				
Independencia de sucesos				
Estabilización de frecuencias				
Casos posibles, favorables y no favorables				
Probabilidad de ocurrencia				
Probabilidad como medida cuantitativa				x
Regla de Laplace				x

Tabla 3.14 Propiedades identificadas en los libros de texto

Como se observa en la tabla 3.14, los libros de textos analizados no consideran un gran número de las propiedades identificadas en las orientaciones curriculares, lo cual podría originar el surgimiento de errores y dificultades, así como un bajo nivel de comprensión por parte de los alumnos hacia la probabilidad. Por otro lado, es importante destacar que la regla de Laplace es mencionada de forma implícita pese a la importancia que se le otorga en las orientaciones curriculares, reduciéndola solo a una formula mediante la cual se puede calcular una probabilidad, omitiendo aspectos importantes como la suposición fundamental de que todos los posibles resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir y que el espacio muestral debe tener cardinalidad finita. Este tipo de omisión podría generar sesgos importantes en el aprendizaje de los estudiantes.

3.3.5 Procedimientos presentes en los libros de texto

Se han analizado los diferentes técnicas, algoritmos y procedimientos de cálculo que se utilizan en los libros de texto analizados para el cálculo de probabilidades. Se ha observado que los libros de texto presentan procedimientos concretos para resolver los distintos tipos de situaciones-problema, ya sea de forma explícita, o por medio de problemas resueltos, o de manera guiada por medio de indicaciones y preguntas. Dentro de los procedimientos identificados se encuentran los que a continuación se señalan en la tabla 3.15 clasificados según el significado de la probabilidad al cual se encuentran asociados.

Significado intuitivo	Significado frecuencial	Significado clásico
Manipulación de generadores de azar: dados, monedas, bolitas. Reconocer distintos tipos de sucesos. Valorar la posibilidad de ocurrencia de un suceso. Comparar posibilidad de ocurrencia de sucesos.	Realizar predicción a partir de los datos observados. Realizar repeticiones de un mismo experimento aleatorio. Tablas de frecuencias	Distinguir entre casos favorables y no favorables. Aplicación de la Regla de Laplace para calcular probabilidades en experimentos aleatorios sencillos.

Tabla 3.15 Procedimientos identificados en los libros de texto

A partir de la tabla 3.15 se observa que los procedimientos presentados son variados e involucran a los tres significados que se trabajan mayoritariamente en el conjunto de libros de textos analizados. Ejemplos de ésto son los que se muestran en lo que sigue.

Manipulación de generadores de azar: dados, monedas, bolitas y ruletas

Este tipo de procedimiento se utiliza mayoritariamente en los libros de 2º, 3º y 4º básico para identificar sucesos probable, poco probables, así como sucesos posible, imposibles, etc. Un ejemplo de ésto es el siguiente.

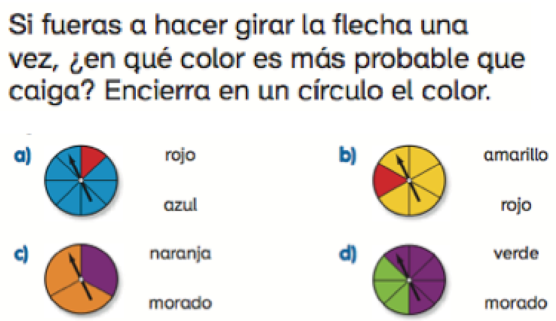


Figura 3.16 Utilización de generadores de azar (Texto [B], p. 237)

Reconocer distintos tipos de sucesos

Por medio de este procedimiento se pide a los alumnos que identifiquen distintos tipos de sucesos involucrados en distintas situaciones, o bien que a partir de una situación planteada, ellos mismos indiquen distintos tipos de sucesos. En la figura 3.17. se muestra un ejemplo.

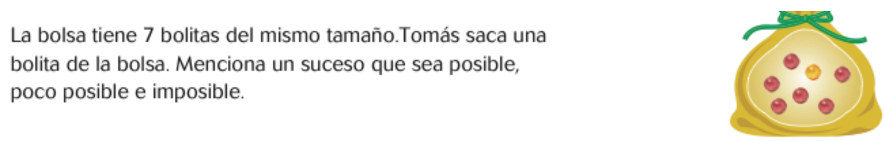


Figura 3.17 Reconocimiento de distintos tipos de sucesos (Texto [E], p. 373)

Valorar la posibilidad de ocurrencia de un suceso

Para avalorar la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso, se presentan diferentes situaciones en las que deben valorar tal posibilidad por medio de expresiones tales como, probable, poco probable, improbable, etc. Un ejemplo de esto es el que se muestra en la figura 3.18.

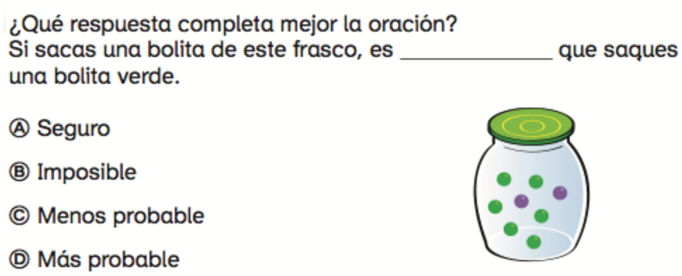


Figura 3.18 Valoración de posibilidad de ocurrencia de un suceso (Texto [B], p. 243)

Comparar posibilidad de ocurrencia de sucesos

Para llevar a cabo este procedimiento se pide a los alumnos que señalen frente a dos tipos de sucesos cuál es más posible, basándose para ello en la comparación de posibilidades de ocurrencia. Un ejemplo de esto es el siguiente:

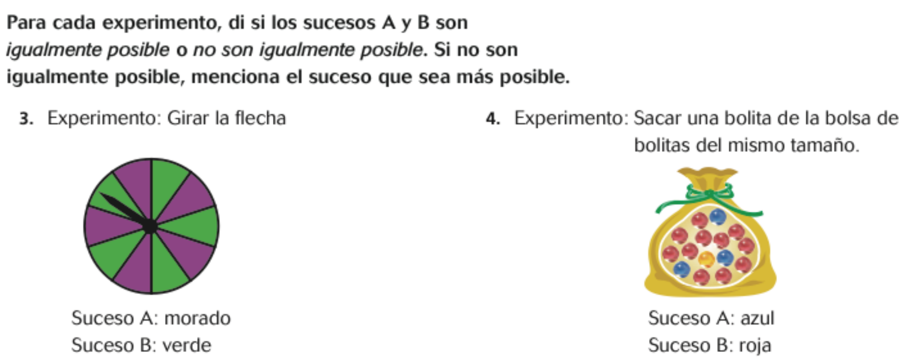
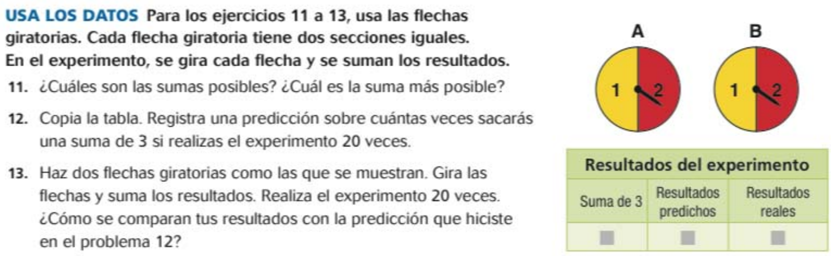


Figura 3.19 Comparación de posibilidad de ocurrencia de dos sucesos (Texto [E], p. 382)

Realizar predicción a partir de los datos observados

Para la utilización del procedimiento de realizar predicciones, se muestra a los alumnos diferentes situaciones como la de la figura 3.20, en las cuales deben realizar predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de ciertos sucesos a partir de la información o datos que se presentan.



USA LOS DATOS **Para los ejercicios 11 a 13, usa las flechas giratorias. Cada flecha giratoria tiene dos secciones iguales. En el experimento, se gira cada flecha y se suman los resultados.**

11. ¿Cuáles son las sumas posibles? ¿Cuál es la suma más posible?

12. Copia la tabla. Registra una predicción sobre cuántas veces sacarás una suma de 3 si realizas el experimento 20 veces.

13. Haz dos flechas giratorias como las que se muestran. Gira las flechas y suma los resultados. Realiza el experimento 20 veces. ¿Cómo se comparan tus resultados con la predicción que hiciste en el problema 12?

Resultados del experimento		
Suma de 3	Resultados predichos	Resultados reales
■	■	■

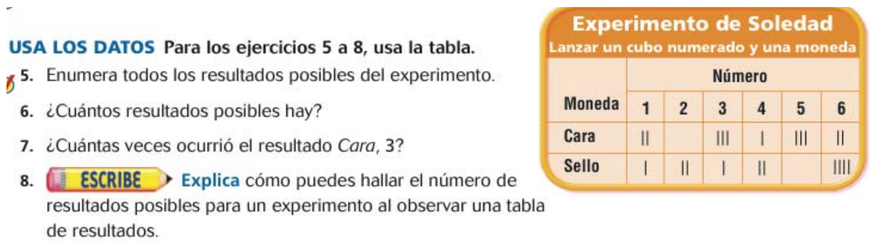
Figura 3.20 Predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de sucesos (Texto [E], p. 374)

Realizar repeticiones de un mismo experimento aleatorio

Este procedimiento consiste en que se solicita a los alumnos que realicen reiteradamente un determinado experimento de modo que conjeturen sobre su probabilidad de ocurrencia. Un ejemplo de ésto es el presentado en la figura 3.20 (figura anterior).

Tablas de frecuencias

Otro procedimiento empleado en los libros de texto analizados para el cálculo o estimación de probabilidad es extraer información de interés desde tablas de frecuencias o de conteo, como se muestra en la figura 3.21.



USA LOS DATOS **Para los ejercicios 5 a 8, usa la tabla.**

5. Enumera todos los resultados posibles del experimento.

6. ¿Cuántos resultados posibles hay?

7. ¿Cuántas veces ocurrió el resultado *Cara*, 3?

8. ESCRIBE **Explica** cómo puedes hallar el número de resultados posibles para un experimento al observar una tabla de resultados.

Experimento de Soledad
Lanzar un cubo numerado y una moneda

	Número					
Moneda	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cara	II		III	I	III	II
Sello	I	II	I	II		IIII

Figura 3.21 Utilización de tablas de frecuencia o de conteo (Texto [E], p. 367)

Distinguir entre casos favorables y no favorables

Si bien en los libros de texto no se da una definición explicita de casos favorables y no favorables, sí se ilustra este concepto por medio de ejemplos que dan a entender implícitamente el significado al cual se refiere. Además, hemos identificado que el distinguir entre casos favorables y no favorables es utilizado como un procedimiento que permite por medio de la aplicación de la regla de Laplace (la cual tampoco se presenta de forma explícita) obtener la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso como una medida cuantitativa. Un ejemplo que ilustra como se utiliza este procedimiento se muestra en la figura 3.22.

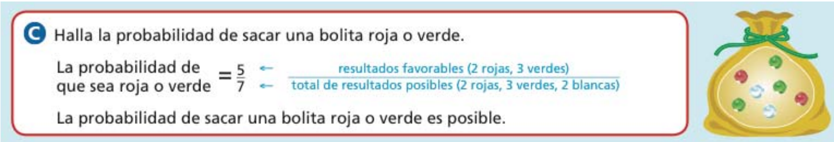


Figura 3.22 Distinción casos favorables y no favorables (Texto [E], p.377)

Como se observa en la figura anterior, mediante el ejemplo presentado a los alumnos se muestra que para calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, primero hay que identificar la cantidad de casos favorables y luego de casos posibles, y escribir la proporción entre ambos. Sin embargo, no se da énfasis al supuesto fundamental de equiprobabilidad de los sucesos y cardinalidad finita del espacio muestral.

Aplicación de la Regla de Laplace para calcular probabilidades en experimentos aleatorios sencillos

Como ya hemos mencionado anteriormente, la regla de Laplace es utilizada meramente como una técnica para el cálculo de probabilidades, despojándola de todo el rigor matemático que se puede otorgar en este nivel, al punto de ni siquiera mencionarla por su nombre. Un ejemplo de cómo es utilizada la regla de Laplace es el mostrado anteriormente en la figura 3.22.

En resumen, a partir de lo anterior, consideramos que los libros de texto analizados presentan un variedad de técnicas, algoritmos y procedimientos para el cálculo de probabilidades, las cuales resumimos en la tabla 3.16 que muestra la presencia o ausencia de los distintos procedimientos identificados cada uno de los libros de textos analizados, de acuerdo con las orientaciones curriculares.

Procedimientos	**Libros de texto**			
	2º	3º	4º	5º
Manipulación de generadores de azar: dados, monedas, bolitas.	x	x	x	x
Distinguir experimento aleatorio				
Reconocer distintos tipos de sucesos.	x	x	x	x
Valorar la posibilidad de ocurrencia de un suceso.	x	x	x	x
Comparar posibilidad de ocurrencia de sucesos.		x	x	
Realizar predicción a partir de los datos observados.			x	x
Realizar repeticiones de un mismo experimento aleatorio.				x
Tablas de frecuencias				x
Elaboración de diagramas de barras				
Construcción de espacio muestral				
Distinguir entre casos favorables y no favorables.				x
Aplicación de la Regla de Laplace para calcular probabilidades en experimentos aleatorios sencillos.				x

Tabla 3.16 Procedimientos identificados en los libros de texto

Como se observa en la tabla 3.16 si bien se presenta una diversidad de procedimientos, éstos en algunos casos, como por ejemplo la regla de Laplace, no presentan la condición de ciertos supuestos básicos que se deben cumplir para ser aplicados a la resolución de ciertas situaciones-problema. Por otro lado, hay procedimientos que si bien están presentes en las orientaciones curriculares, no se tratan en los libros de texto analizados, como es el caso de la construcción del espacio muestral, la elaboración de diagramas de barras y el distinguir entre un experimento aleatorio de uno determinista.

3.3.6 Argumentos presentes en los libros de texto

En los libros de texto analizados el argumento predominante es la justificación de los resultados y propiedades, en base a los hechos y datos presentados, además de ciertos argumentos fundamentados en convenciones sociales, por ejemplo el considerar que una moneda es honesta, es decir, que sus resultados son equiprobables. Por último, otro tipo de argumento que se presenta, pero en menor medida, es el análisis de ejemplos. Estos tipos de argumentos se encuentran presentes en todos los libros de texto que abordan el estudio de la probabilidad.

De este modo, a partir del análisis de texto presentado se observa que hay argumentos que proponen las orientaciones curriculares chilenas pero que nos son considerados por los libros de texto analizados, tal es el caso de la simulación de experimentos para demostrar empíricamente, por medio de la convergencia de los resultados, el cumplimiento de una determinada propiedad; o bien la simulación mediante la utilización de *software*.

Finalmente, cabe destacar que a partir del análisis de textos presentado en este apartado se han obtenido algunos resultados referidos al estudio de la probabilidad en los libros de texto analizados, y en ningún caso se pretende generalizar al resto de los libros de educación primaria. Así, a partir de los distintos objetos matemáticos y sus significados, apreciamos que el tratamiento de la probabilidad en los libros de texto analizados se hace mayoritariamente desde un enfoque intuitivo, para luego incluir de manera progresiva los significados frecuencial y clásico. Sólo en uno de los libros de texto se observa un acercamiento muy ligero a la interpretación subjetiva de la probabilidad.

Es importante señalar que, en base a los distintos objetos matemáticos identificados, consideramos que el estudio de la probabilidad se realiza de una manera muy superficial e informal, sin ahondar lo necesario en los conceptos y propiedades claves asociadas a cada uno de los significados abordados, cubriendo solo aspectos parciales del tema probabilidad. Un ejemplo de esto es el caso del enfoque frecuentista en el que se omite el análisis de la convergencia de las frecuencias relativas al valor de la probabilidad de ocurrencia de dicho suceso. Esto podría traer consigo la aparición de sesgos en los alumnos, así como de diversos errores y dificultades asociadas a un incorrecto tratamiento de la probabilidad. También llama la atención la carencia de actividades vinculadas al uso de *software*, sobre todo si consideramos la riqueza que puede tener la utilización de este tipo de material, por ejemplo, para analizar la convergencia de las frecuencias relativas en el caso de la visión frecuentista de la probabilidad. Por otro lado, hay una serie de objetos matemáticos que fueron identificados en las orientaciones curriculares chilenas que no son abordados en los libros de texto, lo que demuestra falta de alineación entre la propuesta del Ministerio de Educación y los libros que éstos distribuyen gratuitamente en los colegios municipales y particulares subvencionados del país, es más en los libros de texto de 1º y 6º año de educación básica no se incluyen unidades de estudio referidas a la probabilidad. Así, por medio de este proceso de análisis hemos identificado elementos para establecer nuestro significado de referencia, para la elaboración de nuestro instrumento de evaluación.

De esta manera, como se ha indicado, por medio del análisis presentado en este capítulo hemos abordado el OE_2: *Analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de textos de educación primaria.*

CAPÍTULO 4
DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ACTIVO SOBRE PROBABILIDAD

4.1 Presentación

En los capítulos anteriores, hemos evidenciado el interés por abordar de manera temprana, a lo largo del currículo escolar, el estudio de la probabilidad, transformándose esta tendencia en un desafío tanto para las instituciones formadoras del profesorado como para el profesorado en activo.

Bajo esta perspectiva, es necesario contar con estudios orientados a identificar el estado de la formación que poseen los profesores en activo para poder ejercer de manera idónea la tarea de enseñar probabilidad en la educación primaria. Específicamente, en relación a los conocimientos didáctico-matemáticos que los profesores de primaria deben poner en juego a la hora de enseñar probabilidad, sobre todo en países como Chile en el que tales estudios son aún muy escasos. Para ello, consideramos necesario contar con un instrumento de medición que permita evidenciar el nivel de preparación de los profesores de primaria en activo para enseñar probabilidad, de manera que sea posible analizar, por medio de éste, el conocimiento didáctico-matemático que poseen en relación a este tema, para así a partir de dicho análisis, proveer *a posteriori* orientaciones para su formación continua.

En base al análisis de aspectos fundamentales en torno a la probabilidad realizado en los capítulos 1 y 3 hemos observado que si bien se han elaborado y aplicado algunos instrumentos que permiten medir el conocimiento matemático para enseñar, son escasos los instrumentos que permiten evaluar y describir las categorías del conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores de educación primaria para enseñar probabilidad. Es en base a lo anterior que surge la necesidad de contar con un instrumento que permita evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos para enseñar probabilidad que poseen los profesores de educación primaria. En este sentido, decidimos emprender la tarea de diseñar y construir un instrumento que responda a tales necesidades.

Para este fin, hemos organizado este capítulo en tres secciones. Iniciamos con la correspondiente presentación del capítulo (sección 1). Luego, se describe el objetivo del instrumento (sección 2), y finalizamos detallando el proceso de diseño y construcción del cuestionario (sección 3), abordando aspectos tales como la selección de los tipos de tareas y contenidos principales. Además, en dicha sección se describen los componentes fundamentales del conocimiento didáctico-matemático que se pretenden evaluar, en relación al modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013). De este modo, hemos podido seleccionar aspectos del conocimiento didáctico-matemático y contar con una primera versión del instrumento. Esta primera versión del cuestionario (Anexo 2) fue sometida al juicio de 8 expertos lo que nos permitió realizar una evaluación cualitativa de los ítems, por medio de la contrastación de la validez de éstos en relación al grado de adecuación que tiene cada uno con la dimensión propuesta. Así, a través del juicio de expertos reformulamos ciertos aspectos de nuestro cuestionario, obteniendo de esta manera una nueva versión del mismo. Esta segunda versión del cuestionario fue piloteada con un grupo de 8 profesores de educación primaria en activo. A partir del análisis del procedimiento de pilotaje de las respuestas dadas al cuestionario por este grupo de profesores, se realizaron algunos cambios al cuestionario, lo que nos llevó a contar con la versión definitiva del cuestionario para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria. Por último, se presenta la versión definitiva del cuestionario junto al análisis *a priori* de los ítems que lo componen.

4.2 Objetivos del instrumento

No cabe duda de que el dominio del profesor en relación a los contenidos que debe enseñar es un elemento clave con efectos directos en el aprendizaje de sus estudiantes, pues un profesor no puede enseñar lo que no sabe bien. Desde esta perspectiva, es de gran importancia, para la mejora de los aprendizajes de los alumnos, elevar el nivel de preparación de los profesores sobre todo en temas que han sido incorporados recientemente al currículo y para los cuales no han recibido preparación durante su formación inicial, como es el caso de la probabilidad. Por lo que resulta interesante contar con investigaciones que nos permitan evidenciar y caracterizar tales conocimientos.

En consecuencia, hemos decidido construir un instrumento cuyo principal objetivo, es el de *recoger datos sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo*, es decir, que permita aportar evidencias sobre el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y del conocimiento especializado, que poseen tales profesores, desde la mirada del modelo del conocimiento didáctico-matemático de Godino y su equipo (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013) presentado en el capítulo 2.

De este objetivo principal, se desprenden otros objetivos importantes para esta investigación, como *estimar el porcentaje de profesores en activo que resuelven correctamente las distintas tareas relacionadas con el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad*. Por otro lado, también nos interesa *identificar y describir los potenciales conflictos que presentan los profesores para resolver cada una de las situaciones problemáticas que componen el cuestionario*.

La razón que nos ha llevado a elaborar este instrumento es el hecho de que al revisar las investigaciones relacionadas con nuestro tema de estudio, nos hemos encontrado que aún cuando se han elaborado e implementado instrumentos para evaluar algunas de las categorías del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad, en futuros profesores, no se dispone de instrumentos que permitan evaluar, conjuntamente, las distintas categorías y subcategorías que componen el conocimiento didáctico-matemático del profesor para enseñar probabilidad en la educación primaria.

Para la construcción del instrumento, nos hemos inclinado por un cuestionario de respuesta abierta, ya que este tipo de instrumento y de pregunta permite, a través de las respuestas dadas a las preguntas que lo componen, obtener una estimación de los conocimientos didáctico-matemáticos de quienes han respondido al cuestionario, conocimientos a los que no siempre es posible acceder por simple observación o encuesta (Dane, 1990; Barbero, 1993). Sin embargo, a partir de las prácticas explicitadas en las respuestas dadas a las distintas preguntas que componen el cuestionario, es posible obtener indicadores empíricos que permiten llevar a cabo la evaluación de tales conocimientos.

Así, por medio de la aplicación de este cuestionario se espera aportar información sobre el tipo de conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores de educación primaria en relación a la probabilidad. Esta información servirá de base para establecer directrices que permitan contribuir al desarrollo de un conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad en profesores de educación primaria. Lo anterior, nos permitirá, en cierta medida, contribuir a orientar los procesos de formación tanto inicial como continua del profesorado respecto a este contenido y de este modo mejorar la práctica educativa.

4.3 Diseño y construcción del instrumento

Para alcanzar nuestro tercer objetivo específico de *construir un instrumento para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado sobre probabilidad en profesores de educación primaria en activo*, hemos contemplado el desarrollo de seis fases (figura 4.1) que han servido para guiar el proceso de diseño y construcción del cuestionario. Las fases 1, 2 y 3 consideran la revisión de literatura e investigaciones en relación a nuestro tema de estudio, que nos han permitido llevar a cabo el diseño del instrumento. Por su parte, las fases 4, 5 y 6 se encuentran relacionadas, específicamente, con la construcción del instrumento.

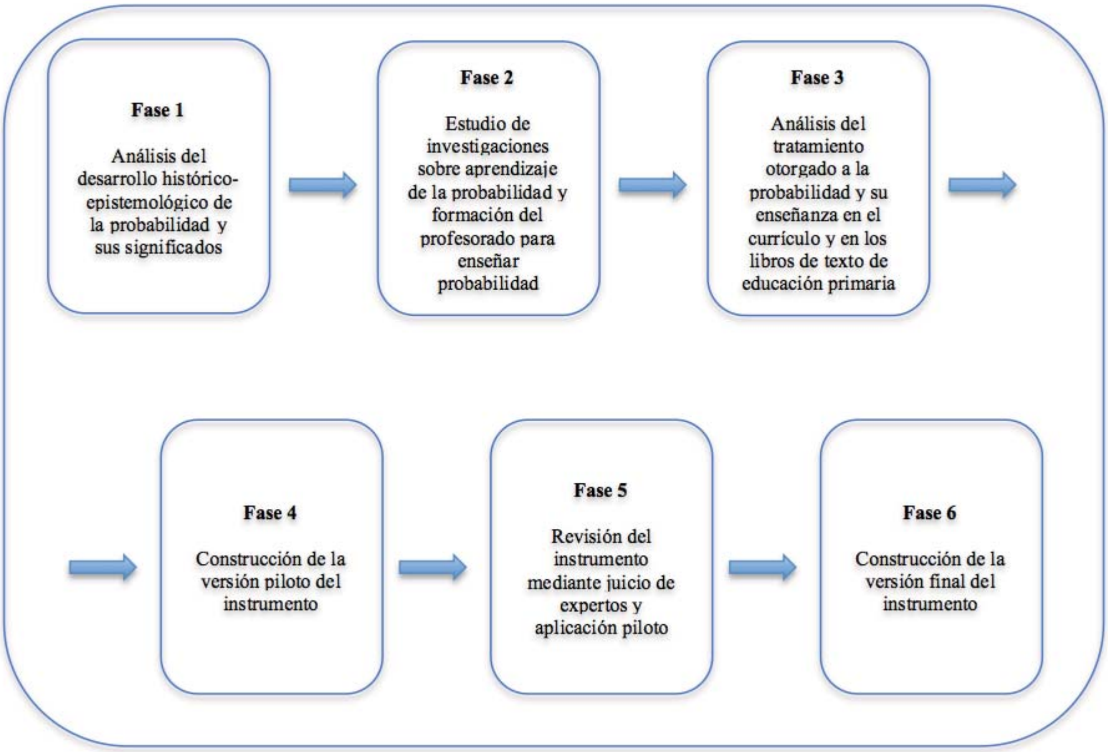


Figura 4.1 Fases del diseño y construcción del instrumento

Los principales temas referidos a las fases 1, 2 y 3 se presentan en los capítulos 1 y 3, por medio de éstos ha sido posible responder a preguntas del tipo: ¿qué es la probabilidad?, ¿cómo se originó?, ¿cuáles han sido los principales hitos de su evolución?, ¿cuáles son sus significados?, ¿cuáles son las principales dificultades vinculadas al aprendizaje de la probabilidad?, ¿cuál es el tratamiento dado a la probabilidad en el currículo y en los libros de texto?, ¿cómo es la formación de los profesores y de los futuros profesores para enseñar probabilidad?, ¿cuáles son las principales dificultades y errores que presentan los profesores y futuros profesores en la comprensión de la probabilidad?. De esta forma, ha sido posible entender y contar con una visión detallada de los principales factores a considerar en la evaluación del contenido didáctico-matemático para enseñar probabilidad. Lo que nos ha permitido delimitar el significado holístico o global del concepto probabilidad, que nos ha servido de base para nuestro estudio, orientado de este modo el proceso de construcción de la versión piloto y definitiva del cuestionario.

4.3.1 Construcción de la versión piloto del cuestionario

Una vez concluido el desarrollo de las fases 1, 2 y 3, comenzamos con el diseño y construcción del cuestionario (fase 4), el cual consta de dos partes: la primera se refiere a aspectos generales de los profesores a quienes se aplicará el cuestionario, tales como: género, años de experiencia, tipo de dependencia del establecimiento en el cual se desempeñan, etc. (ver Anexo 2). Mientras que la segunda parte se enfoca en evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad.

Para elaborar el instrumento que permita evaluar las categorías y subcategorías de conocimientos fundamentales necesarios para que un profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en la educación primaria, nos hemos basado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático y en la metodología que este modelo propone. Dicha metodología incluye dos fases: en primer lugar se elige una tarea matemática que lleve a los profesores a poner en juego, por medio de la solución de la tarea o situación, los aspectos más relevantes en relación al tema probabilidad que se pretende evaluar; y en segundo lugar, se formulan ítems de evaluación o propuestas de actividades que contemplen las distintas facetas del conocimiento del profesor que se desean evaluar y analizar.

Es por ello, que bajo la mirada del modelo CDM y su metodología, hemos decidido orientar la construcción del cuestionario considerando los siguientes tres puntos: (1) selección de tipos de tareas y contenidos principales; (2) selección de aspectos del contenido didáctico-matemático; y (3) selección y análisis de ítems o situaciones problemáticas.

4.3.1.1 Selección de tipos de tareas y contenidos principales

Para la definición semántica de la variable objeto de medición, hemos considerado dos componentes, por un lado una de tipo curricular que contempla el contenido de probabilidad, y por otro, una de tipo ontosemiótico referida al significado institucional del contenido de probabilidad. En el capítulo 1 y 3 se analizaron distintos aspectos vinculados a estos componentes, que son de interés para este estudio (análisis histórico-epistemológico, significados, orientaciones curriculares, análisis de libros de texto escolar, investigaciones previas, etc.). A partir del análisis de los puntos antes señalados, se elaboró una tabla de contenidos (Tabla 4.1), en la cual se reflejan los aspectos centrales del significado de referencia que se pretende evaluar (comprensión de los distintos significados de la probabilidad, comprensión de la independencia de sucesos, comparación de probabilidades de sucesos elementales en un experimento simple, comprensión del concepto de suceso seguro, comprensión de nociones básicas sobre combinatoria), así como los contenidos en relación al tema de la probabilidad que se espera movilizar con el conjunto de ítems que componen el cuestionario.

1	Experimento y suceso aleatorio
2	Espacio muestral
3	Posibilidad de ocurrencia de un evento
4	Significados de la probabilidad
5	Cálculo de probabilidades
6	Comparación de probabilidades
7	Independencia de sucesos

Tabla 4.1 Contenidos seleccionados para la evaluación

En la tabla 4.1, se muestran los contenidos vinculados al estudio de la probabilidad que consideramos como base para la construcción, selección y elaboración de las distintas situaciones problemáticas presentes en el cuestionario.

4.3.1.2 Selección de aspectos del conocimiento didáctico-matemático

En los apartados 1.5 del capítulo 1 y 2.3.3 del capítulo 2, se puede observar que en las últimas dos décadas se ha dado un notorio aumento de las investigaciones relacionadas a la caracterización de los componentes del conocimiento que un profesor debe poseer para lograr una enseñanza idónea de las matemáticas en sus alumnos, que generen verdaderos aprendizajes. Lo que ha traído consigo la propuesta de variados modelos del conocimiento del profesor para enseñar matemáticas, éstos tal y como señala Godino (2009) son todavía muy generales y no otorgan criterios que permitan un análisis detallado de los distintos tipos de conocimientos que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar un determinado tema, de modo de que su enseñanza sea efectiva y facilite el logro de aprendizajes en sus alumnos. Es bajo esta mirada, que hemos decidido basarnos en el modelo del conocimiento didáctico-matemático para explorar y caracterizar los distintos tipos de conocimientos didáctico-matemáticos que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar un determinado tema, en nuestro caso probabilidad en la educación primaria. Dado que el objetivo general de esta investigación es evaluar el conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores de educación primaria en activo sobre probabilidad, consideramos necesario precisar qué entenderemos por conocimiento. Para tales efectos, utilizaremos el término *conocimiento* como un "constructo epistémico-cognitivo-afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición" (Pino-Fan, Godino y Font, 2010, p. 209). En el que comprensión se refiere a las relaciones que se establecen entre los distintos elementos que influyen en el proceso de implementación ya sea de una configuración epistémica o cognitiva idónea. La competencia por su parte,

> se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada, e idóneamente acoplada a la configuración epistémica o configuración de referencia, al contexto en el que se desarrolla la práctica. Mientras que la disposición o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica (Pino-Fan, 2013, p. 143-144).

Es así como, para realizar nuestra investigación, hemos decidido situarnos, principalmente, desde la faceta epistémica del modelo del conocimiento didáctico-matemático e indagar además, en algunos aspectos parciales o iniciales de las distintas subcategorías que conforman el conocimiento especializado, a partir de las otras facetas (cognitiva y afectiva, mediacional e interaccional y ecológica). Es importante destacar que la faceta epistémica no solo refiere al conocimiento del contenido matemático que poseen los profesores, sino también a todos aquellos conocimientos, necesarios para la enseñanza, que el profesor adquiere y aprende en una institución educativa, producto de la instrucción, y no en la práctica.

Cuando afirmamos que indagaremos en algunos aspectos parciales o iniciales del conocimiento especializado (conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto), se debe a que somos consientes de que explorar en profundidad cada una de las distintas facetas y componentes del modelo del conocimiento didáctico-matemático resultaría muy pretencioso y ambicioso para nuestro estudio, y requiere, por ejemplo, del análisis de aspectos que escapan a nuestro estudio, como el análisis de la idoneidad didáctica de las prácticas de los profesores en acción, de las argumentaciones empleadas en el proceso de enseñanza, entre otros. Así, por ejemplo, para analizar las facetas interaccional y mediacional del conocimiento especializado, es necesario analizar cómo interacciona el profesor con los estudiantes y éstos entre sí. Para lo cual Godino (2013) propone observar cuestiones del tipo: ¿cuáles han sido los papeles asumidos por el profesor y los estudiantes?, ¿qué conocimientos han emergido como consecuencia de la actividad matemática de los estudiantes y cuáles han sido institucionalizados por el profesor?, ¿qué conflictos de significado han tenido lugar y cómo han sido abordados por el profesor y los estudiantes?, ¿cómo y cuándo han sido identificados los conflictos?, ¿cuáles han sido los recursos materiales usados y cuál ha sido su papel en la enseñanza y aprendizaje?. O bien, preguntas referidas a ¿qué conexiones se pueden establecer con otros temas del programa de estudio, u otras materias, mediante la realización de las tareas o de variantes de las mismas?.

Es en este sentido, que hemos optado por diseñar y construir un cuestionario, que nos permitirá explorar ciertos aspectos parciales o iniciales de las distintas categorías y subcategorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático de los profesores, por medio del planteamiento de situaciones problemáticas de enseñanza hipotéticas, a los profesores, que permitirán analizar sus prácticas matemáticas operativas y discursivas ligadas a sus configuraciones cognitivas.

En consecuencia, consideramos necesario incluir en nuestro cuestionario ítems cuyas preguntas cubran ciertos aspectos de las distintas categorías y subcategorías que componen el modelo (ver capítulo 2). Así, a partir de las distintas situaciones problemáticas que componen el cuestionario, se han planteado distintos tipos de preguntas (subítems) que apuntan a evaluar las distintas categorías y subcategorías del modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor. Tales preguntas consisten en: *"resuelva el problema"* para evaluar el nivel de conocimiento común del contenido en relación a la probabilidad; *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar solución correcta al problema?* para evaluar el conocimiento del contenido especializado sobre probabilidad; *¿qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?* para evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza; *"describa las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas que han llevado a los* *alumnos a responder de manera errónea"* para evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes; y *¿qué objetivo cree usted que tiene este problema?* o bien *¿qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema, según el nivel escolar presentado?* para evaluar el conocimiento del currículo.

4.3.1.3 Selección y análisis de ítems o situaciones problemáticas

Una vez seleccionados los contenidos vinculados a la probabilidad y habiendo descrito los principales aspectos de los conocimientos didáctico-matemáticos que nos interesa evaluar, es necesario especificar la manera en que llevaremos a cabo tal evaluación. Para, de este modo, contar con criterios que permitan seleccionar y elaborar situaciones problemáticas que nos lleven bosquejar un primer borrador de la versión piloto del cuestionario.

Con este propósito, se creó un banco de ítems extraídos, principalmente, de las investigaciones previas presentadas en el capítulo 1 y de las orientaciones curriculares y análisis de algunos de los libros de texto de educación primaria expuestos en el capítulo 3. Tales ítems, en concordancia con lo planteado por Osterlind (1989), serán entendidos como una unidad de medida compuesta por un estímulo y una forma determinada de respuesta, que proporciona información sobre la capacidad de quien responde en relación a un determinado constructo. En total se logró recopilar 63 ítems. Sin embargo, el instrumento no puede contar con tal extensión, por lo que se procedió a analizar exhaustivamente cada uno de ellos y se seleccionaron aquellos que consideramos permiten evaluar de mejor manera las distintas categorías y subcategorías del conocimiento didáctico-matemático del profesor de educación primaria para enseñar probabilidad, y que conformarían el cuestionario en su versión inicial.

De los 63 ítems iniciales, se seleccionaron 30, los cuales fueron sometidos nuevamente al proceso de revisión quedando, finalmente, 10 ítems que incluyen situaciones problemáticas de respuesta abierta. Este conjunto de ítems fue modificado progresivamente, mejorando algunos aspectos sobre su redacción, claridad y precisión del lenguaje, entre otros. Por medio de estos ítems se cubrieron en su totalidad los aspectos centrales vinculados al significado de referencia global del contenido a evaluar y se aseguró, al mismo tiempo una fiabilidad satisfactoria, considerando la restricción de la posible longitud total del test (Millman y Greene, 1989).

En consecuencia, el instrumento en su versión inicial se encuentra compuesto por un total de 10 ítems. Tales ítems se encuentran basados en referentes curriculares de interés, además de fundamentarse en la experiencia personal directa y en la literatura relacionada. Lo anterior, nos ha llevado a incluir algunos ítems de elaboración propia y otros que son reformulaciones de algunas actividades presentes en los libros de texto analizados y de investigaciones anteriores, como es el caso de algunos ítems que fueron extraídos de la investigación de Cañizares (1997), quien a su vez los tomó de los estudios realizados por Green (1983), Fischbein y Gazit (1984). Las situaciones problemáticas y preguntas del cuestionario consideran también algunas de las respuestas típicas por parte de los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997), tales respuestas nos han servido de insumo para plantear las situaciones problemáticas de nuestro estudio.

Un punto importante a destacar con respecto a los ítems es que se ha tratado de confeccionar y seleccionar preguntas cuyas respuestas no fueran obvias, es decir, que no pudieran ser respondidas solamente desde el conocimiento matemático por personas que no tengan la experiencia de enseñar en educación primaria. Así, por medio de las respuestas dadas, se busca indagar en las distintas categorías del conocimiento que componen el conocimiento didáctico-matemático del profesor para enseñar probabilidad. En consecuencia, a partir de las respuestas dadas a las distintas preguntas, no solo se accederá al conocimiento común del contenido para dar solución al problema, sino que también a las distintas categorías del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad.

En la tabla 4.2 se muestran los distintos ítems que componen el cuestionario en su versión inicial y que cubren a su vez los contenidos especificados en la tabla 4.1.

Ítem 1:

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿Qué es más probable que pase?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Luis: es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara

Andrés: es igual de probable que salga cara o sello

Lucia: es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
d) Exponga las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas de estos

Ítem 2:

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja prefieren hacer la extracción?

CAJA A CAJA B

Responda:

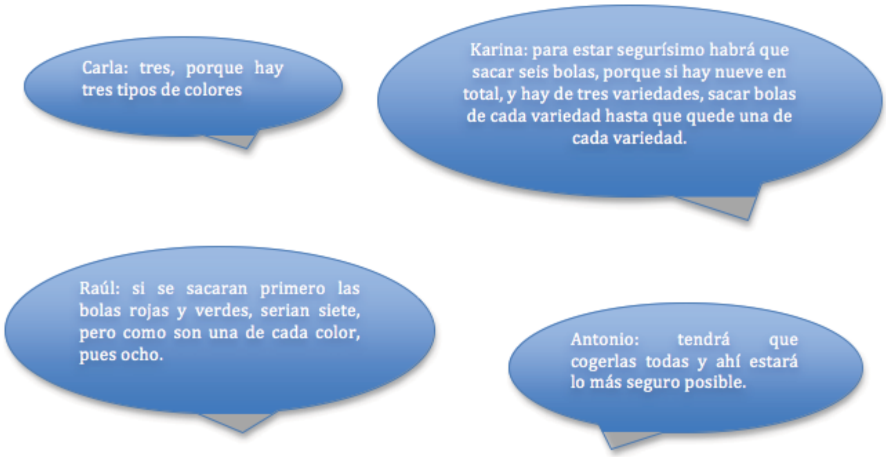
a) Resuelva el problema
b) ¿Cuál podría ser la respuesta errónea más común entre los alumnos? ¿a qué considera usted que se debe?
c) ¿Qué contenido matemático deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?

Ítem 3:

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Obteniendo las siguientes respuesta por parte de algunos de sus alumnos:



Responda:

a) Comente la respuestas dadas por estos alumnos y justifique su veracidad o falsedad.
b) ¿Qué respuesta debería aceptar el profesor como correcta? ¿Por qué?
c) ¿Qué conceptos o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 4:

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar, ¿qué es más probable que suceda?

Frente a lo cual uno de sus alumnos responde:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".

Responda:

a) ¿Qué error está cometiendo éste alumno?
b) ¿Qué conceptos o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
c) ¿Qué estrategia utilizaría usted para convencer a este alumno de su error?

Ítem 5:

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Ítem 6:

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es su opinión sobre esto?

Ítem 7:

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Qué objetivo cree usted que tiene, en relación al currículo, el abordar este tipo de problema?
c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría. Justifiqu su elección.
d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en l resolución de este problema?

Ítem 8:

¿Qué contenidos del eje temático de datos y probabilidades considera usted que es importante que sus alumnos de quinto básico dominen, antes de comenzar con la enseñanza de las probabilidades en ese curso?

Ítem 9:

¿Qué ejemplo considera usted que es el más apropiado para lograr que los alumnos comprendan la regla de Laplace?

Ítem 10:

Usted quiere iniciar a sus alumnos de segundo básico en el aprendizaje de las probabilidades. ¿Qué dificultades pueden ocasionar en dicho aprendizaje las ideas previas que pueden tener los alumnos de azar/suerte, azar/casualidad y azar/magias? ¿Qué actividad les propondría para superar tales dificultades?

Tabla 4.2 Ítems que componen el cuestionario en su versión inicial

Por medio de estos ítems se busca evaluar aspectos vinculados al conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado. Además, de las cuatro subcategorías a saber que incluye el conocimiento especializado (conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, y conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto).

Como se puede observar en la tabla 4.2 estos 10 ítems con sus respectivos subítems abarcan diversos contenidos vinculados al tema de probabilidad, seleccionados para la evaluación y se describen en la tabla 4.1, los cuales subyacen al significado de referencia global que hemos adoptado para nuestro estudio:

- Significados de la probabilidad: ítems 1, 5, 7, 8, 9 y 10
- Cálculo de probabilidades: ítems 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9
- Independencia de sucesos: ítems 1, 5, 7 y 8
- Comparación de probabilidades de sucesos elementales en un experimento simple: ítems 2, 4, 6 y 8
- Comprensión del concepto de suceso: ítems 3, 8 y 10
- Comprensión de nociones básicas sobre combinatoria: ítems 3 y 8

Por otro lado, cada ítem y subítem aborda a su vez las distintas categorías y subcategorías del conocimiento didáctico-matemático que se pretende evaluar, como se muestra en la tabla 4.3.

Categorías y subcategorías de conocimiento sobre el contenido matemático del modelo CDM	**Ítems y subítems**																						
	1				2			3				4			5	6	7				8	9	10
	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)			a)	b)	c)	d)			
Conocimiento común del contenido.	x				x			x	x						x	x	x				x	x	x
Conocimiento ampliado del contenido																				x	x	x	x
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido especializado.			x				x			x			x								x	x	x
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación con los estudiantes.		x		x		x						x											
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.											x			x					x				
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto.																		x					

Tabla 4.1 Categorías y subcategorías de conocimiento sobre el contenido matemático del modelo CDM evaluadas en cada ítem y subítem

A continuación se presenta un análisis preliminar para cada uno de los ítems que componen el cuestionario, indicando para ello: el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada; la categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que busca evidenciar; y por último el propósito de los distintos subítems que componen el ítem. Este análisis será profundizado en el apartado 4.3.3.1 de este capítulo.

Análisis del ítem 1

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: comprensión de la independencia de sucesos y comprensión de los significados de la probabilidad.
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado y las siguientes subcategorías del conocimiento especializado: conocimiento del contenido especializado y conocimiento del contenido en relación con los estudiantes.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: por medio de la pregunta a) se busca evidenciar el conocimiento común del contenido que poseen los profesores en relación a la probabilidad, ya que con ésta se busca evidenciar el dominio del conocimiento matemático de los contenidos que deben enseñar, en este caso de la independencia de sucesos en el lanzamiento de una moneda. Mientras que con la pregunta b) y d) se busca evidenciar el dominio de la subcategoría del conocimiento especializado: conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, la cual considera los posibles errores, dificultades o conflictos de aprendizaje más frecuentes. Por último, con la pregunta c) se pretende evidenciar el conocimiento del contenido especializado.

Análisis del ítem 2

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales en un experimento simple.
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido, y las siguientes

subcategorías del conocimiento especializado: conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y conocimiento del contenido en relación con el currículo.

- Propósito de las preguntas que componen el ítem: por medio de la pregunta b) de este ítem se busca evidenciar la subcategoría del conocimiento especializado de: conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, pues el profesor debe ser capaz de identificar aquellas confusiones, dificultades y errores más frecuentes cometidos por los alumnos en una situación sencilla de cálculo y comparación de probabilidades. Por otro lado, con la pregunta a) se busca evidenciar el nivel de conocimiento del conocimiento común del contenido y con la pregunta c) se busca evidenciar el conocimiento del contenido especializado en relación a los contenidos que debe enseñar y que se encuentran vinculados en la resolución de la situación problemática planteada.

<u>Análisis del ítem 3</u>

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: comprensión del concepto de suceso seguro, además de nociones básicas de combinatoria que permiten enumerar las distintas posibilidades de extracción. Es importante señalar que este problema ha sido tomado de la investigación de Cañizares (1997) quien a su vez lo tomó de Fischbein y Gazit (1984), por su parte las respuestas de alumnos que se incluyen han sido tomadas de Cañizares (1997).
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido y las siguientes subcategorías del conocimiento especializado del contenido: conocimiento del contenido especializado y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: por medio de las preguntas a) y b) se busca evidenciar el conocimiento común del contenido, pues el profesor deberá resolver primeramente la situación problemática planteada. Mientras que la pregunta c) requiere de un conocimiento del contenido especializado que permita al profesor poder identificar los conceptos y/o propiedades involucradas, para luego analizar cada una de las respuestas dadas por los alumnos justificando por qué está correcta o incorrecta. Por su parte, el objetivo de la pregunta d) es evidenciar el conocimiento

especializado del profesor, más específicamente la subcategoría de conocimiento del contenido en relación con la enseñanza pues le profesor deberá plantear estrategias que lleven a los alumnos a darse cuenta de su error y que les permitan comprender el problema y darle una correcta solución.

Análisis del ítem 4

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio de sucesos no equiprobables. Es importante señalar que el problema ha sido tomado de la investigación del Cañizares (1997) quien lo ha tomado de Green (1982), mientras que la respuesta del alumno ha sido tomada de Cañizares (1997).
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: las subcategoría del conocimiento especializado de: conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: con la pregunta a) se busca conocer el conocimiento del profesor en relación a las dificultades que se encuentran presentes en el aprendizaje del cálculo y comparación de probabilidades, que en muchas ocasiones les llevan a cometer errores (conocimiento del contenido en relación con los estudiantes). Mientras que con la pregunta b) se pretende analizar la capacidad del profesor para resolver la situación problemática y de este modo detectar los contenidos y propiedades involucrados, es decir, el conocimiento del contenido especializado. Y por último con la pregunta c) se quiere analizar el conocimiento del profesor para plantear estrategias que permitan a sus alumnos reconocer sus errores y encontrar la solución correcta al problema planteado (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza).

Análisis del ítem 5

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: comprensión de la independencia de sucesos. Hay que señalar que este problema ha sido tomado de la investigación de Cañizares (1997) quien a su vez lo tomó de Fischbein y Gazit (1984).

- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: por medio de la pregunta que se plantea se pretende conocer el razonamiento del profesor en relación a la independencia de sucesos en los juegos de azar.

Análisis del ítem 6

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: cálculo y comparación de probabilidades de sucesos no equiprobables. Hay que señalar que este problema ha sido tomado de la investigación de Cañizares (1997) quien a su vez lo tomó de Fischbein y Gazit (1984).
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: por medio de esta pregunta se busca conocer el razonamiento proporcional del profesor en relación al cálculo y comparación de probabilidades.

Análisis del ítem 7

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace.
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y las subcategorías del conocimiento especializado de: conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento de contenido en relación con el currículo.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: a través de la pregunta a) se busca indagar en el conocimiento del profesor sobre el cálculo de probabilidades y cómo este se encuentra, en algunos casos, vinculado a la independencia de sucesos (conocimiento común del contenido). Luego, con la pregunta b) se busca conocer el conocimiento ampliado del contenido del profesor y evidenciar si logra vincular este tipo de problema con conocimientos más avanzados dentro del currículo escolar en relación a la probabilidad, como por ejemplo probabilidad de sucesos

independientes. Con la pregunta c) se quiere observar las distintas estrategias que podrían ayudarle en la resolución de este tipo de problemas y el uso que le otorgaría (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza). Finalmente, con la pregunta d) se pretende explorar el conocimiento ampliado del contenido en relación a la probabilidad.

<u>Análisis del ítem 8:</u>

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: Para dar respuesta a esta pregunta es necesario que el profesor tenga un amplio conocimiento de los contenidos que debe enseñar des 1º a 5º de modo de identificar correctamente los conocimientos previos necesarios por parte de los alumnos.
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: con esta pregunta se busca evidenciar el manejo general que tiene el profesor sobre la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria, pues para responder a ella, necesita tener dominio de las tres categorías de conocimientos que caracterizan el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

<u>Análisis del ítem 9</u>

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: cálculo de probabilidades vinculado al uso de la regla de Laplace
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: esta pregunta apunta a detectar el conocimiento del profesor en relación al conocimiento matemático de la regla de Laplace, las posibles dificultades que pueden tener los estudiantes para su comprensión y correcta aplicación, y las distintas estrategias vinculadas a la

utilización de software para introducirla en el cálculo de probabilidades y de este modo lograr una mejor comprensión por parte de los alumnos.

<u>Análisis del ítem 10</u>

- El conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada es: nociones del concepto de azar y su vinculación con otros conceptos cotidianos tales como: suerte, casualidad y magia.
- Categoría y/o subcategoría del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se busca evidenciar: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado.
- Propósito de las preguntas que componen el ítem: por medio de las preguntas que conforman el ítem, se pretende evidenciar si el profesor es capaz de reconocer los conceptos vinculados a la noción de azar, además de establecer conexiones entre dicha noción y otros conceptos de uso cotidiano (conocimiento común y ampliado del contenido). Por otro lado, se busca dilucidar si el profesor es capaz de describir los principales conflictos de aprendizaje (conocimiento del contenido en relación con los estudiantes) vinculados a las ideas previas de azar/suerte, azar/casualidad, azar/magia, proponiendo a la vez estrategias que permitan a los alumnos superar tales dificultades o conflictos de aprendizaje (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza). Por último, se busca evaluar el nivel de dominio curricular que tiene en relación a las ideas de azar que pueden ser desarrolladas con alumnos de segundo básico.

4.3.2 Revisión del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación piloto

Una vez diseñado el instrumento, éste fue sometido a un proceso de validación (fase 5) que ha contemplado dos aspectos: la validez del contenido, que se ha garantizado primero a partir de la selección de contenidos relacionados con el estudio de la probabilidad en educación primaria de los distintos referentes curriculares involucrados (MINEDUC, 2012 y NCTM, 2000). Y la contrastación de la validez de los ítems, es decir, si éstos realmente miden lo que se pretende medir, para ello, se han considerado dos procedimientos: el juicio de expertos y el análisis de los ítems a partir de la aplicación piloto del instrumento.

4.3.2.1 Juicio de expertos

El análisis a partir del juicio de expertos permitió realizar una evaluación cualitativa (validez de contenido) de los ítems, por medio de la contrastación de la validez de éstos en relación al grado de adecuación que tiene cada uno con las categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático (conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido, y conocimiento especializado, al cual incluye a su vez cuatro subcategorías; conocimiento del contenido especializado; conocimiento del contenido en relación a los estudiantes; conocimiento del contenido en relación con la enseñanza; y conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto). El juicio lo realizaron 8 expertos (Millman y Green, 1989) en didáctica de la matemática de Chile y España, quienes fueron seleccionados por su conocimiento experto en el tema del conocimiento para enseñar probabilidad. Para que emitieran su juicio se les envío, vía correo electrónico: el instrumento y una pauta para evaluar el grado de adecuación de cada uno de los ítems con las categorías globales o dimensiones del conocimiento sobre el contenido matemático (Anexo 1). En la figura 4.2 se puede ver un ejemplo de la estructura de la carta de presentación que se envió a los expertos (en la que se les solicitaba su colaboración y explicaba el propósito de la investigación), a dicha carta se adjuntaba la pauta de evaluación proporcionada a los expertos, en la que se incluían algunas aclaraciones de lo solicitado.

Estimado evaluador,

A continuación le presentamos nuestra propuesta de instrumento[1] para evaluar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidades en profesores de educación básica. Para este propósito, hemos definido las siguientes dimensiones y tipos de ítems:

Dimensión	Tipo de ítem
Conocimiento común del contenido	Resolución de problemas Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta
Conocimiento ampliado del contenido	Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta
Conocimiento especializado: - Conocimiento del contenido especializado - Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes - Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza - Conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto.	Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta

Por favor, evalúe el grado de adecuación que tiene cada ítem con la dimensión propuesta de acuerdo a:

- **Grado de correspondencia:** determine si cada ítem en particular pertenece o no a la dimensión, de acuerdo a la definición entregada (refiérase a: pertenece, no pertenece).
- **Formulación:** defina su opinión respecto a la claridad y al lenguaje utilizado en cada ítem (refiérase a: adecuada, no adecuada, a mejorar)
- **Pertinencia:** indique el grado de pertinencia del ítem respecto a la dimensión (refiérase a: pertinente, no pertinente, con dudas)

B) Dimensión: Conocimiento especializado, subcategoría: conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertinencia
1.- d)			
2.- b)			
4.- a)			
8.-			
9.-			
10.-			

Figura 4.2 Ejemplo de carta y pauta para expertos

En concreto, estos expertos analizaron tres aspectos en relación a cada uno de los diez ítems que conforman el cuestionario: a) el grado de correspondencia, indicando si cada ítem en particular pertenece o no a la categoría o dimensión; b) la formulación, opinión respecto a la claridad y al lenguaje utilizado en cada ítem, refiriéndose a adecuada, no adecuada, a mejorar; y por último c) la pertinencia, referida al grado de pertinencia del ítem respecto a la dimensión, refiriéndose a pertinente, no pertinente, con dudas. Asimismo, disponían de una sección donde dejar algún comentario adicional y/o correcciones en cuanto a la redacción para cada uno de los ítems, así como cualquier sugerencia que consideraran relevante, como por ejemplo, si consideraban la ausencia de algún contenido relevante.

En la tabla 4.4 se muestran las medias de las puntuaciones asignadas por los expertos a cada uno de los 10 ítems que conformaban el cuestionario.

Ítem		Dimensión	Frecuencia de la puntuación								Media
			Correspondencia		**Formulación**			**Pertinencia**			
			Pertenece (2)	No pertenece (1)	Adecuada (3)	A mejorar (2)	No adecuada (1)	Pertinente (3)	Con dudas (2)	No pertinente (1)	
1	a)	1	7	1	6	2	0	7	0	1	2,5
	b)	4	8	0	8	0	0	8	0	0	2,7
	c)	3	7	1	8	0	0	8	0	0	2,6
	d)	4	7	1	4	3	0	7	0	1	2,3
2	a)	1	7	1	7	1	0	7	0	1	2,5
	b)	4	8	0	7	0	1	7	1	0	2,5
	c)	3	7	1	7	1	0	8	0	0	2,6
3	a)	1	7	1	3	4	1	3	4	1	2,1
	b)	1	8	0	7	1	0	8	0	0	2,6
	c)	3	7	1	6	2	0	7	0	1	2,5
	d)	5	8	0	7	1	0	8	0	0	2,6
4	a)	4	8	0	6	2	0	7	0	1	2,5
	b)	3	8	0	7	1	0	8	0	0	2,6
	c)	5	8	0	6	2	0	8	0	0	2,6
5		1	7	1	8	0	0	7	0	1	2,5
6		1	7	1	7	1	0	6	1	1	2,5
7	a)	1	7	1	7	1	0	7	0	1	2,5
	b)	6	7	1	7	1	0	6	0	2	2,4
	c)	5	7	1	5	2	1	6	0	2	2,3
	d)	2	7	1	6	2	0	7	0	1	2,5
8		1	3	5	2	1	5	2	1	5	1,5
		2	5	3	5	1	2	3	0	5	1,9
		3	5	3	5	1	2	3	0	5	1,9
9		1	4	4	2	2	4	2	0	6	1,6
		2	3	5	1	2	5	5	0	3	1,7
		3	4	4	2	2	4	2	1	5	1,6
10		1	3	5	4	0	4	3	1	4	1,8
		2	4	4	4	0	4	4	0	4	1,8
		3	3	5	4	0	4	3	0	5	1,7

Tabla 4.4 Frecuencia y media de las puntuaciones asignadas por los expertos

De este modo a partir de las puntuaciones obtenidas de las evaluaciones y opiniones de los expertos, en relación a los ítems, hemos desechado aquellos ítems con una baja valoración por parte de los expertos (inferior a 2) y seleccionado aquellos que obtuvieron una alta valoración, es decir, aquellos que mejor se ajustan al contenido específico que se pretende evaluar, y a la vez hemos realizado algunas reformulaciones que consideramos pertinentes en base a las observaciones. En base a este criterio se desecharon los ítem 8, 9 y 10, y se realizaron algunas modificaciones en la redacción de los ítems 1d), 2c), 3a), 3c), 3d), 4a), 4b), 4c) y 6 a partir de los comentarios y sugerencias de los expertos. Además, en la nueva versión del cuestionario se agregaron los subítems o apartados 1e) y 2d) en base a los comentarios dados por el juicio de los expertos.

A continuación nos referimos a estos comentarios y sugerencias que nos llevaron, junto a las puntuaciones asignadas, a reformular el cuestionario.

En relación al ítem 1, dos de los evaluadores sugirieron redactar el apartado 1d) en dos apartados diferentes, señalando que dicho apartado tiene dos preguntas, una sobre conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, y otra que se refiere al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, puesto que dicho apartado estaría relacionado también con la faceta interaccional del EOS. Tales comentarios nos llevaron a reformular el apartado 1d) y a agregar un nuevo apartado 1e) referido al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

En lo que se refiere al ítem 2 se mejoró la redacción del apartado 2b) y 2c) y de acuerdo a los comentarios de los evaluadores, se incorporó el subítem 2d), que hace referencia al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

Con respecto al ítem 3 se suprimió el apartado 3a) y fue reemplazado por el apartado 3b) dado que, de acuerdo a los comentarios de los evaluadores, éste se refiere de mejor manera al conocimiento que se pretende evaluar. Por otro lado, se mejoró la redacción del apartado 3c), que ha pasado a ser el 3b) en la versión revisada, al solicitar indicar los “conceptos y/o propiedades matemáticas” necesarias para dar una solución correcta al problema. De este modo, en concordancia con las sugerencias de los evaluadores, el ítem 3 quedó compuesto por los subítems 3a), 3b) y 3c).

En relación al ítem 4 primeramente se modificó el enunciado de la situación problemática presentada con la finalidad de ofrecer claridad en la redacción, y paralelamente se mejoró la redacción del subítem 4a), pues varios de los expertos comentaron que al preguntar por el error que está cometiendo el alumno se da por hecho que el profesor que realiza el cuestionario sabe resolver correctamente el problema, por lo que se estaría dando, en parte, la respuesta al profesor. A partir de tal comentario se decidió redactar la pregunta de la siguiente manera: "¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad". En lo que se refiere al apartado 4b) y 4c) acorde a los comentarios de los evaluadores, se mejoró la redacción, quedando finalmente formuladas las preguntas de la siguiente manera: "¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una respuesta adecuada a este problema?", y "¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?", respectivamente. Por último, es importante indicar, que de acuerdo a los comentarios de varios de los experto, se incluyó, además, el subítem 4a) en la categoría del conocimiento común del contenido, pues para saber si la respuesta del alumno es o no correcta, el profesor debe resolver previamente el problema.

Para el ítem 5 es importante señalar que uno de los evaluadores sugirió clasificarlo, además, dentro de la dimensión del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, ya que en él se pide al profesor que analice la explicación dada por el alumno, lo cual le llevará a detectar errores en su razonamiento. Esta sugerencia ha sido aceptado por lo que dicho ítem ha sido clasificado también dentro de esa subcategoría.

Por último, se modificó la pregunta de la situación problemática planteada en el ítem 6, pues concordamos con el comentario de los evaluadores que afirma que la pregunta "¿Cuál es su opinión sobre esto?" es muy ambigua, por lo que la hemos reemplazado por la pregunta: "¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad", que consideramos más clara y precisa.

Para el ítem 7 no se recibieron observaciones, por lo que no se realizaron modificaciones.

Es así como, finalmente, hemos refinado nuestro instrumento por medio de una reformulación, adecuación y selección definitiva de los ítems, quedando el cuestionario conformado por 7 ítems que incluyen situaciones problemáticas y preguntas de respuesta abierta que permiten abordar las categorías globales y sus las respectivas subcategorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas (tabla 4.5).

Ítem 1:

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Luis: es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara

Andrés: es igual de probable que salga cara o sello

Lucia: es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?
c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
d) Exponga las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
e) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Ítem 2:

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja prefieren hacer la extracción?

CAJA A　　　　CAJA B

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
c) Exponga las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Ítem 3:

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:

Carla: tres, porque hay tres tipos de colores

Karina: para estar segurísimo habrá que sacar seis bolas, porque si hay nueve en total y hay de tres variedades, deben sacarse bolas de cada variedad hasta que quede solo una de cada variedad.

Raúl: si se sacaran primero las bolas rojas y verdes, serían siete, pero como son una de cada color, pues ocho.

Antonio: tendrá que cogerlas todas y así estará lo más seguro posible.

Responda:

a) ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?
c) ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den

Ítem 4:

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".

Responda:

a) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una respuesta adecuada a este problema?
c) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 5:

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima".
¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Ítem 6:

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya. ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Ítem 7:

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Qué objetivo cree usted que tiene, en relación al currículo, el abordar este tipo de problema?
c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría. Justifique su elección.
d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

Tabla 4.5 Ítems que componen cuestionario en su versión piloto, la cual incluye modificaciones surgidas a partir del juicio de expertos

4.3.2.2 Aplicación Piloto del cuestionario

Una vez finalizada la reformulación del instrumento, hemos decidido realizar una aplicación piloto de éste a una muestra reducida de profesores de educación primaria, con el propósito de obtener información empírica sobre las posibles limitaciones que podría presentar el instrumento en relación a aspectos tales como: el lenguaje, la comprensión de los enunciados y preguntas, la extensión, los posibles errores, dificultades y respuestas que no han sido consideradas, o bien la adecuación del tiempo para responder. Con ello, esperamos obtener una validación en terreno de los ítems que componen el cuestionario y poder refinar aquellos aspectos que sean necesarios.

El cuestionario piloto fue aplicado a una muestra de 8 profesores de educación primaria en activo, que accedieron a responder de manera voluntaria. Dicha muestra se distribuye como muestra la tabla 4.6 de acuerdo al género y al tipo de establecimiento educacional en el cual se desempeñan los profesores participantes.

	Masculino		Femenino		TOTAL	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Municipal	1	12,5	2	25	3	37,5
Particular Subvencionado	1	12,5	3	37,5	4	50
Particular Pagado	1	12,5	0	0	1	12,5
TOTAL	3	37,5	5	62,5	8	100

Tabla 4.6 Distribución de la muestra a la que se le aplicó la prueba piloto del cuestionario

El principal objetivo de la aplicación piloto del cuestionario es el valorar, por medio de un análisis cualitativo y cuantitativo, ciertos aspectos, tales como: adecuación del tiempo estimado (1 hora y 30 minutos), claridad, comprensión de los enunciados e índice de dificultad de los subítems que componen cada ítem, además de incrementar y sustentar validez y factibilidad del cuestionario (Cohen, Manion y Morrison, 2011).

Al inicio de la aplicación se dieron y leyeron instrucciones claras y precisas sobre cómo responder el cuestionario y sobre cuál era el objetivo de dicha aplicación. Además se solicitó a los profesores que indicaran posibles dificultades en relación a la comprensión y redacción de los distintos ítems. Es por lo anterior, que durante la aplicación del cuestionario, algunos de los profesores solicitaron aclaraciones en cuanto a la redacción de los enunciados y preguntas que conforman algunos ítems. Tales preguntas y dudas se registraron en una tabla de notas en la que además se incluían los tiempos parciales de resolución de las situaciones problemáticas.

4.3.2.2.1 Análisis cualitativo de la aplicación piloto

A partir de la corrección de los ítems y del análisis de las respuestas otorgadas por los profesores a éstos, se pueden observar algunos aspectos que resultan importantes para el proceso de construcción del instrumento. Tal es el caso de la pregunta 1a) en la que no quedaba claro que había que resolver el problema planteado por la profesora Gómez a sus alumnos, es por ello que se mejoró la redacción quedando la pregunta 1a) "resuelva el problema planteado por la profesora Gómez".

En el caso de la pregunta 2c) se cambió la pregunta "exponga las posible dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea" por "Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema" dado que en el enunciado de este ítem no se contaba con ejemplos de respuestas incorrectas de los alumnos.

En relación al ítem 4, se decidió agregar una pregunta que fuera previa a la pregunta 4c) de modo de facilitar su respuesta. De este modo el ítem 4 quedó conformado por cuatro preguntas, siendo la nueva pregunta 4c) "Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema".

En cuanto al tiempo estimado de 1 hora y 30 minutos, 5 de los profesores emplearon 1 hora en completar el cuestionario y tan solo 3 utilizaron la totalidad del tiempo asignado. Por lo que consideramos que el tiempo estimado es adecuado.

4.3.2.2.2 Análisis cuantitativo de la aplicación piloto

Además de realizar un análisis de tipo cualitativo de la aplicación piloto del cuestionario, éste fue analizado cuantitativamente. Para este análisis de tipo cuantitativo consideramos la variable "grado de corrección de las respuestas al ítem", asignándole los valores 0 si la respuesta es incorrecta, 1 si la respuesta es parcialmente correcta y 2 si la respuesta es correcta. La rúbrica con los criterios de corrección para la consideración de una respuesta incorrecta, parcialmente incorrecta o correcta se muestran en el Anexo 5. En consecuencia, de acuerdo con las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas al ítem, el puntaje máximo y mínimo a obtener en el cuestionario es de 42 y 0 puntos respectivamente.

De esta manera, se llevó a cabo el análisis cuantitativo de los datos obtenidos de la aplicación piloto del cuestionario, el cual permitió detectar varios aspectos de interés, además del índice de dificultad de cada uno de los ítems y subítems que componen el cuestionario.

En la tabla 4.7 se muestran las puntuaciones totales (resultados globales), pese a que la muestra es pequeña hemos decidido agrupar los datos en intervalos de igual amplitud, de modo de contar con una visión panorámica de la distribución de frecuencias de la puntuación total.

Intervalos de puntuación	**Frecuencia absoluta**	**Porcentaje**
0-5	2	25
5-10	0	0
10-15	2	25
15-20	1	12,5
20-25	1	12,5
25-30	0	0
30-35	2	25
35-42	0	0

Tabla 4.7 Distribución de frecuencias para la puntuación total

En base a la tabla de frecuencias se puede observar que el 62,5% de los profesores obtuvo una puntuación menor a 20 puntos en el cuestionario, lo que denotaría cierto grado de dificultad en el instrumento.

En la tabla 4.8 se muestra un resumen estadístico de los datos.

	Estadístico
Mínimo	2
Máximo	34
Rango	32
Media	16,50
Mediana	14,50
Desviación típica	12,49

Tabla 4.8 Estadísticos descriptivos

En la tabla anterior, podemos observar que ninguno de los profesores obtuvo la puntuación máxima de 42 puntos, siendo la media obtenida de 16,50 puntos, es decir, que el porcentaje de logro fue alrededor de un 40%, lo que evidencia que el cuestionario presento un nivel de dificultad media para los profesores. Mientras que la figura 4.3 muestra la distribución de las puntuaciones totales obtenida por la muestra piloto a la que se aplicó el cuestionario en su versión piloto.

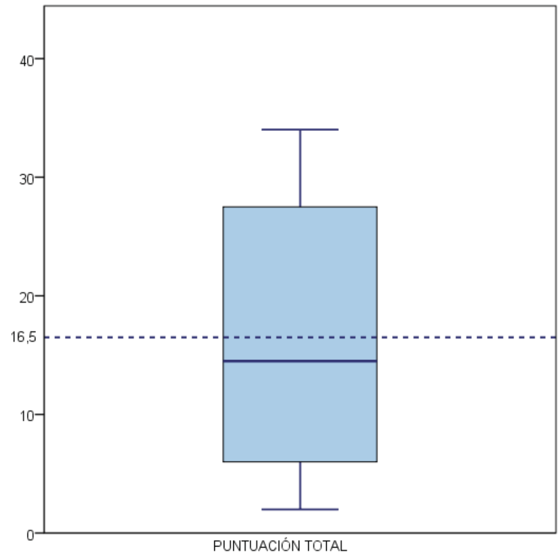


Figura 4.3 Distribución de las puntuaciones y puntuación media de la muestra piloto

A partir de la figura podemos observar que la mediana se encuentra ligeramente más cercana al primer cuartil que al tercero, lo que implica que los valores de las puntuaciones totales se encuentran ligeramente más concentradas en la zona inferior del cajón. Por otro lado, las amplitudes de los bigotes superior e inferior, son bastante similares, lo que deja en evidencia que existe cierta similitud entre los extremos de la distribución de los puntajes totales.

En relación al índice de dificultad, es importante señalar que éste valora la dificultad que conlleva la resolución de la situación problemática planteada, y se define como la razón entre "número de aciertos/número de respuestas" (Muñiz, 1994). Dicho índice de dificultad tomará entonces, valores entre 0 y 1, donde 0 indica que el subítem tiene un alto grado de dificultad, mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de máxima facilidad, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

Para el cálculo del índice de dificultad clasificamos las respuestas en correctas e incorrectas, las respuestas en blanco no se consideraron. De este modo fue posible visualizar qué situaciones problemáticas resultaron más fáciles o más difíciles para este grupo de profesores. A partir del análisis de los resultados obtenidos de la aplicación piloto del cuestionario, más específicamente del índice de dificultad, podemos observar que, en general, el cuestionario presentó una dificultad media de un 62% como se ilustra en la tabla 4.9. Siendo los ítems que mayor dificultad presentaron 3b), 4b), 5, 7b), 7c) y 7d) los cuales se encuentran vinculados al conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con el currículo y conocimiento ampliado del contenido, respectivamente. Mientras que el ítem que menor dificultad ofreció fue el 6 vinculado al conocimiento común del contenido, específicamente al conocimiento de la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso con dos sucesos no equiprobables.

Ítem		**Índice de dificultad**	**%**
1	a)	0,67	67
	b)	0,60	60
	c)	0,40	40
	d)	1,00	100
	e)	1,00	100
2	a)	0,86	86
	b)	1,00	100
	c)	0,80	80
	d)	0,67	67
3	a)	0,50	50
	b)	0,00	0
	c)	1,00	100
4	a)	1,00	100
	b)	0,00	0
	c)	1,00	100
5		0,00	0
6		1,00	100
7	a)	0,50	50
	b)	0,00	0
	c)	1,00	100
	d)	0,00	0
Media: 0,62			

Tabla 4.9 Índice de dificultad de los ítems del cuestionario

A continuación se describen los principales resultados y hallazgos obtenidos de la aplicación piloto para cada uno de los ítems.

En relación al ítem 1 en la tabla 4.10 se observa que todas las preguntas que componen este ítem presentaron un alto porcentaje de respuestas en blanco (75%), sobre todo en lo que respecta a los subítems d) y e), lo cual de acuerdo a lo manifestado por los profesores, se debe a que no recordaban o desconocían el contenido en cuestión.

Ítem		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Parcialmente correctas		En blanco		Índice de dificultad
		Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
1	a)	4	50	2	25	0	0	2	25	0,67
	b)	3	37,5	2	25	0	0	3	37,5	0,60
	c)	2	25	2	25	1	12,5	3	37,5	0,40
	d)	2	25	0	0	0	0	6	75	1,00
	e)	2	25	0	0	0	0	6	75	1,00

Tabla 4.10 Frecuencias de respuestas al ítem 1 e índice de dificultad (n = 8)

De acuerdo con la tabla 4.10 que muestra las frecuencias y porcentajes de respuestas al ítem 1, podemos observar que el 50% de los profesores pudo resolver correctamente la situación problemática planteada, de reconocer que en el noveno lanzamiento de la moneda era igualmente probable obtener cara o sello dado que los lanzamientos son independientes unos de otros (conocimiento común del contenido), obteniendo así una solución de referencia para analizar y corregir las respuestas dadas por los alumnos de la profesora Gómez. Sin embargo, tan solo 2 profesores (25%) lograron identificar a lo menos la independencia de sucesos como el contenido matemático del cual precisa el alumno para resolver la situación planteada.

En lo que se refiere al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas de Luís y Lucía, tan solo 2 profesores (25%) describen los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de problemas por los alumnos, señalando, por ejemplo (figura 4.4), que *"los alumnos se dejaron llevar por lo que observaron y pensaban"*.

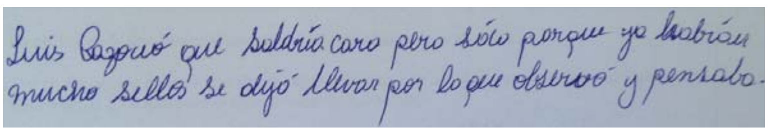


Figura 4.4 Respuesta de PP1 a la pregunta d) del ítem 1

A partir de este tipo de respuesta podemos evidenciar que estos profesores logran identificar que la intuición tiene una fuerte incidencia en las posibles respuestas de los alumnos, y que el contar con los resultados de los 8 lanzamientos influye en sus respuestas. Este tipo de efectos, conocidos como recencia negativa o positiva, han sido descritos por diversos autores como Piaget e Inhelder (1951), y Kahnemman, Slovic y Tversky (1982) quienes lo atribuyen a la a heurística de la representatividad (ver capítulo 1).

Por último, tan solo el 25% de los profesores manifiesta un cierto grado del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza al proponer algunas estrategias didácticas que facilitarían el aprendizaje de la percepción de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajo las mismas condiciones.

Finalmente, a partir de las frecuencias expuestas, podemos evidenciar que los subítems, que mayor dificultad presentan son 1a), 1b) y 1c) referidos al conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y al conocimiento del contenido especializado. Mientras que el ítem que menor dificultad presenta es el 1d) y 1e) referidos al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y la enseñanza. No obstante, si analizamos el ítem 1 en su totalidad, podemos ver que presenta un índice de dificultad media por lo que podemos decir que el ítem 1 muestra una buena discriminación. Es así como, en base a lo anterior y a las notas recogidas durante la aplicación, se ha decidido conservar el ítem 1 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción del subítem 1a).

En lo que se refiere al ítem 2 podemos observar que cerca de la mitad de los profesores respondieron correctamente el ítem 2 (tabla 4.11). Gran parte de las respuestas correctas se concentran en el subítem 2a) referido a la comparación y cálculo de probabilidades sencillas, lo que muestra que los profesores poseen un conocimiento común del contenido en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales en un experimento simple como la extracción de bolas de una caja.

Ítem		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Parcialmente correctas		En blanco		Índice de dificultad
		Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
2	a)	6	75	1	12,5	0	0	1	12,5	0,86
	b)	4	50	0	0	0	0	4	50	1,00
	c)	4	50	1	12,5	0	0	3	37,5	0,80
	d)	2	25	1	12,5	0	0	5	62,5	0,67

Tabla 4.11 Frecuencias de respuestas al ítem 2 e índice de dificultad (n = 8)

Mientras que los subítems que obtuvieron mayor porcentaje de respuestas en blanco son 2b) y 2d) referidos al conocimiento especializado del contenido y al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, respectivamente. Es importante señalar que en este último subítem, los dos profesores que entregaron una respuesta, manifestaron que una buena estrategia para ayudar a aquellos alumnos que no saben cómo resolver la situación problemática es *"hacer la prueba con el material concreto"* (figura 4.5). Sin embargo, ninguno de ellos señala a qué tipo de material concreto se refiere ni cómo lo utilizaría.

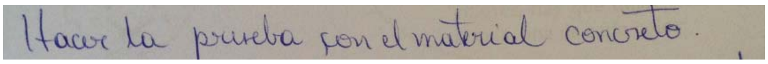


Figura 4.5 Respuesta de PP4 a la pregunta d) del ítem 2

Lo anterior, pone de manifiesto que si bien los profesores consideran que el material concreto es una buena estrategia para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, no tienen claridad respecto a qué tipo de material concreto es más adecuado ni a cómo lo utilizarían, lo que deja entrever una cierta debilidad en relación al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

Por otro lado, si observamos el índice de dificultad de cada uno de los subítems que componen el ítem 2 podremos ver que el subítem 2b) referido al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes es el que presentó una menor dificultad. Mientras que los subítems 2a) y 2c) referidos al conocimiento común del contenido y al conocimiento del contenido especializado presentaron un índice de dificultad media, siendo el subítem con mayor dificultad el subítem 2d) referido al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

Si observamos los resultados obtenidos para este ítem, podemos concluir que presenta un índice de dificultad media por lo que, salvo algunas modificaciones relacionadas con ciertos aspectos vinculados a la redacción de algunos de los enunciados que lo componen, hemos decidido incorporar el ítem 2 en su totalidad para la versión final del cuestionario.

En cuanto al ítem 3, recordemos que con él se busca evidenciar el conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido especializado y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
		Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
3	a)	3	37,5	2	25	1	12,5	2	25	0,50
	b)	0	0	3	37,5	3	37,5	2	25	0,00
	c)	6	75	0	0	0	0	2	25	1,00

Tabla 4.12 Frecuencias de respuestas al ítem 3 e índice de dificultad (n = 8)

Al observar la tabla 4.12 podemos ver que las mayores dificultades las presenta el subítem 3b) referido al conocimiento común del contenido, pues el profesor deberá resolver primeramente el problema planteado para así poder identificar los conceptos y propiedades involucradas. Lo anterior, otorgara claridad al profesor para analizar cada una de las respuestas hipotéticas dadas por los alumnos, justificando por qué esta es correcta o incorrecta. Tales conceptos y/o propiedades matemáticos de comprensión del concepto de suceso seguro, además de nociones básicas de combinatoria que permiten enumerar las distintas posibilidades de extracción necesarios para dar solución a la situación problemática, no fueron identificados por los profesores. Mientras que el subítem 3c) fue el que tuvo un mayor número de aciertos. Sin embargo, al igual que como sucedió con el ítem 2, los profesores manifestaron que una buena estrategia era *"utilizar material concreto para realizar la actividad"* (figura 4.6) pero no señalaron qué tipo de material ni cómo lo utilizarían, lo que nos muestra un débil dominio del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

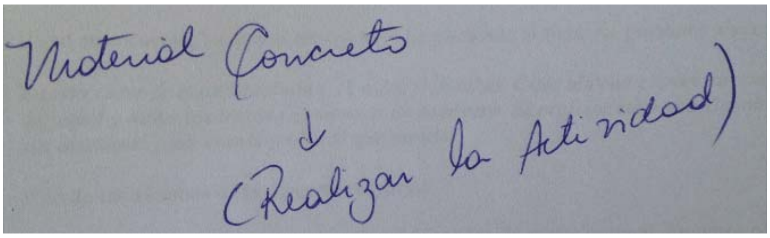


Figura 4.6 Respuesta de PP3 a la pregunta c) del ítem 3

Ahora, si nos centramos en el índice de dificultad de los subítems que componen el ítem 3, podemos evidenciar que existe una disparidad que va de lo muy simple a lo complejo entre los 3 subítems que componen el ítem. No obstante, consideramos que dicha disparidad es interesante de mantener pues el cuestionario debe contener una variedad de ítems, con distintos grados de dificultad, que permitan discriminar de forma adecuada los distintos tipos y niveles de conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad que poseen los profesores.

Con respecto al ítem 4 se observa que los profesores que participaron de la aplicación piloto demuestran, en su mayoría, tener un conocimiento del contenido en relación con los estudiantes adecuado, en lo referido al aprendizaje del cálculo y comparación de probabilidades. Por el contrario, no logran reconocer aquellos conceptos y/o propiedades matemáticas involucradas en la resolución de la situación problemática (conocimiento del contenido especializado). Lo anterior se puede contrastar con los resultados expuestos en la tabla 4.13.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
		Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
4	a)	6	75	0	0	0	0	2	25	1
	b)	0	0	4	50	1	12,5	3	37,5	0
	c)	2	25	0	0	0	0	6	75	1

Tabla 4.13 Frecuencias de respuestas al ítem 4 e índice de dificultad (n = 8)

Si observamos el índice de dificultad de las preguntas que componen el ítem 4 podremos observar que este ítem posee niveles de dificultad extremos que van desde lo simple a lo complejo, donde los subítems referidos al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y con la enseñanza no presentan dificultad. Mientras que el conocimiento del contenido especializado presentan mayor dificultad para los profesores. Puesto que ninguno de los profesores logró identificar que el contenido involucrado en la resolución de la situación problemática se encuentra relacionado con la comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables. La mayoría de los profesores, lo vinculó la resolución de la situación problemática con la *"comparación entre fracciones"* como se muestra en la figura 4.7.

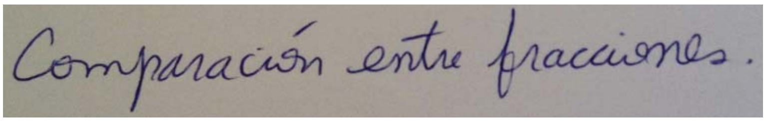


Figura 4.7 Respuesta de PP7 a la pregunta b) del ítem 4

Finalmente, hemos decidido conservar el ítem 4 en su totalidad, pues consideramos que pese a que es un ítem con un índices de dificultad extremos, en su totalidad presenta un equilibrio. No obstante, hemos realizado algunas modificaciones a nivel de redacción.

En lo que respecta al ítem 5, con él se pretende evaluar la comprensión de la idea de independencia, así como la percepción de la propiedad de perdida de memoria. Como se puede apreciar en la tabla 4.14 ninguno de los profesores ha acertado en su respuesta, argumentando que *"ya que Pedro no ha ganado, ahora tiene más posibilidades de ganar"* (figura 4.8)

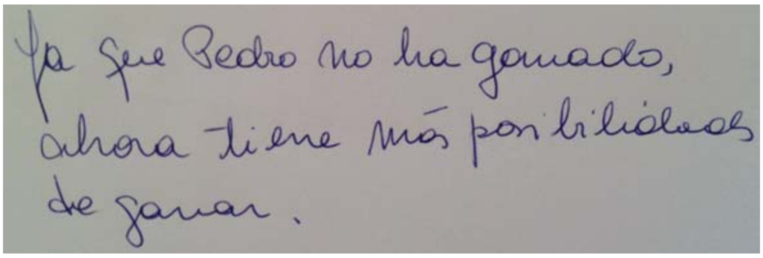


Figura 4.8 Respuesta de PP6 al ítem 5

Ítem	**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
5	0	0	6	75	2	25	0	0	0

Tabla 4.14 Frecuencias de respuestas al ítem 5 e índice de dificultad (n = 8)

Este tipo de argumentos deja en evidencia que la recencia negativa influiría fuertemente en las respuestas de los profesores, induciéndoles a pensar erróneamente que las posibilidades de ganar aumentarían en una próxima jugada. Lo que a su vez deja en evidencia un bajo nivel de domino del conocimiento común del contenido.

Por otro lado, a partir de la tabla 4.14 podemos observar que este ítem tiene un índice de dificultad elevado, pues ninguno de los profesores contestó correctamente, sin embargo, peso a ello decidimos conservar la pregunta puesto que para que un instrumento se encuentre bien calibrado debe estar conformado por ítems con distintos niveles de dificultad.

Por su parte, con el ítem 6 se pretende evidenciar el conocimiento común del contenido de los profesores en relación a la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso con dos sucesos no equiprobables. Como se observa en la tabla 4.15 dicho conocimiento está presente en la totalidad de los profesores a quienes se aplicó la prueba piloto del cuestionario, pues este ítem fue contestado correctamente en su totalidad.

Ítem	**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
6	8	100	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 4.15 Frecuencias de respuestas al ítem 6 e índice de dificultad (n = 8)

Consideramos que pese a que el índice de dificultad del ítem 6 nos indica que es un ítem extremadamente fácil, es necesario incluirlo dentro del instrumento puesto que el instrumento en su versión final debe contar con ítems de todos lo grados de dificultad para que muestre un nivel de dificultad balanceado.

Por último, la tabla 4.16 muestra los resultados de la aplicación piloto para el ítem 7, evidenciando que los profesores presentaron dificultades para identificar el objetivo de la situación problemática planteada así como en lo que se refiere al conocimiento ampliado del contenido, lo que nos revela una debilidad en este sentido en relación al conocimiento del contenido especializado y ampliado.

Ítem		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Parcialmente correctas		En blanco		Índice de dificultad
		Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	
7	a)	3	37,5	2	25	1	12,5	2	25	0,50
	b)	0	0	0	0	0	0	8	100	0
	c)	4	50	0	0	0	0	4	50	1,00
	d)	0	0	0	0	0	0	8	100	0

Tabla 4.16 Frecuencias de respuestas al ítem 7 e índice de dificultad (n = 8)

Al observar, en la tabla anterior, la columna sobre el índice dificultad de los subítems vemos que el ítem en general presenta un nivel de dificultad medio de 0,375, por lo que no debería representar mayores dificultades para los profesores.

En síntesis, en este apartado hemos realizado las adecuaciones necesarias del cuestionario, tomando en consideración la información obtenida de la revisión del instrumento mediante el juicio de expertos y de la aplicación piloto del cuestionario, obteniéndose así, la versión definitiva del cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre probabilidad.

4.3.3 Versión definitiva del cuestionario. Análisis a priori de los ítems.

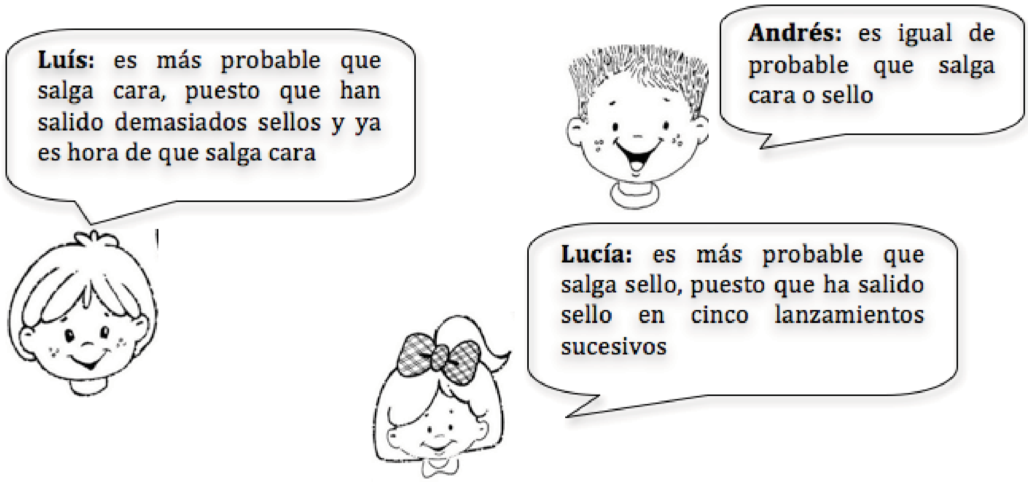
La versión definitiva del cuestionario (fase 6), que permite evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad, consta de 7 ítems de respuesta abierta (tabla 4.17), los cuales contemplan los cambios explicitados en el apartado anterior.

Ítem 1:

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:



Responda:

a) Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez.
b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?
c) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
d) Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
e) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

<u>Ítem 2:</u>

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Responda:

a) Resuelva el problema.
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Ítem 3:

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:

Responda:

a) ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c) ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 4:

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Responda:

a) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 5:

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "*la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima*".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Ítem 6:

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 6(negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. S ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bola a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luí hay más bolas blancas que en la suya.

¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Ítem 7:

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?
c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.
d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar, relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

Tabla 4.17 Ítems que componen la versión definitiva del cuestionario

Cada ítem del cuestionario se encuentra compuesto por subítems que contienen consignas que apuntan a evaluar distintos aspectos parciales o iniciales del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad (tabla 4.18).

Ítem	Subítem	Consigna	Conocimiento didáctico-matemático evaluado
1	a)	Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez	Conocimiento común del contenido
	b)	¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
	c)	¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado
	d)	Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
	e)	¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza
2	a)	Resuelva el problema	Conocimiento común del contenido
	b)	¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado
	c)	Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
	d)	¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza
3	a)	¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como	Conocimiento común del

		correctas? ¿Por qué?	contenido
	b)	¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado
	c)	¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza
4	a)	¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.	Conocimiento común del contenido Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
	b)	¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado
	c)	Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
	d)	¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza
5		¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?	Conocimiento común del contenido Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
6		¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.	Conocimiento común del contenido Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
7	a)	Resuelva el problema	Conocimiento común del contenido
	b)	¿Qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?	Conocimiento del contenido en relación con el currículo
	c)	¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza
	d)	¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?	Conocimiento ampliado del contenido

Tabla 4.18 Estructura de los ítems del cuestionario definitivo

A continuación se presenta el análisis *a priori* que consiste en un análisis detallado de los conocimientos puestos en juego en la resolución de cada uno de los ítems que componen el cuestionario. Dicho análisis se realizará desde la perspectiva teórica del EOS, pues este nos proporciona herramientas que permiten la interpretación y análisis de los conocimientos puestos en juego en la resolución de un problema matemático. Para ello, el EOS introduce la nociones de configuración de objetos y significados (ver capítulo 2), lo que nos permitirá estudiar las configuraciones epistémicas asociadas a cada ítem, entendidas como el conjunto de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de las situaciones problemáticas. Así mismo, permitirá prever potenciales conflictos de significado. Dicho análisis permitirá mostrar los elementos de significado intervinientes y el modo en que estos se configuran. De esta manera, por medio del desarrollo de las configuraciones epistémica y cognitiva, determinaremos aspectos fundamentales de la validez de contenido de los ítems.

Para la realización de dicho análisis, utilizaremos la herramienta denominada Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) que ha sido descrita en el capítulo 2. Este análisis *a priori* lo hemos realizado desde una perspectiva ontosemiótica, considerando los siguientes aspectos:

- Componente del modelo del conocimiento didáctico-matemático que se pretende evaluar;
- Contenidos principales y secundarios que se pretende evaluar;
- Elementos de significado en los que se centra el ítem;
- Propuesta de respuesta experta;
- Configuración epistémica del ítem en términos de objetos y significados;
- Potenciales conflictos de significado.

Por último, es importante señalar que este análisis no es único ni pretende ser exhaustivo, pudiéndose encontrar otras respuestas, distintas a las presentadas, para cada una de las situaciones problemáticas planteadas. Sin embargo, consideramos que el enfoque por el cual hemos optado para realizar el análisis *a priori* es el adecuado en relación a lo que nuestro cuestionario pretende evaluar y, a la vez, coherente con el marco teórico que se ha elegido para llevar acabo esta investigación.

4.3.3.1 Análisis del ítem 1

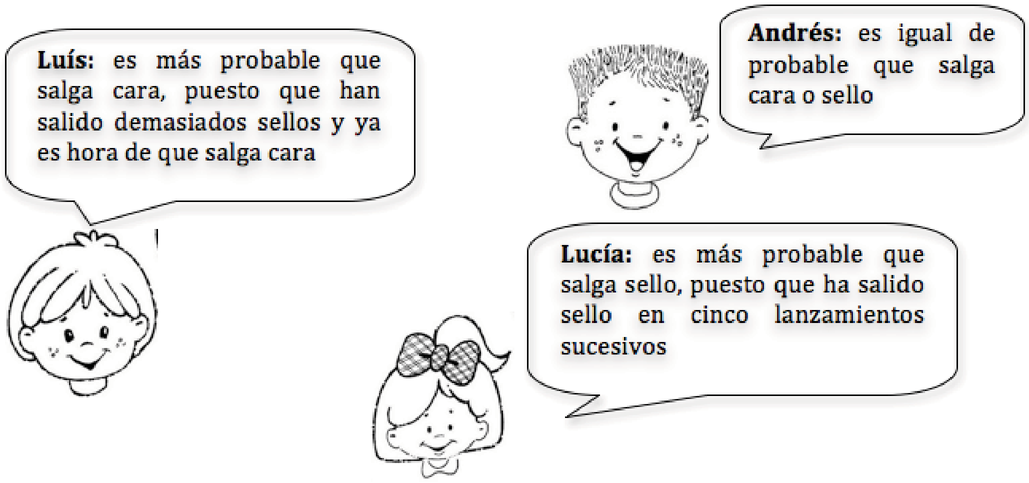
El ítem (figura 4.9), se encuentra formulado a partir de las actividades presentes en los libros de texto de primaria analizados en el capítulo 3 y del cuestionario de Green (1983). Sus objetivos son, primeramente, evaluar la comprensión de la independencia de sucesos (contenido 7) y del significado laplaciano y frecuentista de la probabilidad (contenido 4).

Para evaluar la comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos, bajos las mismas condiciones, de un experimento aleatorio, se ha optado por incluir la secuencia de los resultados anteriores, y de este modo observar si ésta influye en la respuesta de los profesores.

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:



Responda:

a) Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez.
b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?
c) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
d) Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
e) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Figura 4.9 Ítem 1 del cuestionario

Situaciones problemáticas similares a ésta han sido estudiadas por Cañizares (1997) quien observó que los futuros profesores, al verse enfrentados a este tipo de situación, manifiestan el sesgo de la recencia positiva o negativa, atribuido a la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

El elemento de significado en el cual se centra este ítem es el de concepto-definición de la probabilidad.

Además de evaluar los aspectos mencionados, mediante la resolución de los distintos subítems que componen la situación problemática, como se indica en la tabla 5.14, se busca evaluar el conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, conocimiento del contenido especializado, y el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza que poseen los profesores de educación primaria.

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para las preguntas o subítems que conforman el ítem 1:

- Subítem a): Para el noveno lanzamiento de la moneda, es igualmente probable obtener cara o obtener sello (equiprobabilidad de los sucesos), pues los resultados obtenidos en los distintos lanzamientos son independientes entre sí.
- Subítem b): Andrés ha dado con la respuesta correcta, pues ha identificado que la probabilidad de ocurrencia para ambos sucesos es la misma.
- Subítem c): Dentro de los contenidos matemáticos que los alumnos deben movilizar para dar respuesta a la situación planteada, se encuentran: experimento aleatorio, espacio muestral, concepto de probabilidad, equiprobabilidad, simetría de la moneda e independencia de sucesos.
- Subítem d): En las respuestas de Luís y Lucía se puede observar una fuerte incidencia de los resultados obtenidos en los 8 lanzamientos previos, lo que les lleva a guiarse por la intuición y responder de manera equivocada.
- Subítem e): Una estrategia puede ser, realizar el experimento de lanzar una moneda, repetidamente, y registrar en una tabla qué se observa tras caer. Una manera de medir qué tan probable es obtener cara o sello es observar el resultado de muchos lanzamientos en los que se ha realizado el experimento de manera independiente y manteniendo cada vez las misma condiciones. Luego, registrar los resultados de los lanzamientos en una tabla de frecuencias y observar a partir de ésta el comportamiento de las frecuencias relativas.

Esto facilitaría que el alumno comprenda que es igualmente probable obtener cara o obtener sello en el noveno lanzamiento. Otra estrategia podría ser simular el experimento en un *software* como Excel y graficar las frecuencias relativas para diferentes números de lanzamientos de una monedas, observando que el valor al que se acerca cada vez más a 0.5, que es el valor, que por simetría de la moneda, se esperaría obtener en una moneda honesta (no cargada), mostrando de este modo que la probabilidad de obtener sello es la misma que de obtener cara.

En la tabla 4.19, analizamos los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS
Situaciones-Problemas	
Determinar si al lanzar una moneda los posibles resultados son independientes entre si.	Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en relación al lanzamiento de una moneda. Desarrollo de competencias de análisis de resultados.
Elementos Lingüísticos	
Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase? Los alumnos dan las siguientes respuestas: Luís…., Andrés…, Lucia… Resuelva el problema ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué? ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema? Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas. ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	Determinar resultado del noveno lanzamiento. Interpretación del espacio muestral. Significado de la probabilidad. Evaluar el conocimiento de la probabilidad asociada a sucesos independientes. Evaluar el conocimiento de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución del problema. Evaluar la interpretación que el profesor hace sobre las respuestas de Luís, Andrés y Lucia. Evaluar el conocimiento de distintas estrategias que permiten resolver adecuadamente el problema.
Conceptos-Definición	
Experimento aleatorio Espacio muestral Probabilidad	Lanzar una moneda y observar los posibles resultados. Conjunto de posibles resultados, en este caso hay 2, cara y sello. Grado de creencia de que un suceso ocurra; proporción de casos favorables entre posibles.

Equiprobabilidad	Resultados de un experimento que tienen la misma probabilidad de ocurrir .
Propiedades	
Moneda honesta (simetría de la moneda) Significados de la probabilidad Independencia de sucesos	No hay razones para preferir un caso sobre otro. La probabilidad es el cociente entre casos favorables y posibles. Además puede ser entendida como el límite de las frecuencias relativas. El cual al aumenta el número de ensayos, la frecuencia relativa se estabiliza poco a poco, observándose, lentamente, la tendencia a ½. Dos sucesos son independientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta para nada a la ocurrencia del otro.
Procedimientos	
Construcción del espacio muestral asociado al lanzamiento de una moneda. Cálculo de probabilidades	Enumeración sistemática de los resultados posibles en los distintos lanzamientos de la moneda. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia aplicando la regla de Laplace. Estimación de probabilidades mediante estabilización de frecuencias.
Argumentos	
Deducciones informales basadas en la intuición. Simulación del experimento. Convención social que lleva a pensar que no hay razones para suponer que la moneda no tenga simetría.	Para justificar que los lanzamientos sucesivos no son equiprobables, se basa en la intuición que lleva a creer que la moneda tiene memoria. Uso de la convergencia de los resultados para mostrar empíricamente una propiedad. Justifica la equiprobabilidad, razonamiento en base a normas. Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.19 Configuración de objetos y significados del ítem 1

Como se puede observar (tabla 4.19) en la configuración epistémica, se movilizan elementos de significados ligados, principalmente, a conceptos y propiedades relacionadas, como ya se ha dicho, a la comprensión de la independencia de sucesos y del concepto probabilidad. Además, por medio de este ítem se busca encontrar en las respuestas y argumentos de los profesores un conocimiento común del contenido en relación a los conceptos y propiedades antes señaladas, y un conocimiento especializado, vinculado al reconocimiento de posibles errores y dificultades que presentan o podrían presentar los alumnos de primaria en relación a la situación planteada (conocimiento del contenido en relación con los estudiantes), y a posibles estrategias que permitan que los alumnos superen y corrijan sus errores y concepciones erróneas (conocimiento del contenido en relación con la enseñanza).

De este modo a partir de la configuración de objetos y significados presentada y de las investigaciones previas analizadas, en el capítulo 1, podemos anticipar, la aparición de conflictos de significado, como la recencia negativa o positiva, que han sido descritas por diversos autores, como Piaget e Inhelder (1951), Kahnemman, Slovic y Tversky (1982) y Cañizares (1997), quienes lo atribuyen a la heurística de la representatividad (capítulo 1).

4.3.3.2 Análisis del ítem 2

Este ítem (figura 4.10) que se encuentra reformulado a partir de actividades propuestas en Godino, Batanero y Cañizares (1987) y de actividades presentes en los libros de texto de primaria analizados en el capítulo 3, se centra en evaluar los contenidos de cálculo de probabilidades (contenido 5) y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables (por la composición de las cajas) en un experimento simple (contenido 6). Si observamos la situación planteada en el ítem 2 podemos observar que es posible aplicar el principio de indiferencia, por lo que para el cálculo de probabilidades podemos aplicar la regla de Laplace. Además, se observa una igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles.

Para dar solución al problema, será necesario comparar las dos fracciones resultantes del cálculo de probabilidad. Además, para la resolución de la situación problemática planteada, es necesario movilizar los conceptos de experimento y suceso aleatorio, espacio muestral (para identificar los posibles sucesos) y posibilidad de ocurrencia de un evento (mediante la identificación del número de casos favorables, el número de casos desfavorables y el número total de casos posibles).

La situación problemática, se centra en determinar, entre dos cajas, en cuál hay mayor probabilidad de obtener una bola blanca, para lo cual los profesores deberán poner en juego distintos conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos) al momento de dar respuesta a los distintos subítems que componen el ítem. Por lo tanto, el elemento de significado en que se centra el ítem es el de una propiedad, en este caso regla de Laplace y razonamiento proporcional.

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Responda:

a) Resuelva el problema.
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Figura 4.10 Ítem 2 del cuestionario

Además, a través de este ítem se pretende, por medio de los conocimientos puestos en juego al resolver la situación problemática, evaluar el conocimiento común del contenido, y ciertos aspectos del conocimiento especializado como: el conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para las preguntas o subítems que conforman el ítem 2:

- Subítem a): Para determinar de cuál caja es preferible realizar la extracción, es posible aplicar la regla de Laplace, ya que en la situación dada puede aplicarse el principio de indiferencia, y no se dispone de información de tipo frecuencial; o bien se puede resolver por medio de un razonamiento de tipo proporcional. Por lo que la caja A es la que da mayor probabilidad de obtener una bola blanca.

$$P_{CAJA\,A}(obtener\,bola\;blanca)=\frac{3}{6}$$

$$P_{CAJA\,B}(obtener\,bola\;blanca)=\frac{3}{8}$$

Luego la caja A otorga mayor probabilidad, dado que $\frac{3}{6}>\frac{3}{8}$

- Subítem b): Para dar respuesta a la situación planteada, los alumnos deben poner en juego la regla de Laplace, comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables, además de los conceptos de experimento y suceso aleatorio y posibilidad de ocurrencia de un evento.
- Subítem c): Los posibles errores o dificultades que los alumnos podrían tener para resolver el problema, se encuentran relacionadas con un razonamiento proporcional incorrecto, que les lleva a, por ejemplo: comparar el número de casos posibles, comparar el número de casos favorables, comparar el número de casos desfavorables. O bien, podrían pensar que en ambas cajas hay la misma posibilidad de extraer una bola blanca puesto que en ambas hay la misma cantidad de bolas blancas (casos favorables). Otro posible error o dificultad podría estar en la comparación de probabilidades.
- Subítem d): Una posible estrategia para ayudar a los alumnos a superar las dificultades a las cuales se pueden ver enfrentados para al resolver este tipo de situaciones, consiste en desarrollar la situación por medio de situaciones experimentales concretas, a través de las cuales puedan desarrollar y aplicar un razonamiento proporcional adecuado que les permita mejorar sus estrategias.

En la tabla 4.20, analizamos los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS
Situaciones-Problemas	
Elección entre dos cajas con bolas blancas y negras. Comparar probabilidades de un suceso en un experimento aleatorio simple.	Desarrollo de competencias de cálculo y comparación de probabilidades.
Elementos Lingüísticos	
Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Caja A y Caja B Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible realizar la extracción? Resuelva el problema ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los	Determinar en cuál de las dos cajas es más probable obtener una bola blanca. Interpretación del espacio muestral. Evaluar el conocimiento de la probabilidad asociada a sucesos no equiprobables. Evaluar el conocimiento de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución del problema. Evaluar el conocimiento sobre los posibles errores y

alumnos para dar una solución correcta a este problema? Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos. ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	dificultades vinculadas a la comparación de probabilidades. Evaluar el conocimiento de distintas estrategias que permiten resolver adecuadamente el problema.
Conceptos-Definición	
Experimento aleatorio Espacio muestral Probabilidad	Extraer una bola de una caja y observar los posibles resultados. Conjunto de posibles resultados. Grado de creencia de que un suceso ocurra; proporción de casos favorables entre posibles. Asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número de casos posibles del experimento.
Propiedades	
Regla de Laplace Razonamiento proporcional	La probabilidad de ocurrencia de un suceso corresponde al cociente entre casos favorables y posibles. Entendido en este caso, como la comparación de dos razones.
Procedimientos	
Construcción del espacio muestral Cálculo de probabilidades Comparación de probabilidades	Enumeración de los elementos del espacio muestral. Cálculo de probabilidades, aplicando la regla de Laplace, de obtener una bola blanca en la caja A y en la caja B. Establecer comparación de probabilidades, por medio de la comparación de razones.
Argumentos	
En la caja A hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca, puesto que hay 3 bolas blanca de un total de 6. Mientras que en la caja B hay 3 bolas blancas de un total de 8.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.20 Configuración de objetos y significados del ítem 2

Como se puede observar (tabla 4.20) en la configuración de objetos y significados, se movilizan elementos de significados ligados, principalmente, a conceptos y propiedades relacionadas con el calculo y comparación de probabilidades por medio de el razonamiento proporcional.

A partir de la configuración presentada y de las investigaciones previas analizadas, en el capítulo 1, por ejemplo Cañizares (1997), podemos anticipar, la aparición de conflictos de significado, como potenciales, en la resolución de la tarea:

- Dado que nos encontramos ante una situación de igualdad de casos favorables, y desigualdad de casos posibles, podría ocurrir que se opte por asignar igual probabilidad de extraer una bola blanca en ambas cajas, dado que ambas tienen igual número de bolas blancas.

- Obtener la respuesta correcta solamente a partir de la comparación de casos desfavorables, sin utilizar el razonamiento proporcional.
- Elegir la caja con mayor número de bolas.
- Dado que ambas cajas tienen igual número de casos favorables, podría suceder que se inclinen por seleccionar una de las cajas en base a la comparación de los casos desfavorables.
- Utilizar estrategias aditivas para dar respuesta al problema.

4.3.3.3 Análisis del ítem 3

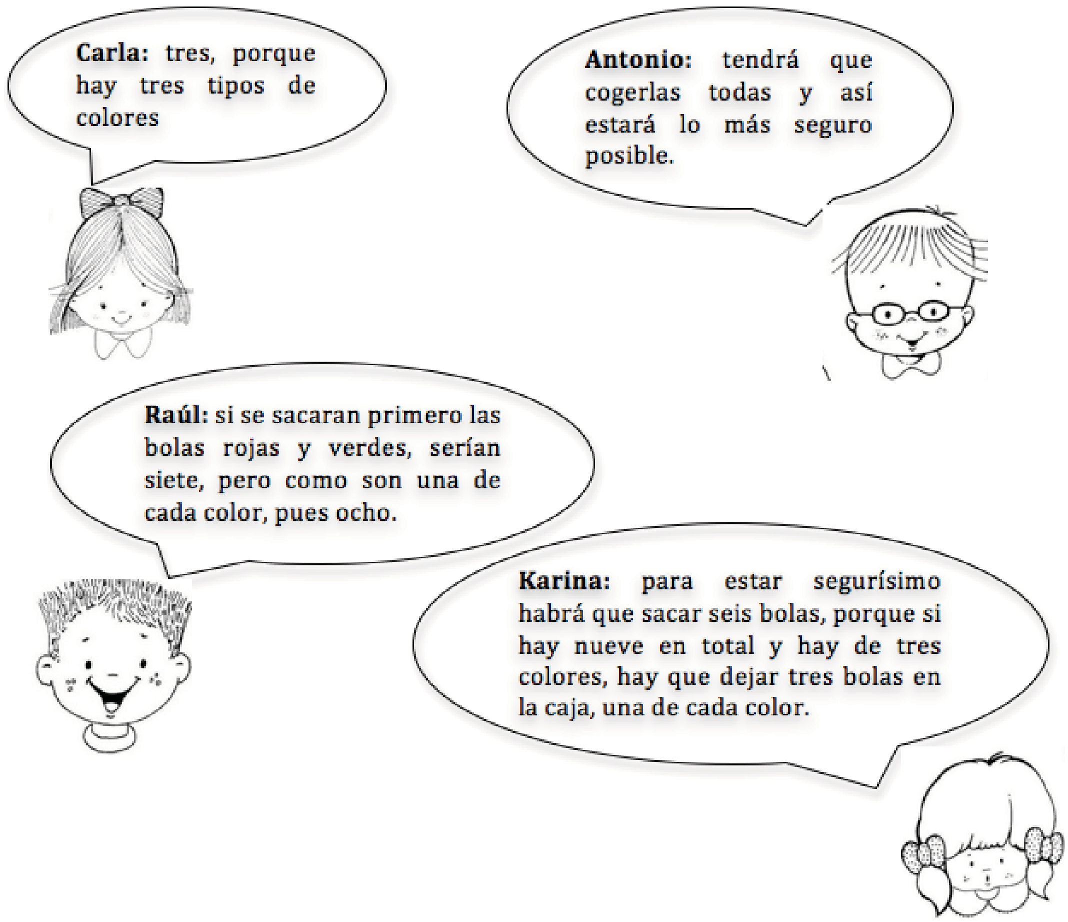
Este ítem (figura 4.11) ha sido tomado de la investigación de Fischbein y Gazit (1984), por su parte las respuestas de alumnos que se incluyen han sido tomadas de Cañizares (1997). La decisión de extraer respuestas dadas por los alumnos que respondieron el cuestionario de Cañizares (1997) se debe a que consideramos interesante observar si los profesores a quienes aplicaremos el cuestionario, se comportan de manera similar, y además, queremos observar si reconocen estos tipos de errores tan frecuentes en los alumnos.

De este modo, por medio de este ítem se pretende evaluar la comprensión del concepto de suceso seguro (contenido 3), además de nociones básicas de combinatoria que permiten enumerar las distintas posibilidades de que se presentan para extraer bolas de la caja. En relación a los componentes del conocimiento didáctico-matemático que se pretende evaluar con este ítem, se encuentran ciertos aspectos vinculados al conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido especializado y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, vinculados a la comprensión del concepto de suceso seguro.

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:



Responda:

a) ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c) ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?

Figura 4.11 Ítem 3 del cuestionario

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para las preguntas o subítems que conforman el ítem 3:

- Subítem a): Las respuesta correcta es la de Raúl, 8 bolas dado que nos preguntan por el número de bolas que hay que extraer para estar seguros de que hay una de cada color. Pues puede ocurrir, por ejemplo, que se extraigan primeramente las cuatro rojas, una a continuación de la otra, luego las 3 verdes también de manera sucesiva y por último una blanca.

- Subítem b): Para responder de manera correcta al problema los alumnos deben movilizar su conocimiento y comprensión de la noción de espacio muestral y suceso seguro vinculado a nociones de combinatoria elemental, en que se puede considerar al experimento como experimentos sucesivos dependientes pues al realizar las extracciones cambia la composición de la caja.
- Subítem c): Mostrar por medio de situaciones experimentales concretas, experimentos similares al planteado en el cual se pueda observar si se presenta de manera sistemática la tendencia a intercambiar el espacio muestral implícito de tres sucesos no equiprobables {r, v, b} por un espacio muestral equiprobable {r, r, r, r, v, v, v, b, b}. Además de mostrar situaciones donde se evidencia la diferencia entre las ideas de seguro y posible. Esto, dado que la mayoría de los errores se deben a confusión de los concepto involucrados en la resolución del problema. Como es el caso de Carla quien responde que hay que sacar tres bolas, pues confunde la noción de suceso seguro con el espacio muestral. Mientras que Antonio y Karina presentan errores en su razonamiento combinatorio.

En la tabla 4.21, se analizan los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Extracción de bolas de una caja. Comprensión del concepto de suceso seguro.	Reflexión sobre el espacio muestral.
Elementos Lingüísticos	
En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color? Algunas respuestas de los alumnos: Carla…, Antonio…., Raúl… y Karina… ¿Qué respuestas se deben aceptar como correctas? ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?	Determinar un suceso seguro. Interpretación del espacio muestral. Evaluar la interpretación que el profesor hace sobre las respuestas de Luís, Andrés y Lucia. Evaluar el conocimiento de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución del problema. Evaluar el conocimiento de distintas estrategias que permiten resolver adecuadamente el problema.

¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	
Conceptos-Definición	
Experimento aleatorio Espacio muestral Suceso seguro	Extracción de bolas de una caja. Conjunto de posibles resultados del experimento. Aquel que coincide con el espacio muestral.
Propiedades	
Posibilidad de ocurrencia Significados de la probabilidad	Distinción entre suceso seguro y suceso posible.
Procedimientos	
Construcción del espacio muestral	Enumeración de los elementos del espacio muestral, que consta de 3 sucesos elementales no equiprobables {r, v, b}.
Argumentos	
Se deben extraer 8 bolas para estar seguro de obtener una de cada color	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.21 Configuración de objetos y significados del ítem 3

A partir de la tabla anterior, se puede observar que el elemento de significado que predomina en esta situación problemática se encuentra ligado a conceptos-definiciones, principalmente, las vinculadas al concepto de espacio muestral y a la noción de suceso seguro. Elementos que son centrales en el logro de una adecuada comprensión y solución del problema. Del mismo modo, la configuración permite anticipar algunos conflictos ya detectados por algunos investigadores como Fischbein y Gazit (1984), Azcárate (1995) y Cañizares (1997), que a continuación se enuncian:

- Confusión entre los conceptos de suceso seguro y suceso posible, lo que les llevaría a responder que con tres bolas es suficiente, pues con tres bolas se pueden obtener los tres colores (número mínimo de bolas para que sea posible obtener una bola de cada color). Pues de acuerdo a lo planteado por Fischbein y Gazit (1984), la noción de suceso seguro muestra mayores dificultades en su compresión, que la de suceso probable.
- Falta de razonamiento combinatorio.
- Interpretación incorrecta del experimento lo que les llevaría a considerar un espacio muestral incorrecto.

4.3.3.4 Análisis del ítem 4

Este ítem (figura 4.12) ha sido extraído de la investigación de Green (1982), mientras que la respuesta del alumno ha sido tomada de Cañizares (1997). Su objetivo es evaluar los siguientes componentes del conocimiento didáctico-matemático: conocimiento común del contenido, conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, sobre el cálculo (contenido 5) y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables (contenido 6). Para resolver correctamente la situación planteada de "¿qué es más probable que suceda?" los profesores deberán discriminar entre sucesos equiprobables y no equiprobables.

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Responda:

a) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.
b) ¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
c) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?

Figura 4.12 Ítem 4 del cuestionario

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para las preguntas o subítems que conforman el ítem 4:

- Subítem a): La respuesta del alumno es incorrecta, puesto que hay mayor número de niñas por lo que es más probable que salga niña. Quizás el error en la respuesta del alumno se deba a una confusión entre las nociones de aleatoriedad y equiprobabilidad, lo que lleva que establezca una asociación intuitiva que conduciéndole a pensar que finalmente es la suerte quien decide (dado que el espacio muestral se encuentra conformado por dos posibles valores: niños y niñas) aun cuando haya más niñas que niños.

- Subítem b): los conceptos y/o propiedades que los alumnos deben poner en juego para responder adecuadamente a la pregunta planteada son: noción de aleatoriedad y equiprobabilidad, cálculo de probabilidades de sucesos no equiprobables y comparación de probabilidades.
- Subítem c): Dentro de los posibles errores o dificultades que pueden presentar los alumnos, está el realizar una generalización incorrecta de la regla de Laplace a partir del espacio muestral y pensar que hay igual probabilidad de elegir el nombre de una niña o niño. Otro error sería el interpretar la pregunta como obtener la probabilidad que tiene cada alumno de ser elegido, lo que vinculado a una comprensión errónea del espacio muestral del experimento llevaría a pensar en la probabilidad que tiene cada alumno de ser escogido. Otra posible dificultad podría encontrarse en realizar la comparación de las probabilidades absolutas de escoger el nombre de un niño o niña.
- Subítem d): El desarrollo de problemas similares que permitan diferenciar entre las nociones de aleatoriedad y equiprobabilidad podría ser una estrategia adecuada para ayudar a los alumnos a comprender de mejor manera el problema y superar sus errores o dificultades.

En la tabla 4.22, se analizan los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Extracción al azar de papeles con los nombres de 13 niños y 16 niñas.	Reflexión y comprensión del espacio muestral Desarrollo de competencias de cálculo y comparación de probabilidades.
Elementos Lingüísticos	
El profesor saca uno de los trozos de papel sin mirar, y pregunta a sus alumnos	Determinar qué es más probable que suceda, que salga niño o niña-
¿Qué es más probable que suceda?	Interpretación del espacio muestral.
Es la suerte quien decide. Aunque haya más niños que niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña.	Evaluar el conocimiento de la probabilidad asociada a sucesos no equiprobables.
¿Considera correcta la respuesta del alumno?	Evaluar la interpretación que hace el profesor sobre la respuesta del alumno presentada.
¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?	Evaluar el conocimiento de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución del problema.

Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos. ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	Evaluar el conocimiento sobre los posibles errores y dificultades vinculadas a la comparación de probabilidades. Evaluar el conocimiento de distintas estrategias que permiten resolver adecuadamente el problema.
Conceptos-Definición	
Experimento aleatorio Espacio muestral Probabilidad Significado de la probabilidad Equiprobabilidad	Extraer un trozo papel con nombres desde un sombrero y ver qué es más probable que suceda. Conjunto de posibles resultados. Resultados de un experimento que tienen la misma probabilidad de ocurrir .
Propiedades	
Cálculo de probabilidad	Probabilidad de ocurrencia de dos sucesos no equiprobables.
Procedimientos	
Construcción del espacio muestral Cálculo de probabilidades Comparación de probabilidades	Enumeración de los elementos del espacio muestral, que consta de 2 sucesos simples no equiprobables {niño, niña} por composición del sombrero con los papeles. Cálculo de mayor probabilidad de ocurrencia. Establecer comparación de probabilidades, por medio de la comparación absoluta del número de niños y niñas, dado que preguntan ¿qué es más probable que suceda?
Argumentos	
La respuesta es la suerte quien decide. Aunque haya más niños que niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña, es incorrecta puesto que la probabilidad de que salga el nombre de una niña es mayor.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.22 Configuración de objetos y significados del ítem 4

A partir de la tabla anterior, se puede observar que el elemento de significado que predomina en esta situación problemática se encuentra ligado a conceptos-definiciones y procedimientos, vinculados, principalmente, a las nociones de aleatoriedad y sucesos no equiprobables.

Como ha quedado de manifiesto, a partir del análisis *a priori* de este ítem, para responder a la pregunta de ¿qué es más probable que suceda? No es necesaria la utilización de un razonamiento de tipo proporcional, sino que solo basta con identificar correctamente el espacio muestral, calcular la probabilidad de escoger un papel con el nombre de un niño y con el nombre de una niña, y luego comparar las probabilidades de ocurrencia de dos sucesos simples no equiprobables, por medio de la comparación absoluta del número de niños y niñas. De acuerdo con las investigaciones analizadas en el capítulo 1, sabemos que este tipo de situaciones problemáticas reporta algunos errores o dificultades tanto en alumnos como en futuros profesores, tales como el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre y Durand (1988).

En tal sentido, consideramos que en la resolución de esta situación problemática se pueden presentar algunos de los siguientes conflictos:

- Generalización incorrecta de la regla de Laplace, lo que llevaría a responder que es igualmente probable que salga niño o niña (sesgo de equiprobabilidad).
- Considerar un espacio muestral incorrecto, como por ejemplo, un espacio muestral compuesto por 29 sucesos simples equiprobables, correspondientes a cada uno de los nombres de los 29 alumnos.
- Asociar incorrectamente los conceptos de aleatorio y equiprobable.

4.3.3.5 Análisis del ítem 5

Esta situación problemática (figura 4.13) ha sido extraída del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984). El objetivo de este ítem es evaluar las siguientes componentes del conocimiento didáctico-matemático en relación a la comprensión de la independencia de sucesos (contenido 7): conocimiento común del contenido y conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. Además, por medio de este ítem se busca evidenciar la presencia del sesgo de la recencia negativa, en las respuestas de los profesores, producto de la heurística de la representatividad (Khaneman, Slovic y Tversky, 1982) que los llevaría a creer que dado que Pedro ha perdido las veces anteriores, ya es tiempo de que gane, por lo que sus probabilidades de ganar en la próxima jugada deben ser mayores (falacia del jugador). Lo anterior, dejaría en evidencia una incorrecta comprensión de la independencia de sucesos en la asignación de probabilidades.

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "*la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima*".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Figura 4.13 Ítem 5 del cuestionario

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para la pregunta del ítem 5: El razonamiento de Pedro es incorrecto. Pues, si bien la lotería es un juego basado en la suerte, no existe relación entre las jugadas, por lo que la probabilidad de ganar en alguna partida próxima es independiente de los resultados obtenidos en los sorteos anteriores.

En la tabla 4.23, se analizan los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Juego de lotería	Comprensión de la independencia de sucesos y percepción de la propiedad de perdida de memoria.
Elementos Lingüísticos	
Pedro ha participado semanalmente en la lotería, hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: La lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en una partida próxima. ¿cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?	Comprensión de la probabilidad de ganar en los Juegos de azar. Evaluar la interpretación que hace el profesor sobre la respuesta de Pedro.
Conceptos-Definición	
Azar/suerte Espacio muestral Posibilidad de ocurrencia Significado de la probabilidad	Azar/suerte Conjunto de posibles resultados. Diferenciar entre muestro con y sin reemplazamiento. Distinción entre suceso seguro, posible e imposible.
Propiedades	
Independencia de sucesos	Dos sucesos son independientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta para nada a la ocurrencia del otro.
Procedimientos	
Creencias sobre aleatoriedad	Recencia negativa
Argumentos	
Pedro tiene o no tiene razón.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.23 Configuración de objetos y significados del ítem 5

A partir de la tabla anterior, se puede observar que el elemento de significado que predomina en esta situación problemática se encuentra ligado a la propiedad de independencia de sucesos, pues si Pedro tuviera una correcta comprensión no presentaría el sesgo de la recencia negativa (Kahnemman, Slovic y Tversky, 1982), el cual según Fischbein (1975) se encuentra relacionado con la incorrecta percepción de la independencia.

Es en base a lo antes descrito que consideramos que dentro de los conflictos que se pueden presentar el la solución de la situación planteada, se encuentran:

- Considerar correcto el razonamiento de Pedro, manifestando de este modo el sesgo de recencia negativa.
- Considerar que el que Pedro gane o no el sorteo depende únicamente del azar y de la suerte.

4.3.3.6 Análisis del ítem 6

Este problema (figura 4.14) ha sido tomado del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984). A través de este ítem se pretende evaluar los siguientes componentes del conocimiento didáctico-matemático sobre comparación de probabilidades (contenido 6) y noción de juego equitativo (contenido 6): conocimiento común del contenido y conocimiento del contenido en relación con los estudiantes.

> Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya.
>
> ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Figura 4.14 Ítem 6 del cuestionario

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para la pregunta del ítem 6: La respuesta del alumno es incorrecta. Dado que ambas tienen la misma proporción de bolas blancas y negras, por lo que la probabilidad de obtener una bola blanca es la misma en las dos cajas (esto se puede establecer por medio de la comparación de fracciones). Por lo tanto, el juego es un juego justo.

En la tabla 4.24, se analizan los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS
Situaciones-Problemas	
Elección entre dos cajas con bolas blancas y negras. Comparar probabilidades de un suceso en un experimento aleatorio simple.	Desarrollo de competencias de cálculo y comparación de probabilidades.
Elementos Lingüísticos	
Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es quien saque primero una bola blanca. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya. ¿considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.	Determinar en cuál de las dos cajas es más probable obtener una bola blanca. Interpretación del espacio muestral. Evaluar el conocimiento sobre los posibles errores y dificultades vinculadas a la comparación de probabilidades.
Conceptos-Definición	
Experimento aleatorio Espacio muestral Significado de la probabilidad Juego equitativo	Reflexionar sobre la probabilidad de extraer una bola blanca en ambas cajas. Conjunto de posibles resultados. Descripción de los casos posibles, favorables y desfavorables. Grado de creencia de que un suceso ocurra; proporción de casos favorables entre posibles. Juego de azar en que todos los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar.
Propiedades	
Regla de Laplace Razonamiento proporcional Juego equitativo	La probabilidad de ocurrencia de un suceso corresponde al cociente entre casos favorables y posibles. Entendido en este caso, como la comparación de dos razones. La esperanza matemática de cada jugador es idéntica.
Procedimientos	
Construcción del espacio muestral Cálculo de probabilidades Comparación de probabilidades	Enumeración de los elementos del espacio muestral. Cálculo de probabilidades, aplicando la regla de Laplace, de obtener una bola blanca en la caja de Eduardo y en la caja de Luís. Establecer comparación de probabilidades, por medio de la comparación de fracciones.
Argumentos	
Eduardo no tiene razón. El juego es justo.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.24 Configuración de objetos y significados del ítem 6

En base a la configuración de objetos y significados (tabla 4.24), se puede observar que el elemento de significado que predomina en esta situación problemática se encuentra ligado a procedimientos a la hora de establecer si el juego es o no un juego equitativo. Dentro de los conflictos que la configuración nos permite anticipar, se encuentran:

- Creer que dado que hay mayor número de casos favorables en la caja de Luís, esto significa que él tiene mayores probabilidades de ganar, pese a que ambas cajas tienen igual proporción de casos favorables y posibles.
- Presentar dificultad para establecer la comparación de probabilidades por medio de la comparación de fracciones (Noelting 1980).

4.3.3.7 Análisis del ítem 7

Este ítem (figura 4.15) se ha elaborado a partir de actividades presentes en los libros de textos que se analizaron en el capítulo 3. El objetivo de este ítem es evaluar ciertos aspecto del conocimiento didáctico-matemático, tales como: el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido, conocimiento del contenido en relación al currículo y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza sobre los tópicos de: comprensión de la independencia de sucesos (contenido 7) vinculada al cálculo de probabilidades (contenido 5), para la posterior formalización de la regla de Laplace (contenido 4).

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema
b) ¿Qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?
c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.
d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar, relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

Figura 4.15 Ítem 7 del cuestionario

A continuación se muestra una posible solución (respuesta experta) para las preguntas o subítems que conforman el ítem 7:

- Subítem a): En el siguiente lanzamiento del dado, es igualmente probable obtener cualquiera de los elementos que conforman el espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6}, pues los resultados obtenidos en los distintos lanzamientos son independientes entre sí.

- Subítem b): Este problema tiene por objetivo evidenciar la independencia de sucesos en el lanzamiento de un dado honesto.
- Subítem c): Una estrategia puede ser, realizar el experimento de lanzar un dado, repetidamente, y registrar en una tabla qué se observa tras caer. Una manera de medir qué tan probable es obtener {1, 2, 3, 4, 5, 6} es observar el resultado de muchos lanzamientos en los que se ha realizado el experimento de manera independiente y manteniendo cada vez las misma condiciones. Luego, registrar los resultados de los lanzamientos en una tabla de frecuencias y observar a partir de ésta el comportamiento de las frecuencias relativas. Esto facilitaría que el alumno comprenda que es igualmente probable obtener {1, 2, 3, 4, 5, 6} en el siguiente lanzamiento. Otra estrategia podría ser simular el experimento en un software como Excel y graficar las frecuencias relativas para diferentes números de lanzamientos de un dado, observando que el valor al que se acerca cada vez más a 1/6, que es el valor, que por simetría del dado, se esperaría obtener.
- Subítem d): por medio de esta pregunta se busca que el profesor logre vincular este tipo de problema con el calculo de probabilidades de sucesos independientes, visualizando su importancia para el trabajo posterior (en educación secundaria) con la probabilidad condicional.

En la tabla 4.25, se analizan los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Determinar si al lanzar un dado los posibles resultados son independientes entre si.	Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en relación al lanzamiento de un dado. Desarrollo de competencias de análisis de resultados.
Elementos Lingüísticos	
Al lanzar un dado 10 veces, han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez ¿Qué número es más probable que salga? Resuelva el problema ¿Qué objetivo cree usted que tiene, en relación al currículo, el abordar este tipo de problema?	Determinar resultado del siguiente lanzamiento. Interpretación del espacio muestral. Significado de la probabilidad. Evaluar el conocimiento de la probabilidad asociada a sucesos independientes.

¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Justifique su elección y explique como lo utilizaría. ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?	Evaluar el conocimiento de los contenidos matemáticos involucrados en la resolución del problema. Evaluar el conocimiento del currículo. Evaluar el conocimiento de distintas estrategias que permiten resolver adecuadamente el problema. Evaluar el conocimiento ampliado del contenido.
Conceptos-Definición	
Experimento aleatorio Espacio muestral Significado de la probabilidad Equiprobabilidad	Lanzar un dado y observar los posibles resultados. Conjunto de posibles resultados, en este caso {1, 2, 3, 4, 5, 6} Grado de creencia de que un suceso ocurra; proporción de casos favorables entre posibles. Resultados de un experimento que tienen la misma probabilidad de ocurrir .
Propiedades	
Dado honesto (simetría del dado) Significados de la probabilidad Independencia de sucesos	No hay razones para preferir un caso sobre otro. La probabilidad es el cociente entre casos favorables y posibles. Además puede ser entendida como el límite de las frecuencias relativas. El cual al aumenta el número de ensayos, la frecuencia relativa se estabiliza poco a poco, observándose, lentamente, la tendencia a 1/6. Dos sucesos son independientes entre sí, si la ocurrencia de uno de ellos no afecta para nada a la ocurrencia del otro.
Procedimientos	
Construcción del espacio muestral asociado al lanzamiento de un dado. Cálculo de probabilidades	Enumeración sistemática de los resultados posibles en los distintos lanzamientos de un dado. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia aplicando la regla de Laplace. Estimación de probabilidades mediante estabilización de frecuencias.
Argumentos	
Deducciones informales basadas en la intuición. Simulación del experimento. Convención social que lleva a pensar que no hay razones para	Para justificar que los lanzamientos sucesivos no son equiprobables, se basa en la intuición que lleva a creer que el dado tiene memoria. Uso de la convergencia de los

suponer que el dado no tenga simetría.	resultados para mostrar empíricamente una propiedad. Justifica la equiprobabilidad, razonamiento en base a normas. Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 4.25 Configuración de objetos y significados del ítem 7

Como se puede observar (tabla 4.25) en la configuración epistémica, se movilizan elementos de significados ligados, principalmente, a conceptos y propiedades relacionadas, como ya se ha dicho, a la comprensión de la independencia de sucesos.

De este modo a partir de la configuración de objetos y significados presentada y de las investigaciones previas analizadas, en el capítulo 1, podemos anticipar, la aparición de conflictos de significado, como la recencia negativa o positiva, que han sido descritas por diversos autores, como Piaget e Inhelder (1951), y Kahnemman, Slovic y Tversky (1982), quienes lo atribuyen a la heurística de la representatividad (ver capítulo 1).

4.4 Elementos de significado evaluados. Validez de contenido del cuestionario.

En base al análisis *a priori* realizado para los ítems que componen el cuestionario en su versión definitiva, podemos afirmar que nuestro cuestionario presenta validez de contenido, entendida esta como una cuestión de grado, ya que no puede reducirse a cero o uno.

Según Muñiz (1994) para el estudio de la validez de contenido se debe probar que el instrumento constituye una muestra adecuada y representativa de todos los contenidos que con él se pretenden evaluar (tabla 4.26).

Es así como, de acuerdo a los análisis ya realizados de: significado de referencia global sobre la probabilidad que hemos adoptado, análisis del tratamiento otorgado a la probabilidad en los libros de texto y en el currículo, aspectos del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad seleccionados, valoración del juicio de expertos y análisis de la aplicación piloto del cuestionario, hemos informado sobre la validez de contenido de nuestro cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad.

CONTENIDOS	**ÍTEMS**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Experimento y suceso aleatorio	x	x	x	x		x	x
Espacio muestral	x	x	x	x	x	x	x
Posibilidad de ocurrencia (seguro, posible, imposible)		x	x		x		
Significados de la probabilidad	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo de probabilidad	x	x		x		x	x
Comparación de probabilidades		x		x		x	
Independencia de sucesos	x				x		x
Equiprobabilidad	x			x		x	x

Tabla 4.26 Contenidos que se espera movilizar en el conjunto de ítems que conforman el cuestionario del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad

Por otro lado, a partir del análisis *a priori* realizado, evidenciamos que los ítems que componen el cuestionario cubren todos los contenidos seleccionados inicialmente (tabla 4.1). Además, de evaluar otros contenidos secundarios que han sido explicitados en las configuraciones de objetos y significados correspondientes para cada ítem. Del mismo modo a partir dicho análisis, identificamos los elementos de significados presentes en la resolución de cada uno de los ítems, a través de los cuales podemos asegurar la validez de contenido. Por último, el realizar este tipo de análisis nos permitió anticiparnos a los posibles conflictos de significado.

CAPÍTULO 5
EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ACTIVO SOBRE PROBABILIDAD

5.1 Presentación

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos en la aplicación de la versión definitiva del Cuestionario CDM-Probabilidad, cuyo proceso de construcción ha sido descrito en el capítulo 4.

Así, a partir de las respuestas dadas por un grupo de 93 profesores de educación primaria en activo a los distintos ítems que constituyen el cuestionario, pretendemos analizar los diferentes tipos de conocimientos didácticos-matemáticos puestos en juego en la resolución de las 7 situaciones problemáticas que conforman el cuestionario en su versión definitiva. Para llevar a cabo tal análisis hemos estructurado este capítulo en tres secciones, que a su vez contienen varios apartados. La primera corresponde a la presentación de este capítulo. En la segunda se describen aspectos relacionados con la metodología, además de realizar una descripción de los sujetos participantes, así como de los materiales y procedimientos empleados en la aplicación del cuestionario. Por último, en la tercera sección se realiza, primeramente, un análisis de corte cuantitativo de los resultados globales de la aplicación del cuestionario, que contempla aspectos tales como: el análisis de la puntuación total del cuestionario, análisis de la fiabilidad del cuestionario, análisis del índice de dificultad de los ítems, análisis de discriminación de los ítems y análisis de los resultados globales de acuerdo con las características de los sujetos. Para finalizar con un análisis en detalle, desde una perspectiva mixta, de los resultados según los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se pretende evaluar a través de cada uno de los distintos ítems y subítems que componen el Cuestionario CDM-Probabilidad.

5.2 Método

Como ya mencionamos en el capítulo 2, esta investigación es de tipo exploratorio y su enfoque metodológico es mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009; Johnson y Onwuegbuzie, 2004) ya que considera el análisis de variables cuantitativas (por medio de la variable "grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas") y cualitativas (por medio del análisis de los diferentes tipos de argumentos, justificaciones, errores, dificultades, etc.), para evaluar ciertos aspectos de los distintos tipos de conocimientos que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático.

5.2.1 Descripción de los sujetos participantes

Los sujetos a quienes se aplicó el cuestionario son 93 profesores en activo de educación primaria que se encuentran dictando clases de matemática en los distintos cursos de primaria (1º a 6º año) pertenecientes a distintos tipos de establecimientos: municipales (33,3%), particulares subvencionados (59,1%) y particulares pagados (7,5%) como se observa en la figura 5.1.

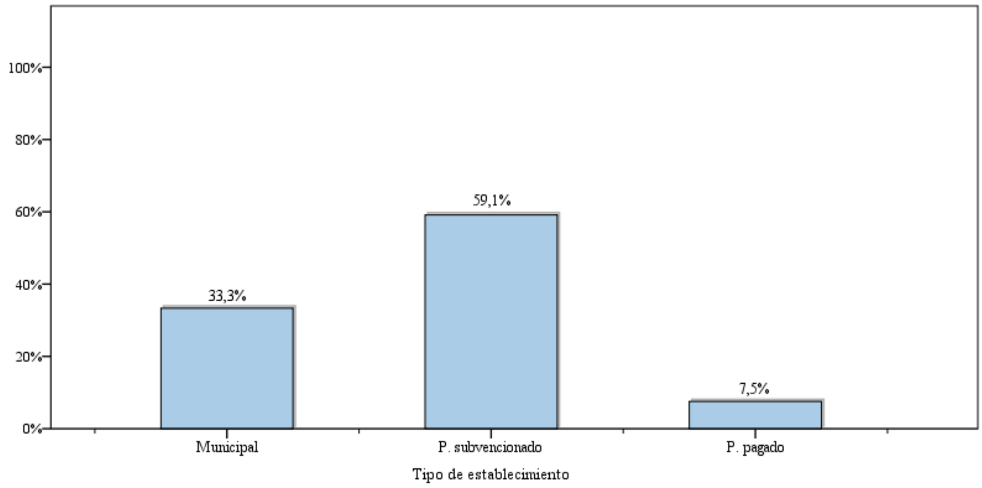


Figura 5.1 Distribución de los profesores participantes según tipo de establecimiento en el que se desempeñan

En cuanto a la distribución de los profesores según género (figura 5.2) hay 68 mujeres (73,1%) y 25 hombres (26,9%).

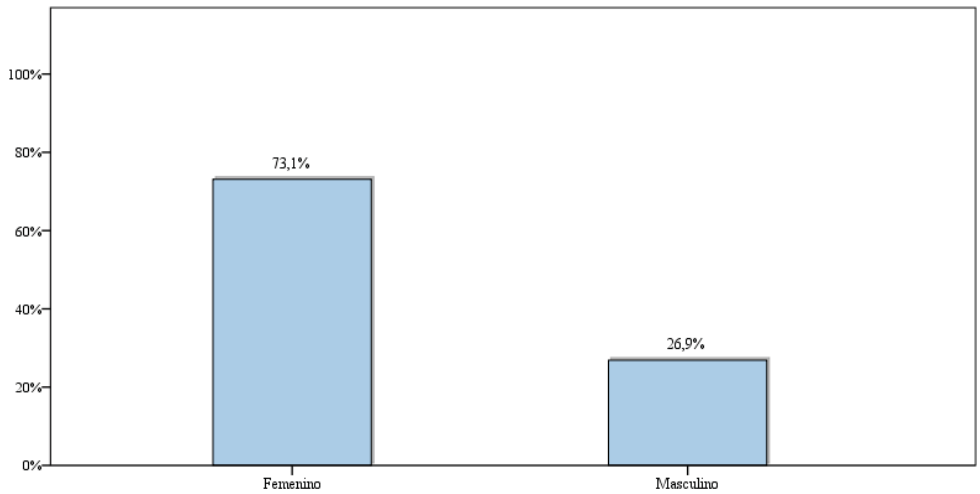


Figura 5.2 Distribución de los profesores participantes según género

Por otro lado, en la figura 5.3 podemos observar que de los 93 profesores participantes, 71 son profesores de educación primaria sin especialidad (76,3%), 14 son profesores de educación primaria con especialidad en matemática (15,1%) y 8 son profesores de educación primaria con otra especialidad (8,6%).

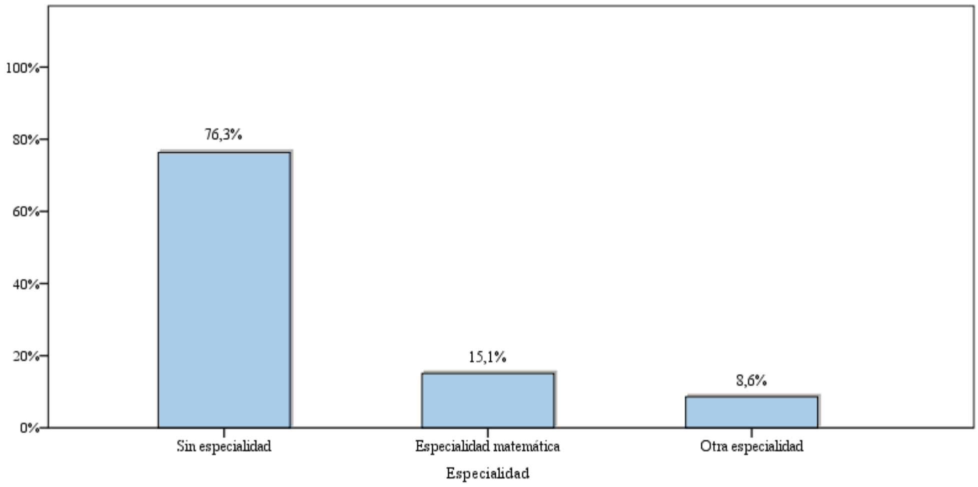


Figura 5.3 Distribución de los profesores participantes según especialidad

En lo que a años de experiencia se refiere, como podemos observar en la figura 5.4, la gran mayoría de los profesores participantes (46,2%) tiene menos de 3 años de experiencia enseñando matemática en educación primaria. Mientras que un 21,5% tiene entre 3 y 5 años de experiencia, un 17,2% tiene entre 5 y 10 años de experiencia y tan solo un 15,1% tiene más de 10 años de experiencia.

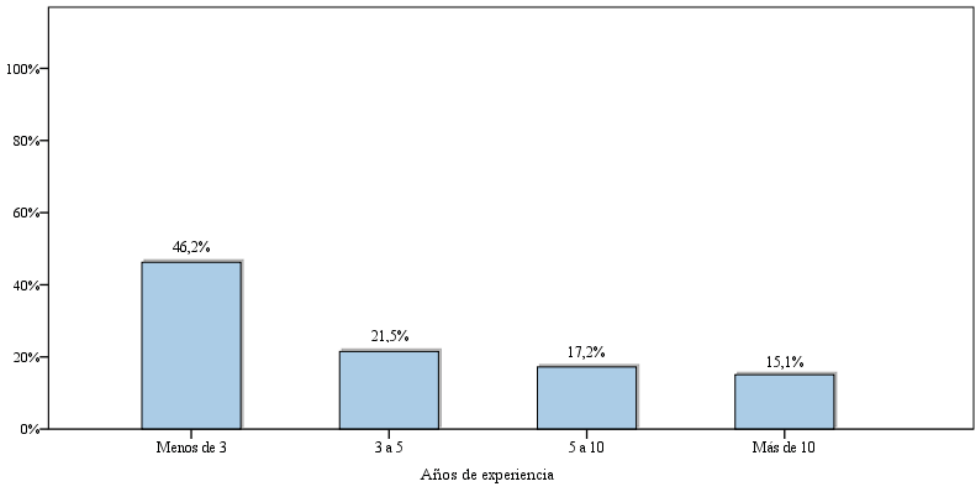


Figura 5.4 Distribución de los profesores participantes según años de experiencia

Otro dato de interés en relación a las características de los profesores participantes es que al preguntarles *¿cuán preparado se siente para enseñar probabilidad?* un 5,4% declara sentirse muy preparado, un 60,2% medianamente preparado y un 34,4% no se siente preparado para enseñar probabilidad. Sin embargo, al preguntarles si *¿enseña el contenido de probabilidad en sus cursos?* un 68,8% responde que sí, un 28% que no lo enseña y un 3,2% no responde.

Finalmente, se les preguntó si durante su formación inicial como profesores de educación primara tuvieron cursos disciplinares sobre probabilidad: un 31,2% afirma que sí tuvo cursos disciplinares sobre probabilidad, mientras que un 68,8% declara no tener formación al respecto. Así mismo, se les preguntó si recibieron, también durante su formación inicial, cursos sobre didáctica de la probabilidad, frente a lo cual nos encontramos que el 100% de los profesores participantes declara no haber tenido cursos sobre didáctica de la probabilidad durante su formación inicial.

Como se puede observar el grupo de profesores en activo al cual se aplicó el cuestionario tiene características bastante heterogéneas, lo que nos permitirá formarnos una idea adecuada en relación a cómo es el conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores de primaria en activo para enseñar probabilidad.

5.2.2 Material y procedimientos

El material utilizado para recoger los datos es la versión final del Cuestionario CDM-Probabilidad sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor para enseñar probabilidad (Anexo 4), cuyo proceso de diseño y construcción se describe en el capítulo 4.

Para la aplicación del cuestionario se prepararon cuatro versiones (A, B, C y D) en las que la única diferencia es el orden en que se presentan los distintos ítems, con el propósito de evitar que los últimos ítems quedaran con un menor número de respuestas, ya fuese producto de la extensión del cuestionario o del cansancio de los sujetos.

La toma de datos estuvo a cargo del investigador responsable de esta tesis, quien aprovechó la instancia del Seminario-Taller “Enseñanza de la probabilidad en la educación básica” cuyo propósito era discutir y analizar los principales aspectos que plantean los nuevos referentes curriculares nacionales en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en la educación primaria. De este modo, se aprovecho la instancia para invitar a participar de este estudio a los profesores asistentes, los cuales provenían de distintos tipos de establecimientos educacionales (municipales, particulares subvencionados y particulares pagados) en los que actualmente se desempeñan realizando clases de matemática en educación primaria. De la totalidad de los profesores asistentes, 93 accedieron a participar de la aplicación del Cuestionario CDM-Probabilidad.

Antes de iniciar la aplicación del cuestionario se procedió a explicar el propósito de éste, además de señalar que el cuestionario no tendría ningún efecto sobre los participantes, y que sus respuestas son confidenciales y serán utilizadas sólo con fines académicos y de investigación. Señalado lo anterior, se solicitó a los profesores que aceptaron participar de la aplicación del cuestionario, que firmaran un consentimiento informado (Anexo 3) mediante el cual manifestaban participar de la aplicación del cuestionario. Es importante señalar que todos los profesores aceptaron participar voluntariamente y con una buena disposición e interés de colaborar con el estudio. Posterior a la firma del consentimiento informado, se entregó un ejemplar del Cuestionario CDM-Probabilidad a cada profesor y se dio lectura a las instrucciones en las que, entre otras cosas, se señalaba que debían responder en forma individual utilizando solo lápiz y papel, y que disponían de 1 hora y 30 minutos para contestar a las preguntas planteadas. Además, se hizo especial hincapié en que debían explicar y argumentar cada una de sus respuestas.

Una vez recogidos los datos, éstos se codificaron, se registraron y analizaron utilizando el paquete estadístico SPSS versión 21.

5.3 Análisis de los resultados sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad

En este apartado presentamos el análisis mixto de los resultados obtenidos por los 93 profesores en el cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. Para ello, hemos organizado este apartado en tres secciones (figura 5.5), la primera referida a un estudio cuantitativo de los resultados globales. La segunda sección presenta un análisis de los resultados globales de acuerdo con las características de los sujetos, es decir, se busca medir el efecto de las variables: “especialidad”, “años de experiencia”, “dependencia del establecimiento” y “género” en el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad. Por último, en la tercera sección se presenta un análisis mixto (cualitativo-cuantitativo) de los resultados para cada uno de los ítems del cuestionario, centrado los distintos aspectos vinculados a los componentes del conocimiento didáctico-matemático que se busca evaluar.

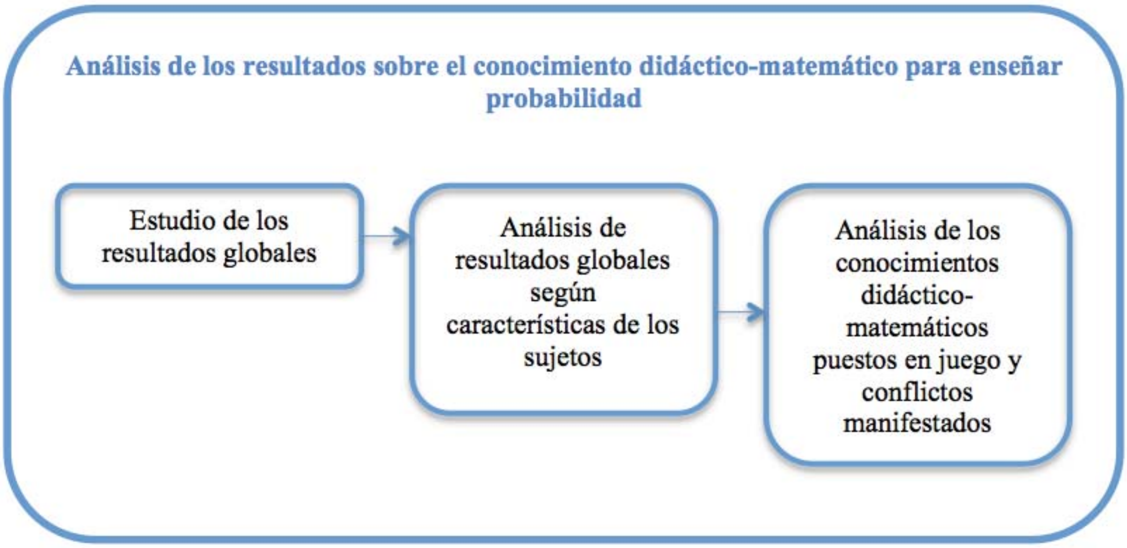


Figura 5.5 Fases del análisis de los resultados sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en educación primaria

Para realizar estos análisis, primeramente hemos realizado la codificación de las variables involucradas. En el caso de la variable cuantitativa "grado de corrección de las respuestas" hemos asignado las siguientes puntuaciones: "2" si la respuesta es correcta, "1" si la respuesta es parcialmente correcta, y "0" si la respuesta es incorrecta. Los criterios para definir a cuál de estas tres categoría pertenece la respuesta se ha explicitado por medio de una rúbrica que se presenta en el Anexo 5.

En el caso de las variables cualitativas que nos interesa analizar, hemos considerado: el tipo de conflicto puesto de manifiesto en la solución del ítem y el tipo de conocimiento puesto en juego en las respuestas, así como el tipo de justificación presentado en las respuestas. Para cada una de estas variables cualitativas se ha definido una serie de valores que son propios de cada ítem y que daremos a conocer en la medida que se presenten los análisis correspondientes.

5.3.1 Análisis de los resultados globales

A través del análisis de los resultados globales pretendemos valorar el grado de dificultad de los ítems, así como la fiabilidad del cuestionario. Para ello, comenzamos estudiando la puntuación total del cuestionario, posteriormente analizamos la fiabilidad del cuestionario y el índice de dificultad de los ítems que lo componen, para terminar con el análisis del índice de discriminación de los ítems.

5.3.1.1 Análisis de la puntuación total del cuestionario

Para el análisis de la puntuación total del cuestionario, se categorizaron las respuestas dadas por los 93 profesores según su grado de corrección, asignándoles, como ya se ha indicado anteriormente, las siguientes puntuaciones: "2" si la respuesta es correcta, "1" si la respuesta es parcialmente correcta, y "0" si la respuesta es incorrecta o no contesta. De acuerdo con las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas, es posible obtener una puntuación máxima de 44 puntos en el cuestionario, puesto que éste se encuentra compuesto por un total de 22 subítems.

En la tabla 5.1 se muestra el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los profesores de primaria en el cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. A partir de ella podemos observar que los puntajes totales fluctúan entre 1 y 28 puntos, de lo que se desprende que no hay ningún profesor que haya resuelto correctamente el cuestionario en su totalidad. Además, se observa que la puntuación media es de 10,92 lo cual es muy bajo si consideramos que las puntuaciones totales del cuestionario pueden variar de 0 a 44 puntos, dado que dicha puntuación considera tanto las respuestas correctas como las parcialmente correctas.

	Estadístico	**Error típ.**
Media	10,92	0,560
Mediana	11	
Moda	10	
Desviación típica	5,398	
Varianza	29,136	
Asimetría	0,489	0,250
Curtosis	0,595	0,495
Mínimo	1	
Máximo	28	
Rango	27	
Recuento	93	
Percentiles		
25	7	
50	11	
75	14,5	

Tabla 5.1 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales

Por otro lado, los estadísticos descriptivos de la tabla 5.1 nos muestran que el puntaje que tuvo mayor frecuencia fue de 10 puntos, mientras que el coeficiente de asimetría de Fisher de 0,489 deja de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales a la derecha de la media, es decir, que los puntajes totales distribuyen unilateralmente.

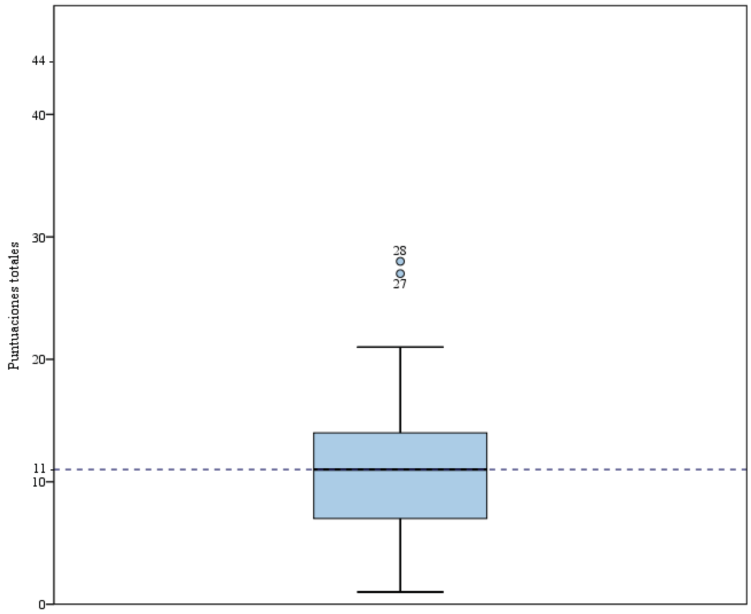


Figura 5.6 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media del cuestionario

En el *box plot* de la figura 5.6 se puede observar que la mediana se encuentra ligeramente más cercana al tercer cuartil que al primero, lo que implica que los valores de las puntuaciones totales se encuentran ligeramente más concentradas en la zona superior del cajón. Por otro lado, las amplitudes de los bigotes superior e inferior son similares, lo que nos habla de cierta similitud entre los extremos de la distribución de los puntajes totales.

Además se observa la presencia de dos *outliers* que corresponden a observaciones extremas que se alejan del grueso de los datos, en este caso 2 profesores que obtuvieron una puntuación total de 27 y 28 puntos, de un total de 44 puntos posibles.

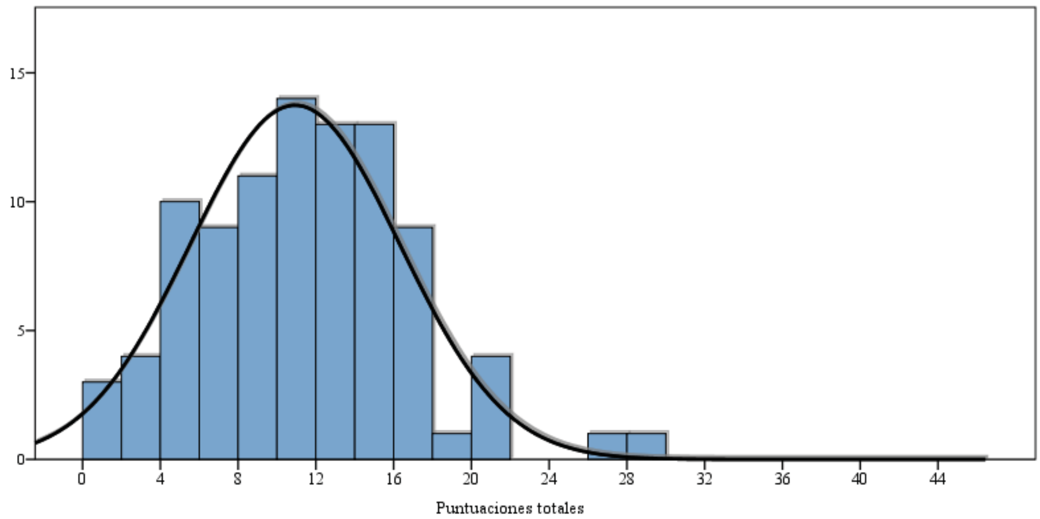


Figura 5.7 Puntuaciones totales en el cuestionario

Asimismo, en el histograma de frecuencias de la figura 5.7 se observa que las puntuaciones totales se concentran, mayoritariamente, en torno a la puntuación media de los resultados que es de 10,92 con una desviación típica de 5,398 puntos. Por otro lado, a partir del histograma se observa que las puntuaciones totales presentan una distribución normal, para estar seguro de esto y poder así realizar contrastes posteriores, nos hemos cerciorado de que las puntuaciones totales distribuyen normal por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov con corrección de la significación de Lilliefors que se muestra en la tabla 5.2.

	Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors		
	Estadístico	gl	Sig.
Total	0,055	93	0,200

Tabla 5.2 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales

A partir de la tabla se observa que el valor p es mayor que 0,05 por tanto, se concluye que las puntuaciones totales distribuyen normal.

La tabla 5.3 muestra las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los profesores que rindieron el cuestionario.

Puntajes totales	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1	3	3,2	3,2
2	2	2,2	5,4
3	2	2,2	7,5
4	2	2,2	9,7
5	8	8,6	18,3
6	4	4,3	22,6
7	5	5,4	28,0
8	5	5,4	33,3
9	6	6,5	39,8
10	8	8,6	48,4
11	6	6,5	54,8
12	7	7,5	62,4
13	6	6,5	68,8
14	6	6,5	75,3
15	7	7,5	82,8
16	4	4,3	87,1
17	5	5,4	92,5
19	1	1,1	93,5
20	2	2,2	95,7
21	2	2,2	97,8
27	1	1,1	98,9
28	1	1,1	100,0
Total	93	100,0	

Tabla 5.3 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del cuestionario

A partir de la tabla 5.3 es posible apreciar que tan solo 2 profesores (2,15%) obtuvieron una puntuación de 27 y 28 puntos que es ligeramente superior al 50% de la puntuación total del cuestionario. Mientras que un 95,7% de los profesores obtuvo una puntuación inferior al 50% de la puntuación total del cuestionario. Las puntuaciones totales obtenidas se concentran, mayoritariamente, entre los 9 y 15 puntos.

Los datos y gráficos expuestos nos indican, a nivel general, que los profesores de primaria a los que se aplicó el cuestionario presentan grandes dificultades en relación al conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. Dificultades que serán analizadas en detalle en los apartados 5.3.2 y 5.3.3.

5.3.1.2 Análisis de la fiabilidad del cuestionario

Este cuestionario busca evaluar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad por medio de las respuestas dadas por el grupo de profesores a los siete ítems que lo conforman, por lo que se ha realizado el análisis en base a las respuestas obtenidas ya que éstas son observables. De este modo, en base a los conocimientos puestos en juego en las respuestas a los ítems, es posible inferir aspectos del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad que es un concepto que no podemos observar de manera directa. Por esta razón se requiere que el Cuestionario CDM-Probabilidad sea un instrumento fiable que permita realizar inferencias útiles sobre lo que buscamos medir. Dado lo anterior, resulta necesario analizar la fiabilidad, entendida como la estabilidad en las puntuaciones que el cuestionario proporciona si este fuera administrado en repetidas ocasiones al mismo grupo de profesores. Con este propósito hemos aplicado el coeficiente alfa de Cronbach, pues este constituye una forma de acercarse a la fiabilidad. Más que la estabilidad de las medidas, el coeficiente alfa de Cronbach refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test, por tanto es un indicador de la consistencia interna del test (Muñiz, 1994).

El valor obtenido para el *alfa* de Cronbach, para las puntuaciones totales obtenidas en los 7 ítems por el grupo de 93 profesores, es de $\alpha = 0{,}760$. Este valor nos sugiere una fuerte correlación, sin embargo, si lo interpretamos como un índice de fiabilidad el valor no es excesivamente elevado, pero si es lo suficiente elevado para nuestro propósito, puesto que el cuestionario no es homogéneo en cuanto a la variedad de aspectos y contenidos que se pretenden evaluar.

5.3.1.3 Análisis del índice de dificultad de los ítems

El índice de dificultad de cada uno de los ítems es entendido como la proporción entre "número de sujetos que aciertan el ítem/número de sujetos que han intentado resolver el ítem" (Muñiz, 1994). Dicho índice de dificultad tomará entonces valores entre 0 y 1, donde 0 indica que el subítem tiene un alto grado de dificultad, mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de máxima facilidad, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan. Para el cálculo del índice de dificultad clasificamos las respuestas en correctas e incorrectas, las respuestas en blanco no se consideraron. De este modo fue posible visualizar qué situaciones problemáticas resultaron más fáciles o más difíciles para este grupo de profesores.

En la tabla 5.4 se presentan los índices de dificultad para cada uno de los ítems y subítems que componen el cuestionario.

Ítem		Índice de dificultad	%
1	a)	0,069	6,9
	b)	0,301	30,1
	c)	0,000	0,0
	d)	0,300	30,0
	e)	0,079	7,9
2	a)	0,402	40,2
	b)	0,013	1,3
	c)	0,014	1,4
	d)	0,167	16,7
3	a)	0,061	6,1
	b)	0,031	3,1
	c)	0,043	4,3
4	a)	0,330	33,0
	b)	0,027	2,7
	c)	0,044	4,4
	d)	0,048	4,8
5		0,141	14,1
6		0,622	62,2
7	a)	0,040	4,0
	b)	0,040	4,0
	c)	0,030	3,0
	d)	0,000	0,0
Media: 0,1273			

Tabla 5.4 Índice de dificultad de los ítems del cuestionario

En base a la tabla 5.4 podemos observar que, en general, la mayoría de los ítems presentaron un nivel de dificultad alto que oscila entre 0,0 a 0,167 o bien de 0% a 16,7%, siendo los ítems y subítems que mayor dificultad presentaron:

- Subítem 1c): referido al conocimiento del contenido especializado sobre la independencia de sucesos y del significado laplaciano y frecuentista de la probabilidad, cabe señalar que este subítem resultó extremadamente difícil para los profesores;
- Subítem 7d): referido al conocimiento ampliado del contenido resultó muy difícil para los profesores, pues ninguno de ellos lo contestó.
- Subítem 2b): sobre el conocimiento del contenido especializado en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple;

- Subítem 2c): sobre el conocimiento del contenido en relación a los estudiantes;
- Subítem 4b): sobre el conocimiento del contenido especializado en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales en un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables;
- Subítem 7c): sobre el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace;
- Subítem 3b): referido al conocimiento del contenido especializado sobre la comprensión del concepto de suceso seguro;
- Subítem 7a): referido al conocimiento común del contenido sobre independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades y regla de Laplace;
- Subítem 7b): referido al conocimiento del contenido en relación con el currículo para los contenidos de independencia de sucesos, cálculo de probabilidades y regla de Laplace;
- Subítem 3c): referido a el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza del concepto de suceso seguro;
- Subítem 4c): referido al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables;
- Subítem 4d): referido al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza del cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables;
- Subítem 3a): referido al conocimiento común del contenido sobre el concepto de suceso seguro;
- Subítem 1a): referido al conocimiento común del contenido sobre independencia de sucesos y del significado laplaciano y frecuentista de la probabilidad;
- Subítem 1e): referido al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza de la independencia de sucesos;
- Ítem 5: referido al conocimiento común del contenido y al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre la independencia de sucesos;
- Subítem 2d): referido al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza sobre el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple.

Por su parte, los subítems que presentaron una dificultad moderada ó dificultad media que oscila entre 0,301 a 0,402 (de 30,1% a 40,2%), son:

- Subítems 1b) y 1d): referidos al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre la independencia de sucesos;
- Subítem 4a): referido al conocimiento común del contenido y al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables;
- Subítem 2a): referido al conocimiento común del contenido sobre el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple.

Por último, el ítem que presentó menor dificultad (62,2%) es el ítem 6 referido al conocimiento común del contenido y conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre comparación de probabilidades y la noción de juego equitativo.

A partir de la tabla 5.5 que muestra el resumen estadístico de los índices de dificultad y de la figura 5.8 que presenta la distribución y la media de los índices de dificultad obtenidos para los distintos ítems por los profesores de primaria, se puede observar que el cuestionario presentó un nivel de dificultad bastante alto que osciló entre un 0% y un 62%, con un promedio de un 12,73%. Además, dado que la mediana no se ubica en el centro del *box plot* es posible afirmar que la distribución de los índices es bastante asimétrica y que los valores de los índices de dificultad se encuentran más concentrados en la zona inferior del *box plot*, en los valores más bajos. Por otro lado, la amplitud de los bigotes superior e inferior son bastante diferentes, lo que indica que los extremos de la distribución son distintos, hay índices de un valor un poco más alto que se alejan del grueso de los datos.

	Estadístico	**Error típ.**
Media	0,1273	0,0358
Mediana	0,0480	
Moda	0,0400	
Desviación típica	0,1641	
Varianza	0,0270	
Asimetría	1,7400	0,5010
Curtosis	2,6980	0,9720
Mínimo	0,0000	
Máximo	0,6200	
Rango	0,6200	
Recuento	21	
Percentiles		
25	0,0305	
50	0,0480	
75	0,2335	

Tabla 5.5 Estadísticos descriptivos de los índices de dificultad

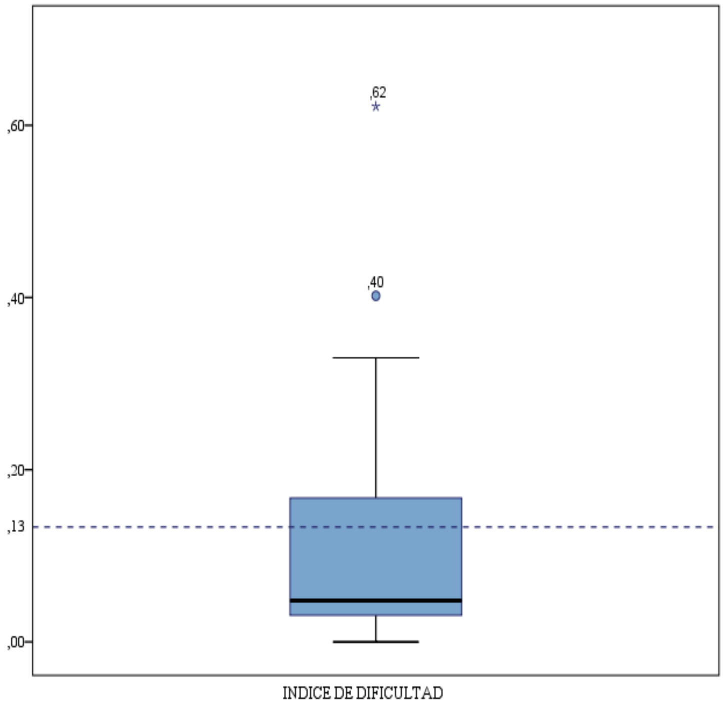


Figura 5.8 Distribución y media de los índices de dificultad

Por último a partir de la tabla 5.5 y de la figura 5.8 se puede observar que existen dos *outliers* que denotan los índices de menor dificultad, asimismo se observa que la distribución de los datos tiene, marcadamente, una mayor concentración en los índices de dificultad bajos, lo que muestra que el cuestionario resultó bastante difícil para los profesores.

5.3.1.4 Análisis del índice de discriminación de los ítems

Para determinar el grado en que cada uno de los ítems está midiendo lo mismo que el cuestionario globalmente, es decir, el grado en que contribuye a la homogeneidad o consistencia interna del test, se ha considerado el índice de homogeneidad o discriminación de los ítems como la correlación de Pearson entre las puntuaciones de los sujetos en el ítem y las puntuaciones en el total del test (Abad, Garrido, Olea y Ponsoda, 2006).

Dado que el cuestionario sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad, está conformado por distintos subítems referidos a distintos componentes del conocimiento didáctico-matemático, es que se ha optado por subdividir el cuestionario en 6 subtest, uno para cada aspecto evaluado, y de este modo obtener el índice de discriminación a partir de la relación de las puntuaciones directas del subtest en concreto.

Así, las tablas 5.6 a 5.9 presentan los índices de discriminación obtenidos para cada uno de los subtest en los que se ha subdividido el cuestionario. Es importante señalar que algunos subítems han sido considerados en más de un subtest, puesto que para su resolución se ponen en juego diversos aspectos vinculados con cada uno de los componentes que busca evaluar cada subtest.

En lo que se refiere a los ítems y subítems que buscan evidenciar el conocimiento común del contenido, en la tabla 5.6 se puede observar que éstos, en general, de acuerdo a lo planteado por Ebel (1965) discriminan de forma adecuada pues sus valores son superiores a 0,30, y oscilan entre 0,31 y 057. Es decir, el conjunto de ítems mediante los cuales se evaluó el conocimiento común del contenido sobre probabilidad, permite discriminar entre aquellos profesores que puntúan alto en el subtest sobre el conocimiento común del contenido y los que puntúan bajo.

Conocimiento común del contenido	
Subítem	Correlación de Pearson
1a)	0,31
2a)	0,57
3a)	0,39
4a)	0,54
5	0,41
6	0,53
7a)	0,41

Tabla 5.6 Índices de discriminación de los ítems y subítems referidos al conocimiento común del contenido

En relación a los subítems que evalúan el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, en la tabla 5.7 se puede observar que éstos presentan valores entre 0,36 y 0,57, lo que es un muy buen índice de discriminación, pues la gran mayoría presenta un índice superior a 0,40, a excepción del subítem 4c), lo que indicaría que el subítem discrimina muy bien. Por su parte el índice de discriminación del subítem 4c) al ser superior a 0,30 y de acuerdo con lo planteado por Ebel (1965), nos indica que este es un subítem que discrimina bien.

Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	
Subítem	Correlación de Pearson
1b)	0,45
1d)	0,57
2c)	0,36
4a)	0,48
4c)	0,48
5	0,44
6	0,44

Tabla 5.7 Índices de discriminación de los ítems y subítems referidos al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

Por su parte, los subítems que se refieren al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, presentan índices de discriminación superiores a 0,40, y que oscilan entre 0,45 y 0,79, como se puede observar en la tabla 5.8, por lo que podemos afirmar que tales subítems discriminan muy bien entre los profesores que puntúan alto en el subtest y los que puntúan bajo.

Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza	
Subítem	Correlación de Pearson
1e)	0,70
2d)	0,79
3c)	0,50
4d)	0,74
7c)	0,45

Tabla 5.8 Índices de discriminación de los subítems referidos al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Respecto a los subítems que buscan evidenciar el conocimiento del contenido especializado, estos presentan índices de discriminación superiores a 0,40, que oscilan entre 0,41 y 0,82, como se observa en la tabla 5.9, lo que evidencia que los distintos subítems que conforman este subtest permiten discriminar muy bien entre los profesores con puntuaciones altas y los con bajas puntuaciones.

Conocimiento del contenido especializado	
Subítem	Correlación de Pearson
1c)	0,41
2b)	0,76
3b)	0,82
4b)	0,71

Tabla 5.9 Índices de discriminación de los subítems referidos al conocimiento del contenido especializado

Por último, es importante señalar que en este análisis no se han incluido los subtest referidos al conocimiento del contenido en relación al currículo (subítem 7b) y al conocimiento ampliado del contenido (subítem 7d), puesto que dichos subtest se encuentran conformados por un solo subítem, por lo que resulta poco adecuado estimar el coeficiente de correlación de Pearson para el análisis de la discriminación de un solo subítem.

Finalmente, a partir de los índices de discriminación antes presentados, es posible observar que los distintos ítems y subítems que conforman los distintos subtest de nuestro cuestionario presentan un alto poder discriminativo, es decir, cada uno de ellos permiten contribuir de forma adecuada a diferenciar entre aquellos profesores que han obtenido una elevada puntuación en el cuestionario y aquellos cuya puntuación ha sido más baja.

5.3.2 Análisis de los resultados globales de acuerdo con las características de los sujetos

En este apartado se presenta el análisis de los resultados globales de acuerdo con las características de los profesores que respondieron el cuestionario. Así, con este tipo de análisis se pretende estudiar la posible dependencia de las puntuaciones totales obtenidas en el Cuestionario CDM-Probabilidad con las variables:

- "Especialidad": profesor de primaria sin especialidad, profesor de primaria con especialidad matemática, profesor de primaria con otra especialidad.
- "Años de experiencia": menos de 3 años, entre 3 y 5 años, entre 5 y 10 años, más de 10 años.
- "Dependencia del establecimiento" donde los profesores que han respondido el cuestionario se desempeñan: municipal, particular subvencionado, particular pagado.
- "Género": mujer, hombre.

Para realizar este tipo de análisis, se utilizó el análisis de varianza (ANOVA) con un factor, ya que éste busca explicar el efecto de una o más variables independientes sobre la variable dependiente. Es decir, en qué medida las variables "especialidad", "años de experiencia" y "dependencia del establecimiento" tienen un efecto sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que manifiestan tener los profesores de educación primaria a quienes se ha aplicado el cuestionario. En el caso de la variable "género" se realizó la prueba t-Student para analizar tal asociación, dado que contamos solo con dos categorías. A continuación se presenta el análisis del efecto de las variables indicadas sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en la educación primaria.

5.3.2.1 Efecto de la variable "especialidad" sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad

Con el propósito de analizar el comportamiento de las puntuaciones totales en el cuestionario en relación con la variable "especialidad" de los profesores que respondieron el cuestionario, nos centraremos, primeramente, en comparar las distribuciones de las puntuaciones totales en cada uno de los grupos que se presentan en la figura 5.9.

A partir de la figura 5.9 se observa que las medianas para los dos primeros grupos (sin especialidad y con especialidad matemática) que conforman la variable "especialidad", se ubican ligeramente más cercanas al tercer cuartil, lo que nos indica que las puntuaciones totales para estos grupos se concentran ligeramente en la zona superior del *box plot*, a diferencia del tercer grupo (otra especialidad) en el que la mediana se ubica más cerca del primer cuartil.

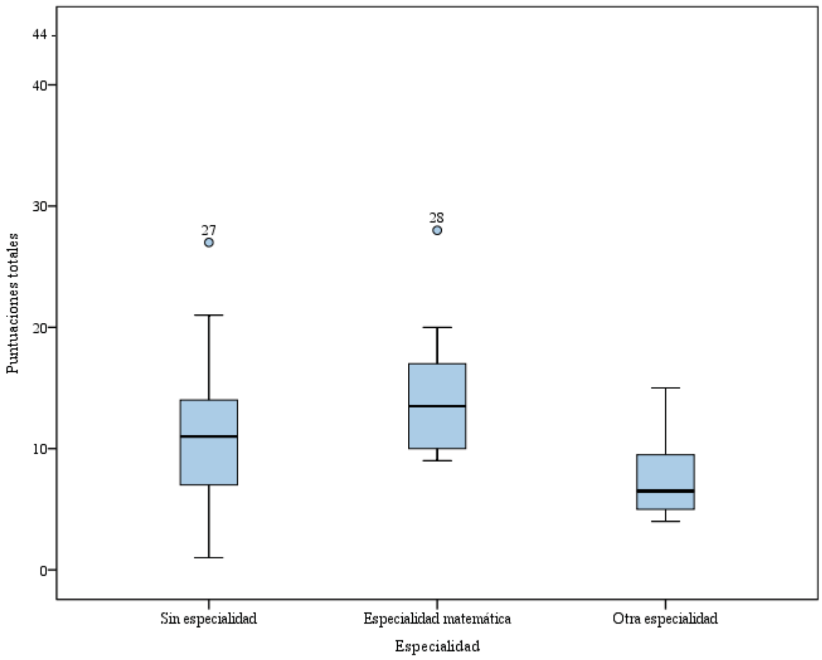


Figura 5.9 Distribución de las puntuaciones totales de los profesores participantes según especialidad

Además, si nos centramos en los valores mínimos o puntuaciones más bajas, podemos apreciar que aquellos profesores de educación primaria que tienen una especialidad distinta a la matemática son los que presentan las puntuaciones totales más bajas. Mientras que los profesores de educación primaria con especialidad matemática tienen la puntuación mínima y máxima más alta, quizás esto se deba a que durante su formación inicial algunos de ellos declaran haber tenido algún curso de probabilidad.

El análisis anterior se ha completado con un análisis descriptivo de los datos que se presenta en la tabla 5.10. De este modo se muestra el comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) dentro de cada grupo (profesores de educación primaria sin especialidad, profesores de educación primaria con especialidad matemática, profesores de educación primaria con otra especialidad).

Especialidad	**N**	**Media**	**Desviación típica**	**Error típico**	**Intervalo de confianza para la media al 95%**		**Mínimo**	**Máximo**
					Límite inferior	**Límite superior**		
Sin especialidad	71	10,62	5,319	0,631	9,36	11,88	1	27
Con especialidad matemática	14	14,36	5,183	1,385	11,36	17,35	9	28
Con otra especialidad	8	7,63	3,623	1,281	4,60	10,65	4	15
Total	93	10,92	5,398	0,560	9,81	12,04	1	28

Tabla 5.10 Descriptivos de las puntuaciones totales según especialidad

A partir de la tabla 5.10 podemos observar la dispersión de las medias, así como los límites superior e inferior para la media de cada grupo al 95% de confianza. Para analizar el efecto de la variable especialidad sobre las puntuaciones totales, hemos optado por aplicar ANOVA, por lo cual primeramente hemos resguardado que se cumplan las hipótesis iniciales para realizar un análisis de la varianza. Para ello, comprobamos primeramente la normalidad de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable “especialidad” por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk según corresponda.

Especialidad	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Sin especialdiad	0,055	71	0,200	0,981	71	0,338
Con especialidad matemática	0,162	14	0,200	0,874	14	0,048
Con otra especialidad	0,193	8	0,200	0,880	8	0,190

Tabla 5.11 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según especialidad

En la tabla 5.11 se muestran los resultados de la prueba de normalidad, en la que se observa que la distribución es normal puesto que el valor p es mayor que 0,05 en dos de los grupos que conforman la variable “especialidad” y en uno de ellos el nivel de significancia (0,048) se aleja de la normalidad, pero este alejamiento es muy leve por lo que se pude tolerar y aplicar de igual manera el análisis de varianza.

Por su parte, la tabla 5.12 muestra el estadístico de Levene que permite contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales. Dado que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 aceptamos la hipótesis de igualdad de varianzas, por lo que se concluye que en las poblaciones definidas para las tres categorías de la variable "especialidad", las varianzas de la variable puntuación total son iguales.

Estadístico de Levene	**gl1**	**gl2**	**Sig.**
0,855	2	90	0,429

Tabla 5.12 Prueba de homogeneidad de varianzas

Sin embargo, dado que nos interesa saber si los grupos tienen o no medias iguales, se ha construido la tabla 5.13 que muestra el análisis de varianza (ANOVA) de un factor.

	Suma de cuadrados	**gl**	**Media cuadrática**	**F**	**Sig.**
Inter-grupos	258,651	2	129,326	4,806	0,010
Intra-grupos	2421,822	90	26,909		
Total	2680,473	92			

Tabla 5.13 ANOVA de un factor

En la tabla 5.13 de resultado ANOVA podemos observar que el nivel crítico (Sig.) es menor que 0,05 por lo que se rechaza la igualdad de medias, es decir, existen diferencias significativas entre los distintos grupos de "especialidad" que muestran que las puntuaciones totales difieren según la especialidad de los profesores que han respondido el cuestionario.

5.3.2.2 Efecto de la variable "años de experiencia" sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad

Para analizar el comportamiento de las puntuaciones totales en el cuestionario según la variable "años de experiencia" de los profesores que respondieron el cuestionario, nos centraremos, primeramente, en comparar las distribuciones de las puntuaciones totales en cada uno de los grupos.

A partir de la figura 5.10 podemos observar que existen dos observaciones extremas en el grupo de profesores con menos de tres años de experiencia, lo que significa que existen dos profesores que obtuvieron una puntuación total por sobre la de los demás profesores de su grupo. Del mismo modo, en la figura se observa un *outlier* en el grupo de profesores que tienen entre 5 a 10 años de experiencia. Además, en la figura observamos que las medianas de las puntuaciones totales de los profesores con más de 3 años de experiencia, son ligeramente mayores que la mediana de los profesores con menos de 3 años de experiencia.

Por otra parte, se observa que a excepción de las puntuaciones totales de los profesores con 5 a 10 años de experiencia, en el resto de las distribuciones la mediana no se encuentra en el centro del *box plot*, lo que indica que la distribución de las observaciones no es simétrica. Además se puede apreciar que las medianas del primer, segundo y cuarto grupo de años de experiencia se encuentra bastante más cercanas al tercer cuartil que al primero. Esto significa que los valores de las puntuaciones totales se encuentran más concentrados en la zona superior del *box plot*.

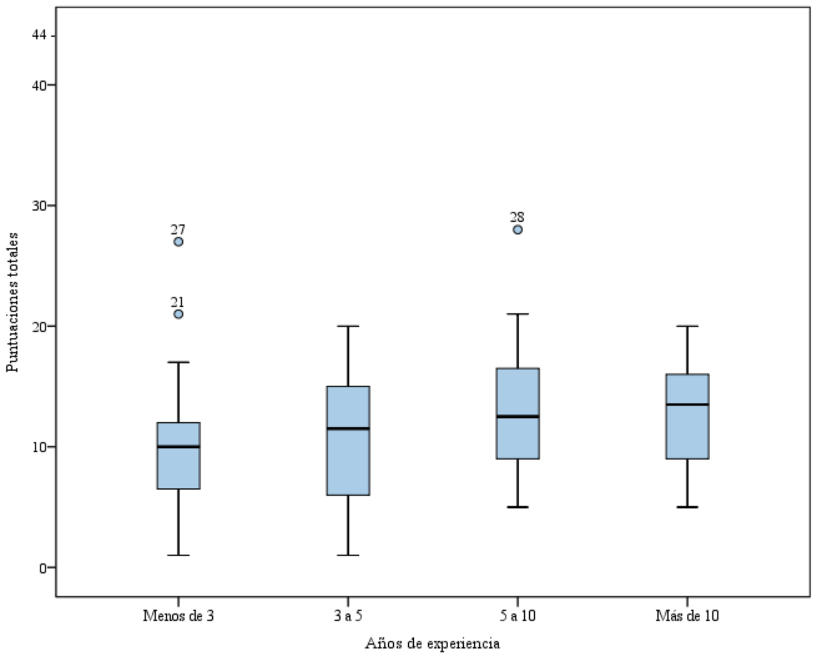


Figura 5.10 Distribución de las puntuaciones totales de los profesores participantes según años de experiencia

Como una manera de complementar el análisis de las distribuciones de las puntuaciones totales según "años de experiencia", se ha decidido complementar dicha información con un análisis descriptivo que se presenta en la tabla 5.14. Este análisis muestra el comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) dentro de cada grupo (menos de 3 años de experiencia, entre 3 y 5 años de experiencia, entre 5 y 10 años de experiencia, más de 10 años de experiencia).

Años de experiencia	**N**	**Media**	**Desviación típica**	**Error típico**	**Intervalo de confianza para la media al 95%**		**Mínimo**	**Máximo**
					Límite inferior	**Límite superior**		
Menos de 3 años	43	9,79	5,235	0,798	8,18	11,40	1	27
Entre 3 y 5 años	20	10,30	5,302	1,186	7,82	12,78	1	20
Entre 5 y 10 años	16	13,00	6,044	1,511	9,78	16,22	5	28
Más de 10 años	14	12,93	4,463	1,193	10,35	15,51	5	20
Total	93	10,92	5,398	0,560	9,81	12,04	1	28

Tabla 5.14 Descriptivos de las puntuaciones totales según años de experiencia

A partir de la tabla 5.14 podemos observar la dispersión de las medias, así como los límites superior e inferior para la media de cada grupo al 95% de confianza. Para analizar el efecto de la variable "años de experiencia" sobre las puntuaciones totales, hemos optado por aplicar el análisis de varianza, por lo cual primeramente hemos resguardado que se cumplan las hipótesis iniciales para realizar un análisis de la varianza (ANOVA). Para ello, comprobamos primeramente la normalidad de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "años de experiencia" por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk según corresponda.

Años de experiencia	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Menos de 3 años	0,106	43	0,200	0,951	43	0,064
Entre 3 y 5 años	0,183	20	0,077	0,944	20	0,282
Entre 5 y 10 años	0,129	16	0,200	0,937	16	0,314
Más de 10 años	0,107	14	0,200	0,972	14	0,901

Tabla 5.15 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según años de experiencia

En la tabla 5.15 se muestran los resultados de la prueba de normalidad, en la que se observa que la distribución es normal puesto que el valor p es mayor que 0,05.

La tabla 5.16 muestra el estadístico de Levene que permite contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales. Dado que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 aceptamos la hipótesis de igualdad de varianzas, por lo que se concluye que para las cuatro categorías de la variable "años de experiencia", las varianzas de la variable puntuación total son iguales.

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
0,446	3	89	0,721

Tabla 5.16 Prueba de homogeneidad de varianzas

Sin embargo, dado que nos interesa saber si los grupos tienen o no medias iguales, se ha construido la tabla 5.17 que muestra el análisis de varianza (ANOVA) de un factor.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	188,228	3	62,743	2,241	0,089
Intra-grupos	2492,245	89	28,003		
Total	2680,473	92			

Tabla 5.17 ANOVA de un factor

En la tabla 5.17 de resultado ANOVA podemos observar que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 por lo que se acepta la igualdad de medias, es decir, no existen diferencias significativas entre los grupos de "años de experiencia" que muestren que las puntuaciones totales difieren según los años de experiencia de los profesores que han respondido el cuestionario.

5.3.2.3 Efecto de la variable "dependencia del establecimiento" sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad.

Puesto que también nos interesa analizar el comportamiento de las puntuaciones totales en el cuestionario según el tipo de establecimiento en el que se desempeñan los profesores que respondieron el cuestionario, nos centraremos, primeramente, en comparar las distribuciones de las puntuaciones totales en cada uno de los grupos.

Una primera observación que se puede hacer a partir de la figura 5.11 es que existen dos *outlier* en los establecimientos particulares pagados y dos en los establecimientos municipales. Esto significa que existe un profesor que obtuvo un puntaje muy por debajo de los demás profesores y muy por encima de los profesores de su mismo grupo, en el caso del establecimiento particular. Mientras que en el caso del establecimiento municipal, existen dos profesores que obtuvieron puntajes por sobre los demás profesores de su mismo grupo.

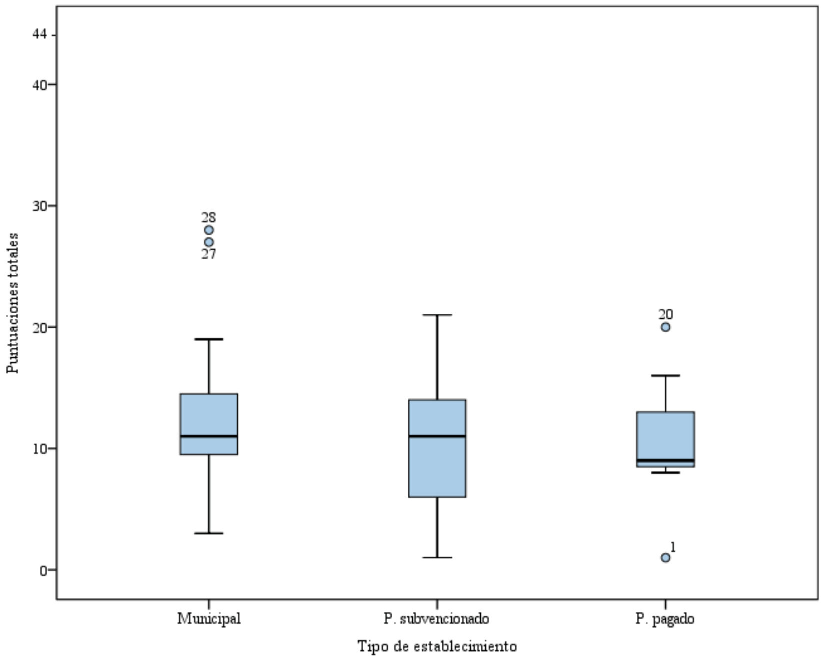


Figura 5.11 Distribución de los puntajes totales de los profesores participantes, según tipo de establecimiento en el que se desempeña

Por otra parte, en la figura 5.11 observamos que la mediana de las puntuaciones de los profesores pertenecientes a establecimientos particulares subvencionados y particulares pagados se encuentran por debajo de la mediana de las puntuaciones obtenidas por los profesores pertenecientes a establecimientos municipales, que corresponde aproximadamente a 11 puntos.

Además, el 50% central de las puntuaciones totales de los profesores de establecimientos municipales, se mueve en un intervalo de alrededor 5 puntos de ancho: entre aproximadamente los 10 y 15 puntos. Mientras que el 50% central de las puntuaciones de los profesores de establecimientos particulares subvencionados se mueve en un intervalo de alrededor 8 puntos de ancho: entre los 6 y 14 puntos, aproximadamente. En lo que respecta al 50% central de las puntuaciones de los profesores de establecimientos particulares pagados, estas se mueven en un intervalo de 4 puntos de ancho: entre los 9 y 12 puntos aproximadamente.

También podemos observar que la distribución de los puntajes de los profesores de establecimientos particulares subvencionados es bastante simétrica en torno a la mediana, no así las distribuciones de las puntuaciones totales para los profesores de establecimientos municipales y particulares pagados en los que las puntuaciones se encuentran concentradas, mayoritariamente, sobre la mediana.

Además de analizar las distribuciones de las puntuaciones totales según tipo de establecimiento, se ha realizado un análisis descriptivo del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) dentro de cada grupo (municipal, particular subvencionado, particular pagado), que se muestra en la tabla 5.18.

Tipo de establecimiento	**N**	**Media**	**Desviación típica**	**Error típico**	**Intervalo de confianza para la media al 95%**		**Mínimo**	**Máximo**
					Límite inferior	**Límite superior**		
Municipal	31	12,10	5,492	0,986	10,08	14,11	3	28
Particular subvencionado	55	10,33	5,253	0,708	8,91	11,75	1	21
Particular pagado	7	10,43	6,079	2,298	4,81	16,05	1	20
Total	93	10,92	5,398	0,560	9,81	12,04	1	28

Tabla 5.18 Descriptivos de las puntuaciones totales según tipo de dependencia

A partir de la tabla 5.18 podemos observar la dispersión de las medias así como los límites superior e inferior para la media de cada grupo al 95% de confianza. Para analizar el efecto de la variable "tipo de dependencia" sobre las puntuaciones totales, hemos optado por aplicar la tabla ANOVA, por lo cual primeramente hemos resguardado que se cumplan las hipótesis iniciales para realizar un análisis de la varianza (ANOVA). Para ello, comprobamos primeramente que la normalidad de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "tipo de dependencia" por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk según corresponda.

Tipo de dependencia	**Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors**			**Shapiro-Wilk**		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Municipal	0,152	31	0,065	0,897	31	0,006
Particular subvencionado	0,100	55	0,200	0,967	55	0,142
Particular pagado	0,242	7	0,200	0,936	7	0,601

Tabla 5.19 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según tipo de dependencia

En la tabla 5.19 se muestran los resultados de la prueba de normalidad, en la que se observa que la distribución es normal puesto que el valor p correspondiente es mayor que 0,05.

Por su parte, la tabla 5.20 muestra el estadístico de Levene que permite contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales. Dado que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 aceptamos la hipótesis de igualdad de varianzas, por lo que se concluye que en las poblaciones definidas para los tres tipos de dependencia, las varianzas de la variable puntuación total son iguales.

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
0,399	2	90	0,672

Tabla 5.20 Prueba de homogeneidad de varianzas

Sin embargo, dado que nos interesa saber si los grupos tienen o no medias iguales, se ha construido la tabla 5.21 que muestra el análisis de varianza (ANOVA) de un factor.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	63,940	2	31,970	1,100	0,337
Intra-grupos	2616,533	90	29,073		
Total	2680,473	92			

Tabla 5.21 ANOVA de un factor

En la tabla 5.21 de resultado ANOVA podemos observar que el nivel crítico (Sig.) es mayor que 0,05 por lo que se acepta la igualdad de medias, es decir, no existen diferencias significativas entre los grupos de dependencia que muestren que las puntuaciones totales difieren según el tipo de dependencia del establecimiento en el cual los profesores que han respondido el cuestionario se desempeñan.

5.3.2.4 Efecto de la variable "género" sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad

En el caso de la variable "género", a partir de la figura 5.12 podemos observar cómo se comportan las puntuaciones totales tanto en mujeres como en hombres. En el caso de las mujeres podemos observar que la mediana no está en el centro del *box plot*, por lo que la distribución de las puntuaciones totales no es simétrica. Además, se observan dos observaciones extremas en el grupo de las mujeres, lo que significa que dos de ellas obtuvieron puntuaciones por encima de las obtenidas por su grupo.

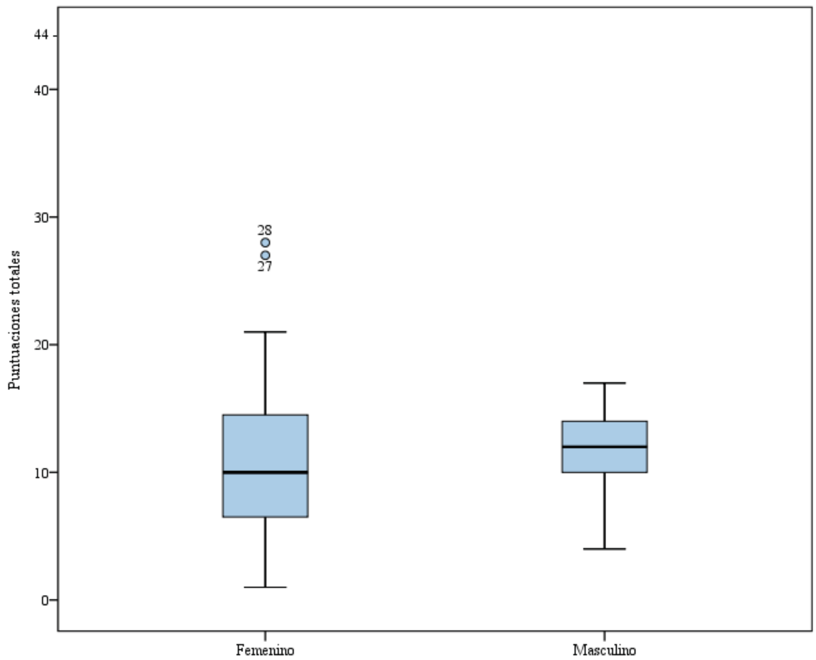


Figura 5.12 Distribución de las puntuaciones totales de los profesores participantes según género

Dado que la mediana se encuentra más cercana al primer cuartil, podemos deducir que los valores de las puntuaciones totales se encuentran más concentrados en la zona inferior del *box plot*, es decir, en los valores bajos. Mientras que en el caso de los hombres, se observa que las puntuaciones totales se mueven en un rango menor de valores y se encuentran más concentradas en torno a la mediana y de manera bastante simétrica.

Por otro lado, cabe señalar que las puntuaciones más altas fueron obtenidas por las mujeres, al igual que las puntuaciones más bajas, por lo que en este grupo se observa mayor dispersión en el rendimiento que en el caso de los hombres que contestaron el cuestionario.

La tabla 5.22, muestra un análisis descriptivo del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) dentro de cada grupo (mujer, hombre).

Género	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite superior		
Mujer	68	10,72	5,876	0,713	9,30	12,14	1	28
Hombre	25	11,48	3,853	0,771	9,89	13,07	4	17
Total	93	10,92	5,398	0,560	9,81	12,04	1	28

Tabla 5.22 Descriptivos de las puntuaciones totales según especialidad

A partir de la tabla 5.22 podemos observar la dispersión de las medias, así como los límites superior e inferior para la media de cada grupo al 95% de confianza. Para analizar el efecto de la variable “género” sobre las puntuaciones totales, hemos optado por aplicar la t-Student, por lo cual primeramente hemos resguardado que se cumplan los supuestos de normalidad y homocedasticidad. Para ello, comprobamos primeramente la normalidad de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable “género” por medio de la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk según corresponda.

Especialidad	Kolmogorov-Smirnov con corrección de Lilliefors			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Mujer	0,093	68	0,200	0,966	68	0,060
Hombre	0,150	25	0,148	0,929	25	0,082

Tabla 5.23 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales según género

En la tabla 5.23 se muestran los resultados de la prueba de normalidad, en la que se observa que la distribución es normal puesto que el valor p es mayor que 0,05.

Por su parte, la tabla 5.24 muestra el estadístico de Levene que permite contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales. Dado que el nivel crítico (Sig.) es menor que 0,05 rechazamos la hipótesis de igualdad de varianzas, por lo que se concluye que en las poblaciones definidas para la variable “género”, las varianzas de la variable puntuación total no son iguales.

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
4,688	1	91	0,033

Tabla 5.24 Prueba de homogeneidad de varianzas

Puesto que además nos interesa saber si los grupos tienen o no medias iguales, se ha construido la tabla 5.25 que muestra la prueba t-Student, pues por medio de ésta podemos analizar si existe una diferencia significativa entre las medias de las categorías mujer y hombre de la variable puntuaciones totales.

	t	**gl**	**Sig. (bilateral)**	**Diferencia de medias**	**Error típico de la diferencia**	**95% Intervalo de confianza para la diferencia**	
						Inferior	**Superior**
Se han asumido varianzas iguales	-0,599	91	0,550	-0,759	1,267	-3,276	1,757
No se han asumido varianzas iguales	-0,724	65,459	0,472	-0,759	1,050	-2,855	1,336

Tabla 5.25 Prueba t-Student

Dado que no se han asumido varianzas iguales, se han tomado el valor y la significación de t en la segunda fila de la tabla 5.25. Pues ésta nos da una corrección consistente para calcular t con unas distribuciones recortadas de sus puntuaciones extremas, con la finalidad de atenuar la dispersión. Es por esta razón que se pierden grados de libertad y el valor t resulta ligeramente menor. De este modo, dado que el estadístico t vale -0,724 (con 65,459 grados de libertad) y el valor p asociado es 0,472, que es mayor que 0,05, podemos afirmar que no hay asociación entre el género y las puntuaciones totales, es decir, no existen diferencias significativas entre los grupos de la variable "género" que muestren que las puntuaciones totales difieren según el género de los profesores que han respondido el cuestionario.

Finalmente, los análisis realizados sobre el efecto de las variables "especialidad", "años de experiencia", "dependencia establecimiento" y "género" sobre las puntuaciones totales en el cuestionario sobre conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en educación primaria, nos indican que no existe relación entre las variables "dependencia del establecimiento", "años de experiencia" y "género" y las puntuaciones totales obtenidas por este grupo de profesores en el cuestionario sobre conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en educación primaria. No obstante, la variable "especialidad" sí incide en las puntuaciones totales de los profesores, puesto que los profesores de educación primaria con especialidad matemática han obtenido una mejor puntuación en relación a los demás grupos.

5.3.3 Análisis de los tipos de conocimientos didáctico-matemáticos puestos en juego y conflictos manifestados en las respuestas a los ítems

En los apartados anteriores se analizaron cuantitativamente los resultados globales a la luz de la variable “grado de corrección de las respuestas”. De este modo se logró estudiar aspectos como: la distribución de las puntuaciones totales, la fiabilidad del cuestionario, el índice de dificultad de los ítems que lo componen, además del índice de discriminación de los ítems. Además, se analizaron los resultados obtenidos en función de las características generales del grupo de profesores al cual se aplicó el instrumento. El propósito de dicho análisis fue el detectar el posible efecto de las variables “dependencia del establecimiento”, “años de experiencia”, “especialidad” y “género” sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en la educación primaria. Además, lo anterior permitió enfocarse, principalmente, en los aspectos psicométricos del cuestionario, dejando de lado aspectos relacionados con los tipos de conocimientos y conflictos presentes en las respuestas.

En consecuencia, dado que el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad de los profesores de educación primaria en activo no es un conocimiento observable de manera directa, hemos decidido inferirlo a partir de las prácticas que realizan los profesores al dar respuesta a cada una de las distintas preguntas componen el Cuestionario CDM-Probabilidad, las cuales sí son observables, siempre que la recopilación de datos sea completa y fiable (Godino, 1996). Es bajo esta mirada que a continuación se analizan las respuestas otorgadas para cada una de las tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático que conforman el modelo CDM (Godino, 2009, Godino y Pino-Fan, 2013), así como sus subcategorías. Más concretamente, a partir de este análisis se pretende alcanzar nuestro objetivo general de *Evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo*.

En este apartado se presenta un análisis mixto vinculado a aspectos relacionados con los componentes del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad que nos interesa evaluar, es decir, aspectos relacionados con el conocimiento común del contenido; conocimiento ampliado del contenido; y conocimiento especializado, así como las cuatro subcategorías que componen este último. El análisis se realizó desde una perspectiva tanto cuantitativa como cualitativa para cada uno de los 7 ítems que componen el cuestionario.

Para el análisis cuantitativo de las respuestas otorgadas por los profesores para cada uno de los distintos componentes del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad, al igual que en los apartados anteriores, se consideró la variable "grado de corrección" asignado, tal como ya se ha indicado anteriormente, los valores: "2" si la respuesta es correcta, "1" si la respuesta es parcialmente correcta, y "0" si la respuesta es incorrecta o no responde (Ver Anexo 5).

En el caso del análisis cualitativo, se procedió a leer las respuestas, para luego agrupar aquellas que fueran similares y llegar así a categorizarlas por medio de un proceso cíclico e inductivo, característico del análisis cualitativo de datos (Buendía, Colás y Hernández, 1998). Una vez que se establecieron las principales categorías de las respuestas, se consideró un análisis de los conocimientos puestos en juego en las respuestas, así como los conflictos manifestados en las respuestas a los ítems y subítems, que dan lugar a respuestas parcialmente correctas o incorrectas. A partir de este análisis se ha obtenido información más descriptiva para cada una de las respuestas, lo que ha permitido describir, de mejor manera, los distintos tipos de errores, dificultades y argumentaciones presentes en el conocimiento didáctico-matemático que poseen estos profesores en relación con la probabilidad.

5.3.3.1 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento común del contenido.

Recordemos que el conocimiento común del contenido se refiere a aquellos conocimientos matemáticos que posee cualquier persona lo suficientemente instruida, es decir, que no son propios de la enseñanza, y que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones problemáticas propias del nivel educativo en el que se desempeña, en nuestro caso de probabilidad en la educación primaria.

Para analizar el conocimiento común del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo se han analizado las prácticas matemáticas presentes en las respuestas obtenidas a las distintas preguntas y situaciones problemáticas presentadas en los subítems 1a), 2a), 3a), 4a) y 7a), y en los ítems 5 y 6 del Cuestionario CDM-Probabilidad, que cubren los distintos contenidos explicitados en el capítulo 4. De acuerdo a lo planteado por Godino, Batanero y Font (2007), este conocimiento es inobservable, no obstante el conjunto de prácticas presentes en las respuestas de los profesores a las situaciones problemáticas planteadas permitirá obtener indicadores empíricos para la evaluación del conocimiento común del contenido. Para realizar el análisis de las respuestas a cada uno de los ítems y subítems se han seguido las siguientes fases (figura 5.13).

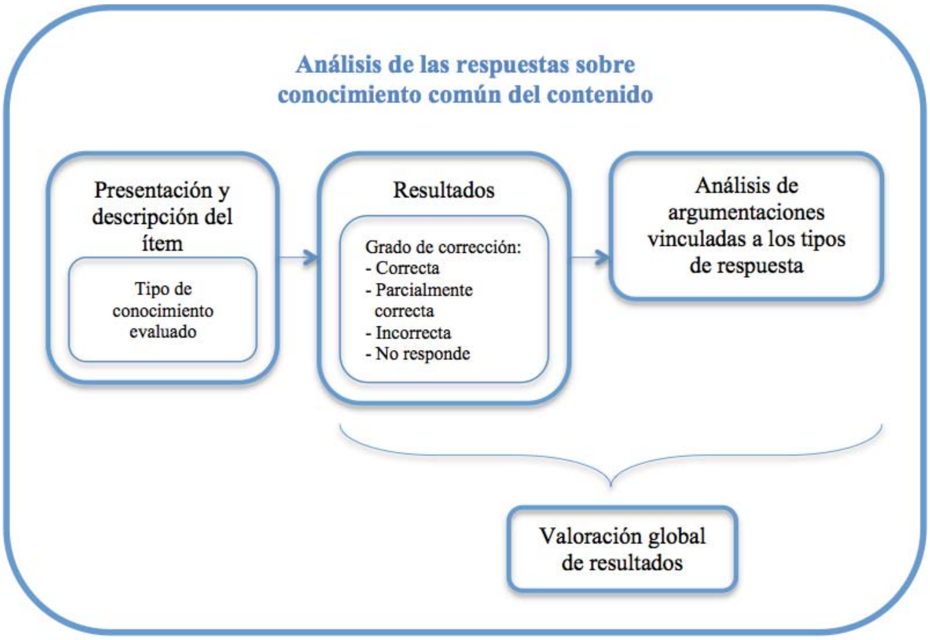


Figura 5.13 Fases presentes en el análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento común del contenido

Comenzamos con una breve presentación y descripción del ítem, que recuerda algunos de los aspectos presentados en el análisis para cada uno de los ítems realizado en el capítulo 4; continuamos con la presentación de los resultados en base a la variable cuantitativa grado de corrección de las respuestas, para luego analizar los distintos tipos de argumentos presentes en los distintos tipos de respuestas, lo que nos permitirá obtener una valoración global de los resultados obtenidos en cada uno de los ítems y subítems.

Por último, se finaliza esta sección con una síntesis del análisis de los resultados sobre el conocimiento común del contenido, que presenta el resumen estadístico de los puntajes obtenidos en relación al conocimiento común del contenido.

5.3.3.1.1 Análisis del subítem 1a)

Por medio de este ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación a la comprensión de los profesores de primaria de la independencia de sucesos en ensayos repetidos, bajos las mismas condiciones de un experimento aleatorio. Para ello se les presentó la siguiente situación problemática:

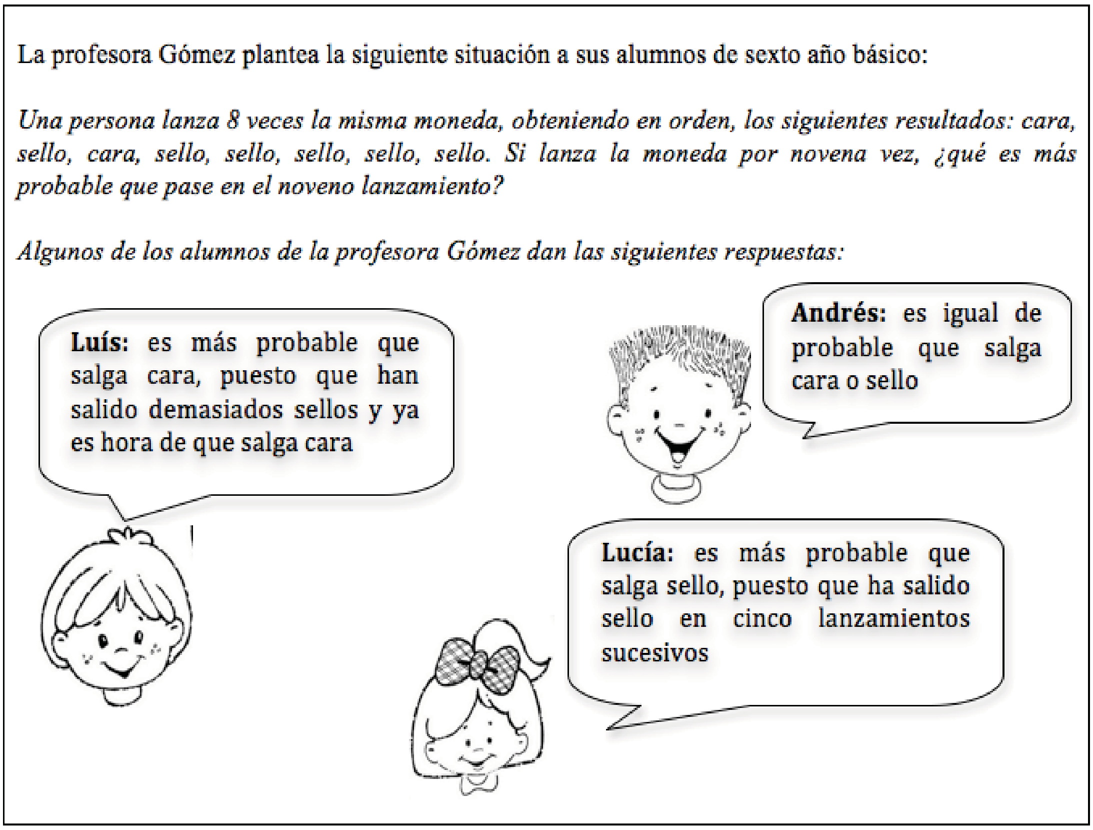


Figura 5.14 Situación problemática ítem 1

Como se observa en la figura 5.14, por medio de esta situación cuyo contexto es el lanzamiento de una moneda, en la que se presenta la secuencia de los resultados anteriores, se pretende observar si el contar con la secuencia de los resultados anteriores influye o no en la respuesta de los profesores a la pregunta de *¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?*

Los resultados de las respuestas a esta pregunta, se resumen en la tabla 5.26. En ella podemos observar que los profesores tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, pues del 77,4% de los profesores que dieron respuesta a este subítem, solo un 5,3% logró hacerlo de manera correcta.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	5	5,3
Parcialmente correcta	29	31,2
Incorrecta	38	40,9
No responde	21	22,6
Total	93	100

Tabla 5.26 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 1a)

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, hemos llegado a la siguiente clasificación de las respuestas que se muestra en la tabla 5.27, que nos permiten indagar en la comprensión de la independencia de sucesos.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Igualmente probable obtener cara o sello en el siguiente lanzamiento.	34	36,6
Más probable que en el siguiente lanzamiento salga cara.	14	15
Más probable que en el siguiente lanzamiento salga sello.	21	22,6
Otras respuestas y argumentos	3	3,2
No responde	21	22,6
Total	93	100

Tabla 5.27 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al subítem 1a)

A partir de la tabla 5.27 podemos observar que un 36,6% de los profesores responde que es igualmente probable obtener cara o sello en el noveno lanzamiento. Sin embargo, solo el 5,3% centra el argumento de su respuesta en la independencia de sucesos, que es el tipo de respuesta que hemos considerado como correcta. Un ejemplo de esto es la respuesta siguiente (las citas se reproducen de forma literal, manteniendo las faltas ortográficas que pueda haber): "*es igual de probable que salga cara o sello, la cantidad de veces que ha salido sello no me asegura que ahora sale cara*" (profesor 78).

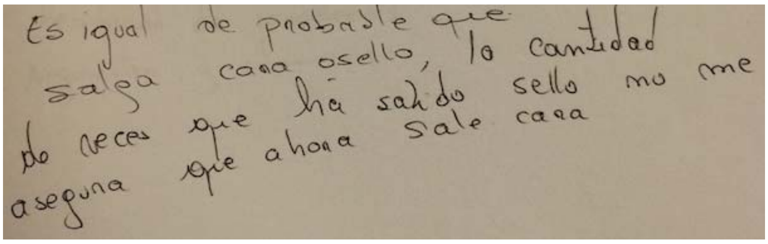

Es igual de probable que
salga cara osello, la cantidad
de veces que ha salido sello no me
asegura que ahora sale cara

Figura 5.15 Respuesta del profesor 78 al subítem 1a)

Mientras que un 31,2% responde que es igualmente probable obtener cara o sello en el noveno lanzamiento, sin dar ningún tipo de argumento para su respuesta, o bien da un argumento incorrecto, este tipo de respuesta se ha considerado como parcialmente correcta. Un ejemplo es la respuesta del profesor 49: "*es igual de probable que salga cara o sello*".

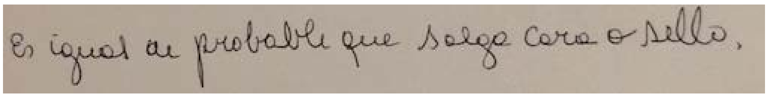

Es igual de probable que salga cara o sello.

Figura 5.16 Respuesta del profesor 49 al subítem 1a)

En cuanto a las respuestas incorrectas, a partir de la tabla 5.27, se observa que la gran mayoría de las respuestas (22,6%) considera que en el noveno lanzamiento es más probable que salga sello, basando su argumento en que ya ha salido sello en seis de los ocho lanzamientos, por lo que es más probable que la siguiente vez vuelva a salir sello. Un ejemplo de ello es la respuesta siguiente "*de los 8 lanzamientos 2 es a 6 fueron cara a sello, por lo tanto existe la probabilidad mayor que el que salga sea sello*" (profesor 7).

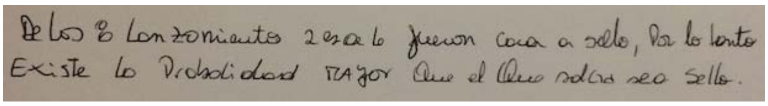

De los 8 Lanzamientos 2 es a 6 fueron cara a sello, Por lo tanto
Existe la Probabilidad mayor que el que salga sea sello.

Figura 5.17 Respuesta del profesor 7 al subítem 1a)

A partir de lo anterior, es posible detectar que un alto porcentaje de los profesores presenta el sesgo de la recencia positiva. Por el contrario, un 15% de los profesores presenta el sesgo de la recencia negativa al responder que dado que ya ha salido demasiadas veces sello, ya es momento de obtener una cara, puesto que en algún momento tiene que darse un equilibrio. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: "*es más probable que en el siguiente lanzamiento salga cara pues la ley de probabilidades tiende hacia una igualación en situaciones como la descrita en el* *problema; esto aún tomando en cuenta que existe un 50% de probabilidades en cada tiro*" (profesor 51).

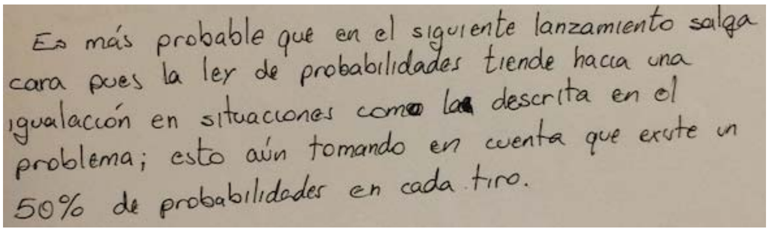

Es más probable que en el siguiente lanzamiento salga cara pues la ley de probabilidades tiende hacia una igualacción en situaciones como la descrita en el problema; esto aún tomando en cuenta que existe un 50% de probabilidades en cada tiro.

Figura 5.18 Respuesta del profesor 51 al subítem 1a)

En relación a los conflictos puestos de manifiesto por los profesores y que anticipamos en el análisis *a priori* del cuestionario presentado en el capítulo 4, podemos observar la presencia de la recencia negativa y positiva, que han sido descritas por diversos autores, como Piaget e Inhelder (1951), Kahnemman, Slovic y Tversky (1982), quienes lo atribuyen a la heurística de la representatividad.

En lo que respecta a aquellas respuestas que clasificamos como "otras respuestas y argumentos", en ella incluimos respuestas que no tienen relación con la pregunta y que presentan argumentos sin sentido, tales respuestas corresponden a un 3,2%.

Por otro lado, nos encontramos que un porcentaje considerable (22,6%) de los profesores no responde al subítem 1a), lo que de acuerdo a lo señalado por los propios profesores se debe a un desconocimiento del contenido.

En consecuencia, se observa un conocimiento común del contenido, en relación a la comprensión de la independencia de sucesos, muy deficiente. Puesto que tan solo un 5,3% de los profesores responde de manera satisfactoria a la situación problemática planteada. Por otro lado, cabe destacar el alto porcentaje de respuestas incorrectas (40,9%) producto de los efectos de la recencia positiva y negativa, así como el de profesores que no responde (22,6%), lo cual resulta alarmante ya que la situación planteada es elemental.

5.3.3.1.2 Análisis del subítem 2a)

Recordemos que con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido sobre cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables (por la composición de las cajas) en un experimento simple (figura 5.19).

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Figura 5.19 Situación problemática ítem 2

Para dar solución a la situación problemática será necesario, primeramente, aplicar el principio de indiferencia, y dado que no se dispone de información de tipo frecuencial en relación a la situación planteada, es posible aplicar la regla de Laplace, para luego comparar las dos fracciones resultantes del cálculo de probabilidad.

Además, es necesario movilizar los conceptos de experimento, suceso aleatorio, espacio muestral (para identificar los posibles sucesos) y posibilidad de ocurrencia de un evento (mediante la identificación del número de casos favorables, el número de casos desfavorables y el número total de casos posibles). En la tabla 5.28, podemos observar que la resolución de esta situación resultó de una dificultad media para los profesores, pues el 37,6% resolvió correctamente la situación problemática planteada, y tan solo un 9,7% respondió incorrectamente.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	35	37,6
Parcialmente correcta	43	46,2
Incorrecta	9	9,7
No responde	6	6,5
Total	93	100

Tabla 5.28 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 2a)

En cuanto a los distintos tipos de respuestas obtenidas, que nos permiten indagar en la comprensión del cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple, las hemos clasificado como se muestra en la tabla 5.29.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
En ambas cajas hay la misma probabilidad de extraer una bola blanca.	4	4,3
En la caja A hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca.	78	83,9
En la caja B hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca.	5	5,4
Otras respuestas y argumentaciones	0	0
No responde	6	6,4
Total	93	100

Tabla 5.29 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al subítem 2a)

En la tabla 5.29 se observa que un 83,9% de los profesores identifica que en la caja A hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca. No obstante, solo un 37,6% fundamenta su preferencia ya sea por medio de la aplicación de la regla de Laplace o en la comparación de las cantidades absolutas de bolas negras (hemos considerado ambas fundamentaciones como tipos de respuesta correcta).

Cabe señalar que en el caso de los que aplican la regla de Laplace, ninguno de ellos mencionó el principio de indiferencia, y aplicaron la regla de Laplace directamente. Argumentando que si se calcula la probabilidad de obtener una bola blanca en cada una de las cajas, se obtiene:

$$P_{CAJA\,A}\left(obtener\,bola\ blanca\right)=\frac{3}{6} \qquad\qquad P_{CAJA\,B}\left(obtener\,bola\ blanca\right)=\frac{3}{8}$$

entonces al comparar las probabilidades ocurre que $\frac{3}{6}>\frac{3}{8}$, por lo tanto es más probable obtener una bola blanca de la caja A. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: "*Caja A= 3/6 = ½ = 0,5   Caja B = 3/8 = 0,37 Es preferible sacar la bola blanca de la caja A, ya que la probabilidad es de 0,5 es decir hay un 50% de probabilidad de extraer una blanca*" (profesor 77).

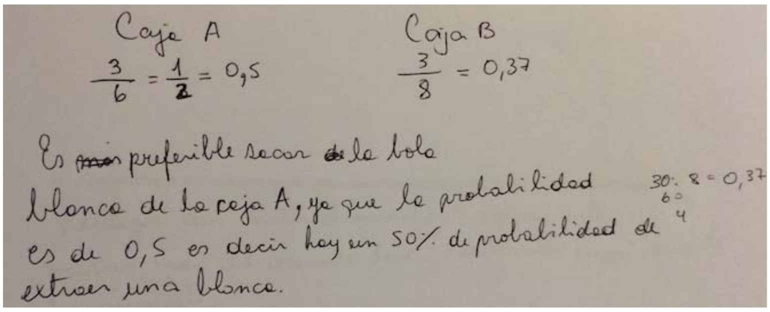


Figura 5.20 Respuesta del profesor 77 al subítem 2a)

Por su parte, los que fundamentan su respuesta en la comparación de cantidades absolutas, se focalizan en comparar primeramente las bolas blancas, al observar que la cantidad de bolas blancas es la misma en ambas cajas, indican que es necesario comparar la cantidad de bolas negras, lo que finalmente les lleva responder que es preferible realizar la extracción de la caja A, puesto que en ella hay un menor número de bolas negras. Un ejemplo de esto es la respuesta siguiente: "*en ambas cajas hay igual cantidad de bolas blancas, sin embargo en la caja A hay menos bolas negras que en la B, por lo que es preferible realizar la extracción desde la caja A*" (profesor 23).

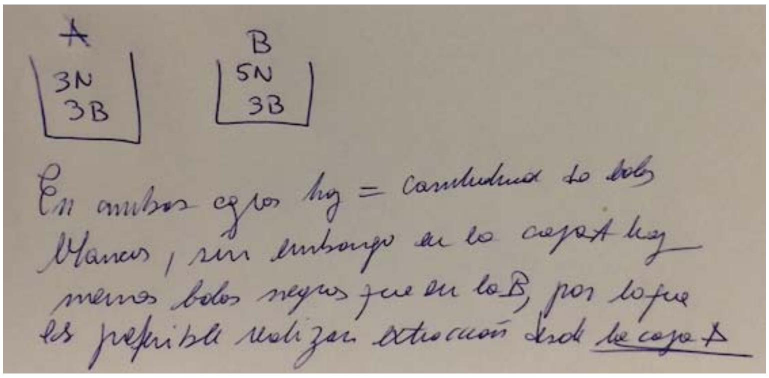


Figura 5.21 Respuesta del profesor 23 al subítem 2a)

Como se puede apreciar el profesor 23 al notar que el número de casos favorables es el mismo en ambas cajas, centra su respuesta en la comparación del número de casos desfavorables, eligiendo aquella caja que presenta el menor número de casos desfavorables.

En cuanto a las respuestas parcialmente correctas, en la tabla 5.28, podemos observar que un 46,2% de los profesores se encuentra en esta categoría. De acuerdo con la rúbrica (anexo 5) consideraremos que la respuesta es parcialmente correcta, cuando el profesor identifica que es preferible realizar la extracción desde la caja A, pero no argumenta su respuesta o bien entrega un argumento inadecuado. Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*de la caja A porque hay menos bolas y finalmente es el destino quien decide*" (profesor 93).

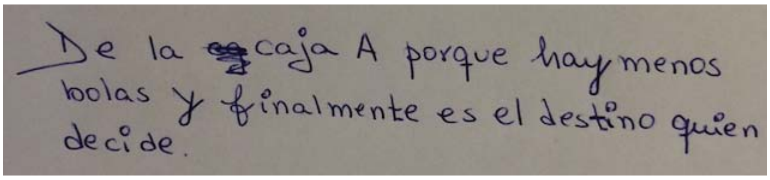


Figura 5.22 Respuesta del profesor 93 al subítem 2a)

Como se puede apreciar en la figura 5.22, si bien el profesor 93 logró identificar la caja desde la cual es preferible realizar la extracción, su razonamiento es incorrecto y carece de fundamentación lógica.

Entre las respuestas incorrectas a partir de la tabla 5.29, se observa que un 5,4% de los profesores considera que es preferible realizar la extracción de la caja B, justificando, mayoritariamente, su elección en el hecho de que existe un mayor número de bolas negras en la caja B. Un ejemplo de este tipo de respuesta es: "*de la caja B es preferible hacer la extracción, pues hay 5/8 en cambio en la A hay 3 de 3. En la caja B hay más del 50% que es más que lo que hay en la caja A*" (profesor 56).

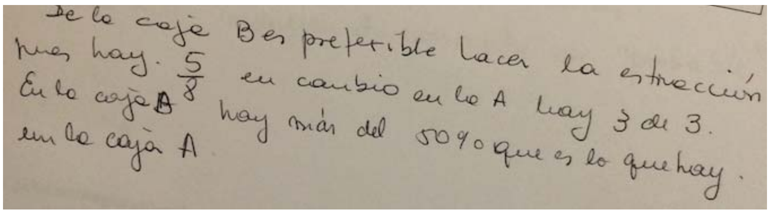


Figura 5.23 Respuesta del profesor 56 al subítem 2a)

Como se puede observar, en la figura 5.23, el profesor 56 confunde casos favorables con casos desfavorables, lo que le conduce a determinar la probabilidad de extraer un bola negra para seleccionar la caja desde la cual es preferible realizar la extracción. Por otro lado, en su argumentación podemos observar que, además, se inclina por la caja B dado que en esta hay mayor número total de bolas (casos posibles) conflicto que ya habíamos anticipado en el análisis *a priori* presentado en el capítulo 4.

Otro tipo de conflicto que ha aparecido, en un menor porcentaje, dentro de las respuestas incorrectas y que se encuentra presente en un 4,3% de los profesores, es el de considerar que en ambas cajas hay la misma probabilidad de extraer una bola blanca. Un ejemplo de esto es el siguiente: "*da lo mismo cual caja elija ya que cada una tiene 3 bolas blancas*" (profesor 84).

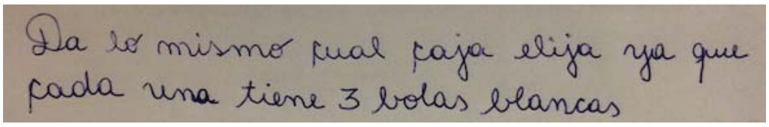


Figura 5.24 Respuesta del profesor 84 al subítem 2a)

Como se observa en la figura 5.24, el conflicto que presenta el profesor 84 se centra en que fundamenta su respuesta solo en la comparación de los casos favorables (bolas blancas) en ambas cajas, y no realiza la comparación en términos de la probabilidad de extracción.

Por otro lado, nos encontramos que un porcentaje pequeño (6,4%) de los profesores no responde al subítem 1a), lo que de acuerdo a lo señalado por los propios profesores se debe a un desconocimiento del contenido.

Por último, a partir de los análisis antes expuesto, consideramos que en lo que refiere al conocimiento común del contenido en relación al cálculo de probabilidades y la comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables, este es ligeramente adecuado, pues como se ha expuesto un 83,9% de los profesores logró identificar la caja desde la cual era preferible realizar la extracción, sin embargo, solo un 37,6% lo hizo en base a un razonamiento probabilístico correcto.

5.3.3.1.3 Análisis del subítem 3a)

El propósito de este subítem es evaluar el conocimiento común del contenido referido a la comprensión del concepto de suceso seguro y la capacidad combinatoria de los profesores de primaria. Con esta finalidad, se presenta a los profesores la siguiente situación problemática (figura 5.25):

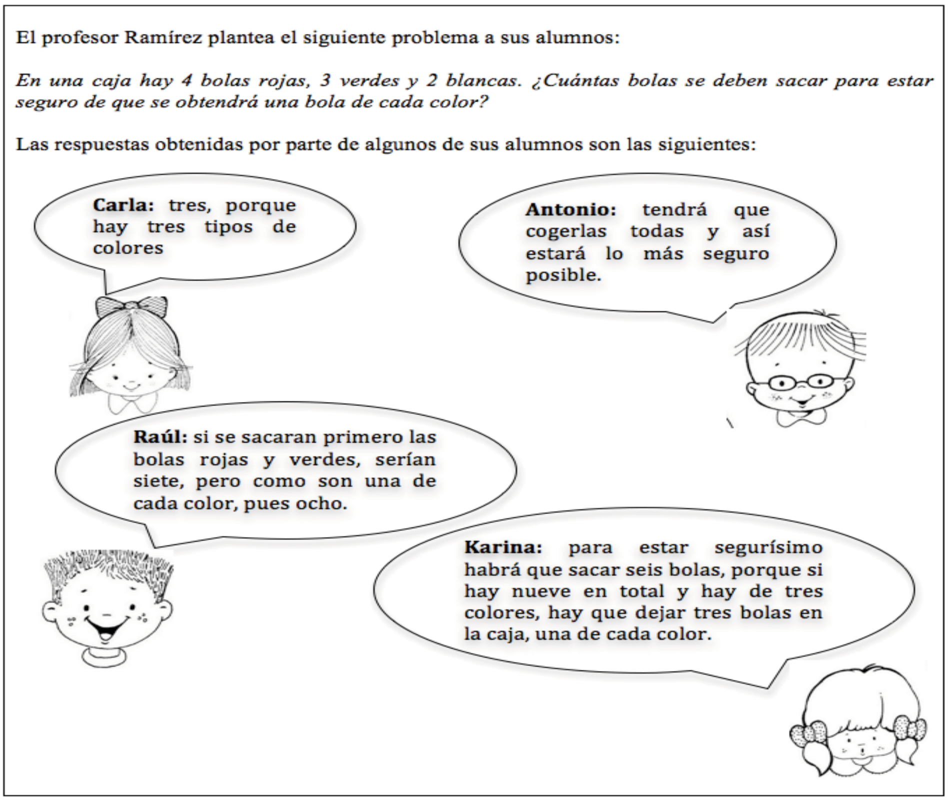


Figura 5.25 Situación problemática ítem 3

Frente a esta situación se plantea la siguiente pregunta a los profesores: *¿qué respuestas debería aceptar el profesor cómo correctas? ¿por qué?*. Para responder a estas preguntas, el profesor deberá resolver primeramente el problema y luego decidir en base a su respuesta ¿cuál de ellas es o son correctas?, argumentando debidamente su elección. Para ello, el profesor debe poner en juego sus ideas sobre suceso seguro como su capacidad combinatoria, para así estimar dentro de las distintas cantidades de bolas que se pueden sacar, cuál es la opción que le permite estar seguro de que tendrá éxito, es decir, que obtendrá una bola de cada color.

En consecuencia, para analizar este subítem nos centramos en las prácticas matemáticas empleadas por los profesores para resolver la situación problemática planteada. En la tabla 5.30, podemos observar que la resolución de esta situación fue de gran dificultad para los profesores, pues un pequeño porcentaje de ellos (5,4%) logra identificar, en base a un argumento adecuado, que la respuesta correcta es la de Raúl (8 bolas).

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	5	5,4
Parcialmente correcta	9	9,7
Incorrecta	68	73,1
No responde	11	11,8
Total	93	100

Tabla 5.30 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 3a)

Dentro de los distintos tipos de respuestas obtenidas para este subítem, las hemos clasificado como se muestra en la tabla 5.31.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Hay que sacar 3 bolas, por lo que Carla tiene la razón.	11	34,4
Hay que sacar 6 bolas, por lo que Karina tienen la razón.	32	11,8
Hay que sacar 8 bolas, por lo que Raúl tiene la razón.	14	15,1
Hay que sacar todas las bolas, por lo que Antonio tiene la razón.	16	17,2
Otras respuestas y argumentaciones	9	9,7
No responde	11	11,8
Total	93	100

Tabla 5.31 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al subítem 3a)

En la tabla 5.31 es posible observar que si bien un 15,1% de los profesores identifica la respuesta de Raúl como la correcta, solo un 5,4% lo hace en base a un argumento adecuado. La mayoría de los argumentos dados para la respuesta correcta, son del tipo: "*a mi parecer las respuesta de Raúl, porque al sacar las rojas y verdes, agoto las posibilidades de volver a sacar una mas de esos colores, logrando sacar con exactitud una blanca*" (profesor 61).

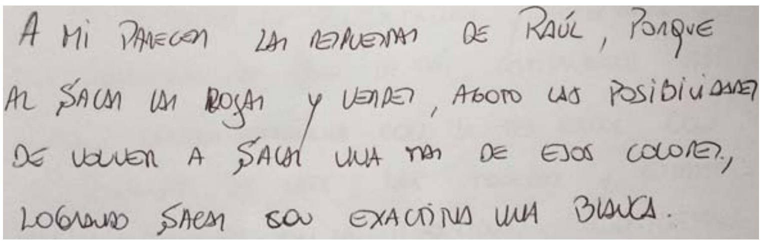


Figura 5.26 Respuesta del profesor 61 al subítem 3a)

En este tipo de respuesta se puede observar que el profesor logra deducir adecuadamente una de las posibilidades de extracción que le llevaran a estar seguro de obtener una bola de cada color, vinculando la noción de suceso seguro con la idea de exactitud que lo llevará a obtener una bola de cada color. Este tipo de respuesta y argumento lo hemos considerado correcto. Mientras que solamente un 9,7% menciona, sin dar un argumento, que la respuesta correcta es la de Raúl, o bien lo hace a partir de un argumento inadecuado, como por ejemplo el siguiente: "*8 bolas. Tengo 3 colores, la roja y la verde tienen más posibilidad de salir*" (profesor 31).

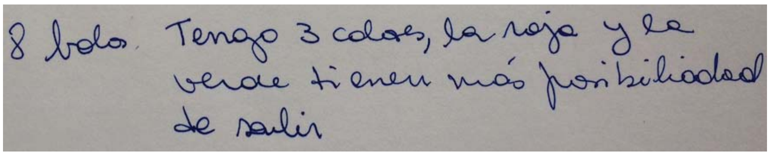


Figura 5.27 Respuesta del profesor 31 al subítem 3a)

En la respuesta anterior se puede observar que si bien el profesor logra identificar que hay que sacar 8 bolas para estar seguro de obtener una de cada color, su argumento no es claro, dando la impresión que confunde la noción de suceso seguro con posibilidad de extracción.

En lo que se refiere a las respuestas incorrectas, se puede observar, a partir de la tabla 5.31, que un alto porcentaje de los profesores (34,4%) considera que hay que extraer 3 bolas para estar seguro de obtener una de cada color. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: "*la de Carla ya que hay 3 tipos de colores*" (profesor 17).

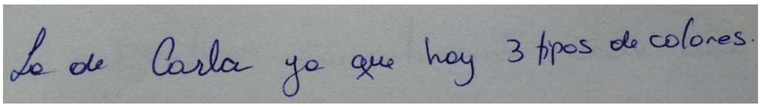


Figura 5.28 Respuesta del profesor 17 al subítem 3a)

A partir de este tipo de respuesta, podemos observar que un 34,4% de los profesores tiende a confundir la noción de suceso seguro con la de suceso posible, conflicto que ya habíamos anticipado en el análisis *a priori*.

Por otro lado, como se puede observar en la tabla 5.31, el segundo porcentaje más alto dentro de las respuesta incorrectas (17,2%), se encuentra en aquellos profesores que responden que para estar seguros de obtener una bola de cada color hay que extraerlas todas. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"La de Antonio, ya que incorpora que al sacarlas todas sería lo más seguro, dentro de lo cual está utilizando a la vez el concepto"* (profesor 64).

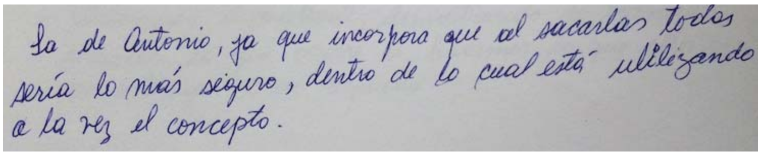

La de Antonio, ya que incorpora que al sacarlas todas
sería lo más seguro, dentro de lo cual está utilizando
a la vez el concepto.

Figura 5.29 Respuesta del profesor 64 al subítem 3a)

Las argumentaciones de este tipo se pueden deber a que los profesores carecen de la capacidad combinatoria por lo que les resulta más sencillo y económico, en términos de tiempo y realización de cálculos, el afirmar que se deben extraer todas las bolas para estar seguro de extraer una de cada color.

Otro tipo de respuesta incorrecta que presentó un 11,8% de frecuencia fue considerar que para estar seguros de extraer una bola de cada color, bastaba con extraer seis bolas. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"La respuesta de Karina, ya que tenemos que asegurarnos de que se extrajeron una bola de cada color por lo tanto hay que extraer 3 bolas rojas, 2 bolas verdes y 1 blanca. Ahí quedaría una bola de cada color"* (profesor 8).

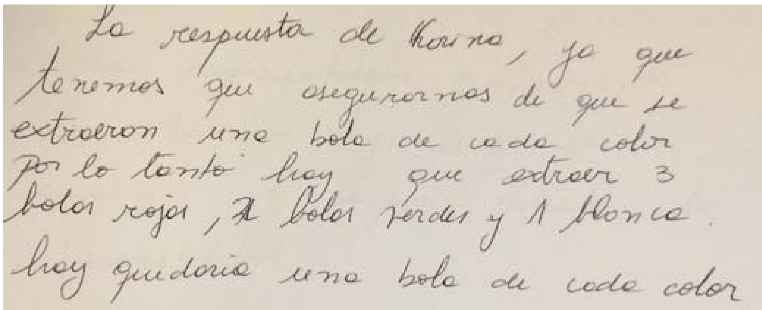

La respuesta de Karina, ya que
tenemos que asegurarnos de que se
extrajeron una bola de cada color
por lo tanto hay que extraer 3
bolas rojas, 2 bolas verdes y 1 blanca.
hay quedaría una bola de cada color

Figura 5.30 Respuesta del profesor 8 al subítem 3a)

En este tipo de argumento, al igual que en los anteriores, se puede evidenciar el conflicto de que los profesores confunden la noción de suceso seguro con la de suceso posible. Además, al analizar los argumentos relacionados con este tipo de respuesta, se observa que los profesores dan su argumentación en base al supuesto de que las bolas (1 roja, 1 verde y 1 blanca) deben quedar al interior de la caja, de modo tal que al realizar la extracción se esté seguro de obtener una bola de cada color.

Cabe señalar que dentro de las respuestas que hemos clasificado bajo la categoría "otras respuestas y argumentaciones", se encuentran respuestas sin sentido que no guardan relación con la pregunta, y que de una manera u otra reflejan que son producto del nulo entendimiento de la situación problemática planteada, estas respuestas corresponden a un 9,7% del total. Por último, es importante mencionar que un 11,8% de los profesores no dio respuesta a la pregunta, señalando, algunos de ellos, que no daban respuesta dado que desconocen el contenido y por ende, no saben cómo resolver la situación problemática planteada.

Finalmente, a partir de las respuestas y diferentes argumentos otorgados al subítem 3a) podemos evidenciar que, estos profesores de primaria en activo, carecen de una comprensión del concepto de suceso seguro, además de las nociones básicas de combinatoria que permiten enumerar las distintas posibilidades de que se presentan para extraer bolas de la caja. Por lo que podemos afirmar que este grupo de profesores presenta un conocimiento común del contendió escaso (muy deficiente) en relación a la comprensión del concepto de suceso seguro y nociones básicas de combinatoria, puesto que solo un 5,4% logra dar una respuesta correcta en base a un argumento correcto.

5.3.3.1.4 Análisis del subítem 4a)

La finalidad de este subítem es evaluar el conocimiento común del contenido en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables. Para ello se presenta a los profesores la situación problemática de la figura 5.31.

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Figura 5.31 Situación problemática ítem 4

Frente a esta situación se plantea la siguiente pregunta a los profesores: *¿considera correcta la respuesta del alumno? Justifique su veracidad o falsedad.* Para responder a esta pregunta, los profesores deberán, primeramente, poner en juego su conocimiento común del contenido para discriminar entre sucesos equiprobables y no equiprobables, para luego lograr dar respuesta a la situación planteada, y determinar así si la respuesta dada por el alumno es o no correcta.

Al analizar las prácticas matemáticas de los profesores para dar respuesta a la situación planteada, se pudo evidenciar que esta pregunta presentó una nivel de dificultad medio alto para los profesores, puesto que un 32,3% logró dar una respuesta correcta en base a un argumento correcto. Mientras que 16,1% logró dar una respuesta correcta en base a un argumento incorrecto, y un 49,5% responde de manera totalmente incorrecta, como se muestra en la tabla 5.32.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	30	32,3
Parcialmente correcta	15	16,1
Incorrecta	46	49,5
No responde	2	2,1
Total	93	100

Tabla 5.32 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 4a)

A partir del análisis de las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los profesores, hemos clasificado los distintos tipos de respuestas obtenidas para este subítem, en las siguientes categorías que se muestran en la tabla 5.33.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
La respuesta del alumno es incorrecta, puesto que hay mayor número de niñas por lo que es más probable que salga niña.	30	32,3
La respuesta del alumno es correcta, pues es igualmente probable que sea un niño o una niña.	39	42
La respuesta del alumno es incorrecta, pues es más probable que salga una niña (16/29) que un niño (13/29) .	15	16,1
Otras respuestas y argumentaciones	7	7,5
No responde	2	2,1
Total	93	100

Tabla 5.33 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al subítem 4a)

En relación a las respuestas correctas, observamos que un 32,3% considera que la respuesta del alumno es incorrecta, puesto que hay más niñas que niños, por lo que es más probable que al extraer uno de los trozos de papel este tenga escrito el nombre de una niña. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *“No es correcta, hay más probabilidades de que salga una niña, ya que hay más niñas que niños”* (profesor 5).

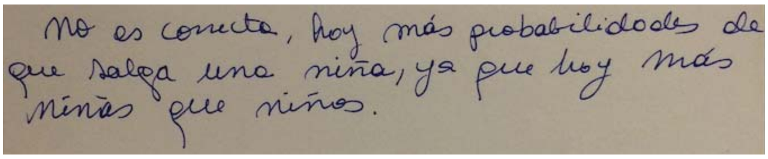

No es correcta, hay más probabilidades de
que salga una niña, ya que hay más
niñas que niños.

Figura 5.32 Respuesta del profesor 5 al subítem 4a)

Como se observa, en las respuestas de este tipo, los profesores logran identificar correctamente que el experimento aleatorio presenta dos resultados no equiprobables, lo que los lleva a argumentar su respuesta en la comparación de las cantidades absolutas del número de niñas y niños.

Por otro lado, un 16,1% de los profesores responde que la respuesta del alumno es incorrecta dado que es más probable que salga niña a que salga niño, puesto que al aplicar la regla de Laplace y comparar las fracciones resultantes, se obtiene que la probabilidad de que salga niña es mayor que la de que salga niño. Este tipo de respuesta la hemos considerado como parcialmente correcta, dado que si bien la respuesta es correcta, el argumento es incorrecto. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: *"Falso, ya que el hecho de que hayan más niñas que niños aumenta las probabilidades de que saque a una niña. Sin embargo, esto no quiere decir que es imposible que salga un niño. Las probabilidades serían: niños = 13/29, niñas = 16/29"* (profesor 30).

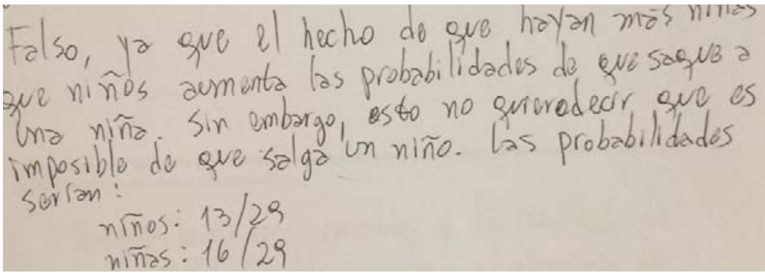

Falso, ya que el hecho de que hayan más niñas
que niños aumenta las probabilidades de que saque a
una niña. Sin embargo, esto no quiero decir que es
imposible de que salga un niño. Las probabilidades
serían:
niños: 13/29
niñas: 16/29

Figura 5.33 Respuesta del profesor 30 al subítem 4a)

Como se puede observar en este tipo de respuesta, los profesores presentan el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988), pues si bien identifican que la respuesta del alumno es incorrecta, lo hacen en base a un argumento incorrecto, puesto que realizan una generalización incorrecta de la regla de Laplace. Lo anterior, es erróneo dado que la regla de Laplace puede ser aplicada cuando los sucesos son equiprobables, y en este caso los dos sucesos simples que conforman el espacio muestral {niño, niña} no son equiprobables. Este tipo de conflicto les lleva a calcular erróneamente la probabilidad de elegir niño o niña, sin darse cuenta que para responder a la pregunta lo correcto es comparar las cantidades absolutas de cada uno de los sucesos.

Al contrario de estos profesores que consideran que la respuesta del alumno es incorrecta, se encuentran aquellos que consideran que la respuesta del alumno es correcta, es decir, que es una cuestión de azar/suerte por lo que es igualmente probable que salga niño o niña, aunque haya más niñas. Un ejemplo de este tipo de respuesta que hemos encontrado en un 42% de los profesores es el siguiente: *"Sí, porque independiente de la cantidad entre niños y niñas, el azar juega un rol importante"* (profesor 62).

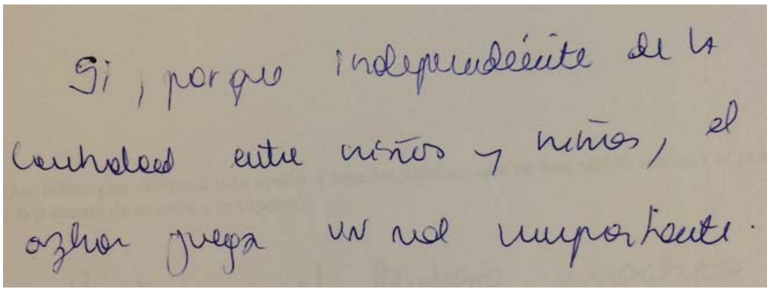


Figura 5.34 Respuesta del profesor 62 al subítem 4a)

A través de este tipo de respuesta, es posible observar que los profesores otorgan gran importancia al factor suerte o al azar. Pero no nos queda del todo claro si sus respuestas incorrectas se ven únicamente influenciadas por estos factores o porque obvian las cantidades absolutas de niños y niñas, y solo se centran el hecho de escoger niño o niña. Es decir, que se deba a una confusión entre las nociones de aleatoriedad y equiprobabilidad, lo que lleva a que establezca una asociación intuitiva que le conduce a pensar que finalmente es la suerte quien decide, dado que el espacio muestral se encuentra conformado por dos posibles valores: niños y niñas.

En lo que respecta a aquellas respuestas que clasificamos como "otras respuestas y argumentos", en ella incluimos respuestas que no tienen relación con la pregunta y que presentan argumentos sin sentido, tales respuestas corresponden a un 7,5%. Por otro lado, nos encontramos que un pequeño porcentaje (2,1%) de los profesores no responde al subítem 4a), lo que de acuerdo a lo señalado por los propios profesores se debe a un desconocimiento del contenido, como lo es el caso del profesor 15, quien no responde, señalando que: *"No lo sé, porque no recuerdo como resolver matemáticamente un ejercicio de probabilidad, si bien realice algunos ejercicios, no sé si matemáticamente estoy bien"* (profesor 15).

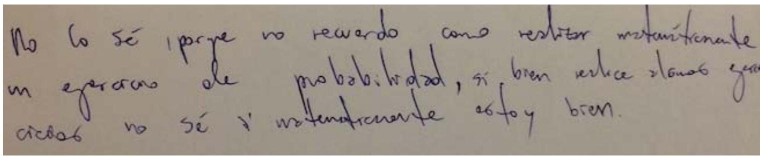


Figura 5.35 Respuesta del profesor 15 al subítem 4a)

Finalmente, a partir de los distintos tipos de prácticas matemáticas presentes en las respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas que los profesores otorgaron al subítem 4a), podemos identificar que existen diversas dificultades vinculadas al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables. Siendo el conflicto que predomina mayoritariamente en las respuestas de los profesores, más precisamente en un 42%, el hecho de considerar que la probabilidad de que un determinado suceso ocurra se encuentra vinculada al factor suerte. Con un 16,1% de incidencia le sigue la presencia del sesgo de la equiprobabilidad, que llevó a los profesores a obviar el hecho de que los dos sucesos simples que se les pedía comparar no son equiprobables, aplicando en sus cálculos incorrectamente la regla de Laplace.

De este modo, a partir del análisis realizado a las distintas respuestas obtenidas podemos observar que el conocimiento común del contenido en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, es insuficiente, puesto que solo un 32,3% de los profesores que respondieron al cuestionario, lograron responder a este subítem de manera correcta.

5.3.3.1.5 Análisis del ítem 5

Este ítem nos permitió evaluar el conocimiento común del contenido, de los profesores de primaria en activo, sobre la independencia de sucesos en la asignación de probabilidades, y noción de aleatoriedad, así como las creencias subjetivas que afectan sus concepciones sobre el azar. Para el logro de lo anterior se consideró la siguiente situación problemática (figura 5.36) en la cual considera la falacia del jugador o efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975), que consiste en creer erróneamente que los sucesos pasados afectan los futuros, es decir, que si un determinado suceso aleatorio no ha ocurrido durante un cierto periodo, en una próxima jugada tendrá mayor probabilidad de ocurrir.

> Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "*la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima*".
>
> ¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Figura 5.36 Situación problemática ítem 5

Para dar respuesta a la pregunta planteada, es necesario que el profesor comprenda que si bien la lotería es un juego basado en la suerte, no existe relación entre las jugadas, por lo que la probabilidad de ganar en alguna partida próxima es independiente de los resultados obtenidos en los sorteos anteriores. De este modo su opinión sobre el razonamiento de Pedro debe ser que es incorrecto.

Los resultados de las respuestas obtenidas, se resumen en la tabla 5.34, en ella podemos observar que los profesores presentaron dificultades para resolver la situación problemática, pues solo un 12,9% dio una respuesta correcta.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	12	12,9
Parcialmente correcta	31	33,3
Incorrecta	42	45,2
No responde	8	8,6
Total	93	100

Tabla 5.34 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al ítem 5

A partir del análisis de las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los profesores, hemos clasificado los distintos tipos de respuestas obtenidas para este subítem, en las siguientes categorías que se muestran en la tabla 5.35.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
La explicación de Pedro es incorrecta, pues la probabilidad de ganar no depende de los resultados anteriores.	12	12,9
La explicación de Pedro es incorrecta, pues lo más probable es que continúe perdiendo.	31	33,3
La explicación de Pedro es correcta.	33	35,5
Si gana o pierde depende del azar o de la suerte.	7	7,6
Otras respuestas y argumentaciones	2	2,1
No responde	8	8,6
Total	93	100

Tabla 5.35 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al ítem 5

En la tabla 5.35 podemos observar que solo un 12,9% de los profesores otorga una respuesta correcta en base a un argumento correcto, es decir, comprende la independencia de sucesos, al argumentar que la probabilidad de ganar o de perder no depende de los resultados anteriores. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Existen las mismas probabilidades que Pedro gane la lotería semanal que cuando jugó por primera vez ya que es un juego de azar. Por lo tanto puede ganar o no ganar las próximas loterías a pesar de que hubiese jugado anteriormente"* (profesor 8).

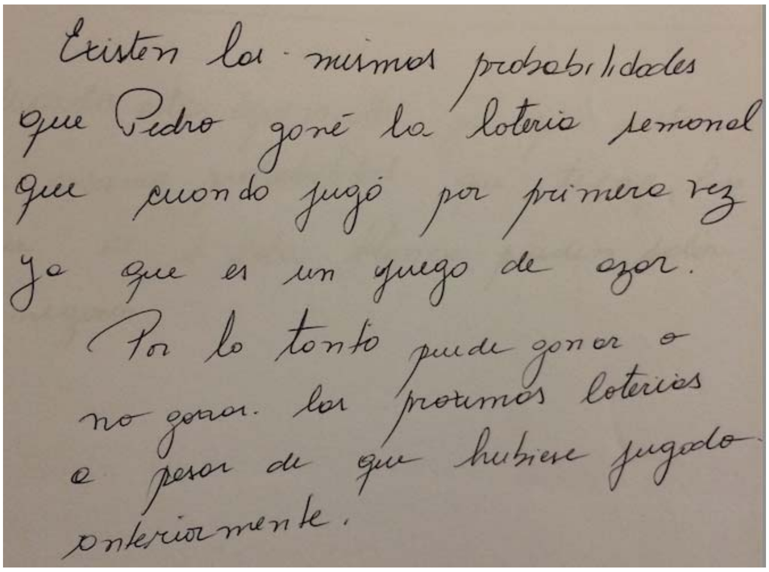
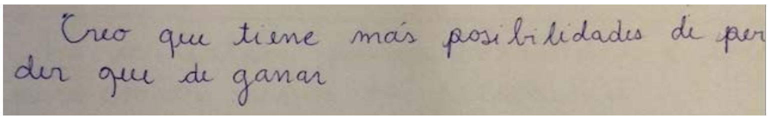

Existen las mismas probabilidades
que Pedro gané la lotería semanal
que cuando jugó por primera vez
ya que es un juego de azar.
Por lo tanto puede ganar o
no ganar las proximas loterías
a pesar de que hubiese jugado
anteriormente.

Figura 5.37 Respuesta del profesor 8 al ítem 5

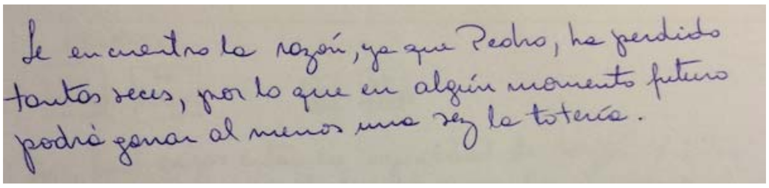
Por otro lado, un 33,3% de los profesores responde que la opinión de Pedro es incorrecta pero lo atribuye a un argumento incorrecto, al considerar que dado que Pedro ha perdido tantas veces, lo más probable es que continúe perdiendo (efecto de recencia positiva). Un ejemplo de este tipo de respuesta es la otorgada por el profesor 42: *"Creo que tiene más posibilidades de perder que de ganar"*.



Creo que tiene más posibilidades de per
der que de ganar

Figura 5.38 Respuesta del profesor 42 al ítem 5

Dentro de las respuestas incorrectas destacan aquellas que consideran que la opinión de Pedro es correcta (33,3%). Un ejemplo de esto es la siguiente respuesta: *"Le encuentro la razón, ya que Pedro, ha perdido tantas veces, por lo que en algún momento futuro podrá ganar al menos una vez la lotería"* (profesor 27).



Le encuentro la razón, ya que Pedro, ha perdido
tantas veces, por lo que en algún momento futuro
podrá ganar al menos una vez la lotería.

Figura 5.39 Respuesta del profesor 27 al ítem 5

En esta respuesta se manifiesta de manera explícita el conflicto de efecto de recencia negativa o falacia del jugador, es decir, la respuesta del profesor se ve influenciada por los resultados que ha tenido Pedro en las jugadas anteriores, lo que lleva a pensar erróneamente que el hecho de que no ha ganado, incrementaría su probabilidad de ganar en jugadas futuras.

Otro tipo de conflicto que se manifiesta en las respuestas incorrectas, con un 7,6% de incidencia, es el atribuir ya sea al azar o a la suerte los resultados en el juego de lotería. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Está correcto ya que como dice que la lotería es suerte, existe la probabilidad de que gane o que pierda en las próximas veces que juegue"* (profesor 55).

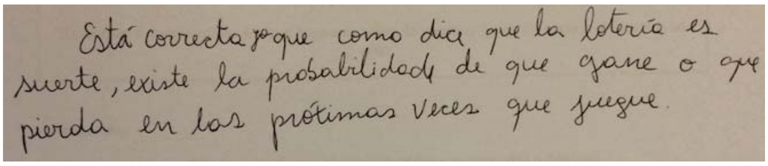

Está correcta porque como dice que la lotería es suerte, existe la probabilidad de que gane o que pierda en las próximas veces que juegue.

Figura 5.40 Respuesta del profesor 55 al ítem 5

Como se puede observar, para estos profesores, la suerte juega un rol importante en la asignación de probabilidades, es decir, consideran que el ganar o perder va a depender, finalmente, de la suerte.

Dentro de la categoría "otras respuestas y argumentaciones" hemos incluido aquellas respuestas que no tienen relación con la pregunta y que presentan argumentos sin sentido.
Finalmente, a partir de las distintas respuestas y sus argumentaciones se puede observar que el manejo del conocimiento común del contenido en relación a la independencia de sucesos en la asignación de probabilidades, y la noción de aleatoriedad es insuficiente en estos profesores de primaria en activo, puesto que solo un 12,9% de ellos muestra un conocimiento y comprensión adecuados de este contenido, y el 87,1% restante muestra argumentaciones incorrectas que reflejan una escasa comprensión de la independencia de sucesos y una noción de aleatoriedad muy vinculada a lo intuitivo, y sobre todo muy relacionadas con la falacia del jugador.

5.3.3.1.6 Análisis del ítem 6

Este ítem permitió analizar el conocimiento común del contenido sobre comparación de probabilidades simples, así como la noción de juego equitativo. Para ello se planteó la siguiente situación problemática a los profesores (figura 5.41), en la que se observa que hay dos cajas con bolas blancas y negras cuyos contenidos son proporcionales.

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya.

¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Figura 5.41 Situación problemática ítem 6

Para dar respuesta a esta situación, el profesor deberá distinguir el espacio muestral correspondientes a los dos sucesos simples no equiprobables, y de este modo a partir del cálculo y comparación de probabilidades establecer si el juego es o no justo. Al analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los profesores, se ha evidenciado que un 60,2% afirma a partir de un argumento correcto que el juego es justo. Mientras que un 25,8% otorga una respuesta incorrecta, como se puede observar en al tabla 5.36.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	56	60,2
Parcialmente correcta	10	10,8
Incorrecta	24	25,8
No responde	3	3,2
Total	93	100

Tabla 5.36 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al ítem 6

Para lograr un análisis más detallado, nos hemos centrado en los argumentos dados tanto en las respuestas correctas como incorrectas, de este modo se han establecido las siguientes categorías de análisis que se muestran en la tabla 5.37, las cuales nos han permitido detectar algunos conflictos en relación a la comparación de probabilidades simples y la noción de juego equitativo.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
La respuesta de Eduardo es correcta, pues en la caja de Luís hay más bolas blancas.	24	25,8
La respuesta de Eduardo es errónea, pues hay la misma proporción de bolas en ambas cajas.	56	60,2
La respuesta de Eduardo es errónea, pues él tiene mayor probabilidad de sacar blanca ya que en la caja de Luís hay más bolas negras.	8	8,6
Otras respuestas y argumentaciones	2	2,2
No responde	3	3,2
Total	93	100

Tabla 5.37 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al ítem 6

En cuanto a las respuestas correctas podemos observar que los profesores argumentan que la respuesta de Eduardo es incorrecta, dado que ambas cajas tienen la misma proporción de bolas blancas y negras, por lo que la probabilidad de obtener una bola blanca es la misma en las dos cajas. Por lo tanto, el juego es un juego justo. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la otorgada por el profesor 30: *"Es falsa, ya que la cantidad* *de bolas blancas y negras en ambas cajas están en la razón 1:2, por lo tanto, la probabilidad de sacar una bola blanca o una negra es la misma para ambas”*.

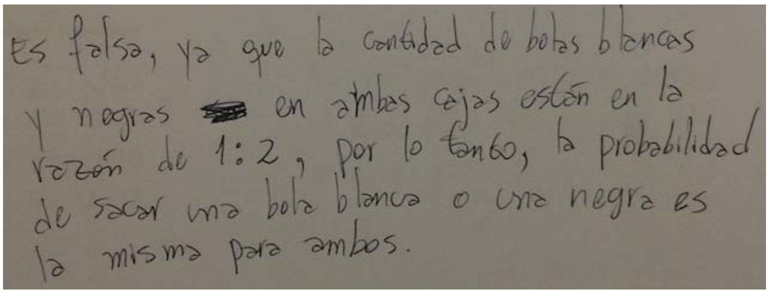


Figura 5.42 Respuesta del profesor 30 al ítem 6

A partir de este tipo de respuesta se puede observar que el 60,2% de los profesores tiene un conocimiento adecuado de la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con dos sucesos equiprobables, siendo la estrategia de resolución, el establecer una correspondencia entre casos favorables y casos totales, la que finalmente les lleva a argumentar que el juego es justo. Contrario a lo expuesto en el análisis *a priori*, ninguno de los profesores utilizó la estrategia de comparación de fracciones, pues el 100% de los profesores que dio una respuesta correcta lo hizo por medio de la estrategia de correspondencia.

En lo que respecta a los profesores que dieron una respuesta parcialmente correcta, hemos incluido en esta categoría aquellas respuestas que si bien identifican que la afirmación de Eduardo es incorrecta, lo hacen a partir de un argumento incorrecto. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *“Creo que Eduardo esta equivocado ya que Luís tiene mayor cantidad de bolas blancas y negras, por lo tanto tiene mas probabilidad que le salgan bolas negras. Eduardo tiene menos bolas en total, por lo tanto es más probable que él sea quien gane”* (profesor 67).

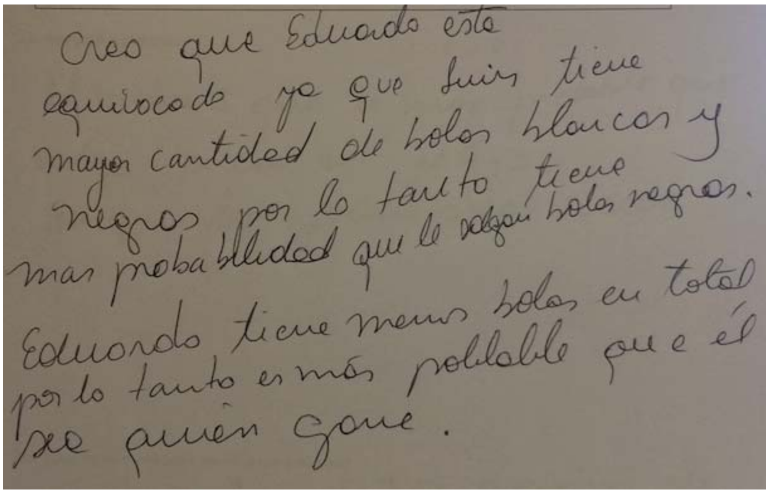

Creo que Eduardo esta
equivocado ya que Luis tiene
mayor cantidad de bolas blancas y
negros por lo tanto tiene
mas probabilidad que le salgan bolas negras.
Eduardo tiene menos bolas en total
por lo tanto es más poblable que e él
sea quien gane.

Figura 5.43 Respuesta del profesor 67 al ítem 6

En este tipo de respuesta observamos que los profesores que responden en base a este argumento, se centran en la comparación de los casos desfavorables, lo que les lleva a pensar erróneamente que tiene mayor probabilidad de éxito aquella caja que tiene un menor número de casos desfavorables.

En lo que a las respuestas incorrectas se refiere, en la tabla 5.37 se observa que un 25,8% de los profesores responde de manera errónea, siendo el principal tipo de argumento manifestado en tales respuestas, el considerar que la respuesta de Eduardo es correcta, pues en la caja de Luís hay más bolas blancas. Un ejemplo de esto se observa en la respuesta del profesor 5: *"Sí es correcta, efectivamente al haber más bolas blancas en una caja es más probable sacar una de ellas"*.

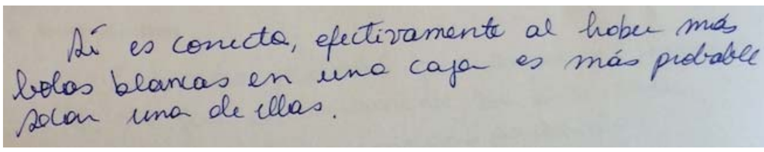

Sí es correcta, efectivamente al haber más
bolas blancas en una caja es más probable
sacar una de ellas.

Figura 5.44 Respuesta del profesor 5 al ítem 6

Como es posible observar, en este tipo de argumento se hace visible el conflicto asociado a comparar únicamente el número de casos favorables, lo que les lleva a responder de forma incorrecta, pues su estrategia es incompleta, ya que no consideran la totalidad de los datos, ni emplean el razonamiento proporcional involucrado en la resolución de situación problemática planteada.

En la categoría "otras respuestas y argumentos" se han incluido aquellas respuestas que presentan argumentos sin sentido, que han sido considerados incorrectos.

Por tanto, a partir del análisis de los distintos tipos de respuestas, podemos evidenciar que el ítem pone de manifiesto un dominio suficiente del conocimiento común del contenido en relación a la comparación de probabilidades simples y a la noción de juego equitativo, asociado principalmente a un razonamiento de tipo proporcional.

5.3.3.1.7 Análisis del subítem 7a)

Tal y como se mencionó en el capítulo 4, el propósito de este subítem es evaluar el conocimiento común del contenido en relación a la comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace. Para ello, se ha planteado una situación problemática (figura 5.45) que se basa en el lanzamiento de un dado, exponiendo la secuencia de los resultados obtenidos en 10 lanzamientos sucesivos.

> **Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:**
>
> ***Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?***

Figura 5.45 Situación problemática subítem 7a)

Por medio de esta situación se pretende evaluar la percepción de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajos las mismas condiciones, y de qué manera ésta influye en las respuestas de los profesores.

Como podemos observar en la tabla 5.38, solo el 3,2% de los profesores da una respuesta y argumento correcto al subítem. Un porcentaje considerable (63,4%) lo resuelve de manera incorrecta, mientras que un 14% lo resuelve correctamente pero en base a un argumento incorrecto, o bien no argumenta su respuesta.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	3	3,2
Parcialmente correcta	13	14,0
Incorrecta	59	63,4
No responde	18	19,4
Total	93	100

Tabla 5.38 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 7a)

Una vez analizadas las prácticas matemáticas presentes en las distintas respuestas, las hemos clasificado en base a sus argumentos, tal clasificación que se muestra en la tabla 5.39. Esta clasificación nos ha permitido indagar en el conocimiento común del contenido en relación a la percepción de la independencia de sucesos que poseen estos profesores.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Todos los números del 1 al 6 tienen igual probabilidad de salir, pues son sucesos equiprobables.	3	3,2
Todos los números del 1 al 6 tienen igual probabilidad de salir.	13	14
Es más probable que salga el 2 ó el 3 ya que han salido mayor número de veces.	27	29
Es más probable que salga el 4 ó el 6 ya que han salido menos veces.	19	20,4
Es más probable que salga el 1 ó el 5 ya que no ha salido en ninguno de los lanzamientos anteriores.	10	10,8
Otras respuestas y argumentaciones	3	3,2
No responde	18	19,4
Total	93	100

Tabla 5.39 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al subítem 7a)

Como se observa en la tabla 5.39 un 3,2% de los profesores argumentó correctamente su respuesta a la pregunta *¿qué número es más probable que salga?*, enfocando su argumento en la independencia y en la equiprobabilidad de los sucesos. Un ejemplo de ello es la respuesta siguiente: *"Si el dado tiene 6 caras la probabilidad es la misma para cualquier número, y no varia la probabilidad la cantidad de números que ya han salido"* (profesor 20).

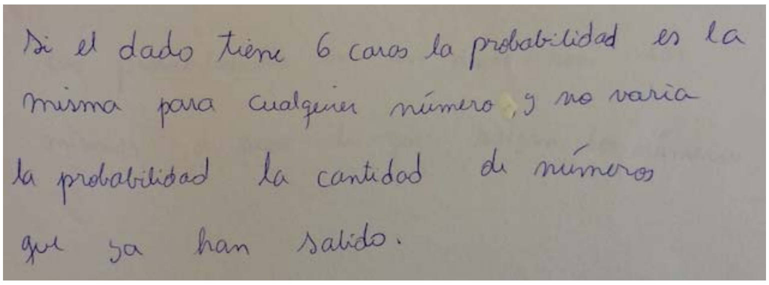

Si el dado tiene 6 caras la probabilidad es la misma para cualquier número, y no varía la probabilidad la cantidad de números que ya han salido.

Figura 5.46 Respuesta del profesor 20 al subítem 7a)

En la respuesta anterior, se observa que el argumento del profesor no se ve influenciado por la secuencia de resultados ya obtenidos. Mientras que un 14% logra identificar que todos los números del espacio muestral tienen igual probabilidad de salir, pero no argumentan su respuesta, o bien el argumento empleado no es correcto. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Creo que todos los números tienen la misma probabilidad de salir"* (profesor 74).

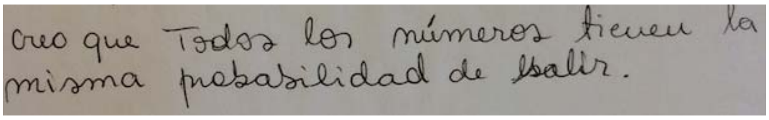

Creo que Todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

Figura 5.47 Respuesta del profesor 74 al subítem 7a)

En lo que se refiere a las respuestas incorrectas, en la tabla 5.39 se observa que el argumento utilizado mayoritariamente (29%) es el considerar que en un nuevo lanzamiento del dado es más probable que salga el 2 ó el 3, ya que estos números han salido mayor número de veces. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la otorgada por el profesor 67: *"El número que es más probable que salga puede ser el 2 y 3, ya que han salido más veces"*.

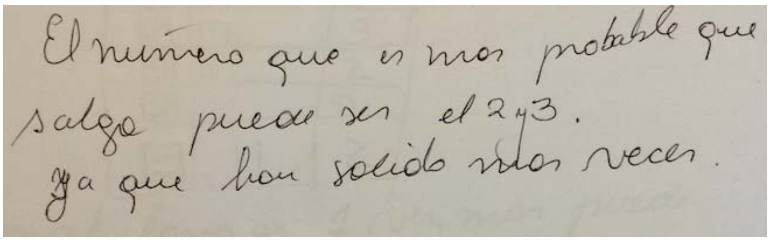

El número que es más probable que salga puede ser el 2 y 3.
ya que han salido más veces.

Figura 5.48 Respuesta del profesor 67 al subítem 7a)

En este tipo de respuesta es posible observar una fuerte influencia de la secuencia de resultados obtenidos en los lanzamientos anteriores, conflicto conocido como el sesgo de la recencia positiva, el cual ha sido descrito por Piaget e Inhelder (1951). Contrario a este tipo de sesgo están aquellos profesores (20,4%) que presentan el sesgo de la recencia negativa, es decir, que consideran que puesto que ya ha salido muchas veces el 2 y el 3, ya es momento de que salga el 4 ó el 6 pues tales números han salido menos veces. Un ejemplo de este tipo de respuesta es: *"El 4 o el 6, porque ha salido menos veces"* (profesor 11).

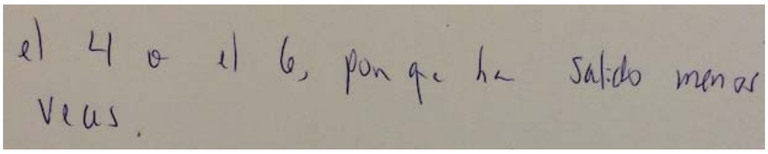

el 4 o el 6, porque ha salido menos veces.

Figura 5.49 Respuesta del profesor 11 al subítem 7a)

Por último, dentro de los argumentos asociados a las respuestas incorrectas encontramos con una menor frecuencia (10,8%) aquellos profesores que consideran que es más probable que al lanzar el dado nuevamente, se obtenga un 1 ó un 5, puesto que estos números no han salido en los lanzamientos anteriores, manifestando así el sesgo de la recencia negativa. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Como cada número tiene la misma probabilidad 1:6, y el número 1 y el número 5 no han salido aún, es más probable que salgan"* (profesor 22).

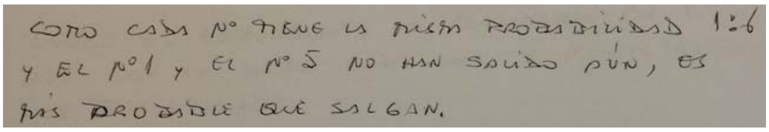

COMO CADA Nº TIENE LA MISMA PROBABILIDAD 1:6 Y EL Nº 1 Y EL Nº 5 NO HAN SALIDO AÚN, ES MÁS PROBABLE QUE SALGAN.

Figura 5.50 Respuesta del profesor 22 al subítem 7a)

Si observamos con detención esta respuesta, en el argumento aparece algo bastante curioso y es que pese a que el profesor reconoce que todos los números tienen la misma probabilidad de salir (lo que él indica como 1 es a 6) señala que es más probable que en un próximo lanzamiento salgan aquellos números que hasta el momento no han salido, es decir, el 1 y el 5. Aquí se ve claramente la fuerte influencia que tiene el sesgo de la recencia negativa en la comprensión de la independencia de sucesos.

En lo que respecta a aquellas respuestas que clasificamos como "otras respuestas y argumentaciones", en ella incluimos respuestas que no tienen relación con la pregunta y que presentan argumentos sin sentido, tales respuestas corresponden a un 3,2%. Por otro lado, nos encontramos que un porcentaje de 19,4% de los profesores, que no deja de ser considerable, no responde al subítem, lo que pone de manifiesto la falta de conocimiento en relación al tema.

En consecuencia, a partir del análisis de los distintos tipos de argumentos presentes en las respuestas otorgadas por los profesores de primaria al subítem 7a) hemos evidenciado una gran debilidad en el conocimiento común del contenido sobre la comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades desde un enfoque frecuencial. Además, nos hemos encontrado con la presencia de los conflictos descritos en el análisis *a priori*, los cuales tienen una fuerte influencia en las respuestas y argumentos de estos profesores de primaria.

5.3.3.1.8 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento común del contenido

A partir del análisis realizado en el apartado anterior, consideramos que los profesores presentan grandes debilidades en lo que al conocimiento común del contenido se refiere, ya que presentan un conocimiento deficiente, y en algunos casos muy deficiente, en casi la totalidad de los ítems que evalúan este tipo de conocimiento. Puesto que a excepción del ítem 6, que aborda a un nivel muy elemental la comparación de probabilidades simples y la noción de juego equitativo, el resto de los ítems y subítems que miden este tipo de conocimiento presenta un bajo porcentaje de respuestas correctas.

Tal situación se puede visualizar de mejor manera mediante el gráfico de la figura 5.51 que muestra la composición de los distintos tipos de respuestas de acuerdo con la variable “grado de corrección”, es decir, los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, así como el porcentaje de respuestas sin responder, para cada uno de los ítems y subítems que evalúan el conocimiento común del contenido. De este modo, a partir de la figura 5.51, se observa que para este tipo de conocimiento predominan las respuestas incorrectas, pues éstas en promedio superan el 40%.

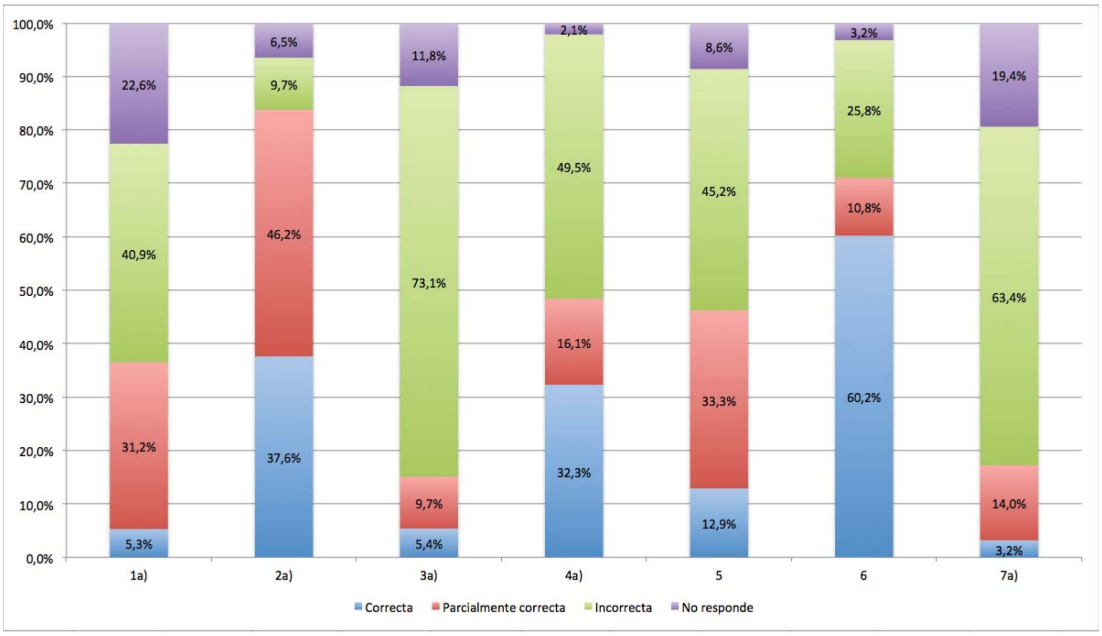


Figura 5.51 Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento común del contenido de acuerdo con el grado de corrección

En lo que sigue presentamos un resumen y un análisis estadístico de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido. Tales puntuaciones teóricamente van desde los 0 a los 14 puntos puesto que son siete los ítems y subítems que evalúan este tipo de conocimiento. En la tabla 5.40 se muestra el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los 93 profesores.

	Estadístico	Error típ.
Media	4,75	0,232
Mediana	5	
Moda	4	
Desviación típica	2,239	
Varianza	5,014	
Asimetría	-0,152	0,250
Curtosis	-0,835	0,495
Mínimo	0	
Máximo	9	
Rango	9	
Recuento	93	
Percentiles		
25	3	
50	5	
75	7	

Tabla 5.40 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido

En la tabla 5.40 se observa que ningún profesor respondió de manera correcta los siete ítems y subítems que miden el conocimiento común del contenido, puesto que los puntajes totales fluctúan entre 0 y 9 puntos. Lo que sumando al hecho de que la media fue de 4,75 nos evidencia que el desempeño de los profesores fue muy bajo, ya que la media teórica para este tipo de conocimiento se encuentra en los 7 puntos, es decir, en promedio los profesores obtuvieron un rendimiento muy por debajo de la media. Por otro lado, se observa que el coeficiente de asimetría de Fisher de -0,152 nos indica que la distribución de los puntajes es asimétrica negativa, es decir, que se observa una mayor concentración de los puntajes totales a la izquierda de la media. Lo anterior, se aprecia de mejor manera por medio del *box plot* (figura 5.52) que muestra la distribución de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido.

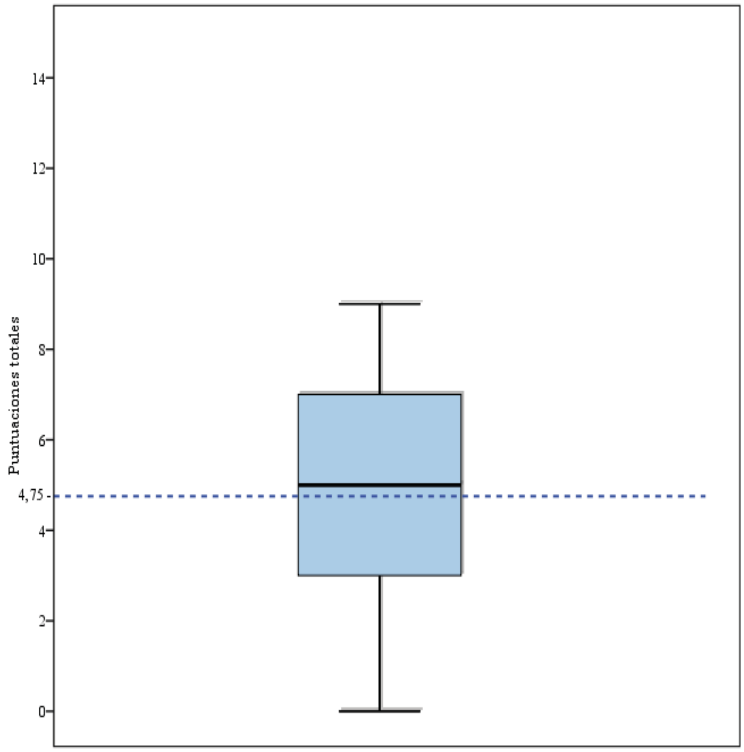


Figura 5.52 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media para el conocimiento común del contenido

En el *box plot* se observa que la mediana se encuentra muy ligeramente más cercana al tercer cuartil, lo que significa que las puntuaciones se encuentra ligeramente más concentradas en la zona superior del *box plot*. Así mismo, en el histograma de frecuencias de la figura 5.53 se observa que las puntuaciones totales se concentran ligeramente en torno a la media de 4,75 puntos, con una desviación típica de 2,239 puntos.

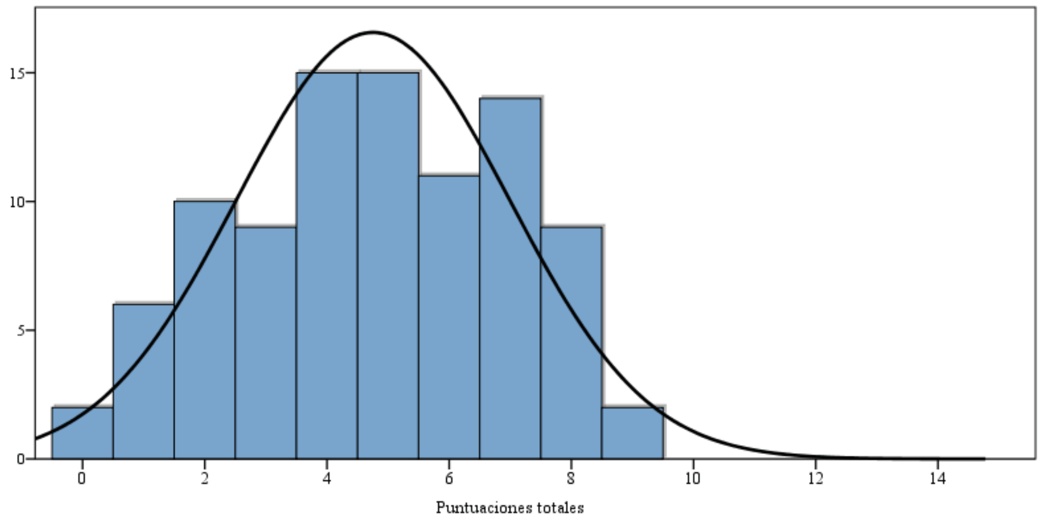


Figura 5.53 Puntuaciones totales del conocimiento común del contenido

Por su parte, la tabla 5.41 muestra las frecuencia de las puntuaciones totales obtenidas por los profesores en lo que se refiere al conocimiento común del contenido.

Puntajes totales	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
0	2	2,2	2,2
1	6	6,5	8,6
2	10	10,8	19,4
3	9	9,7	29,0
4	15	16,1	45,2
5	15	16,1	61,3
6	11	11,8	73,1
7	14	15,1	88,2
8	9	9,7	97,8
9	2	2,2	100,0
Total	93	100,0	

Tabla 5.41 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del conocimiento común del contenido

A partir de la tabla 5.41 se observa que 25 profesores (26,9%) obtuvo una puntación igual o superior al 50% de la puntación total, mientras que el 73,1% restante obtuvo una puntuación por debajo del 50%.

De esta manera, los datos y gráficos expuestos nos dan clara evidencia de los bajos resultados obtenidos por los profesores, es decir, que estos presentan una gran deficiencia en lo que al conocimiento común del contenido sobre probabilidad se refiere.

A continuación se presenta un análisis de los resultados para el conocimiento común del contenido de acuerdo con las características de los profesores que han respondido el cuestionario.

5.3.3.1.8.1 Resultados para el conocimiento común del contenido según "especialidad"

Primeramente, en la figura 5.54 podemos observar cómo se comportan las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido en relación a la variable "especialidad".

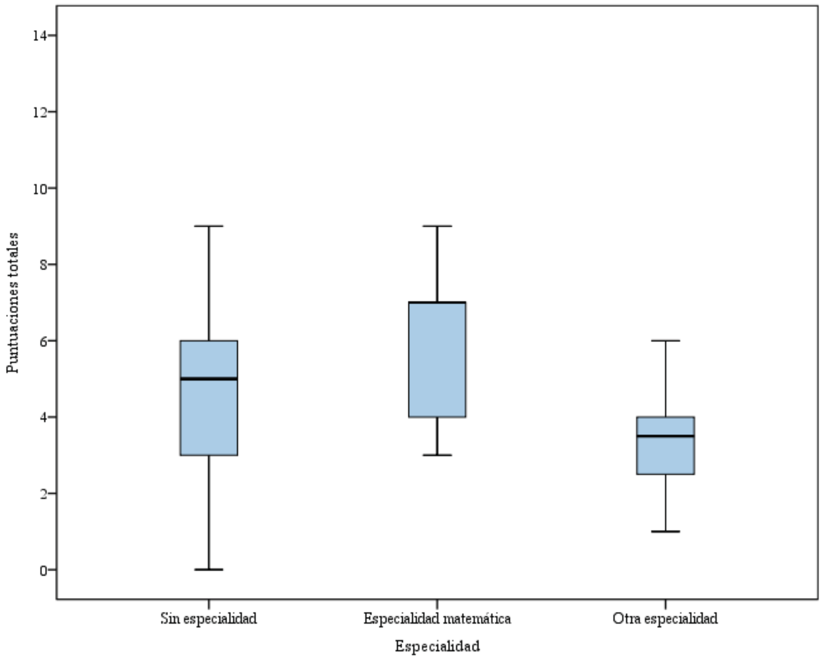


Figura 5.54 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento común del contenido según especialidad

Una primera observación que podemos realizar es que la mediana de los profesores con especialidad matemática se encuentra por encima de la de los profesores sin especialidad y de otra especialidad, siendo estos últimos los que presenta una menor mediana. Por otro lado, se observa que para los tres grupos las medianas se encuentran próximas al tercer cuartil, lo que nos indica que las puntuaciones se concentran, mayoritariamente, en la zona superior del *box plot*, sobre todo en el caso de los profesores con especialidad matemática para los cuales la mediana de las puntuaciones totales está muy próxima al tercer cuartil.

Además de analizar la distribución de las puntuaciones totales según especialidad para el conocimiento común del contenido, consideramos necesario presentar el análisis descriptivo (tabla 5.42) del comportamiento de la variable puntuación total para cada uno de los grupos que componen la variable especialidad.

	Sin especialidad		**Con especialidad matemática**		**Con otra especialidad**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	71		14		8	
Media	4,70	0,267	5,79	0,576	3,38	0,532
Mediana	5,00		7,00		3,50	
Varianza	5,068		4,643		2,268	
Desv. típ.	2,251		2,155		1,506	
Mínimo	0		3		1	
Máximo	9		9		6	
Rango	9		6		5	
Amplitud intercuartil	3		4		2	
Asimetría	-0,261	0,285	-0,162	0,597	0,152	0,752
Curtosis	-0,780	0,563	-1,701	1,154	0,658	1,481
Percentil						
25	3,00		3,75		2,25	
50	5,00		7,00		3,50	
75	6,00		7,25		4,00	

Tabla 5.42 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido según especialidad

A partir de la tabla 5.42 se observa que los profesores con especialidad matemática tuvieron, en promedio, un mejor desempeño en los ítems y subítems referidos al conocimiento común del contenido. Sin embargo, este desempeño es bajo si consideramos que la puntuación teórica total de los ítems y subítems referidos a este tipo de conocimiento es de 14 puntos. Mientras que los que peor desempeño obtuvieron son los profesores que pertenecen a otra especialidad, pero que sin embargo se encuentran realizando clases de matemática en educación primaria.

5.3.3.1.8.2 Resultados para el conocimiento común del contenido según "años de experiencia"

Para estudiar el comportamiento de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido en relación a la variable "años de experiencia", hemos construido un *box plot* (figura 5.55) que nos permite comparar las distribuciones de las puntuaciones totales en cada uno de los grupos. A partir de la figura 5.55 se observa que la mediana de las puntuaciones totales de los profesores con más de 10 años de experiencia es ligeramente mayor que la del resto de los profesores, siendo el grupo de profesores de entre 3 a 5 años de experiencia quienes presentan la mediana más baja. Del mismo modo se observa que en el caso de los profesores con menos de 3 años de experiencia y con más de 10 años de experiencia las medianas se encuentran más próximas al tercer cuartil, lo que significa que las puntuaciones totales se concentran en la zona superior del *box plot*. A diferencia de las puntuaciones de los profesores que tienen entre 3 a 10 años de experiencia cuyas puntuaciones se concentran, mayoritariamente, en las zonas bajas de sus respectivos diagramas de caja. Sin embargo, cabe destacar que en general las puntuaciones son bajas para los cuatro grupos, pues los ítems y subítems referidos al conocimiento común del contenido oscilan entre los 0 y los 14 puntos.

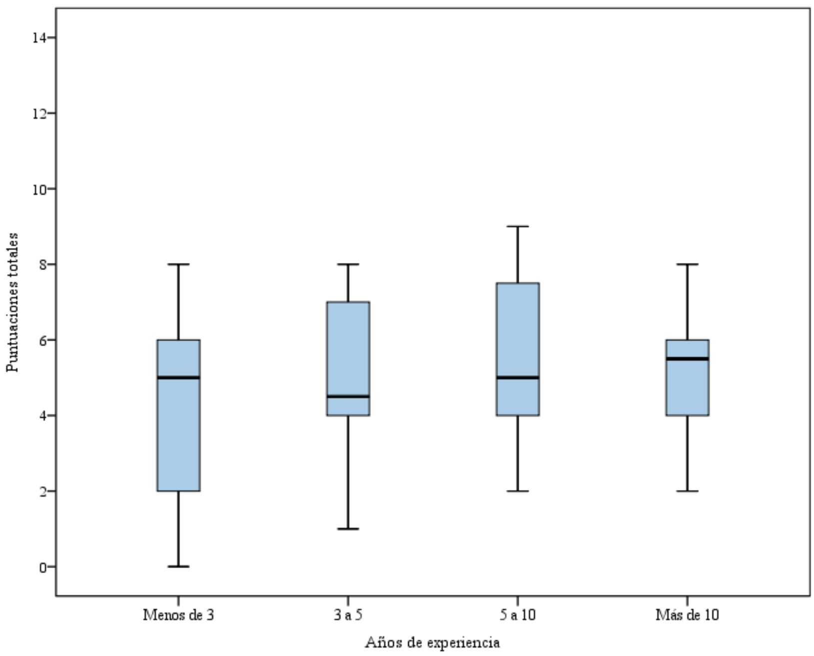


Figura 5.55 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento común del contenido según años de experiencia

Para complementar este estudio, presentamos el análisis descriptivo (tabla 5.43) del comportamiento de la variable puntuación total para cada uno de los grupos que componen la variable años de experiencia. Así, de la tabla 5.43 se desprende que los profesores con entre 5 a 10 años de experiencia tuvieron, en promedio, un mejor desempeño en los ítems y subítems referidos al conocimiento común del contenido.

	Menos de 3 años		Entre 3 a 5 años		Entre 5 a 10 años		Más de 10 años	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	43		20		16		14	
Media	4,26	0,363	4,80	0,474	5,69	0,546	5,14	0,467
Mediana	5,00		4,50		5,00		5,50	
Varianza	5,671		4,484		4,763		3,055	
Desv. típ.	2,381		2,118		2,182		1,748	
Mínimo	0		1		2		2	
Máximo	8		8		9		8	
Rango	8		7		7		6	
Amplitud intercuartil	4		3		4		3	
Asimetría	-0,064	0,361	-0,189	0,512	0,106	0,564	-0,253	0,597
Curtosis	-1,154	0,709	-0,676	0,992	-1,174	1,091	-0,750	1,154
Percentil								
25	2,00		4,00		4,00		3,75	
50	5,00		4,50		5,00		5,50	
75	6,00		7,00		7,75		6,25	

Tabla 5.43 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido según años de experiencia

Sin embargo, este desempeño es bajo si consideramos que la puntuación teórica total, de los ítems y subítems referidos a este tipo de conocimiento, es de 14 puntos. Mientras que los que peor desempeño obtuvieron son los profesores que tienen menos de tres años de experiencia.

5.3.3.1.8.3 Resultados para el conocimiento común del contenido según "dependencia del establecimiento"

La figura 5.56 nos muestra las distribuciones de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido según el tipo de dependencia del establecimiento en el cual se desempeñan los profesores. Es posible observar cierta similitud en las medianas de las puntuaciones obtenidas por los profesores que se desempeñan en establecimientos municipales y particulares subvencionados, las cuales están muy cercanas a los 5 puntos. En tanto que las puntuaciones de los profesores que se desempeñan en establecimientos particulares pagados presentan una mediana ligeramente menor.

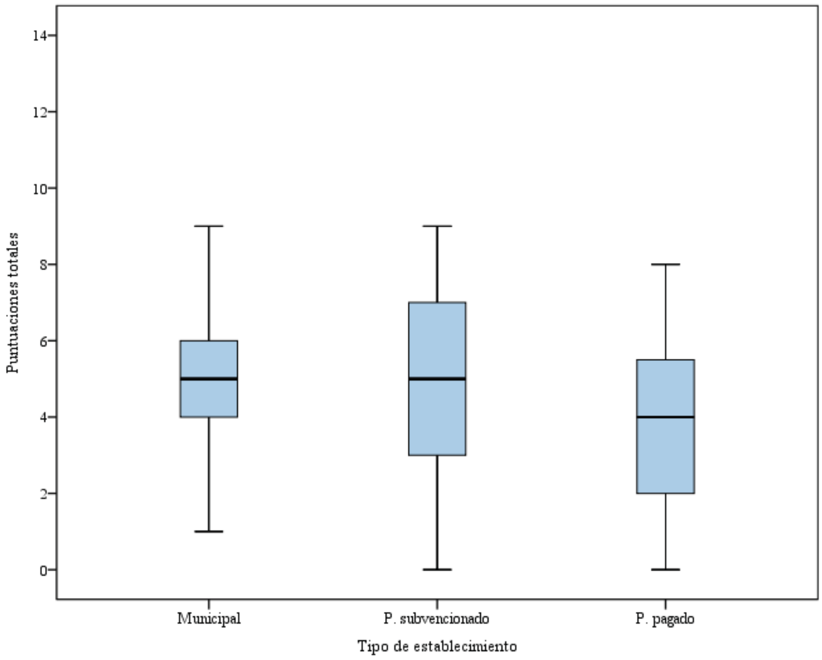


Figura 5.56 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento común del contenido según tipo de establecimiento

Sin embargo, si observamos cada uno de los *box plot* por separado, queda de manifiesto que las puntuaciones obtenidas por los profesores de establecimientos municipales son ligeramente mejores que las de los profesores que se desempeñan en establecimientos particulares pagados. No obstante, es importante señalar, que al igual que en los casos anteriores, que en general las puntuaciones son bajas para los tres grupos, pues los ítems y subítems referidos al conocimiento común del contenido oscilan entre los 0 y los 14 puntos.

Por su parte, la tabla 5.44 nos muestra el análisis descriptivo del comportamiento de la puntuación total para cada uno de los grupos que componen la variable "dependencia del establecimiento".

	Municipal		**Particular subvencionado**		**Particular pagado**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	31		55		7	
Media	4,90	0,369	4,78	0,307	3,86	1,079
Mediana	5,00		5,00		4,00	
Varianza	4,224		5,174		8,143	
Desv. típ.	2,055		2,275		2,854	
Mínimo	1		0		0	
Máximo	9		9		8	
Rango	8		9		8	
Amplitud intercuartil	2		4		5	
Asimetría	-0,157	0,421	-0,151	0,322	0,321	0,794
Curtosis	-0,455	0,821	-0,928	0,634	-0,915	1,587
Percentil						
25	4,00		3,00		2,00	
50	5,00		5,00		4,00	
75	6,00		7,00		7,00	

Tabla 5.44 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido según dependencia del establecimiento

A partir de la tabla 5.44 se observa que los profesores que se desempeñan en establecimiento municipales tuvieron, en promedio, un mejor desempeño que los restantes. Ahora, si consideramos que la puntuación máxima en lo que refiere a conocimiento común del contenido es de 14 puntos, se evidencia que el desempeño indistintamente del tipo de establecimiento es muy bajo para los tres grupos.

5.3.3.1.8.4 Resultados para el conocimiento común del contenido según "género"

Por último, analizamos los resultados de acuerdo con la variable "género". Para ello, observamos primeramente, la distribución de las puntuaciones totales para mujeres y hombres por medio del *box plot* que se muestra en la figura 5.57.

A partir de la figura 5.57 se observa que en el caso de las mujeres, que la mediana de las puntuaciones está ligeramente más cercana al tercer cuartil, lo que quiere decir que las puntaciones se concentran en la parte superior del *box plot*. Mientras que en el caso de los hombres, sucede todo lo contrario, puesto que la mediana está más próxima al primer cuartil. Por tanto, en ambos casos las distribuciones de las puntuaciones totales son asimétricas. Además se observa que las puntuaciones totales obtenidas por las mujeres son un poco más dispersas que las obtenidas por los hombres. No obstante, tanto las puntuaciones máximas como mínimas fueron obtenidas por las mujeres.

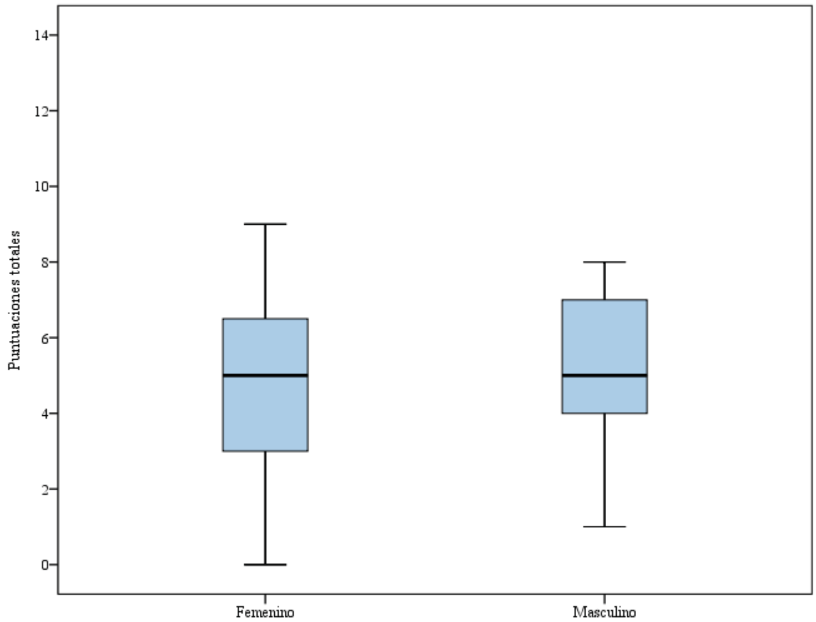


Figura 5.57 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento común del contenido según género

Por otro lado, en la tabla 5.45 se muestran los estadísticos descriptivos del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) al interior de cada uno de los grupos (mujer, hombre). En la que se observa que los hombres obtuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que las mujeres, con una desviación típica también ligeramente menor. Es importante señalar que pese a lo anterior los resultados en sí son muy bajos.

	Mujer		**Hombre**	
	Estadístico	Error típ.	Estadístico	Error típ.
Recuento	68		25	
Media	4,65	0,276	5,04	0,430
Mediana	5,00		5,00	
Varianza	5,187		4,623	
Desv. típ.	2,277		2,150	
Mínimo	0		1	
Máximo	9		8	
Rango	9		7	
Amplitud intercuartil	4		4	
Asimetría	-0,64	0,291	-0,411	0,464
Curtosis	-0,794	0,574	-0,790	0,902
Percentil				
25	3,00		4,00	
50	5,00		5,00	
75	6,50		7,00	

Tabla 5.45 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento común del contenido según género

5.3.3.2 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento ampliado del contenido.

Este tipo de conocimiento al igual que el conocimiento común del contenido se refiere a conocimientos matemáticos, que no se encuentran necesariamente enfocados a la enseñanza. El conocimiento ampliado del contenido se refiere a conocimientos matemáticos más avanzados en el currículo que el profesor de poseer en relación a un determinado tema, en nuestro caso a la probabilidad. Por tanto, el profesor debe estar en conocimiento de las matemáticas que vienen o que verán más adelante sus estudiantes en niveles educativos posteriores, esto con la finalidad de orientar a sus estudiantes.

Para estudiar el conocimiento ampliado del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo, se han analizado las prácticas matemáticas presentes en las respuestas obtenidas a la pregunta 7d) del Cuestionario CDM-Probabilidad. Puesto que de acuerdo con lo planteado por Godino, Batanero y Font (2007), se trataría de un conocimiento inobservable, al cual es posible acceder por medio del conjunto de prácticas presentes en las respuestas de los profesores a las situaciones problemáticas planteadas. Al igual que en el caso del conocimiento común del contenido, hemos llevado acabo el análisis por medio las siguientes fases (figura 5.58):

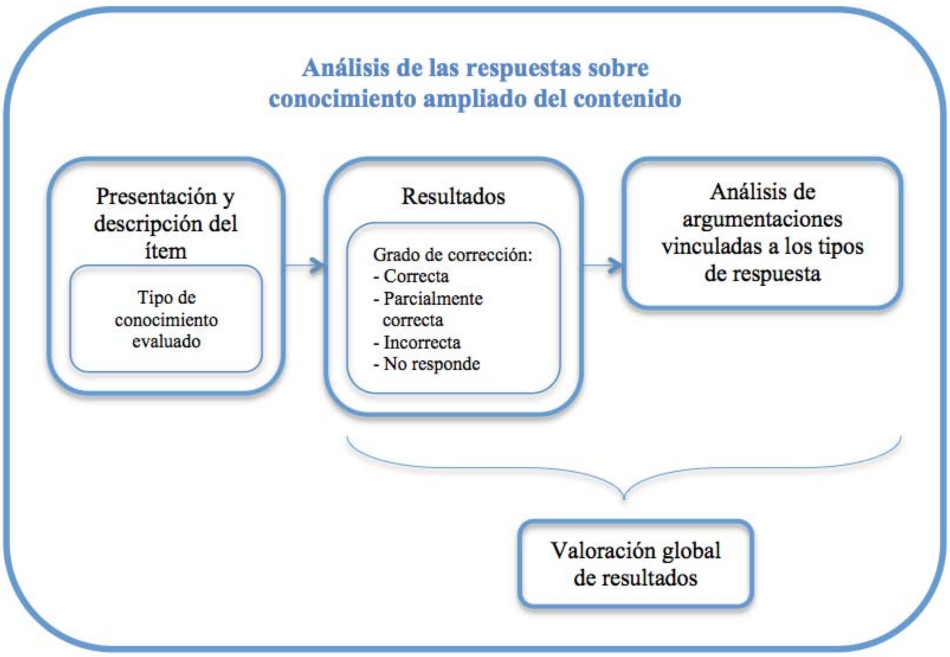


Figura 5.58 Fases presentes en el análisis de las respuestas referidas al conocimiento ampliado del contenido

Iniciamos el análisis con una breve presentación y descripción del ítem, que recuerda algunos de los aspectos presentados en el análisis *a priori* para cada uno de los ítems realizado en el capítulo 4; continuamos con la presentación de los resultados en base a la variable cuantitativa grado de corrección de la respuesta, para luego analizar los distintos tipos de argumentos presentes en los distintos tipos de respuestas, y así obtener una valoración global de los resultados obtenidos.

5.3.3.2.1 Análisis del subítem 7d)

El objetivo de este subítem es evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación a la comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace. Para ello, se ha planteado la siguiente situación problemática a los profesores (figura 5.59):

> Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:
>
> *Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?*

Figura 5.59 Situación problemática subítem 7d)

Ante la cual se les pregunta: *¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar, relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?* Así, a través de esta pregunta se busca que el profesor logre vincular este tipo de problema con el cálculo de probabilidades de sucesos independientes, visualizando su importancia para la posterior formalización de la regla de Laplace.

En la tabla 5.46, observamos que este ítem resultó de gran dificultad para los profesores, pues ninguno de ellos logró contestar ni correctamente ni de forma parcialmente correcta. Tan solo el 34,4% de los profesores respondió a esta pregunta, sin embargo, lo hicieron de manera incorrecta.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	0	0
Parcialmente correcta	0	0
Incorrecta	32	34,4
No responde	61	65,6
Total	93	100

Tabla 5.46 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 7d)

Al analizar los argumentos presentes en las respuestas incorrectas, los hemos clasificado como se muestra en la tabla 5.47, no olvidemos, que no se obtuvieron respuestas correctas ni parcialmente correctas, por lo que a continuación mostramos la clasificación para los argumentos incorrectos.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Probabilidad en problemas de mayor complejidad	30	32,2
Otras respuestas y argumentaciones	2	2,2
No responde	61	65,6
Total	93	100

Tabla 5.47 Frecuencias y porcentajes para los distintos tipos de respuestas al subítem 7d)

La tabla 5.47 deja en evidencia que ninguno de los profesores logró argumentar de forma correcta su respuesta, centrándose la mayoría de ellos (32,2%) en argumentos erróneos mediante los cuales señalan que el tipo de problema planteado se puede relacionar con la probabilidad en problemas de mayor complejidad. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Considero que el contenido del lanzamiento de un dado se puede relacionar con la resolución de problemas de mayor complejidad presentes en el currículo, que requieran incorporar mayor número de variables"* (profesor 93).

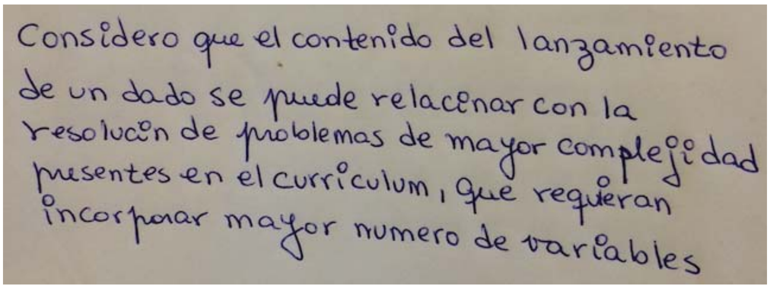


Figura 5.60 Respuesta del profesor 93 al subítem 7d)

Como se observa en este tipo de respuesta, primeramente, el profesor no logra identificar el contenido vinculado a la situación problemática planteada, ni tampoco logra visualizar con qué tipo de conceptos más avanzados se puede relacionar este tipo de situación, pues solo considera al lanzamiento de dados como un elemento que puede ser utilizado para resolver "problemas de mayor complejidad". Por otro lado, nos encontramos con un 2,2% de los profesores que dio respuestas sin sentido en las cuales expresaban claramente no conocer el contenido, a este tipo de respuestas las hemos clasificado en la categoría "otras respuestas y argumentaciones".

Es importante destacar el alto porcentaje de profesores que no responde (65,6%) lo que es una clara evidencia de falta de conocimiento para responder a la pregunta.

5.3.3.2.2 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento ampliado del contenido.

Finalmente, a partir del análisis de las respuestas otorgadas por los profesores, podemos inferir que éstos presentan un conocimiento ampliado del contenido extremadamente deficiente, ya que ninguno de ellos entrega una respuesta correcta a la pregunta planteada, es decir, no cuenta con los conocimientos matemáticos necesarios que le permitan vincular los contenidos presentes en la situación planteada con aquellos conocimientos matemáticos que serán abordados más adelante en el currículo.

Puesto que para este tipo de conocimiento no se cuenta con respuesta correctas ni parcialmente correctas no corresponde realizar un resumen estadístico de los resultados.

5.3.3.3 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento especializado.

Recordemos que el conocimiento especializado corresponde a aquellos conocimientos que distinguen al conocimiento del profesor del conocimiento de los estudiantes o del de otros profesionales (incluso de los matemáticos), y que permiten al profesor gestionar de manera idónea el aprendizaje de sus alumnos. Para el análisis de este conocimiento especializado, Godino y colaboradores propone el siguiente desglose operativo: *1) conocimiento especializado del contenido*; *2) conocimiento del contenido en relación con los estudiantes*; *3) conocimiento del contenido en relación con la enseñanza*; y *4) conocimiento del contenido en relación con el currículo*.

Además, es importante recordar que tal y como se expuso en el capítulo 4, nuestro estudio pretende indagar en algunos aspectos parciales o iniciales del conocimiento especializado, puesto que el explorar en profundidad cada una de las distintas facetas y componentes del modelo del conocimiento didáctico-matemático resultaría muy pretencioso y ambicioso de nuestra parte, y requiere, por ejemplo, del análisis de aspectos que escapan a nuestro estudio, como el análisis de la idoneidad didáctica de las prácticas de los profesores en acción, de las argumentaciones empleadas en el proceso de enseñanza, entre otros, aspectos a los que no es posible acceder, por completo, por medio de las argumentaciones dadas a las distintas preguntas que componen el cuestionario CDM-Probabilidad.

De este modo, para llevar a cabo el análisis de aspectos parciales o iniciales del conocimiento especializado, hemos realizado dicho análisis a partir del desglose propuesto por Godino, es por esta razón que a continuación se presenta el análisis por separado de las respuestas a los ítems y subítems que conforman cada una de las cuatro subcategorías antes expuestas.

5.3.3.3.1 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido especializado

Este tipo de conocimiento de acuerdo a lo planteado por Pino-Fan, Font y Godino (2013), es aquel conocimiento extra que distingue al profesor de otros ciudadanos y de otros profesionales que no son profesores pero que tienen una preparación afín en matemáticas, se refiere al conocimiento especializado del contenido matemático en cuestión, para el cual es necesario que el profesor tenga en cuenta tanto la diversidad de significados como la diversidad de objetos y procesos que conllevan dichos significados.

Para evaluar el conocimiento del contenido especializado nos hemos centrado en la reflexión epistémica que los profesores de primaria son capaces de realizar sobre los conceptos y/o propiedades que se ponen en juego en la solución de la situación problemática planteada. Con este fin se han propuesto distintas situaciones problemáticas ante las cuales deben responder a la pregunta *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*. De acuerdo con Godino (2009) para responder a este tipo de pregunta, los profesores tendrán que identificar los distintos conceptos y/o propiedades involucradas en la solución de la situación problemática planteada.

En consecuencia, para analizar el conocimiento del contenido especializado sobre probabilidad que poseen los profesores de primaria en activo, nos hemos centrado en los conceptos y/o propiedades identificados por los profesores y que se encuentran presentes en las respuestas a las preguntas 1c), 2b), 3b) y 4b) del Cuestionario CDM-Probabilidad.

Para ello, se han seguido las siguientes fases que se muestran en la figura 5.61. Tales fases consisten en una breve presentación y descripción del ítem, que recuerda algunos de los aspectos presentados en el análisis *a priori* para cada uno de los ítems realizado en el capítulo 4; continuamos con la presentación de los resultados en base a la variable cuantitativa grado de corrección de la respuesta, para luego observar qué conceptos y/o propiedades fueron mejor identificados por los profesores, finalizando con una valoración global de los resultados obtenidos.

Figura 5.61 Fases presentes en el análisis de las respuestas referidas al conocimiento del contenido especializado

Por último, terminamos esta sección con una síntesis del análisis de los resultados sobre el conocimiento del contenido especializado, y con un resumen estadístico de los puntajes obtenidos en relación al conocimiento del contenido especializado.

Un punto importante de señalar antes de comenzar con el análisis de las respuestas sobre el conocimiento del contenido especializado, es que en concordancia con lo que se señala en la rúbrica (Anexo 5) hemos definido el grado de corrección de las respuestas de acuerdo al siguiente criterio:

- Respuesta correcta: si el profesor identifica cuatro o más conceptos y/o propiedades de interés involucradas en la resolución de la situación problemática planteada.
- Respuesta parcialmente correcta: si el profesor identifica dos o tres conceptos y/o propiedades de interés involucradas en la resolución de la situación problemática planteada.
- Respuesta incorrecta: si el profesor identifica un concepto y/o propiedad de interés involucrada en la resolución de la situación problemática planteada.

5.3.3.3.1.1 Análisis del subítem 1c)

El propósito de este subítem es evaluar el conocimiento especializado del contenido en relación a la comprensión de los profesores de primaria de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajos las mismas condiciones de un experimento aleatorio. Para ello se les presentó la situación problemática de la figura 5.62.

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

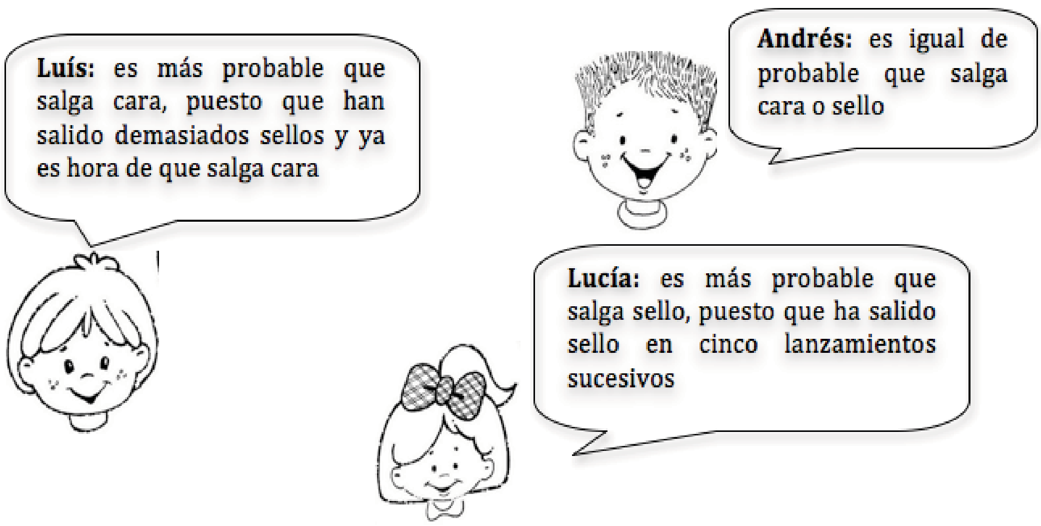


Figura 5.62 Situación problemática ítem 1

A partir de esta situación se pidió a los profesores que identifiquen *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*

A continuación en la tabla 5.48 se resumen los resultados de las respuestas a esta pregunta. En ella podemos observar que los profesores tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, pues ninguno de ellos logró identificar 4 o más conceptos y/o propiedades involucradas. Solo 2 de los 93 profesores (2,2%) logran identificar 2 o 3 conceptos y/o propiedades, mientras que un 72% solo un concepto y/o propiedad involucradas en la resolución del ítem 1.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	0	0,0
Parcialmente correcta	2	2,2
Incorrecta	67	72,0
No responde	24	25,8
Total	93	100

Tabla 5.48 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 1c)

A partir de las respuestas de los profesores y del análisis *a priori* presentado en el capítulo 4 hemos elaborado la tabla 5.49 que muestra los tipos de conceptos y/o propiedades que se encuentran presentes y ausentes en las respuestas de los profesores.

Tipos de conceptos y/o propiedades identificados	Frecuencia	Porcentaje
Experimento aleatorio	0	0
Espacio muestral	7	7,5
Probabilidad	29	31,1
Regla de Laplace	12	12,9
Equiprobabilidad	3	3,2
Simetría de la moneda	4	4,3
Independencia de sucesos	0	0
Otros (fracciones, porcentajes, proporciones, frecuencia, etc.)	18	19,4
No responde	24	25,8

Tabla 5.49 Conceptos y/o propiedades identificadas por los profesores en la resolución de la situación problemática planteada en el ítem 1

En la tabla 5.49 se observa que el concepto involucrado que fue mejor identificado por los profesores es el de probabilidad con un 61,2%, seguido por la regla de Laplace con un 12,9% y espacio muestral con un 7,5%. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Cálculo de probabilidades, espacio muestral, regla de Laplace…"* (profesor 60).

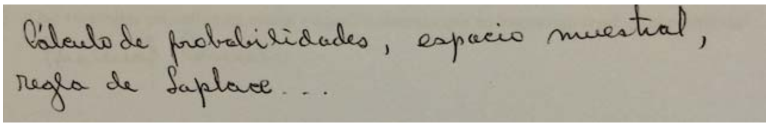

Cálculo de probabilidades, espacio muestral,
regla de Laplace . . .

Figura 5.63 Respuesta del profesor 60 al subítem 1c)

Si bien la noción de simetría de la moneda, no fue mencionada explícitamente, si puede ser deducida a partir de las respuestas de un 4,3% de los profesores. Un ejemplo de esto es la respuesta siguiente: *"Las dos posibilidades, cara o sello, porque es una moneda honesta y hay igual probabilidad"* (profesor 87).

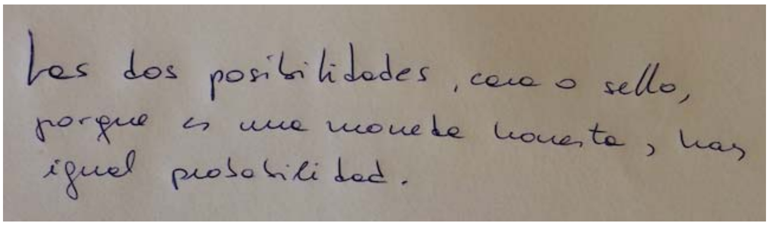

Las dos posibilidades, cara o sello,
porque es una moneda honesta, hay
igual probabilidad.

Figura 5.64 Respuesta del profesor 87 al subítem 1c)

A partir de esta respuesta vemos que el profesor da a entender que dado que el espacio muestral se encuentra conformado por dos posibles resultados cara o sello, ambos sucesos tienen igual probabilidad de ocurrir.

La equiprobabilidad de sucesos ha sido mencionada por muy pocos profesores, específicamente por 3 de ellos, un 3,2%. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Determinar equiprobabilidad de sucesos teóricamente en diversos experimentos"* (profesor 46).

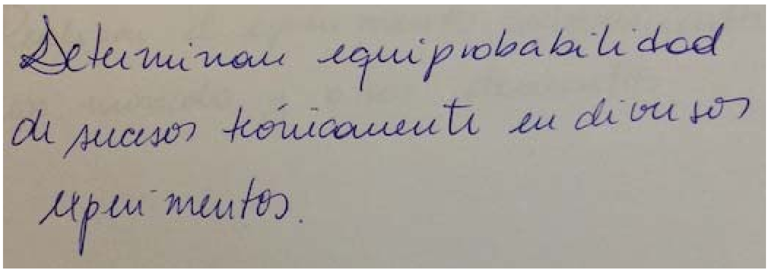

Determinar equiprobabilidad
de sucesos teóricamente en diversos
experimentos.

Figura 5.65 Respuesta del profesor 46 al subítem 1c)

Dentro de las respuestas que hemos incluido en la categoría “otros” se encuentran aquellos profesores que han identificado otros conceptos que no guardan relación directa con los conceptos que se buscaba evidenciar mediante la situación problemática planteada. Un ejemplo de esto es la siguiente respuesta: *“Fracciones, multiplicación, porcentaje”* (profesor 64).

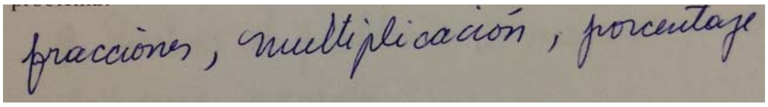


Figura 5.66 Respuesta del profesor 64 al subítem 1c)

Por último, hay que señalar que el experimento aleatorio y la independencia de sucesos, que eran conceptos centrales detrás de la situación problemática, no fueron identificados por ninguno de los profesores. En consecuencia, en base a las respuestas otorgadas por los profesores consideramos que el conocimiento especializado del contenido en relación a la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajos las mismas condiciones de un experimento aleatorio, es muy deficiente para lograr una enseñanza idónea de la probabilidad en la educación primaria.

5.3.3.3.1.2 Análisis del subítem 2b)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento especializado del contenido sobre cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple (figura 5.67).

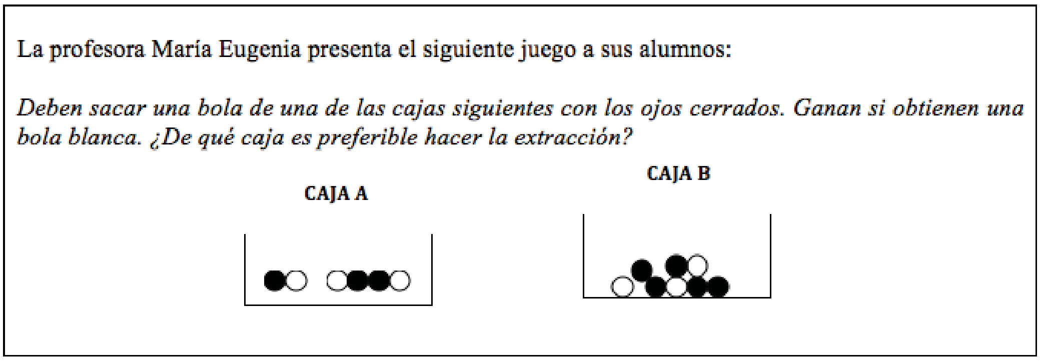


Figura 5.67 Situación problemática ítem 2

Con dicho propósito se pidió a los profesores que identifiquen *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*

En la tabla 5.50 se resumen los resultados de las respuestas obtenidas para esta pregunta. A partir de tales resultados podemos observar que este problema presentó dificultad para los profesores, pues solo uno de ellos (1,1%) logró identificar 4 o más conceptos y/propiedades involucradas en la resolución de la situación problemática planteada. Mientras que un 50,5% logró identificar 2 ó 3 conceptos y/propiedades, y un 34,4% identificó 1 o ninguno.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	1	1,1
Parcialmente correcta	47	50,5
Incorrecta	32	34,4
No responde	13	14,0
Total	93	100

Tabla 5.50 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 2b)

En base a las respuestas brindadas por los profesores y al análisis *a priori* presentado en el capítulo 4, hemos elaborado la tabla 5.51 que muestra los conceptos y/o propiedades mejor y peor identificados por los profesores en relación a la resolución del ítem 2.

Tipos de conceptos y/o propiedades identificados	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Experimento aleatorio	9	9,7
Probabilidad	32	34,4
Comparación de probabilidades	46	49,5
Regla de Laplace	25	26,9
Sucesos no equiprobables	11	11,8
Azar	4	4,3
Casos favorables o posibles	0	0
Otros (fracciones, porcentajes, proporciones, frecuencia, etc.)	17	18,3
No responde	13	14

Tabla 5.51 Conceptos y/o propiedades identificadas por los profesores en la resolución de la situación problemática planteada en el ítem 2

En la tabla 5.51 se observa que los conceptos mejor identificados por estos profesores de primaria fueron comparación de probabilidades (49,5%) y probabilidad (34,4%). Un ejemplo de este tipo de respuestas son: *"Comparar probabilidad de que ocurra algo* *enfrentando dos situaciones"* (profesor 1) y *"Probabilidad, identificando la cantidad total de elementos y aquellos que se quieren extraer"* (profesor 20).

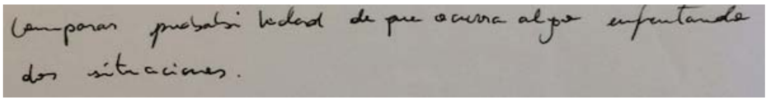

Comparar probabilidad de que ocurra algo enfrentando
dos situaciones.

Figura 5.68 Respuesta del profesor 1 al subítem 2b)

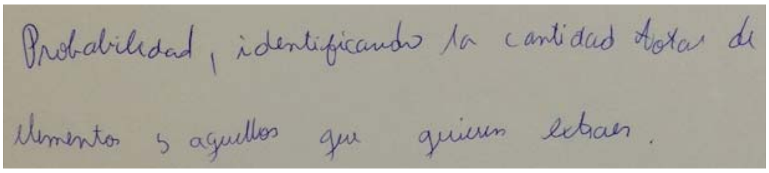

Probabilidad, identificando la cantidad total de
elementos y aquellos que quieren extraer.

Figura 5.69 Respuesta del profesor 20 al subítem 2b)

Por su parte, la regla de Laplace fue identificada por un 26,9% de los profesores, como un concepto involucrado en la resolución de la situación planteada. Un ejemplo es el siguiente: *"probabilidad de un suceso, cálculo de la probabilidad de un suceso, regla de Laplace"* (profesor 29).

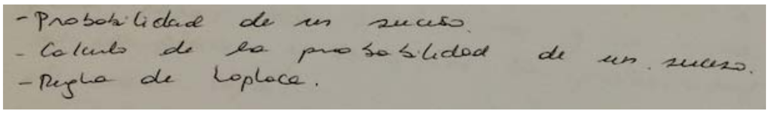

- Probabilidad de un suceso.
- Calculo de la probabilidad de un suceso.
- Regla de Laplace.

Figura 5.70 Respuesta del profesor 29 al subítem 2b)

La no equiprobabilidad de sucesos ha sido identificada por un 11,8% de los profesores. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente *"probabilidad, comparación de sucesos no equiprobables, regla de Laplace"* (profesor 89).

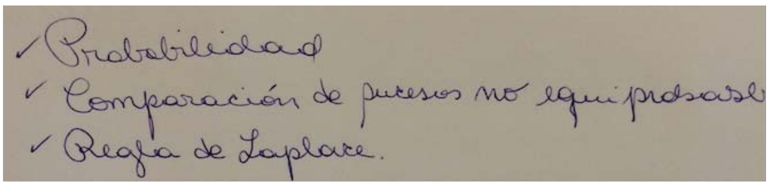

✓ Probabilidad
✓ Comparación de sucesos no equiprobabl
✓ Regla de Laplace.

Figura 5.71 Respuesta del profesor 89 al subítem 2b)

Por último, el experimento aleatorio y azar han sido identificados por un 9,7% y un 4,3%, respectivamente, de los profesores como un concepto necesario para dar una solución correcta al problema. Un ejemplo de esto son las siguientes respuestas: *"Juegos de azar, experimentos aleatorios, probabilidad → más, menos o igualmente* *probable, en 8º básico la regla de Laplace”* (profesor 77) y *“Probabilidad, azar”* (profesor 27).

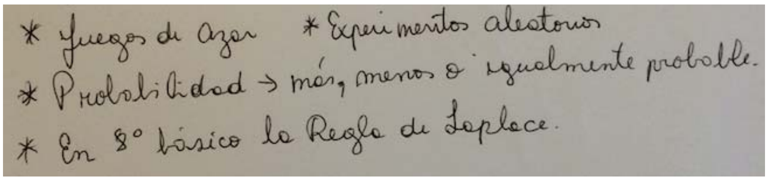


Figura 5.72 Respuesta del profesor 77 al subítem 2b)

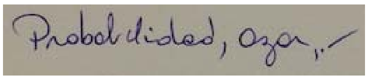


Figura 5.73 Respuesta del profesor 27 al subítem 2b)

Dentro de la categoría “otros” hemos incluido aquellas respuestas en las que los profesores han identificado otros conceptos que no guardan relación directa con los conceptos que se buscaba evidenciar mediante la situación problemática planteada, pero que, en algunos casos, si están involucrados en la resolución de la situación planteada. Un ejemplo de esto es la respuesta del profesor 44: *“Comparación de cantidades, fracciones y probabilidades”*.

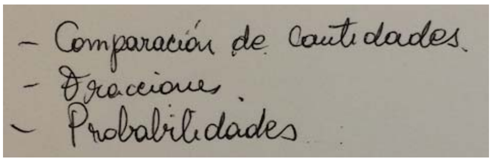


Figura 5.74 Respuesta del profesor 27 al subítem 2b)

Cabe señalar que no hay mención a espacio muestral ni a casos favorables o posibles.

Así, a partir de las frecuencias en las respuestas de los profesores consideramos que el conocimiento especializado del contenido sobre cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple es insuficiente para lograr una enseñanza idónea de la probabilidad en la educación primaria. Una evidencia de ello es que los conceptos centrales que subyacen a la resolución de la situación planteada, fueron mencionados en su totalidad por un 1,1% de los profesores.

5.3.3.3.1.3 Análisis del subítem 3b)

El objetivo de esta situación problemática (figura 5.75) es evaluar el conocimiento del contenido especializado en relación a la comprensión del concepto de suceso seguro y la capacidad combinatoria de los profesores de primaria.

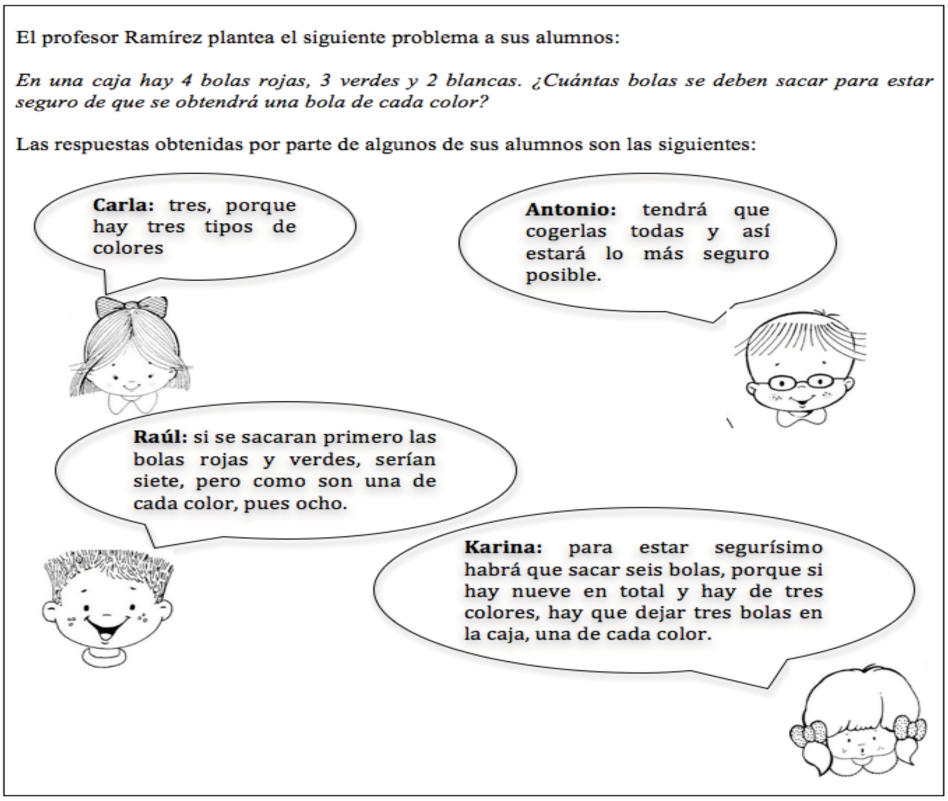


Figura 5.75 Situación problemática ítem 3

Para ello se planteó la siguiente pregunta a los profesores: *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*

En la tabla 5.52 se resumen los resultados de las respuestas obtenidas, en ella podemos observar que al igual que en las preguntas anteriores los profesores presentaron dificultad para responder, ya que solo dos de ellos (2,2%) logró identificar correctamente los conocimientos puestos en juego para la resolución de la situación planteada, es decir, logró identificar 4 o más conceptos y/o propiedades. En tanto que un 40,9% de los profesores logró identificar 2 ó 3 conceptos y/o propiedades y 26,9% logró identificar solo un concepto y/o propiedad correctamente. Por otro lado, el porcentaje de omisión es bastante alto, alcanzado este el 30%.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	2	2,2
Parcialmente correcta	38	40,9
Incorrecta	25	26,9
No responde	28	30,0
Total	93	100

Tabla 5.52 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 3b)

De esta manera, en base a las respuestas brindadas por los profesores y al análisis *a priori* presentado en el capítulo 4, hemos elaborado la tabla 5.53 que muestra los conceptos y/o propiedades identificados por los profesores en relación a la resolución del ítem 3.

Tipos de conceptos y/o propiedades identificados	Frecuencia	Porcentaje
Experimento aleatorio	7	7,5
Espacio muestral	13	14
Probabilidad	63	67,7
Suceso seguro	44	47,3
Razonamiento combinatorio	0	0
Azar	9	9,7
Otros (fracciones, porcentajes, proporciones, datos y azar, etc.)	9	9,7
No responde	28	30

Tabla 5.53 Conceptos y/o propiedades identificadas por los profesores en la resolución de la situación problemática planteada en el ítem 3

De acuerdo con la información presentada en la tabla 5.53 observamos que el concepto mejor identificado es probabilidad con un 67,7%. Un ejemplo de esto es la respuesta del profesor 49: *"Probabilidad".*

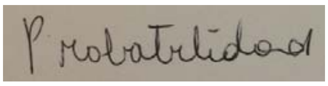


Figura 5.76 Respuesta del profesor 49 al subítem 3b)

Mientras que los conceptos de suceso seguro y espacio muestral fueron identificados por un 47,3% y un 14% de los profesores, respectivamente, siendo estos porcentajes bastante bajos, si consideramos que para dar una correcta solución a la situación problemática planteada es primordial la comprensión del concepto de suceso seguro y una correcta identificación del espacio muestral. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: *"Evento de suceso seguro, probabilidad, posibles resultados (espacio muestral)"* (profesor 93).

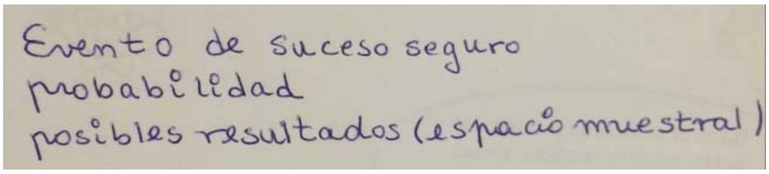

Evento de suceso seguro
probabilidad
posibles resultados (espacio muestral)

Figura 5.77 Respuesta del profesor 93 al subítem 3b)

En lo que a azar se refiere, este fue identificado por un 9,7% de los profesores como un concepto que deben poner en juego los alumnos para dar una solución correcta al problema. un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Probabilidad y azar"* (profesor 6).

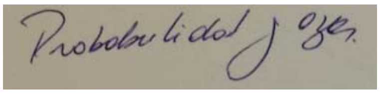

Probabilidad y azar.

Figura 5.78 Respuesta del profesor 6 al subítem 3b)

Dentro de los conceptos menos identificados por los profesores, se encuentran experimento aleatorio y razonamiento combinatorio, con un 7,5% y un 0% respectivamente. Este porcentaje es preocupante, sobre todo para el razonamiento combinatorio, puesto que uno de los propósitos de la situación problemática planteada, era precisamente, evaluar la capacidad combinatoria de los profesores de primaria. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: *"Los conceptos de probabilidad y experimento aleatorio"* (profesor 70).

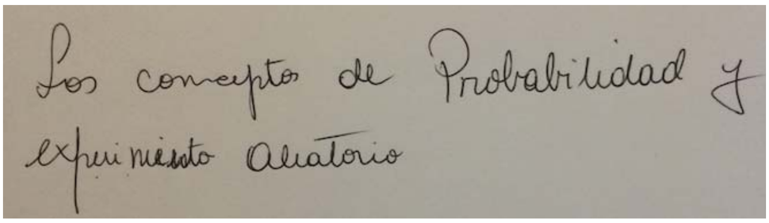

Los conceptos de Probabilidad y
experimento aleatorio

Figura 5.79 Respuesta del profesor 70 al subítem 3b)

En la categoría "otros" hemos incluido aquellas respuestas en las que los profesores han identificado otros conceptos que no guardan relación directa con los conceptos que se buscaba evaluar mediante la situación problemática planteada, pero que, en algunos casos, si están involucrados en la resolución de la situación planteada. Dentro de esta categoría encontramos un 9,7% de los profesores. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: *"Proporciones, fracciones, datos y azar"* (profesor 9).

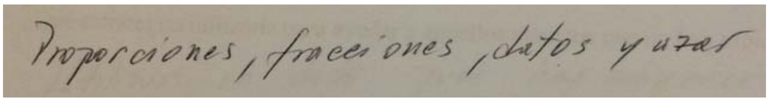

Proporciones, fracciones, datos y azar

Figura 5.80 Respuesta del profesor 9 al subítem 3b)

Por último, a partir de los resultados obtenidos, podemos afirmar que el conocimiento del contenido especializado en relación a la comprensión del concepto de suceso seguro y la capacidad combinatoria de los profesores de primaria, es insuficiente y presenta grandes deficiencias. Una evidencia de ello es que un porcentaje muy bajo de los profesores (2,2%), logró identificar los conceptos y/o propiedades centrarles que se deben poner en juego para una correcta solución de la situación problemática planteada.

5.3.3.3.1.4 Análisis del subítem 4b)

El propósito de esta situación problemática es evaluar el conocimiento del contenido especializado en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables. Para ello se presenta a los profesores la siguiente situación problemática (figura 5.81).

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Figura 5.81 Situación problemática ítem 4

Con este propósito se presentó la siguiente pregunta a los profesores: *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*

A partir de la tabla 5.54 es posible observar que, al igual que para las situaciones problemáticas anteriores, esta pregunta presentó gran dificultad para los profesores pues un porcentaje muy pequeño (2,2%) logró identificar correctamente cuatro o más conceptos y/o propiedades involucrados en la resolución del problema. Un 12,9%

identifica entre dos y tres conceptos y/o propiedades. Mientras que un porcentaje bastante alto (63,4%) logra identificar solo un concepto y/o propiedad.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	2	2,2
Parcialmente correcta	12	12,9
Incorrecta	59	63,4
No responde	20	21,5
Total	93	100

Tabla 5.54 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 4b)

Una vez revisadas las respuestas de acuerdo al grado de corrección, y considerando el análisis *a priori* presentado en el capítulo 4, las hemos categorizado como se muestra en la tabla 5.55.

Tipos de conceptos y/o propiedades identificados	Frecuencia	Porcentaje
Azar y/o aleatoriedad	19	20,4
Equiprobabilidad	0	0
Cálculo de probabilidades	34	36,6
Comparación de probabilidades	18	19,4
Regla de Laplace	16	17,2
Espacio muestral	0	0
Otros (fracciones, porcentajes, razones, proporciones, datos y azar, etc.)	5	5,4
No responde	20	21,5

Tabla 5.55 Conceptos y/o propiedades identificadas por los profesores en la resolución de la situación problemática planteada en el ítem 4

A partir de los resultados expuestos en la tabla 5.55, es posible evidenciar que el contenido mejor identificado, pero aun así con un porcentaje muy bajo, ha sido el cálculo de probabilidades (36,6%). Un ejemplo es la respuesta siguiente: *"Cálculo de probabilidades, predicción, razonamiento matemático"* (profesor 8).

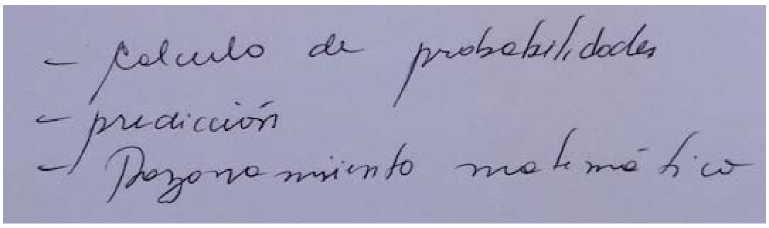


Figura 5.82 Respuesta del profesor 8 al subítem 4b)

En lo que respecta al azar y/o aleatoriedad, éstas nociones fueron identificados por un 20,4% de los profesores. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Probable, más probable, azar, aleatorio"* (profesor 67).

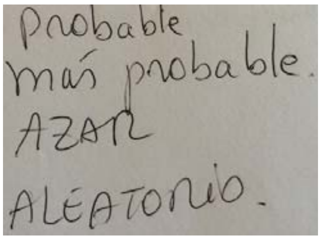

probable
más probable.
AZAR
ALEATORIO.

Figura 5.83 Respuesta del profesor 67 al subítem 4b)

Otro de los conceptos que se encuentra dentro de los mejor identificado, pero aun así a nuestro parecer con un porcentaje bajo, es comparación de probabilidades con un 19,4%. Un ejemplo de ello es la respuesta del profesor 29: *"Probabilidad de un evento, regla de Laplace, comparación de probabilidades"*.

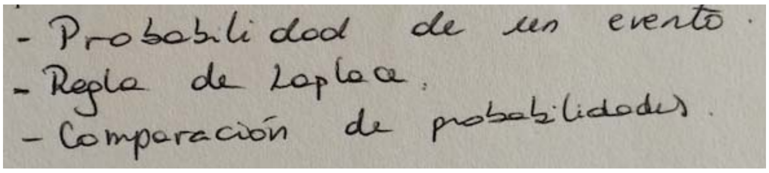

- Probabilidad de un evento.
- Regla de Laplace.
- Comparación de probabilidades.

Figura 5.84 Respuesta del profesor 29 al subítem 4b)

Por su parte, la regla de Laplace fue identificada por un 17,2% de los profesores, este porcentaje es muy bajo, si consideramos que la regla de Laplace es un contenido al que se otorga gran importancia en la educación primaria. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Si se quiere calcular numéricamente la probabilidad seria también la regla de Laplace"* (profesor 77).

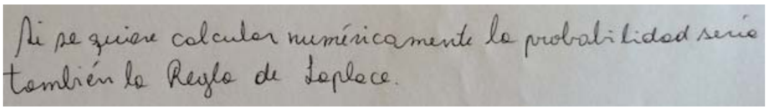

Si se quiere calcular numéricamente la probabilidad sería
también la Regla de Laplace.

Figura 5.85 Respuesta del profesor 77 al subítem 4b)

Es importante señalar que los conceptos de equiprobabilidad y espacio muestral no fueron identificados por ninguno de los profesores, pese a que la situación planteada involucraba un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables.

Dentro de las respuestas que hemos clasificado en la categoría “otros” se encuentran aquellos conceptos que si bien no son propios del contenido probabilístico, también se emplean en la resolución de la situación problemática planteada. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: *“Probabilidad, razones”* (profesor 26).

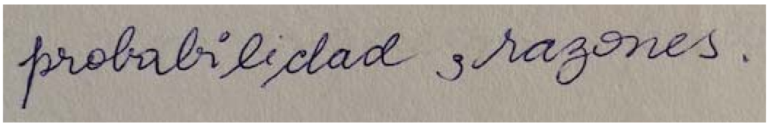


Figura 5.86 Respuesta del profesor 26 al subítem 4b)

De esta manera, a partir de los respuestas otorgadas por este grupo de profesores podemos concluir que el conocimiento del contenido especializado en relación al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, es insuficiente, puesto que los profesores no lograron identificar en su totalidad los contenidos que se deben poner en juego para dar una correcta solución al problema. Si bien en algunos casos lo logran el porcentaje es muy bajo (2,2%).

5.3.3.3.2 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido especializado.

En el apartado anterior se ha analizado el conocimiento del contenido especializado por medio de las respuestas que han otorgado los profesores a la pregunta *¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?*

A partir de estos resultados, podemos inferir que el conocimiento del contenido especializado en este grupo de profesores es bastante deficiente, dado que sus porcentaje de logro no superan el 2,2% lo que es bastante bajo, sobre todo si consideramos que se trata de profesores de educación primaria en activo, que ya se encuentran enseñando probabilidad en las escuelas. Estos resultados se pueden visualizar de mejor manera mediante el gráfico de la figura 5.87 que muestra la composición de los distintos tipos de respuestas de acuerdo con la variable “grado de corrección”, es decir, los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, así como el porcentaje de respuestas sin responder para cada uno de los ítems y subítems que evalúan el conocimiento del contenido especializado.

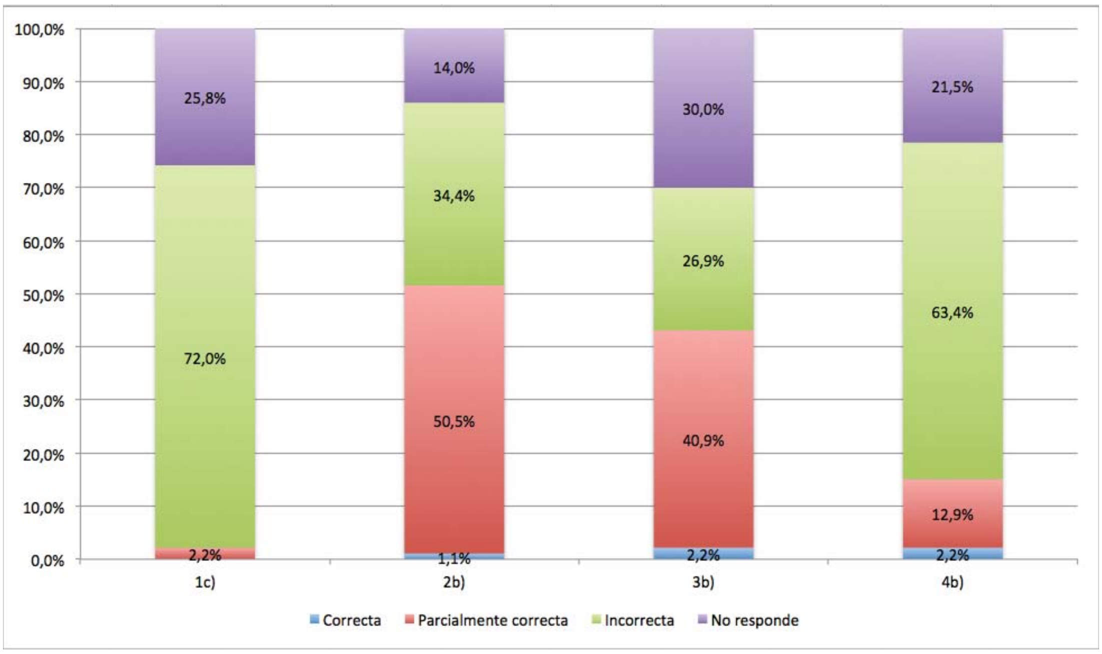


Figura 5.87 Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento del contenido especializado de acuerdo con el grado de corrección

A continuación en la tabla 5.56 se presenta el resumen estadístico de los resultados en base al análisis de las puntuaciones obtenidas en los ítems y subítems que se refieren al conocimiento del contenido especializado. Recordemos que de acuerdo con las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas, es posible obtener una puntuación máxima de 8 puntos, puesto que son 4 los subítems por medio de los cuales evaluamos el conocimiento del contenido especializado.

A partir de la tabla 5.56 se observa que las puntuaciones totales para este tipo de conocimiento variaron entre los 0 y los 6 puntos, de lo que se desprende que ninguno de los profesores logró alcanzar la puntuación máxima teórica de 8 puntos. Además se observa que la media y la mediana obtenidas están muy por debajo de lo esperado. Lo cual al igual que con el análisis de corte cualitativo que se presentó en el apartado anterior, deja en evidencia que estos profesores poseen un deficiente conocimiento del contenido especializado. Por su parte, el coeficiente de asimetría de Fisher de 1,195 evidencia una leve concentración de las puntuaciones totales a la derecha de la media.

	Estadístico	Error típ.
Media	1,17	0,126
Mediana	1,00	
Moda	0	
Desviación típica	1,212	
Varianza	1,470	
Asimetría	1,195	0,250
Curtosis	2,150	0,495
Mínimo	0	
Máximo	6	
Rango	6	
Recuento	93	
Percentiles		
25		0,00
50		1,00
75		2,00

Tabla 5.56 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado

Por otro lado, en la figura 5.88 se observa que la mediana se ubica en el centro del *box plot*, lo que indica que la distribución de las puntuaciones totales es simétrica.

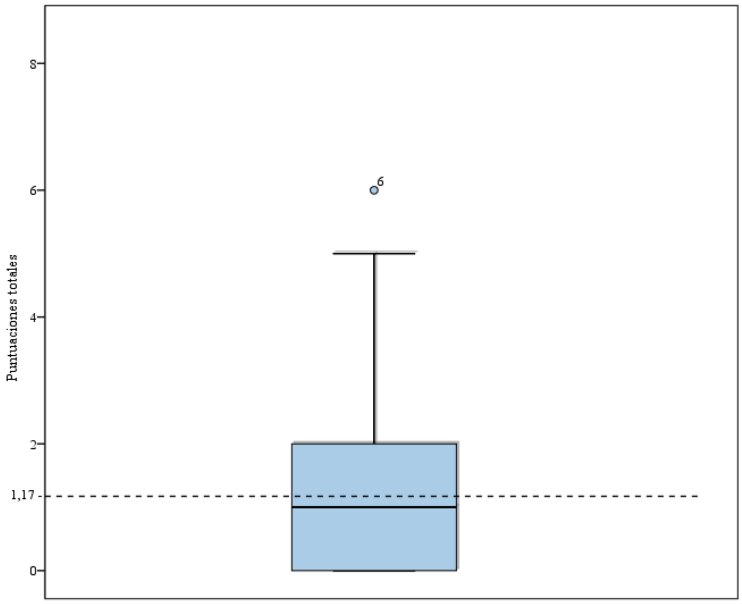


Figura 5.88 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media para el conocimiento del contenido especializado

Además, se observa que existe un *outlier* que corresponde a un profesor que obtuvo una puntuación total de 6 puntos, lo que escapa al 50% central de los datos, pues estos se concentran entre los 0 y los 2 puntos. Del mismo modo, la figura 5.89 nos muestra una clara tendencia a los valores bajos.

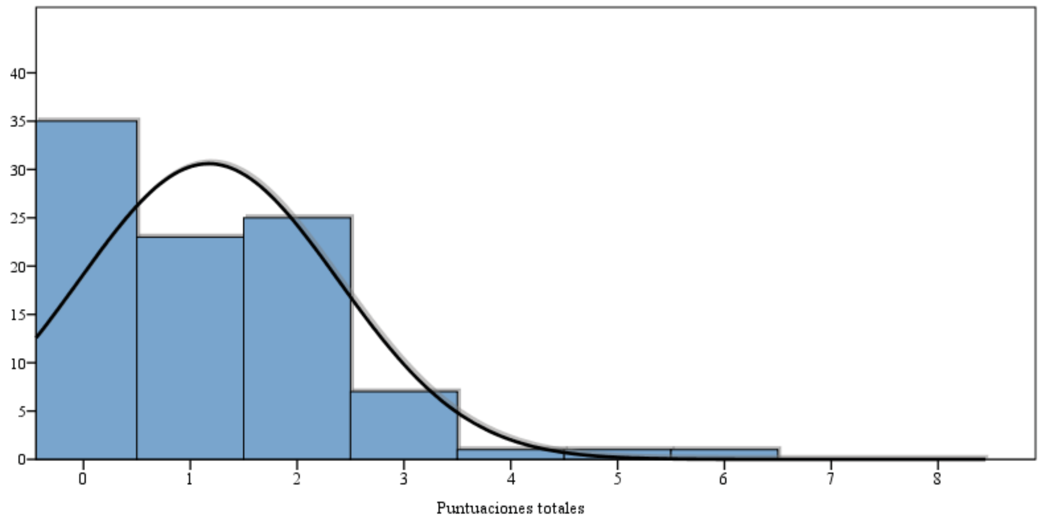


Figura 0.89 Puntuaciones totales del conocimiento del contenido especializado

Para tener mayor claridad de cómo se distribuyen las puntuaciones totales en relación al conocimiento del contenido especializados, hemos organizado tal información en la tabla 5.57.

Puntajes totales	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
0	35	37,6	37,6
1	23	24,7	62,4
2	25	26,9	89,2
3	7	7,5	96,8
4	1	1,1	97,8
5	1	1,1	98,9
6	1	1,1	100,0
Total	93	100,0	

Tabla 5.57 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido especializado

En base a la información entregada en la tabla 5.57, se observa que ninguno de los profesores obtuvo la puntuación máxima de 8 puntos para el conocimiento del contenido especializado, concentrándose un 89,2% de las puntuaciones entre los 0 y los 2 puntos. En consecuencia a partir de los datos antes presentados evidenciamos que los profesores presentan grandes carencias en lo que al conocimiento del contenido especializado se refiere, carencias y debilidades que han sido analizadas en el apartado anterior.

Al igual que para el análisis del conocimiento común del contenido, a continuación se presenta un análisis de los resultados para el conocimiento del contenido especializado de acuerdo con las características de los profesores que han respondido el cuestionario.

5.3.3.3.2.1 Resultados para el conocimiento del contenido especializado según "especialidad"

A partir de la figura 5.90 se observa como distribuyen las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado de acuerdo con al variables "especialidad", observándose claramente que estas se concentran en las puntuaciones bajas sobre todo para el caso de los profesores que tienen una especialidad distinta a la de matemática. Mientras que los que presentan puntuaciones un poco mejores son los profesores de la especialidad matemática. Estos últimos son quienes han alcanzado el puntaje más alto que corresponde a 6 puntos.

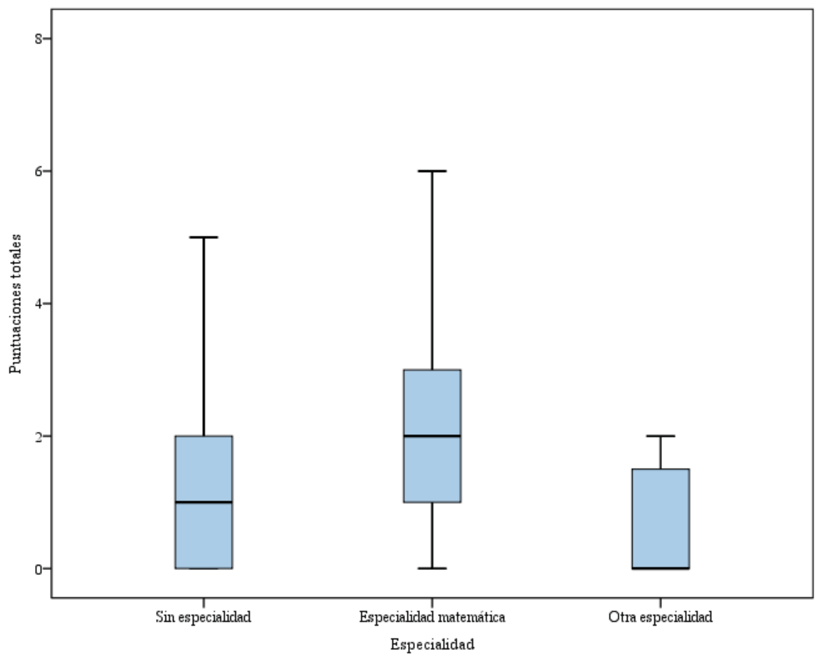


Figura 5.90 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido especializado según especialidad

Además, se observa que para el caso de los profesores sin especialidad y con especialidad matemática, el 50% central de sus puntuaciones distribuyen simétricamente, no así la distribución de las puntuaciones de los profesores con otra especialidad.

A modo de complementar la información entregada en el *box plot,* en la tabla 5.58 se presenta un análisis descriptivo de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "especialidad".

	Sin especialidad		**Con especialidad matemática**		**Con otra especialidad**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	71		14		8	
Media	1,04	0,124	2,14	0,443	0,63	0,324
Mediana	1,00		1,00		0,00	
Varianza	1,098		0,910		0,839	
Desv. típ.	1,048		0,954		0,916	
Mínimo	0		0		0	
Máximo	5		6		2	
Rango	5		6		2	
Amplitud intercuartil	2		2		2	
Asimetría	0,910	0,285	0,801	0,597	0,999	0,752
Curtosis	1,257	0,563	0,770	1,154	-1,039	1,481
Percentil						
25	0,00		1,00		0,00	
50	1,00		2,00		0,00	
75	2,00		3,00		1,75	

Tabla 5.58 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado según especialidad

En la tabla 5.58 se observa que los profesores con especialidad matemática tuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que los demás profesores, con una desviación típica también ligeramente mayor. No obstante sus puntuaciones son muy bajas.

5.3.3.3.2.2 Resultados para el conocimiento del contenido especializado según "años de experiencia"

Para estudiar el comportamiento de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado respecto a la variable "años de experiencia", hemos construido un *box plot* (figura 5.91) que nos permite comparar las distribuciones de las puntuaciones totales en cada uno de los grupos.

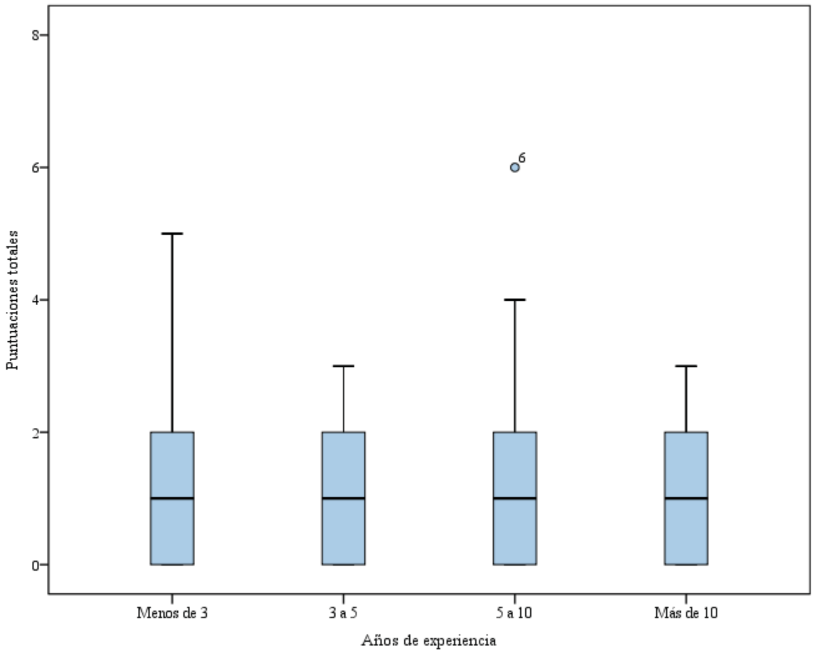


Figura 5.91 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido especializado según años de experiencia

A partir de la figura 5.91 se observa claramente lo bajo que distribuyen las puntuaciones para los cuatro grupos, en que la mediana de las puntuaciones totales es la misma para todos. Además, se observa que el 50% central de los datos se mueve en un rango que va desde los 0 a los 2 puntos en los cuatro grupos definidos para la variable "años de experiencia". En el caso de los profesores que tienen entre 5 a 10 años de experiencia es posible observar una observación extrema que corresponde a un profesor que obtuvo 6 puntos en el conocimiento del contenido especializado que corresponde a la puntuación máxima obtenida.

Si observamos la tabla 5.59 que muestra el análisis descriptivo de la variable puntuación total para cada uno de los grupos que conforman la variable "años de experiencia" se ve que en promedio el rendimiento de los profesores con entre 5 a 10 años de experiencia, fue levemente mejor que el de los demás profesores, sin embargo tales puntuaciones continúan siendo bajas en relación al puntaje total.

	Menos de 3 años		**Entre 3 a 5 años**		**Entre 5 a 10 años**		**Más de 10 años**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	43		20		16		14	
Media	1,12	0,164	1,10	0,270	1,56	0,418	1,00	0,277
Mediana	1,00		1,00		1,00		1,00	
Varianza	1,153		1,463		2,796		1,077	
Desv. típ.	1,074		1,210		1,672		1,038	
Mínimo	0		0		0		0	
Máximo	5		3		6		3	
Rango	5		3		6		3	
Amplitud intercuartil	2		2		2		2	
Asimetría	1,090	0,361	0,583	0,512	1,392	0,564	0,482	0,597
Curtosis	2,393	0,709	-1,269	0,992	2,125	1,091	-1,097	1,154
Percentil								
25	0,00		0,00		0,00		0,00	
50	1,00		1,00		1,00		1,00	
75	2,00		2,00		2,00		2,00	

Tabla 5.59 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado según años de experiencia

5.3.3.3.2.3 Resultados para el conocimiento del contenido especializado según "dependencia del establecimiento"

Nos interesa visualizar cómo se distribuyen los puntajes según el tipo de dependencia para ello, hemos elaborado el *box plot* de la figura 5.92. En el gráfico se observa que las puntuaciones son muy bajas para los tres grupos, solo en el caso de dos profesores que se desempeñan en establecimientos municipales presentan dos *outlier* que corresponden a 5 y 6 puntos. Los profesores de establecimientos particulares subvencionados son los que presentan mayor variabilidad en sus puntuaciones, a diferencia de los profesores de establecimientos particulares pagados, cuyo 50% central de las puntuaciones se concentra entre 1 y 2 puntos.

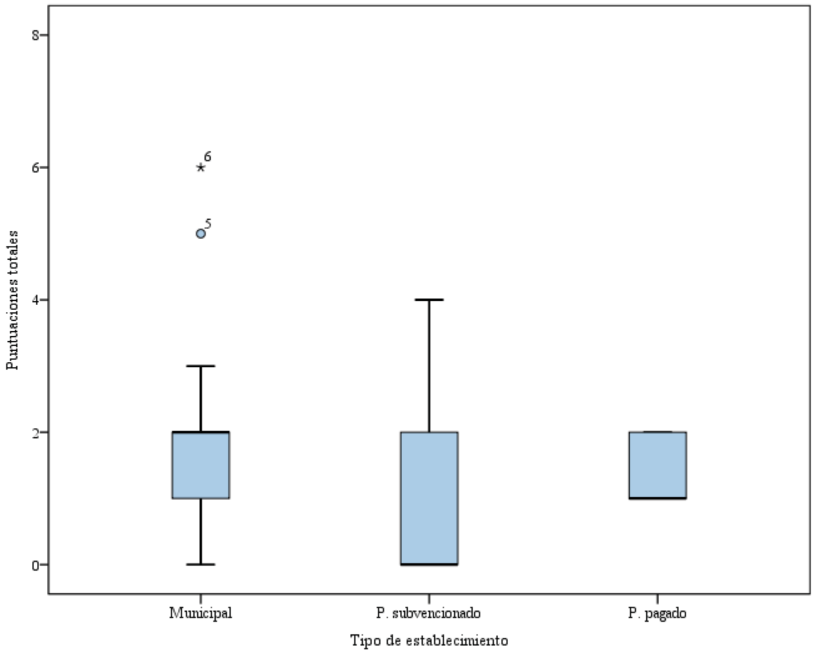


Figura 5.92 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido especializado según tipo de establecimiento

Si complementamos esta información con la presentada en la tabla 5.60, vemos que el comportamiento de la variable "dependencia del establecimiento" es bastante uniforme, presentando los profesores de establecimiento municipal, un comportamiento ligeramente mejor que el resto, pero aun así bajo en relación al puntaje total.

	Municipal		**Particular subvencionado**		**Particular pagado**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	31		55		7	
Media	1,71	0,251	0,84	0,142	1,43	0,202
Mediana	2,00		0,00		1,00	
Varianza	1,946		1,102		0,286	
Desv. típ.	1,395		1,050		0,535	
Mínimo	0		0		1	
Máximo	6		4		2	
Rango	6		4		1	
Amplitud intercuartil	1		2		1	
Asimetría	1,189	0,421	1,037	0,322	0,374	0,794
Curtosis	2,270	0,821	0,237	0,634	-2,800	1,587
Percentil						
25	1,00		0,00		1,00	
50	2,00		0,00		1,00	
75	2,00		2,00		2,00	

Tabla 5.60 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado según dependencia del establecimiento

5.3.3.3.2.4 Resultados para el conocimiento del contenido especializado según "género"

En el *box plot* de la figura 5.93 se muestra cómo distribuyen las puntuaciones totales en el conocimiento especializado del contenido en cada uno de los grupos que conforman la variable género.

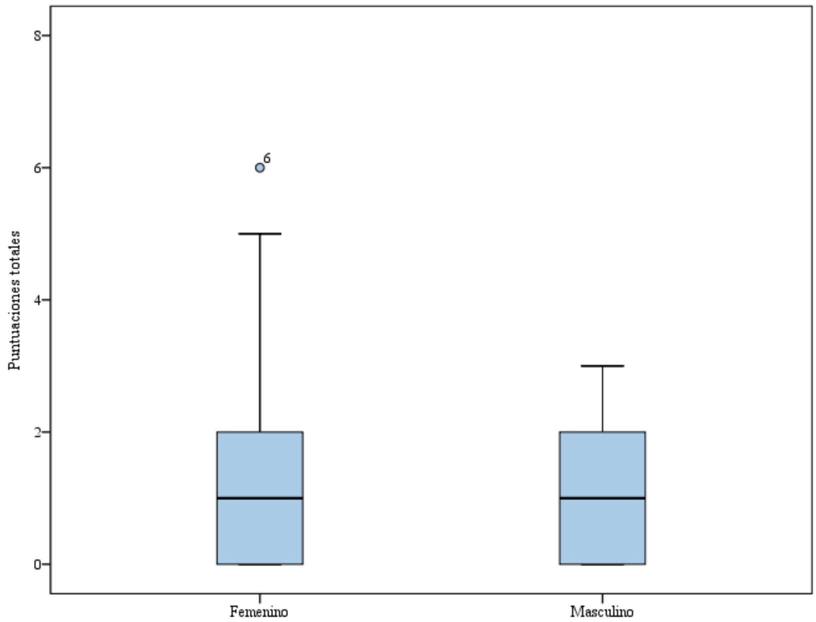


Figura 5.93 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido especializado según género

A partir de la figura 5.93 se observa una igualdad de medianas y simetría en el 50% de los datos para ambos grupos, observándose en el caso de las mujeres una mayor variabilidad en las puntuaciones así como la existencia de una observación extrema de 6 puntos. Sin embargo, para ambos grupos las puntuaciones son muy bajas en relación al total.

Para complementar la distribución de los puntajes, en la tabla 5.61 se muestran los estadísticos descriptivos del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) al interior de cada uno de los grupos (mujer, hombre).

	Mujer		Hombre	
	Estadístico	Error típ.	Estadístico	Error típ.
Recuento	68		25	
Media	1,21	0,158	1,08	0,191
Mediana	1,00		1,00	
Varianza	1,688		0,910	
Desv. típ.	1,299		0,954	
Mínimo	0		0	
Máximo	6		3	
Rango	6		3	
Amplitud intercuartil	2		2	
Asimetría	1,287	0,291	0,143	0,464
Curtosis	2,129	0,574	-1,328	0,902
Percentil				
25	0,00		0,00	
50	1,00		1,00	
75	2,00		2,00	

Tabla 5.61 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido especializado según género

A partir de la tabla 5.61 se observa que las mujeres tuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que los hombres, pero con una mayor variabilidad.

5.3.3.3.3 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

Recordemos que este tipo de conocimiento se refiere a la capacidad de los profesores para describir las configuraciones cognitivas y los conflictos de aprendizaje de los alumnos al resolver un problema, además de describir estrategias para promover que los alumnos se involucren en la solución de problemas o en el estudio de un tema. En otras palabras, se refiere al conocimiento que el profesor debe tener sobre los errores, dificultades y conflictos presentes en los aprendizajes de sus estudiantes y su progresión, además de las actitudes, emociones, creencias y valores relacionados con el proceso de estudio y a los objetos matemáticos vinculados al estudio de un determinado tema, en nuestro caso de la probabilidad en educación primaria.

Para evaluar este tipo de conocimiento nos hemos centrado en el conocimiento del profesor para describir los principales tipos de conflictos de aprendizaje presentes en los alumnos cuando se ven enfrentados a resolver un determinado problema (Godino, 2009). Para ello, se han presentado a los profesores cinco situaciones problemáticas sobre probabilidad en las que se incorporan respuestas hipotéticas de alumnos de primaria, las cuales se fundamentan en investigaciones previas y se relacionan con errores y dificultades frecuentes en los estudiantes. Frente a este tipo de situaciones se les ha pedido a los profesores que reflexionen y respondan a preguntas del tipo: *¿cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿por qué?*, además de solicitarles que *describan las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas dadas por estos alumnos ficticios*. De esta manera, para analizar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes que poseen los profesores de primaria en activo, nos hemos centrado en las respuestas y argumentaciones que dan los profesores a las preguntas 1b), 1d), 2c), 4a), 4c), 5 y 6 del Cuestionario CDM-Probabilidad.

Así, para lograr nuestro objetivo de evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, hemos seguido las siguientes fases que se muestran en la figura 5.94.

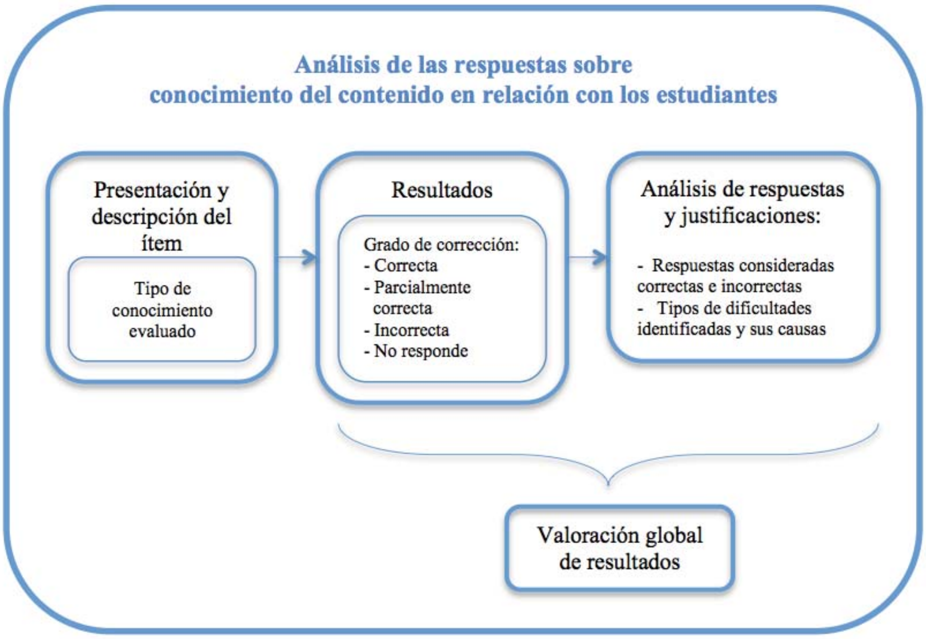


Figura 5.94 Fases presentes en el análisis de las respuestas referidas al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

Tales fases consisten en una breve presentación y descripción del ítem, que recuerda algunos de los aspectos presentados en el análisis *a priori* para cada uno de los ítems realizado en el capítulo 4; presentación de los resultados en base a la variable cuantitativa grado de corrección de la respuesta, para continuar con el análisis de las respuestas y sus justificaciones. Por medio de este último análisis se busca estudiar las valoraciones de los profesores a las respuestas de los estudiantes ficticios, además de la capacidad de los profesores para identificar el tipo de error cometido y las causas a las que lo atribuyen.

Por último, terminamos esta sección con una síntesis del análisis de los resultados sobre el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, y con un resumen estadístico de los puntajes obtenidos para este tipo de conocimiento.

5.3.3.3.3.1 Análisis de los subítem 1b) y 1d)

Por medio de este ítem (figura 5.95) se busca evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado a la comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajos las mismas condiciones de un experimento aleatorio.

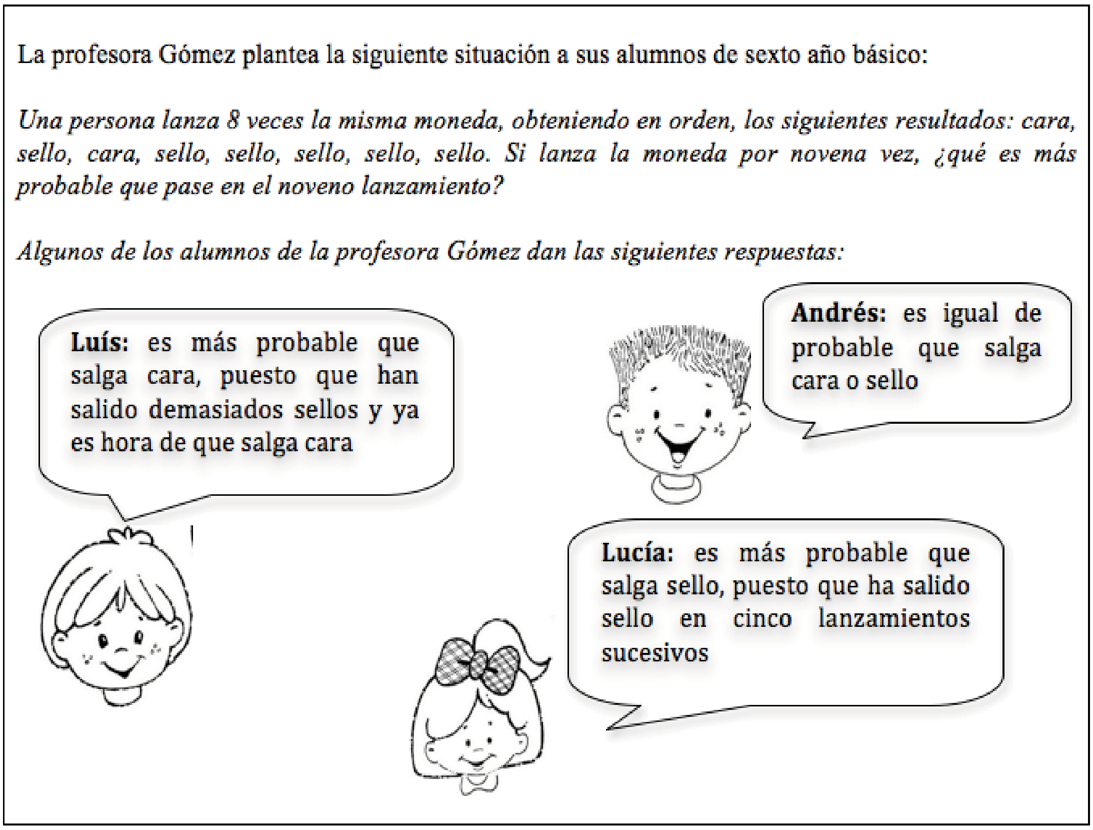


Figura 5.95 Situación problemática ítem 1

Con dicho propósito se solicitó a los profesores que identifiquen *¿cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?,* además, se les pidió *describir las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.*

Comenzaremos analizando las respuestas dadas a la primera pregunta (subítem 1b) para luego continuar con las respuestas otorgadas a la segunda pregunta (subítem 1d).

<u>Análisis del subítem 1b)</u>

La tabla 5.62 resume las respuestas de los profesores otorgadas a la pregunta *¿cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?*.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	22	23,7
Parcialmente correcta	17	18,3
Incorrecta	34	36,6
No responde	20	21,4
Total	93	100

Tabla 5.62 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 1b)

A partir de la tabla 5.62 se observa que la pregunta resultó ser de dificultad media alta para los profesores, pues un 23,7% logró identificar dentro de los alumnos ficticios al que daba una respuesta correcta (Andrés) y justificar adecuadamente su elección. Dentro de los profesores a los cuales hemos clasificado su respuesta como parcialmente correcta (18,3%), se encuentran aquellos que habiendo identificado que el alumno que presentaba una respuesta correcta era Andrés lo hacen sin dar alguna justificación para ello. Mientras que en la categoría incorrecta (36,6%) se encuentran aquellos que no han logrado realizar una identificación adecuada.

Por otro lado la tabla 5.63 muestra las frecuencias de las respuestas que los profesores han considerado como correctas, es decir, nos entrega información acerca de las valoraciones que los profesores han realizado de las respuestas dadas por los tres alumnos ficticios (Luís, Lucía y Andrés) de la situación problemática planteada.

Respuesta	Correcta	
	Frecuencia	%
Luís	11	11,9
Lucía	23	24,7
Andrés	39	41,9
No responden	20	21,5
Total	93	100

Tabla 5.63 Frecuencia de la respuesta que los profesores han considerado como correcta en el subítem 1b)

En la tabla 5.63 se observa que un 41,9% de los profesores identifica la respuesta de Andrés como la respuesta correcta. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Andrés, pues existe la misma posibilidad, que la del inicio del lanzamiento de las monedas, la mayor o menor cantidad de sellos o caras que salieron no cambian en nada las posibilidades de lo que es más probable que suceda o pase"* (profesor 59).

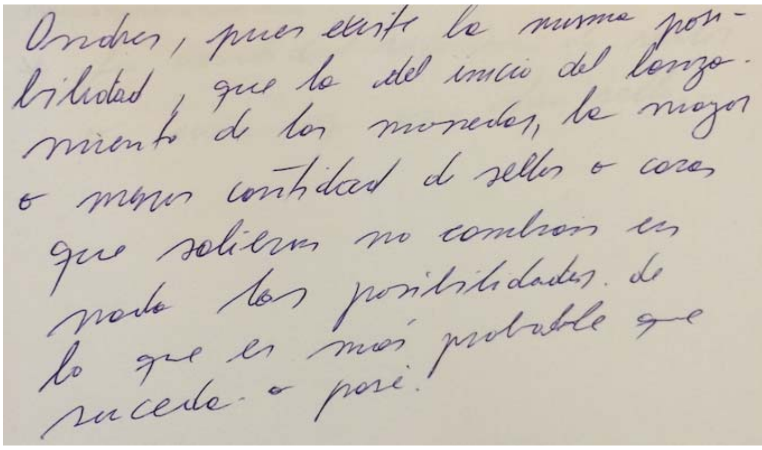


Figura 5.96 Respuesta del profesor 59 al subítem 1b)

En cuanto a las respuestas incorrectas que fueron consideras correctas, destaca la de Lucía que fue considerada como la respuesta correcta por un 24,7% de los profesores, lo cual nos lleva a evidenciar en cierta medida la presencia del sesgo de la recencia positiva en estos profesores, concordando con lo presentado en el apartado de análisis del conocimiento común del contenido. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Creo que Lucía, por la cantidad de lanzamientos en que ha repetido la opción sello"* (profesor 27).

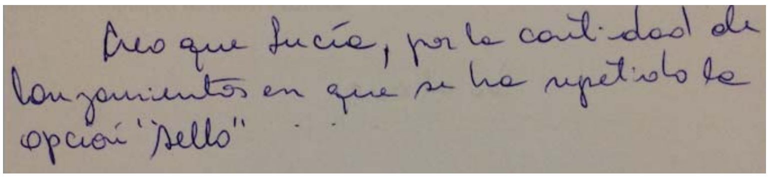


Figura 5.97 Respuesta del profesor 27 al subítem 1b)

Mientras que la respuesta de Luís fue considerada como la respuesta correcta por un 11,9% de los profesores, lo que evidencia, al igual que lo presentado en el apartado de análisis del conocimiento común del contenido, la presencia del sesgo de recencia negativa en dicho grupo de profesores. Un respuesta que ejemplifica lo anterior es la siguiente: *"Luís, pues su razonamiento se ajusta a la ley de probabilidades"* (profesor 51).

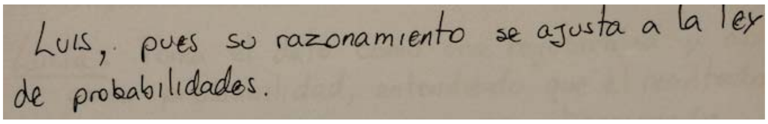

Luis, pues su razonamiento se ajusta a la ley de probabilidades.

Figura 5.98 Respuesta del profesor 51 al subítem 1b)

Como se ha podido evidenciar a partir de los resultados presentados en la tabla 5.62, menos de la mitad de los profesores logran identificar la respuesta correcta, lo que evidencia un débil conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado a la comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajos las mismas condiciones de un experimento aleatorio.

Análisis del subítem 1d)

Por otro lado, en el subítem 1d) se solicitó a los profesores *describir las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.* Para así, por medio del análisis de las respuestas y explicaciones que los profesores otorgan, en relación a las posibles dificultades que identifican como influyentes en las respuestas erróneas de los alumnos ficticios, acceder a su conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. La tabla 5.64 da a conocer los resultados de los profesores en cuanto al grado de corrección de la respuesta.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	18	19,4
Parcialmente correcta	15	16,1
Incorrecta	27	29,0
No responde	33	35,5
Total	93	100

Tabla 5.64 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 1d)

A partir de la tabla 5.64 es posible observar que este subítem presentó gran dificultad para los profesores puesto que solo un 19,4% fue capaz de identificar correctamente el error o dificultad que esta detrás de las respuestas erróneas de los alumnos ficticios. Los argumentos de los profesores se centran en que las respuestas erróneas son producto de considerar la secuencia de los resultados de los lanzamientos anteriores de la moneda, lo que conduce a los alumnos ficticios a responder de manera equivocada. Dentro de las respuestas de los profesores es posible identificar tres variantes de este argumento, que se muestran en la tabla 5.65.

Dificultades identificadas por los profesores en las respuestas erróneas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
La secuencia de resultados conduce a pensar que es más probable que en el siguiente lanzamiento salga cara.	5	5,4
La secuencia de resultados conduce a pensar que es más probable que en el siguiente lanzamiento salga sello.	10	10,8
Han salido demasiados sellos, por lo que debe producirse un equilibrio entre los resultados.	3	3,2
No conocer ni comprender la probabilidad, ni sus conceptos asociados.	15	16,1
Otras respuestas y argumentos	27	29,0
No responde	33	35,5
Total	93	100

Tabla 5.65 Frecuencia de errores y/o dificultades identificadas por los profesores en el subítem 1d)

Ejemplos de estos tipos de respuestas son los siguientes: *“Las dificultades son que ellos al observar los resultados anteriores llegan a la conclusión de que han salido muchas veces sello, por lo tanto tendría que salir cara”* (profesor 49).

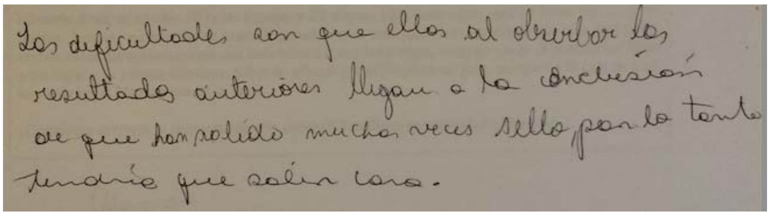

Los dificultades son que ellos al observar los resultados anteriores llegan a la conclusion de que han salido muchas veces sello por lo tanto tendria que salir cara.

Figura 5.99 Respuesta del profesor 49 al subítem 1d)

Como se puede apreciar en la respuesta del profesor 49, este manifiesta que el contar con la secuencia de resultados, en la que se han obtenido mayoritariamente sellos, conduciría a los alumnos a responder equivocadamente que debe salir cara, es decir, los llevaría a manifestar el sesgo de la recencia negativa. Del mismo modo un grupo importante de los profesores (10,8%) presenta respuestas del tipo: *“Dado que en los resultados de los lanzamientos anteriores han salido más sellos los alumnos pueden seguir la tendencia”* (profesor 71).

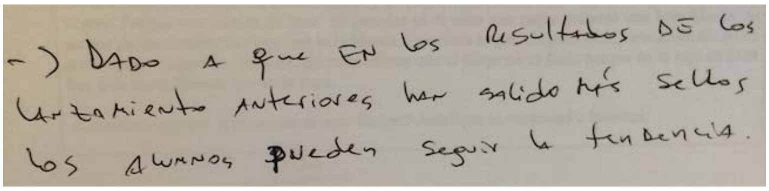

-) DADO A que EN los Resultados DE los lanzamiento anteriores han salido más sellos los alumnos pueden seguir la tendencia.

Figura 5.100 Respuesta del profesor 71 al subítem 1d)

A partir de este tipo de respuesta se puede evidenciar que los profesores reconocen la influencia de los resultados obtenidos en lanzamientos anteriores que llevaría a los alumnos a creer que es más probable obtener cara en el noveno lanzamiento, es decir, identifican de manera implícita el sesgo de la recencia positiva. Mientras que un grupo pequeño de profesores (3,2%) atribuye las respuestas erróneas de los alumnos a que estos consideran que se debe dar un cierto "equilibrio" entre la cantidad de sellos y de caras que han salido, de modo tal que la probabilidad experimental coincida con la probabilidad teórica. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Contar el número de caras y sellos pensando que tienen que salir la misma cantidad cada una, tantos sellos como tantas caras"* (profesor 52).

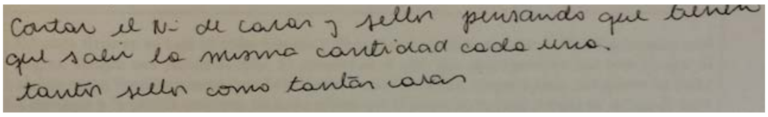

Contar el N° de caras y sellos pensando que tienen que salir la misma cantidad cada una. tantos sellos como tantas caras

Figura 5.101 Respuesta del profesor 52 al subítem 1d)

Entre las respuestas que hemos considerado como parcialmente correctas (16,1%), se encuentran aquellas referidas a una falta de conocimientos sobre probabilidad, o bien a que los alumnos no establecen una correcta relación entre conceptos asociados al cálculo de probabilidades, como por ejemplo, que no reconocen el espacio muestral del experimento. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Es posible que los alumnos respondan en forma errónea ya que no conocen la forma de realizar o calcular probabilidades"* (profesor 8).

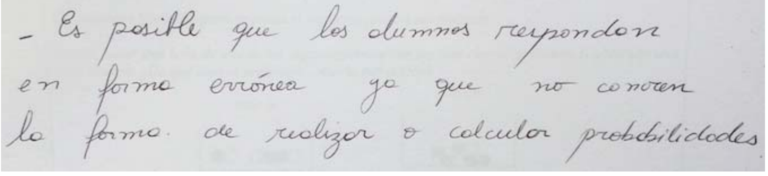

- Es posible que los alumnos respondan en forma errónea ya que no conocen la forma de realizar o calcular probabilidades

Figura 5.102 Respuesta del profesor 8 al subítem 1d)

Por otro lado, hay un grupo importante de profesores (29%) que da respuestas que no se relacionan con lo solicitado, lo que sumado al alto porcentaje de profesores que no responde (35,5%), deja en evidencia una fuerte insuficiencia referida al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado a la comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajos las mismas condiciones de un experimento aleatorio.

En consecuencia, a partir de las respuestas otorgadas por los profesores en el subítem 1b) y 1d) podemos inferir que el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes es deficiente e insuficiente pues un porcentaje inferior al 25% es capaz de detectar los errores cometidos por los alumnos y sus causas. Mientras que un alto número de profesores, superior al 50%, no responde o entrega argumentos incorrectos para explicar las causas del error en las respuestas de los alumnos ficticios, siendo lo más frecuente el considerar que una dificultad que puede llevar a los alumnos a responder equivocadamente es el desconocimiento o débil manejo de los contenidos involucrados.

5.3.3.3.3.2 Análisis del subítem 2c)

Dentro de los propósitos de este ítem se encuentra el evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado a los errores y dificultades presentes en el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple (figura 5.103).

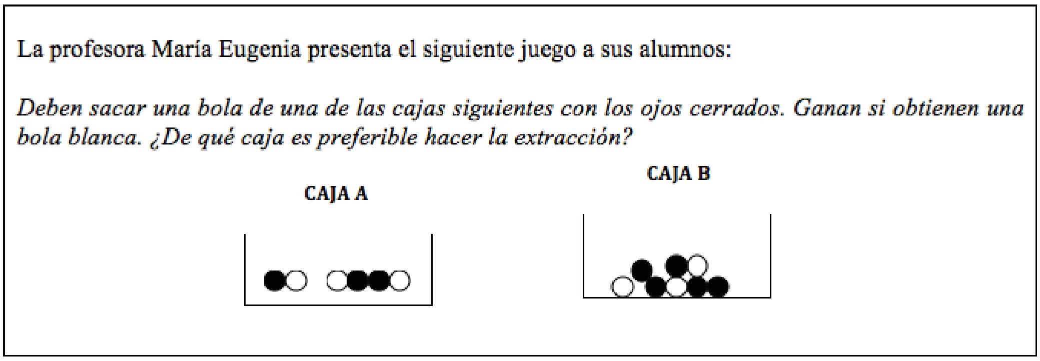


Figura 5.103 Situación problemática ítem 2

Para cumplir con este objetivo se solicitó a los profesores, en el subítem 2c), *describir las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para* *resolver de manera correcta el problema,* y de este modo acceder a su conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. La tabla 5.66 muestra los resultados obtenidos de acuerdo con el grado de corrección de las respuestas.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	1	1,1
Parcialmente correcta	26	28,0
Incorrecta	46	49,4
No responde	20	21,5
Total	93	100

Tabla 5.66 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 2c)

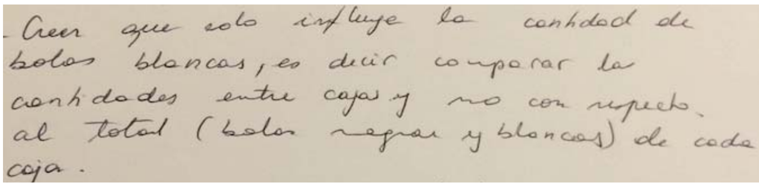
A partir de la tabla se observa que esta pregunta fue de gran dificultad para los profesores, pues solo uno de ellos logra describir adecuadamente posibles errores y/o dificultades a los cuales podrían verse enfrentados los alumnos de primaria al resolver una situación problemática como la planteada. Mientras que un gran porcentaje de los profesores (71%) no logra identificar posibles dificultades pertinentes con el objeto de estudio o bien no responde. En tanto, un 28% de los profesores considera que es posible que las dificultades se encuentren relacionadas con una inadecuada comprensión y manejo de los contenidos sobre probabilidad.

Así, dentro de las respuestas que hemos considerado correctas, parcialmente correctas e incorrectas hemos identificado los siguientes tipos de argumentos que se presentan en la tabla 5.67.

Dificultades identificadas por los profesores en las respuestas erróneas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Comparar solo los casos favorables (bolas blancas).	1	1,1
No saber calcular probabilidades.	26	28,0
Otras respuestas y argumentos (no entender el problema, no saber multiplicar, no saber proporcionalidad, confundirse con la disposición de las bolas, etc.)	46	49,4
No responde	20	21,5
Total	93	100

Tabla 5.67 Frecuencia de errores y/o dificultades identificadas por los profesores en el subítem 2c)

Ejemplos de estos tipos de respuestas son los siguientes: *"Creer que solo influye la cantidad de bolas blancas, es decir compara las cantidades entre cajas y no con respecto al total (bolas negras y blancas) de cada caja"* (profesor 29).

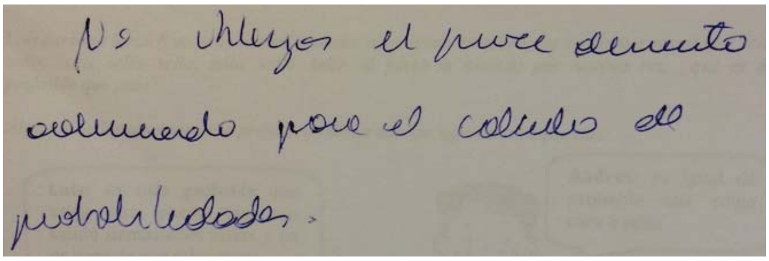


Creer que solo influye la cantidad de bolas blancas, es decir comparar la cantidades entre cajas y no con respecto al total (bolas negras y blancas) de cada caja.

Figura 5.104 Respuesta del profesor 29 al subítem 2c)

Por medio de esta respuesta es posible detectar que la única posible dificultad identificada es la de comparar solo los casos favorables, lo que llevaría a los alumnos a creer que la probabilidad de extraer una bola blanca, en cualquiera de las dos cajas, es la misma para ambas cajas. Lo anterior, nos da una clara señal de una falta de conocimiento de los profesores para reconocer posibles errores y/o dificultades a las que pueden verse enfrentados los alumnos.

Entre las respuestas que hemos considerado parcialmente correctas, se encuentran aquellas que identifican errores vinculados al no saber calcular probabilidades, o no comprender adecuadamente el concepto de probabilidad, dificultades que si bien se encuentran vinculadas a nuestro objeto de estudio nos parecen muy generales. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"No utilizar el procedimiento adecuado para el cálculo de probabilidades"* (profesor 62).



No utilizar el procedimiento adecuado para el calculo de probabilidades.

Figura 5.105 Respuesta del profesor 62 al subítem 2c)

En lo que a respuestas incorrectas se refiere, hemos clasificado dentro de la categoría "otras respuestas" a aquellas que basan su argumento en el manejo de conceptos generales tales como: operatoria, proporcionalidad, fracciones, porcentajes, etc., y que no se vinculan directamente con nuestro objeto de estudio. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Manejo de porcentaje, regla de tres simple, cálculo en división, manejo de tablas de multiplicar, error en la percepción visual al observar las cajas (A y B)"* (profesor 61).

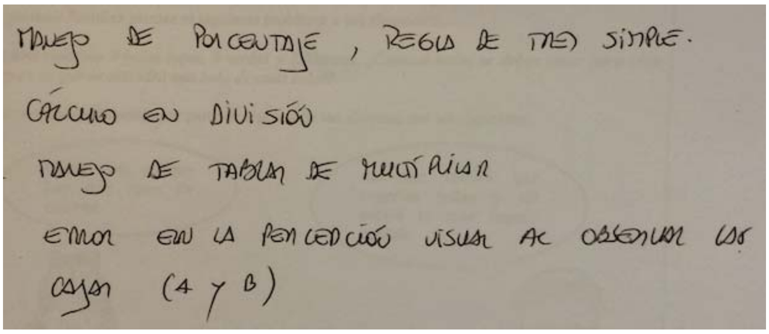

Manejo de porcentaje, regla de tres simple.
Cálculo en división
Manejo de tabla de multiplicar
Error en la percepción visual al observar las cajas (A y B)

Figura 5.106 Respuesta del profesor 61 al subítem 2c)

Finalmente, en base a los tipos de respuestas anteriormente expuestos, podemos deducir que el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado a los errores y dificultades presentes en el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple, es muy deficiente.

5.3.3.3.3.3 Análisis de los subítem 4a) y 4c)

Entre los objetivos de este ítem (figura 5.107), se encuentra evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables.

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Figura 5.107 Situación problemática ítem 4

Para alcanzar tal objetivo se solicitó a los profesores que *argumenten si la respuesta planteada por el alumno ficticio es o no correcta,* además, se les pidió *describir las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.*

Iniciamos con el análisis de las respuestas dadas a la primera pregunta (subítem 4a) para luego continuar con las respuestas otorgadas a la segunda pregunta (subítem 4c).

Análisis del subítem 4a)

En la tabla 5.68 se resumen los resultados obtenidos para la pregunta *¿considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.*

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	30	32,3
Parcialmente correcta	15	16,1
Incorrecta	46	49,4
No responde	2	2,2
Total	93	100

Tabla 5.68 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 4a)

En la tabla 5.68 se observa que esta pregunta presentó una dificultad media para los profesores pues un 32,3% logró identificar en base a un argumento correcto que la respuesta del alumno ficticio es incorrecta. Mientras que un 16,1% si bien identifica que la respuesta es incorrecta, lo hace en base a un argumento incorrecto. Un porcentaje importante de los profesores considera que la respuesta del alumno es correcta o bien no da un respuesta, consideramos alarmante tal porcentaje (51,6%) pues supera a la mitad de los profesores en activo.

En el caso de los profesores que han respondido correctamente, sus argumentos se centran en que para decidir qué es más probable que suceda basta con realizar la comparación de las cantidades absolutas entre el número de niños y niñas, por lo que es más probable de que al extraer un papel este tenga el nombre de una niña. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Falso, porque como hay más niñas hay más probabilidades de sacar el nombre de una niña"* (profesor 3).

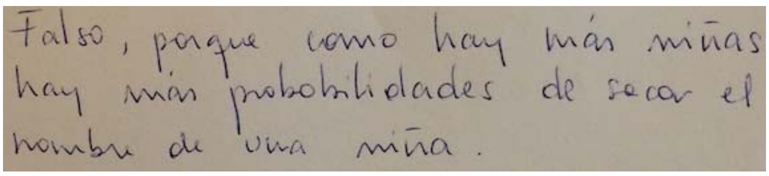


Figura 5.108 Respuesta del profesor 3 al subítem 4a)

En este tipo de respuestas se observa claramente que los profesores han identificado correctamente que este experimento aleatorio presenta dos resultados no equiprobables.

Análisis del subítem 4c)

En lo que respecta al subítem 4c) se solicitó a los profesores *describir las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.* Para de este modo, acceder a su conocimiento del contenido en relación con los estudiantes vinculado al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables. La tabla 5.69 da a conocer los resultados de los profesores en cuanto al grado de corrección de la respuesta.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	3	3,2
Parcialmente correcta	23	24,7
Incorrecta	42	45,2
No responde	25	26,9
Total	93	100

Tabla 5.69 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 4c)

Como se observa en la tabla 5.69 tres profesores (3,2%) otorgan una respuesta correcta, es decir, logran identificar posibles dificultades a las cuales podrían verse enfrentados alumnos de primaria al tratar de resolver la situación problemática planteada. Mientras que un 24,7% de los profesores si bien identifica posibles dificultades estas son muy generales. En lo que a las respuestas incorrectas y sin contestar se refiere, se observa que un 72,1% de los profesores se encuentra en esta categoría, lo que es demasiado elevado si consideramos que se trata de profesores en activo que se encuentran enseñando probabilidad en las escuela.

A partir de las respuestas correctas y parcialmente correctas, hemos establecido las siguientes categorías de errores identificados por los profesores que se presentan en la tabla 5.70.

Dificultades identificadas por los profesores en las respuestas erróneas	Frecuencia	Porcentaje
Confundir el espacio muestral	3	3,2
No saber calcular probabilidades, no comprender fracciones, etc.	18	19,4
Dejarse llevar por el factor suerte.	5	5,4

Tabla 5.70 Frecuencia de errores y/o dificultades identificadas por los profesores en el subítem 4c)

Ejemplos de este tipo de respuestas son los siguientes: *"Reconocer que existen más niñas que niños y ver las posibilidades por género y no verlos como un número total"* (profesor 20).

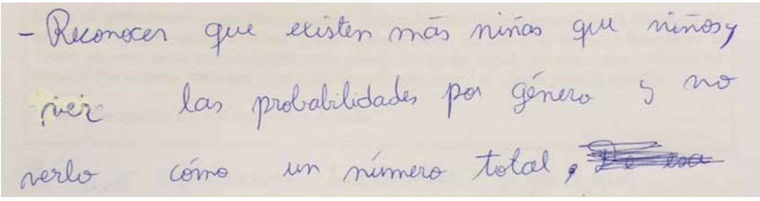


Figura 5.109 Respuesta del profesor 20 al subítem 4c)

Como se puede apreciar en el argumento dado por el 3,2% de los profesores, este identifica que la dificultad puede estar en considerar que el espacio muestral {niño, niña} se encuentra compuesto por dos sucesos simples equiprobables, dejando de lado la información que indica que el espacio muestral, si bien está conformado por niño y niña, este no es equiprobable, pues hay más niñas que niños.

En el caso de los argumentos que hemos considerado en la categoría de parcialmente correcto, destacan aquellos profesores (19,4%) que ven como una posible dificultad para dar respuesta a la situación, el no dominar nociones de probabilidad, así como no comprender conceptos tales como: razones, fracciones, porcentajes, etc. Un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente: *"Identificar probabilidades, cálculo de probabilidades"* (profesor 1).

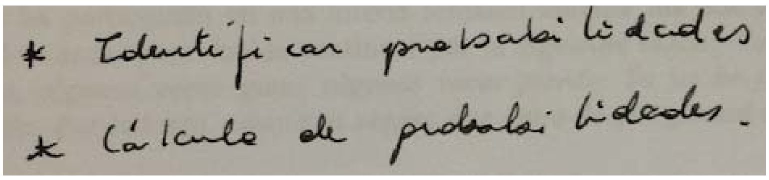


Figura 5.110 Respuesta del profesor 1 al subítem 4c)

Creemos que este tipo de argumentaciones es demasiado amplia, por esta razón las hemos clasificado como parcialmente correctas, pues no profundiza mayormente en el tipo de error. Por último, nos encontramos con un 5,4% de los profesores que considera que un posible error y/o dificultad podría estar en que los alumnos se dejen llevar por el factor suerte, y que consideren que finalmente es la suerte quien decide, como señala el alumno ficticio del enunciado. Un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente: *"El problema puede ser justamente que crean que es solo suerte, el que salga un niño o una niña"* (profesor 5).

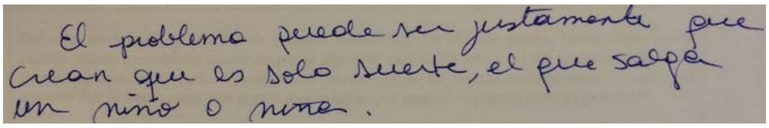


Figura 5.111 Respuesta del profesor 5 al subítem 4c)

En consecuencia, a partir de las respuestas de los profesores hemos determinado que su conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, en lo que respecta al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, es extremadamente insuficiente. Puesto que solo un 3,2% de los profesores ha logrado identificar y argumentar correctamente posibles errores y/o dificultades.

5.3.3.3.3.4 Análisis del ítem 5

Uno de los objetivos de este ítem es evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre la independencia de sucesos en la asignación de probabilidades, y noción de aleatoriedad, así como las creencias subjetivas que afectan sus concepciones sobre el azar.

Para ello se ha planteado la situación problemática que se muestra en la figura 5.112, la cual considera la falacia del jugador o efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975), que consiste en que se cree erróneamente que los sucesos pasados afectan los futuros.

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "*la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima*".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Figura 5.112 Situación problemática ítem 5

Para el logro del objetivo planteado, se requirió a los profesores que dieran su opinión sobre la explicación dada por Pedro. De este modo, por medio de los argumentos presentes en sus respuestas, podremos indagar en su conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. La tabla 5.71 muestra los resultados obtenidos en relación con el grado de corrección de las respuestas.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	12	12,9
Parcialmente correcta	31	33,3
Incorrecta	42	45,2
No responde	8	8,6
Total	93	100

Tabla 5.71 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al ítem 5

En base a los resultados podemos afirmar que esta pregunta presentó dificultades ya que un porcentaje muy bajo de los profesores (12,9%) logra dar una respuesta correcta. Es decir, identifican que la razón de Pedro es incorrecta. Mientras que un 33,3% si bien identifica que el razonamiento de Pedro es incorrecto, lo hace en base a un argumento incorrecto. En tanto un 53,8% de los profesores considera que la afirmación de Pedro es correcta o bien no responde a la pregunta.

Dado lo anterior, nos centraremos en los argumentos que han dado los 43 profesores que han identificado que el razonamiento de Pedro es incorrecto, pues en base a ellos podremos indagar si cuentan con un conocimiento del contenido en relación a los estudiantes adecuado, que les permita vislumbrar posibles errores y/o dificultades presentes en el razonamiento de Pedro. Así, del análisis de las respuestas hemos identificado los siguientes dos tipos de argumentaciones (tabla 5.72), que dan razones de por qué el razonamiento de Pedro es incorrecto.

Dificultades identificadas por los profesores en las respuestas erróneas	Frecuencia	Porcentaje
Influencia de los resultados anteriores.	12	12,9
No comprende el concepto de probabilidad	27	29,0
No señala argumentos	4	4,3

Tabla 5.72 Frecuencia de errores y/o dificultades identificadas por los profesores en el ítem 5

En la tabla 5.72 se observa que 12 de los 43 profesores han identificado que la dificultad presente en la respuesta de Pedro consiste en que éste se ha dejado influenciar por sus malos resultados en los juegos anteriores. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *“No es correcto, se ha equivocado al guiarse por lo que ha sucedido antes, siempre tendrá la misma probabilidad de ganar o perder”* (profesor 89).

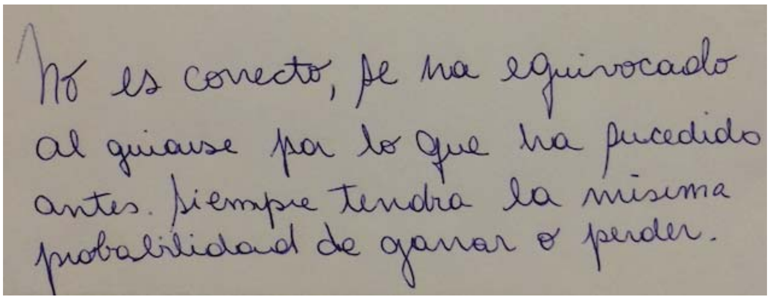

No es correcto, se ha equivocado
al guiarse por lo que ha sucedido
antes. Siempre tendra la misma
probabilidad de ganar o perder.

Figura 5.113 Respuesta del profesor 89 al ítem 5

A partir de este tipo de respuesta, se observa que el profesor identifica, implícitamente, el sesgo de la recencia negativa.

Por otro lado, 27 de los 43 profesores que identifican que Pedro está equivocado lo hacen en base al argumento de que Pedro no maneja adecuadamente los conceptos de probabilidad involucrados en la resolución de la situación problemática planteada. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *“Es incorrecta. No es cosa de suerte, sino de probabilidad. Por lo tanto, Pedro no entiende bien la probabilidad, sino entendería que siempre tiene la misma probabilidad de ganar o de perder”* (profesor 91).

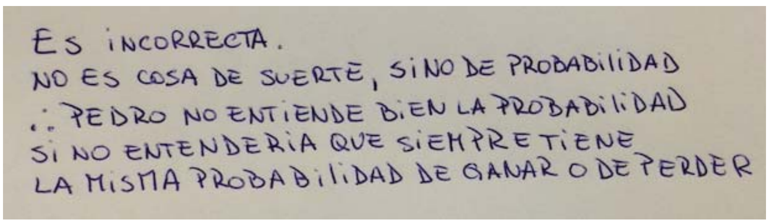

ES INCORRECTA.
NO ES COSA DE SUERTE, SINO DE PROBABILIDAD
∴ PEDRO NO ENTIENDE BIEN LA PROBABILIDAD
SI NO ENTENDERIA QUE SIEMPRE TIENE
LA MISMA PROBABILIDAD DE GANAR O DE PERDER

Figura 5.114 Respuesta del profesor 91 al ítem 5

Mientras que 4 de los 43 profesores que han respondido que el razonamiento de Pedro es incorrecto, lo han hecho sin dar ninguna justificación al respecto.

Así, en base a las respuestas de los profesores, podemos afirmar que su conocimiento del contenido en relación con los estudiantes es insuficiente, pues solo un 12,9% identifica adecuadamente posibles errores y/o dificultades que han llevado al alumno ficticio a responder equivocadamente. En tanto que un 29% identifica dificultades a un nivel demasiado general y un 4% no logra argumentar su respuesta.

5.3.3.3.3.5 Análisis del ítem 6

Entre los propósitos de este ítem (figura 5.115) se encuentra el evaluar el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre comparación de probabilidades simples, así como la noción de juego equitativo.

> Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya.
>
> ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Figura 5.115 Situación problemática ítem 6

Para ello se solicitó a los profesores que dieran su opinión sobre la afirmación de Eduardo. Así, a través de los argumentos presentes en sus respuestas, lograr indagar en su conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. La tabla 5.73 muestra los resultados obtenidos en relación con el grado de corrección de las respuestas.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	56	60,2
Parcialmente correcta	10	10,8
Incorrecta	24	25,8
No responde	3	3,2
Total	93	100

Tabla 5.73 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al ítem 6

A partir de la tabla 5.73 observamos que este ítem no presentó grandes dificultades para los profesores, pues un amplio número (60,2%) logra identificar que la afirmación de

Eduardo está equivocada otorgando además un argumento para ello que permite evidenciar las dificultades que han llevado a Eduardo a responder erróneamente. Mientras que un 10,8% si bien identifica que Eduardo esta equivocado, lo hace a partir de argumentos incorrectos, sin identificar posibles errores y/o dificultades. A continuación, en la tabla 5.74 se han clasificado los tipos de errores y/o dificultades identificadas por los 56 profesores que han dado una respuesta correcta.

Dificultades identificadas por los profesores en las respuestas erróneas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Comparar solo los casos favorables	37	39,8
No saber calcular porcentajes o comparar fracciones.	13	14,0
No comprender cálculo y comparación de probabilidades.	6	6,5

Tabla 5.74 Frecuencia de errores y/o dificultades identificadas por los profesores en el ítem 6

Como se observa en la tabla 5.74 el error y/o dificultad mejor identificado consiste en considerar solo los casos favorables, es decir la cantidad de bolas blancas. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Está equivocado, ambas cajas tienen la misma probabilidad de sacar una bola blanca. El error de Eduardo está en creer que porque Luís tiene más bolas blancas, tiene más probabilidades de ganar. Solo se fija en las cantidades de bolas blancas"* (profesor 87).

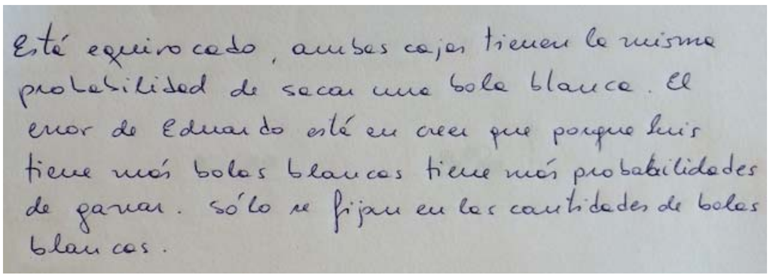

Esté equivocado, ambas cajas tienen la misma probabilidad de sacar una bola blanca. El error de Eduardo esté en creer que porque Luis tiene más bolas blancas tiene más probabilidades de ganar. Sólo se fijan en las cantidades de bolas blancas.

Figura 5.116 Respuesta del profesor 87 al ítem 6

Por otro lado, 13 de los 56 profesores identifica como un posible error, el no saber calcular porcentajes o bien no tener conocimientos sobre comparación de fracciones. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"No es correcto. Ambos tienen el mismo porcentaje de bolas blancas. Quizás Eduardo no sabe calcular porcentajes o no sabe fracciones"* (profesor 82).

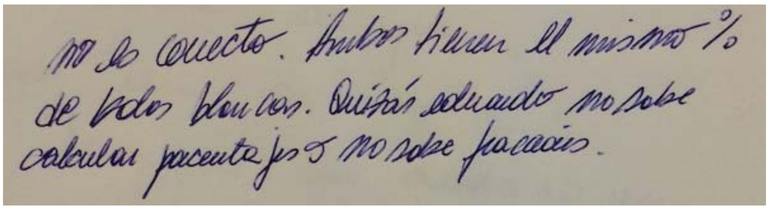


Figura 5.117 Respuesta del profesor 82 al ítem 6

En un número menor se encuentran aquellos profesores que consideran como un posible error y/o dificultad el no comprender el cálculo y comparación de probabilidades. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"No es correcta. Ambos tienen la misma probabilidad. Luís 1/3 y Eduardo 1/3. Hay que saber calcular probabilidad, simplificar y comparar fracciones"* (profesor 85).

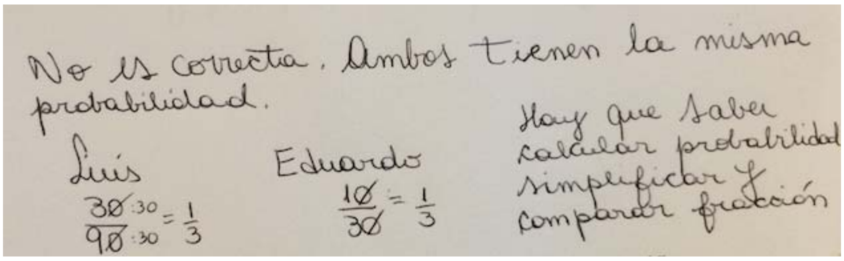


Figura 5.118 Respuesta del profesor 85 al ítem 6

En consecuencia, a partir de lo anteriormente expuesto, podemos inferir que estos profesores presentan un conocimiento del contenido en relación con los estudiantes sobre comparación de probabilidades simples, así como la noción de juego equitativo, adecuado. Pues, éstos en su mayoría (60,2%), han logrado identificar posibles errores y/o dificultades pertinentes en relación a la situación problemática planteada.

5.3.3.3.4 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

En el apartado anterior, hemos analizado las distintas respuestas y argumentaciones de los profesores en relación a cuestiones del tipo *"describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema planteado"*. Este tipo de preguntas nos ha permitido indagar en el conocimiento del contenido especializado que presentan los profesores de nuestra investigación. A partir de los análisis ya realizados, consideramos que este tipo de conocimiento es, a nivel general, deficiente, evidenciando que los profesores carecen de la capacidad para identificar y describir tanto las configuraciones cognitivas como los posibles conflictos de aprendizaje que pueden presentar los alumnos al momento de tratar de dar respuesta a una determinada situación problemática sobre probabilidad. Puesto que el porcentaje de respuestas correctas es muy bajo y solo supera al 50% en una de las preguntas.

Estos resultados se pueden visualizar mediante el gráfico de la figura 5.119 que muestra la composición de los distintos tipos de respuestas de acuerdo con la variable "grado de corrección", es decir, los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, así como el porcentaje de respuestas sin responder para cada uno de los ítems y subítems que evalúan el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes.

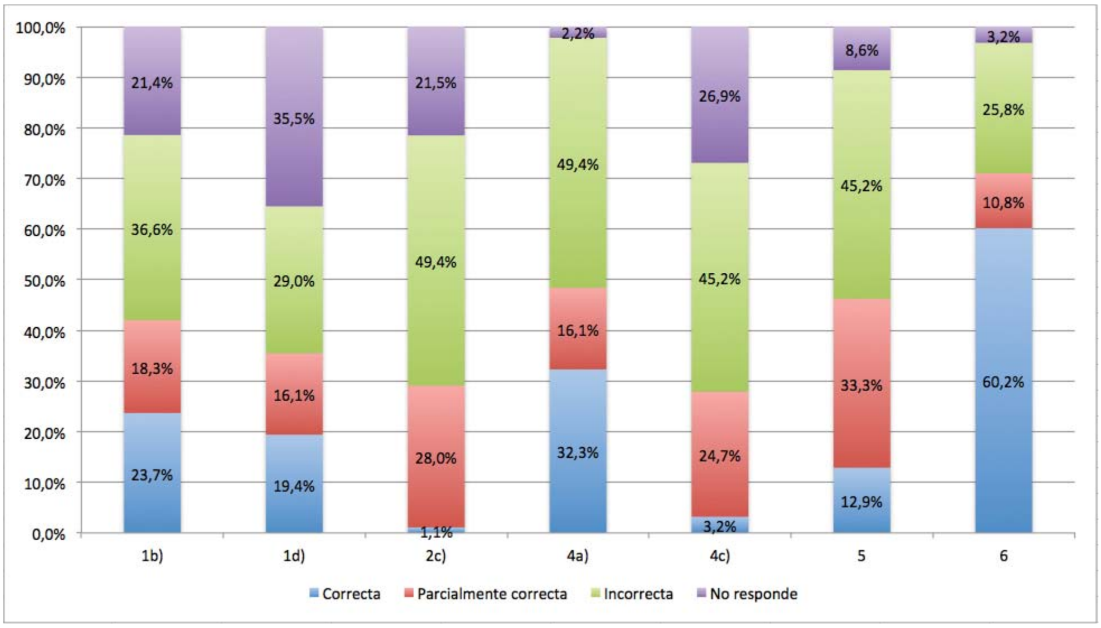


Figura 5.119 Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes de acuerdo con el grado de corrección

En lo que sigue, presentamos el resumen estadístico de los resultados (tabla 5.75) en base al análisis de las puntuaciones obtenidas en los ítems y subítems que se refieren al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. Recordemos que para este tipo de contenido la puntuación máxima a obtener es de 14 puntos.

	Estadístico	**Error típ.**
Media	4,53	0,249
Mediana	4,00	
Moda	5	
Desviación típica	2,398	
Varianza	5,752	
Asimetría	0,461	0,250
Curtosis	-0,144	0,495
Mínimo	0	
Máximo	11	
Rango	11	
Recuento	93	
Percentiles		
25		3,00
50		4,00
75		6,00

Tabla 5.75 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

A partir de la tabla 5.75 se observa que las puntuaciones totales para este tipo de conocimiento varían entre los 0 y los 11 puntos, de lo que se desprende que ninguno de los profesores logró alcanzar la puntuación máxima de 14 puntos. Además se observa que la media y la mediana obtenidas están muy por debajo de lo esperado, siendo inferiores al 50%. Lo cual al igual que con el análisis de corte cualitativo que se presentó en el apartado anterior, deja de manifiesto que estos profesores poseen un deficiente conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. Del mismo modo, el coeficiente de asimetría de Fisher de 0,461 evidencia una muy leve concentración de las puntuaciones totales a la derecha de la media.

Por otro lado, en la figura 5.120 se observa que la mediana se ubica próxima al primer cuartil del *box plot*, lo que indica que la distribución de las puntuaciones totales presenta una concentración en la parte baja de las puntuaciones.

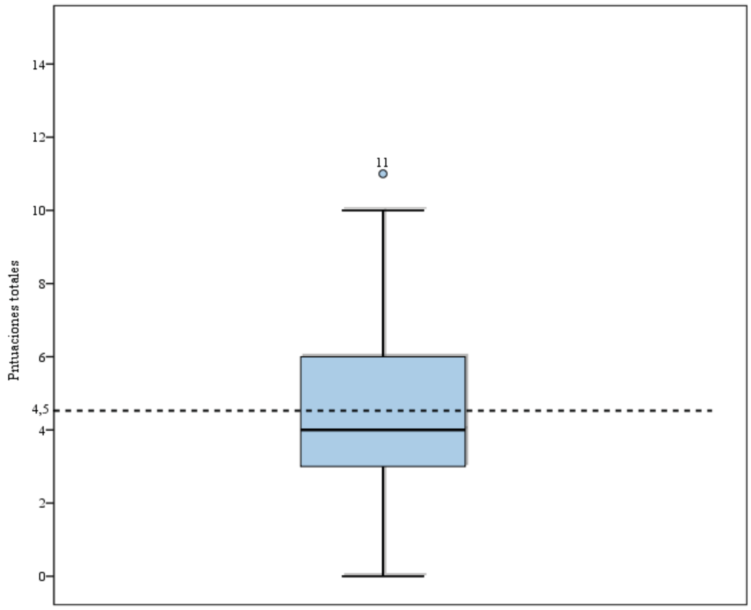


Figura 5.120 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

Además, se observa que existe un *outlier* que corresponde a un profesor que obtuvo una puntuación total de 11 puntos, lo que escapa al 50% central de los datos, pues estos se concentran entre los 3 y los 6 puntos aproximadamente. Del mismo modo, la figura 5.121 nos muestra una clara tendencia a los valores bajos.

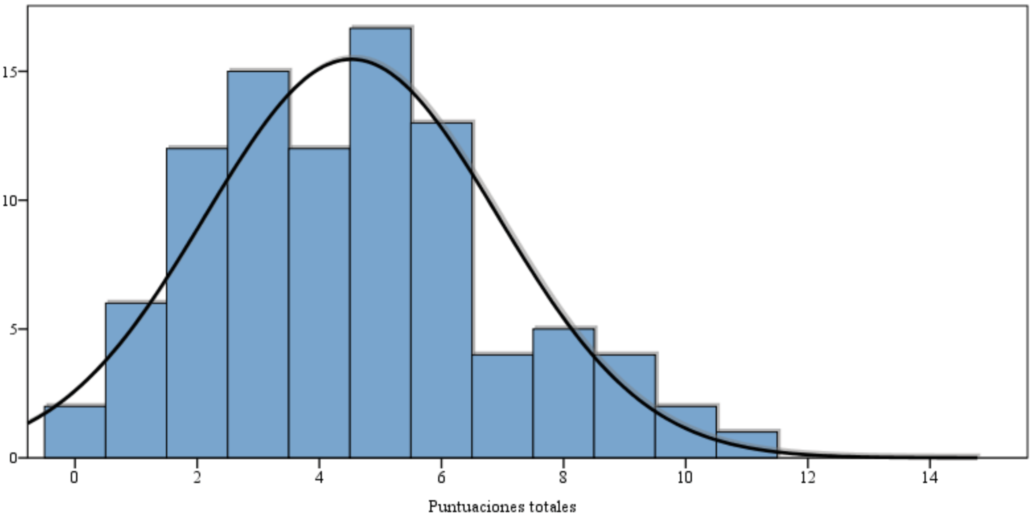


Figura 5.121 Puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

Para tener mayor claridad de cómo se distribuyen las puntuaciones totales en relación al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, organizamos tal información en la tabla 5.76.

Puntajes totales	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
0	2	2,2	2,2
1	6	6,5	8,6
2	12	12,9	21,5
3	15	16,1	37,6
4	12	12,9	50,5
5	17	18,3	68,8
6	13	14,0	82,8
7	4	4,3	87,1
8	5	5,4	92,5
9	4	4,3	96,8
10	2	2,2	98,9
11	1	1,1	100,0
Total	93	100,0	

Tabla 5.76 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes

En base a la información entregada en la tabla 5.76, se observa claramente que ninguno de los profesores obtuvo la puntuación máxima de 14 puntos para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, concentrándose el grueso de las puntuaciones (82,8%) entre los 0 y los 6 puntos, es decir, en menos del 50% del puntaje ideal. En consecuencia a partir de los datos antes presentados evidenciamos que los profesores presentan grandes carencias en lo que al conocimiento del contenido en relación con los estudiantes se refiere, carencias y debilidades que han sido presentadas en el apartado anterior.

Al igual que para los análisis de los otros tipos de conocimientos, a continuación se presenta un análisis de los resultados para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes de acuerdo con las características de los profesores que han respondido el cuestionario, pues creemos que esto nos puede ayudar a comprender de mejor manera cómo se distribuyen las puntuaciones totales para este tipo de conocimiento.

5.3.3.3.4.1 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según "especialidad"

En la figura 5.122 se observa que independientemente de la especialidad las puntuaciones son bajas, siendo levemente mejores las puntuaciones de los profesores con especialidad matemática. Dentro de las puntuaciones obtenidas por los profesores con especialidad matemática encontramos una observación extrema que corresponde a un profesor que ha obtenido 11 puntos.

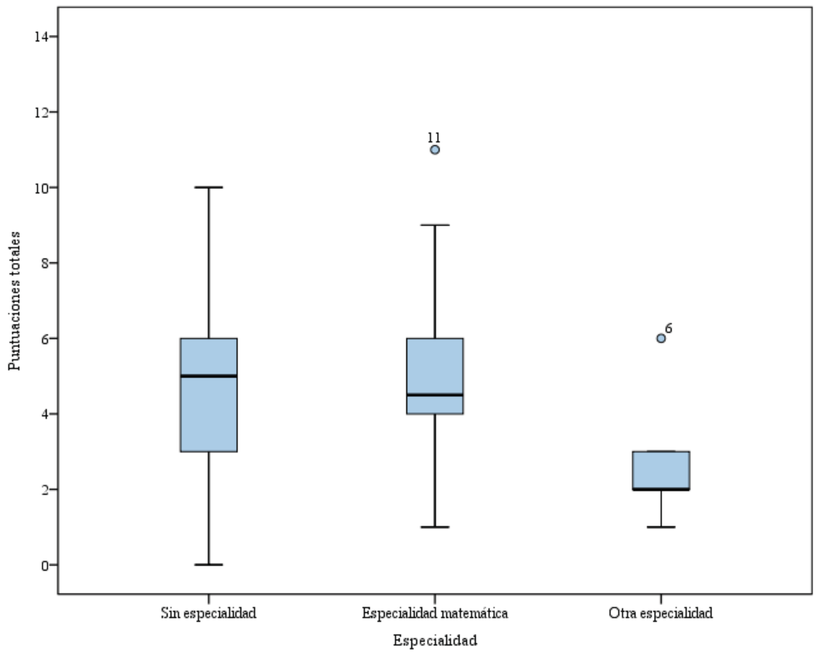


Figura 5.122 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según especialidad

Por otro lado, en el caso de los profesores con especialidad, el 50% central de sus puntuaciones presentan la mayor variabilidad, estando éstas principalmente concentradas entre los 5 y 6 puntos aproximadamente. Mientras que para el caso de los profesores con otra especialidad, las puntuaciones se concentran en las puntuaciones bajas, a excepción de un profesor que obtuvo 6 puntos.

Para complementar la información entregada por el *box plot,* en la tabla 5.77 se presenta un análisis descriptivo de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "especialidad".

	Sin especialidad		Con especialidad matemática		Con otra especialidad	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	71		14		8	
Media	4,61	0,279	5,21	0,705	2,63	0,532
Mediana	5,00		4,50		2,00	
Varianza	5,528		6,951		2,268	
Desv. típ.	2,351		2,636		1,506	
Mínimo	0		1		1	
Máximo	10		11		6	
Rango	10		10		5	
Amplitud intercuartil	3		3		1	
Asimetría	0,267	0,285	0,817	0,597	1,856	0,752
Curtosis	-0,315	0,563	0,615	1,154	4,257	1,481
Percentil						
25	3,00		3,75		2,00	
50	5,00		4,50		2,00	
75	6,00		6,50		3,00	

Tabla 5.77 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según especialidad

En la tabla 5.77 se observa que los profesores con especialidad matemática tuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que los demás profesores, con una desviación típica también ligeramente mayor. No obstante, no hay que olvidar que aun así las sus puntuaciones son muy bajas.

5.3.3.3.4.2 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según "años de experiencia"

El *box plot* de la figura 5.123 nos permite visualizar las distribuciones de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes en cada uno de los grupos de la variable "años de experiencia".

A partir de la figura 5.123 se observa claramente lo bajo que distribuyen las puntuaciones para los cuatro grupos, en que la mediana de las puntuaciones totales es cercana a los 4 puntos para todos los grupos. Además, se observa que el 50% central de los datos, para los cuatros grupos, se mueve en un rango que va desde los 2 a los 8 puntos aproximadamente, esto nos indica que las puntuaciones presentan poca variabilidad, y que se concentran principalmente en puntuaciones bajas. En el caso de los profesores que tienen entre 5 a 10 años de experiencia es posible observar una observación extrema que corresponde a un profesor que obtuvo 11 puntos en el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, lo que corresponde a la puntuación máxima obtenida.

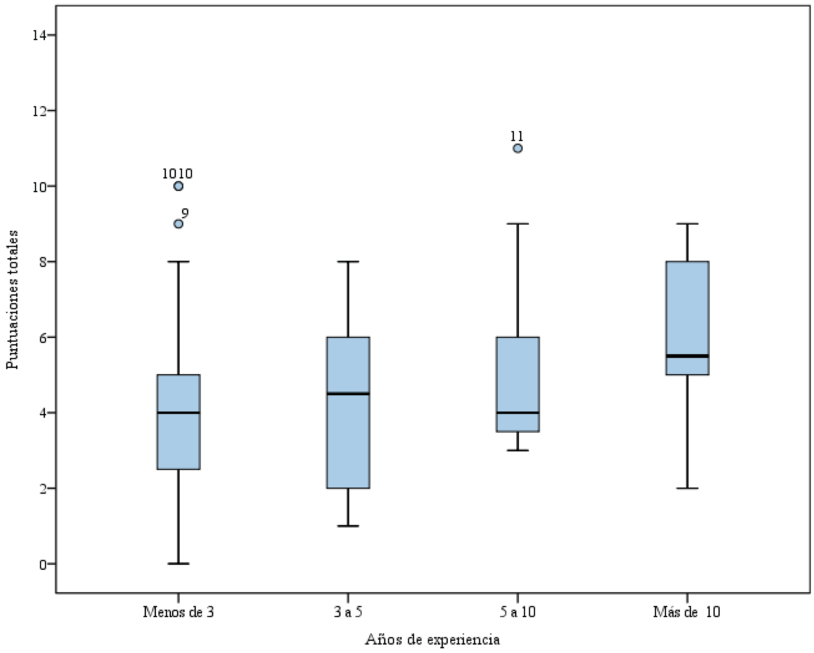


Figura 5.123 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según años de experiencia

Al igual que con los profesores con 5 a 10 años de experiencia, los profesores con menos de 3 años de experiencia, presentan 3 observaciones extremas, dos con 10 puntos y una con 9 puntos, observándose además, para este grupo de profesores, que sus puntuaciones se encuentran concentradas en la zona superior del *box plot*.

Si observamos la tabla 5.78 que muestra el resumen estadístico de la variable puntuación total para cada uno de los grupos que conforman la variable "años de experiencia" se ve que en promedio el rendimiento de los profesores con entre 5 a 10 años de experiencia, fue levemente mejor que el de los demás profesores.

Sin embargo, no olvidemos, que tales puntuaciones continúan siendo muy bajas en relación al puntaje total que es 14 puntos.

	Menos de 3 años		Entre 3 a 5 años		Entre 5 a 10 años		Más de 10 años	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	43		20		16		14	
Media	4,09	0,373	4,15	0,499	5,06	0,574	5,79	0,604
Mediana	4,00		4,50		4,00		5,50	
Varianza	5,991		4,976		5,263		5,104	
Desv. típ.	2,448		2,231		2,294		2,259	
Mínimo	0		1		3		2	
Máximo	10		8		11		9	
Rango	10		7		8		7	
Amplitud intercuartil	3		4		3		3	
Asimetría	0,613	0,361	0,171	0,512	1,503	0,564	-0,204	0,597
Curtosis	0,205	0,709	-1,186	0,992	1,967	1,91	-0,618	1,154
Percentil								
25	2,00		2,00		3,25		4,75	
50	4,00		4,50		4,00		5,50	
75	5,00		6,00		6,00		8,00	

Tabla 5.78 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según años de experiencia

5.3.3.3.4.3 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según "dependencia del establecimiento"

En el gráfico de la figura 5.124 podemos observar cómo se distribuyen los puntajes del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según el tipo de dependencia.

Se observa que las puntuaciones son bajas para los tres grupos, además de que el puntaje máximo de 14 puntos no fue alcanzado por ninguno de los profesores. Solo un profesor alcanza un puntaje (11 puntos) relativamente cercano al máximo. En cuanto a los puntajes por tipo de dependencia, para el caso de los profesores de establecimientos municipales, se observa que sus puntajes se concentrar en la parte superior de la caja, puesto que la mediana se encuentra ligeramente desplazada hacia arriba. Mientras que en el caso de los profesores de establecimientos subvencionados y particulares pagados los puntajes se concentran en la zona baja del *box plot*, pues sus mediana se encuentran próximas al primer cuartil.

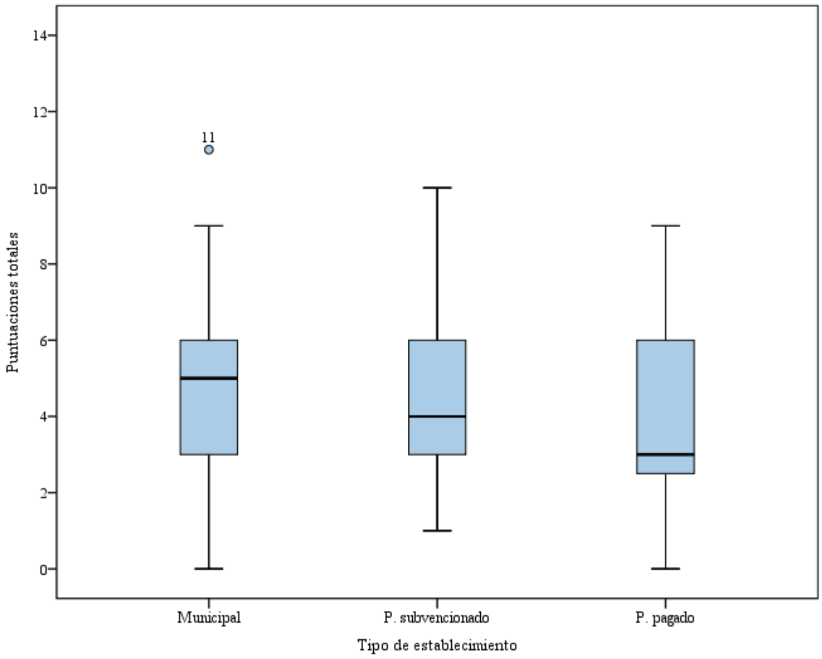


Figura 5.124 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según tipo de establecimiento

Para complementar la información entregada por la figura 5.124 a continuación se muestran los estadísticos descriptivos para la variable dependencia en la tabla 5.79. De modo tal de describir de mejor manera el comportamiento de la variable "dependencia del establecimiento".

	Municipal		**Particular subvencionado**		**Particular pagado**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	31		55		7	
Media	4,71	0,452	4,47	0,304	4,14	1,223
Mediana	5,00		4,00		3,00	
Varianza	6,346		5,069		10,476	
Desv. típ.	2,519		2,251		3,237	
Mínimo	0		1		0	
Máximo	11		10		9	
Rango	11		9		9	
Amplitud intercuartil	3		3		6	
Asimetría	0,365	0,421	0,563	0,322	0,606	0,794
Curtosis	0,277	0,821	-0,145	0,634	-0,736	1,587
Percentil						
25	3,00		3,00		2,00	
50	5,00		4,00		3,00	
75	6,00		6,00		8,00	

Tabla 5.79 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según dependencia del establecimiento

5.3.3.3.4.4 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según "género"

En el *box plot* de la figura 5.125 se muestra cómo distribuyen las puntuaciones totales en el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes en cada uno de los grupos que conforman la variable género.

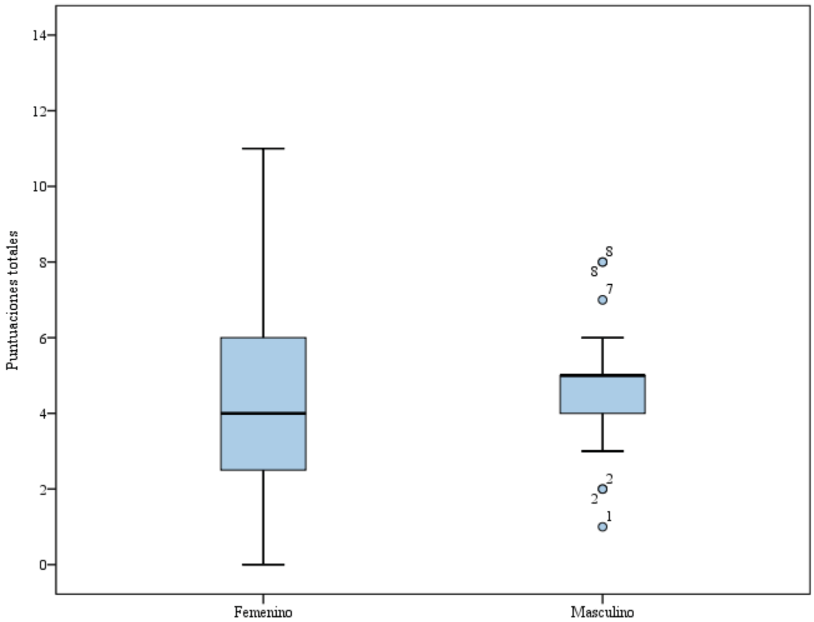


Figura 5.125 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según género

En la figura 5.125 se observa que las puntuaciones obtenidas por las mujeres presentan una mayor variabilidad a diferencia de las puntuaciones de los hombres que se concentran entre los 4 y 5 puntos, presentando algunas observaciones extremas superiores e inferiores. Además, se observa que tanto las puntuaciones máximas como mínimas han sido alcanzadas por el grupo de mujeres. No obstante, no hay que olvidar que las puntuaciones en general son muy bajas en relación al puntaje máximo real que es de 14 puntos.

Para complementar este estudio sobre la distribución de los puntajes para la variable "genero", en la tabla 5.80 se muestran los estadísticos descriptivos del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) al interior de cada uno de los grupos (mujer, hombre).

	Mujer		Hombre	
	Estadístico	Error típ.	Estadístico	Error típ.
Recuento	68		25	
Media	4,51	0,317	4,56	0,347
Mediana	4,00		5,00	
Varianza	6,821		3,007	
Desv. típ.	2,612		1,734	
Mínimo	0		1	
Máximo	11		8	
Rango	11		7	
Amplitud intercuartil	4		2	
Asimetría	0,490	0,291	0,125	0,464
Curtosis	-0,380	0,574	0,099	0,902
Percentil				
25	2,25		3,50	
50	4,00		5,00	
75	6,00		5,50	

Tabla 5.80 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes según género

A partir de la tabla 5.80 se observa que ninguno de los profesores obtuvo la puntuación máxima teórica, siendo la puntuación media alcanzada de 4,5 puntos aproximadamente. Además, se observa que los hombres tuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que las mujeres. Sin embargo, al igual que en los casos anteriores, no debemos olvidar que las puntuaciones obtenidas por ambos grupos son muy bajas de acuerdo a lo esperado.

5.3.3.3.5 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Es importante recordar que en este tipo de conocimiento que corresponde a una subcategoría del conocimiento especializado, es fundamental según Godino (2009), el rol otorgado a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modelos de gestión de la clase.

Para lograr nuestro objetivo de evaluar este tipo de conocimiento, aunque sea muy someramente, nos hemos centrado en el conocimiento del profesor para describir estrategias y/o recursos que utilizarían para ayudar a superar posibles errores y/o dificultades a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos al resolver las situaciones problemáticas planteadas (Godino, 2009). Con este propósito se han presentado a los profesores cinco situaciones problemáticas sobre probabilidad, en las cuales se han enunciado algunas preguntas que atienden a las facetas interaccional y mediacional de este conocimiento, pero centrado principalmente en la faceta mediacional. Tales preguntas consisten, a nivel general, en solicitar que *describan las estrategias que utilizaría para ayudar a los alumnas que tengan dificultades para resolver el problema planteado*. De este modo, esperamos contar con información necesaria que nos permita indagar en el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. En consecuencia, para analizar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza que poseen los profesores de primaria en activo, nos hemos centrado en las respuestas y argumentaciones que dan los profesores a las preguntas 1e), 2d), 3c), 4d) y 7c) del Cuestionario CDM-Probabilidad.

Así, para lograr nuestro objetivo de evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, hemos seguido las siguientes fases que se muestran en la figura 5.126. Tales fases consisten en una breve presentación y descripción del ítem, que recuerda algunos de los aspectos presentados en el análisis *a priori* para cada uno de los ítems realizado en el capítulo 4; presentación de los resultados en base a la variable cuantitativa grado de corrección de la respuesta, para continuar con el análisis de los tipos de estrategias y recursos que los profesores proponen.

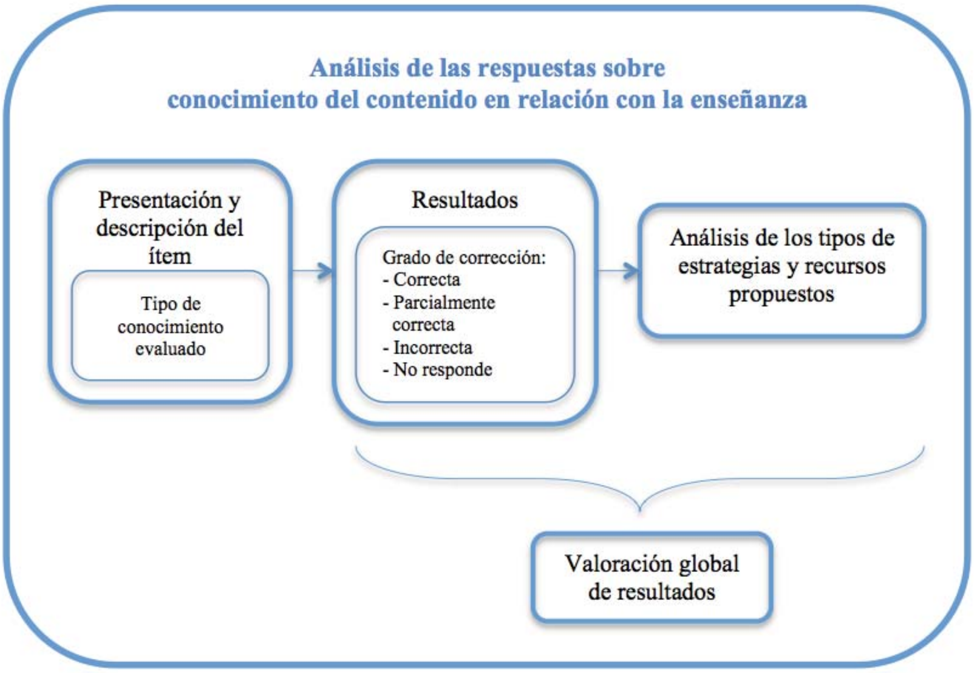


Figura 5.126 Fases presentes en el análisis de las respuestas referidas al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Por último, terminamos esta sección con una síntesis del análisis de los resultados sobre el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, y con un resumen estadístico de los puntajes obtenidos para este tipo de conocimiento.

5.3.3.3.5.1 Análisis del subítem 1e)

Dentro de los distintos objetivos que se buscan abordar con este ítem (figura 5.127) se encuentra el de evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza en lo que respecta a la independencia de sucesos en ensayos repetidos, bajo las mismas condiciones de un experimento aleatorio.

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

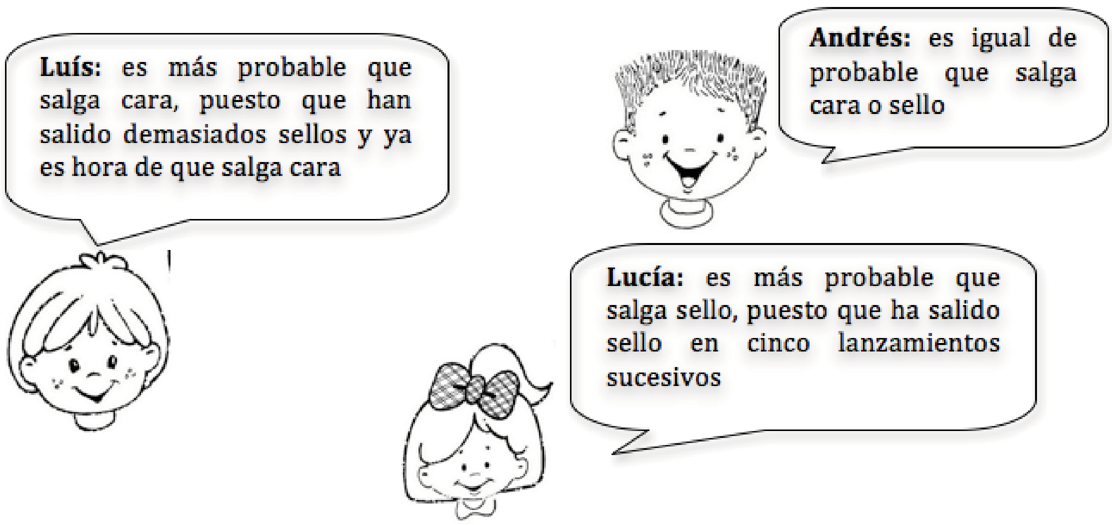


Figura 5.127 Situación problemática ítem 1

Con tal objetivo en mente, se solicitó a los profesores que explicaran *¿qué estrategias utilizarían para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?*

Los resultados de las respuestas a esta pregunta, se resumen en la tabla 5.81. En ella podemos observar que los profesores presentan gran dificultad para proponer posibles estrategias que sirvan de apoyo a los alumnos que muestran dificultades, ya que solamente un 5,4% es capaz de describir y explicar tales estrategias. Mientras que un alto porcentaje (46,2%) solo se limita a nombrar estrategias a un nivel muy general. En tanto, un 16,1% entrega una respuesta completamente incorrecta y sin sentido, y un 32,3% no responde a la pregunta planteada.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	5	5,4
Parcialmente correcta	43	46,2
Incorrecta	15	16,1
No responde	30	32,3
Total	93	100

Tabla 5.81 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 1e)

Para realizar nuestro análisis de los tipos de estrategias y recursos propuestos, nos centramos en las respuestas correctas y parcialmente correctas, puesto que las respuestas incorrectas no nos aportan información sobre las respuestas adecuadas. En la tabla 5.82 se han clasificado los tipos de estrategias propuestas por los 48 profesores que han dado ya sea una respuesta correcta o parcialmente correcta.

Tipos de estrategias propuestas por los profesores	Frecuencia	Porcentaje
Realizar el experimento, realizando una descripción.	5	5,4
Realizar el experimento pero no realizan descripción alguna.	35	37,6
Utilizar material concreto y software	8	8,6

Tabla 5.82 Tipo de estrategias propuestas por los profesores en el ítem 1

Un ejemplo de respuesta de aquellos cinco profesores que han indicado que realizarían el experimento y que han dado una descripción de esta estrategia es el siguiente: *"Realizar el experimento, es decir, pedir a los alumnos que lancen la moneda 10, 20, 30 o 50 veces y que observen, por ejemplo, la cantidad de veces que sale cara en cada uno de estos lanzamientos. Que luego registren sus resultados en una tabla de frecuencias relativas. Luego realizaría distintos tipos de preguntas que los lleven a entender que a mayor número de lanzamientos, la probabilidad de obtener cara se acerca a 0,5. Pero que eso no significa que deba salir igual número de caras que de sellos. Realizaría mucho hincapié en este aspecto para que comprendan que si lo llevamos al problema, la probabilidad de obtener cara o sello en el noveno lanzamiento es la misma en ambos sucesos, sin importar lo que haya ocurrido antes"* (profesor 87).

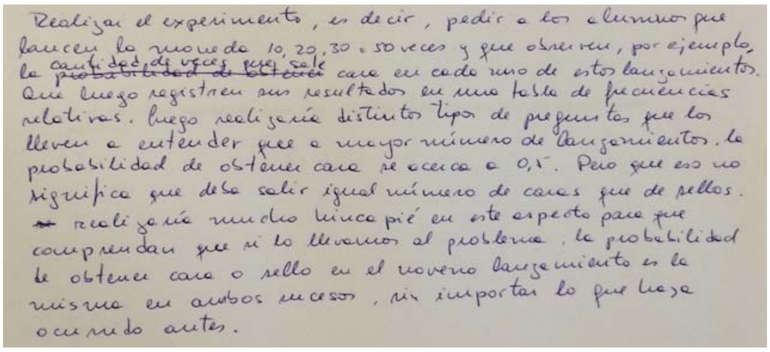

Realizar el experimento, es decir, pedir a los alumnos que lancen la moneda 10, 20, 30 o 50 veces y que observen, por ejemplo, la cantidad de veces que sale ~~probabilidad de obtener~~ cara en cada uno de estos lanzamientos. Que luego registren sus resultados en una tabla de frecuencias relativas. Luego realizaría distintos tipos de preguntas que los lleven a entender que a mayor número de lanzamientos, la probabilidad de obtener cara se acerca a 0,5. Pero que eso no significa que deba salir igual número de caras que de sellos. realizaría mucho hincapié en este aspecto para que comprendan que si lo llevamos al problema, la probabilidad de obtener cara o sello en el noveno lanzamiento es la misma en ambos sucesos, sin importar lo que haya ocurrido antes.

Figura 5.128 Respuesta del profesor 87 al subítem 1e)

En esta respuesta podemos observar que el profesor tiene bastante claridad del concepto de probabilidad involucrado en la resolución de la situación problemática planteada, enfocando su estrategia de enseñanza desde una visión frecuentista de la probabilidad.

Por otro lado, se encuentra un 37,6% de los profesores que señalan como estrategia el realizar el experimento de lanzar la moneda pero que no dan ningún tipo de descripción de cómo realizarían tal experimento, cuál sería el propósito de realizarlo, ni las preguntas que realizarían para orientar el proceso de aprendizaje del concepto que está detrás de la situación problemática. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Realizar el experimento nuevamente con moneda y otros elementos"* (profesor 46).

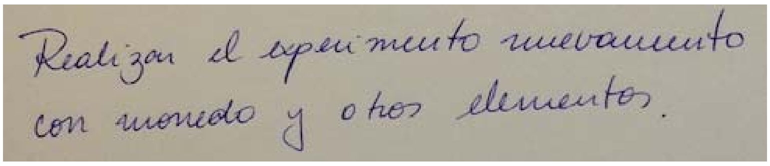
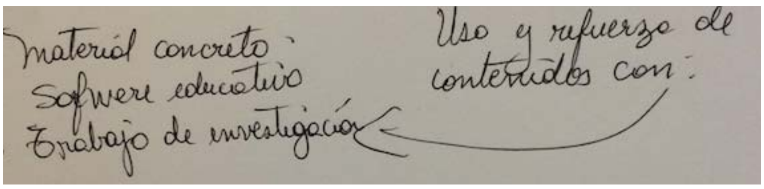

Realizar el experimento nuevamente con moneda y otros elementos.

Figura 5.129 Respuesta del profesor 46 al subítem 1e)

Por último, un 8,6% de los profesores solo se limita a responder que utilizaría material concreto o algún tipo de software pero no precisa ningún otro tipo de información. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Material concreto, software educativo. Uso y refuerzo de contenidos con trabajo de investigación"* (profesor 44).


Material concreto.
Sofwere educativo
Trabajo de investigación

Uso y refuerzo de contenidos con:

Figura 5.130 Respuesta del profesor 44 al subítem 1e)

Finalmente, a partir de los distintos tipos de respuestas obtenidas para el subítem 1e) podemos concluir que estos profesores poseen un conocimiento del contenido en relación con la enseñanza muy débil y deficiente, pues no cuentan con los conocimientos necesarios para una gestión adecuada de la situación de enseñanza.

5.3.3.3.5.2 Análisis del subítem 2d)

Entre los diversos propósitos de este ítem (figura 5.131) está el evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza vinculado al cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple.

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

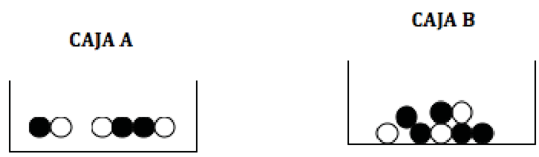


Figura 5.131 Situación problemática ítem 2

Con este propósito, se solicitó a los profesores que explicaran *¿qué estrategias utilizarían para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?*

Un resumen de los resultados obtenidos se muestra en la tabla 5.83. En ella podemos observar que esta pregunta presentó dificultad para los profesores pues solo un 12,9% de ellos señala y explica estrategias que ayudarían a los estudiantes a una mejor comprensión de la situación problemática, para así superar sus dificultades. En tanto que un 46,2% solo nombra posibles estrategias sin dar ninguna explicación de ellas. Mientras que, nos encontramos con un 18,3% de los profesores que señalan estrategias poco adecuadas como, por ejemplo, realizar el ejercicio repetidas veces. Por último, cabe destacar que un 22,6% de los profesores no responde a la pregunta.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	12	12,9
Parcialmente correcta	43	46,2
Incorrecta	17	18,3
No responde	21	22,6
Total	93	100

Tabla 5.83 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 2d)

Una vez categorizadas las respuestas de acuerdo al grado de corrección, indagamos en los distintos tipos de estrategias correctas propuestas por los profesores, así como en sus explicaciones cuando corresponde. Además, hemos considerado en este análisis las respuestas parcialmente correctas, pues si bien en ellas los profesores no justifican su respuesta, si dan a conocer un tipo de estrategia. De esta manera, hemos identificado los siguientes tipos de estrategias que se muestran en la tabla 5.84.

Tipos de estrategias propuestas por los profesores	Frecuencia	Porcentaje
Realizar el experimento, comparar cantidades de bolitas blancas y negras	5	5,4
Comparar cantidad de bolitas por medio de porcentajes	7	7,5
Realizar el experimento pero no explican su estrategia.	43	46,2

Tabla 5.84 Tipo de estrategias propuestas por los profesores en el ítem 2

Como se observa en la tabla 5.84 un 5,4% considera que una buena estrategia es comparar las cantidades absolutas de bolitas negras y blancas en cada caja y de este modo determinar en cuál de ellas hay una mayor probabilidad de obtener una bola blanca. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Parear las pelotas blancas con las negras para ver en qué caja sobran y de qué color. Las que sobran tienen más posibilidades de salir"* (profesor 52).

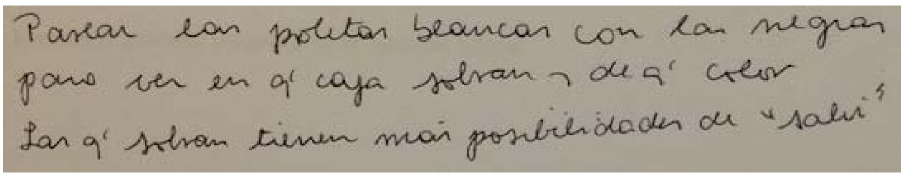
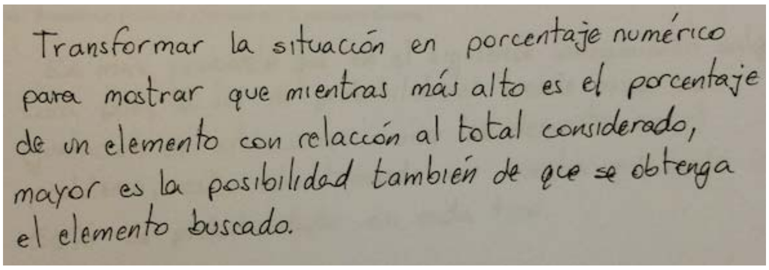

Parear las polotas blancas con las negras
para ver en q' caja sobran y de q' color
Las q' sobran tienen más posibilidades de "salir"

Figura 5.132 Respuesta del profesor 52 al subítem 2d)

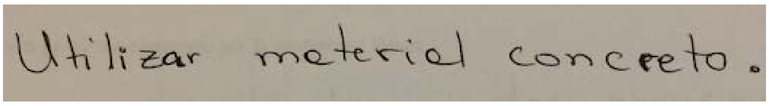
Por otro lado, un 7,5% plantea como estrategia plausible el realizar la comparación de las cantidades de pelotitas blancas y negras en cada caja por medio de la utilización de porcentajes. Indicando la correspondencia a realizar entre porcentaje y la asignación de probabilidades. Un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente: *"transformar la situación en porcentaje numérico para mostrar que mientras más alto es el porcentaje* *de un elemento con relación al total considerado, mayor es la posibilidad también de que se obtenga el elemento buscado"* (profesor 51).



Transformar la situación en porcentaje numérico para mostrar que mientras más alto es el porcentaje de un elemento con relación al total considerado, mayor es la posibilidad también de que se obtenga el elemento buscado.

Figura 5.133 Respuesta del profesor 51 al subítem 2d)

Por último, cabe destacar que un alto porcentaje de los profesores (46,2%) que indican una estrategia adecuada, lo hacen sin dar ningún tipo de explicación o fundamentación al respecto. Un ejemplo de esto es el siguiente: *"Utilizar material concreto"* (profesor 65).



Utilizar material concreto.

Figura 5.134 Respuesta del profesor 65 al subítem 2d)

Así en base a los distintos tipos de respuestas obtenidos podemos inferir que el conocimiento del contenido en relación a la enseñanza vinculado al cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple, es muy débil pues son muy pocos los profesores que logran dar una justificación adecuada de su respuesta, y la gran mayoría otorga respuestas demasiado generales.

5.3.3.3.5.3 Análisis del subítem 3c)

Uno de los propósitos de este ítem (figura 5.135) es evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza vinculado a la comprensión del concepto de suceso seguro y la capacidad combinatoria de los profesores de primaria.

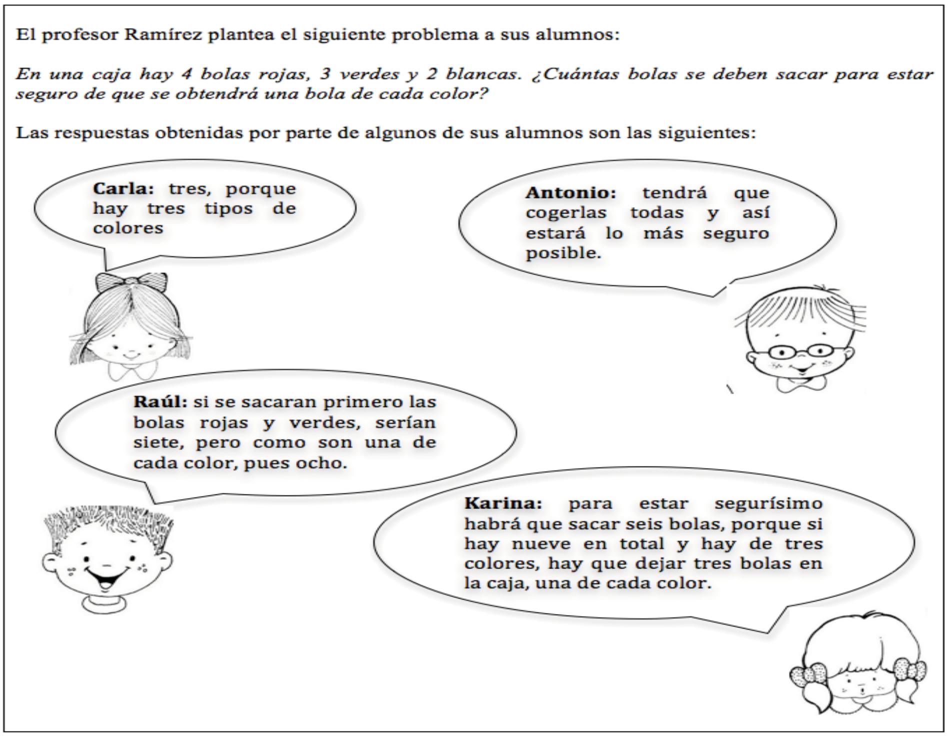


Figura 5.135 Situación problemática ítem 3

Para alcanzar dicho propósito, se solicitó a los profesores que explicaran *¿qué estrategias utilizarían para ayudar a aquellos alumnos que no han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?*

En la tabla 5.85 se muestra un resumen de los resultados obtenidos de acuerdo con el grado de corrección de las respuestas. Se observa que los resultados son muy bajos, de hecho solo 3 de los 93 profesores logra identificar y explicar al menos una estrategia adecuada que permita que los alumnos se den cuenta de su error y lo superen. Mientras que cerca de la mitad de los profesores (48,4%) solo menciona que utilizaría material concreto, sin dar mayor explicación al respecto. En tanto que un 23,7% nombra estrategias poco adecuadas, como por ejemplo leer bien el ejercicio; y un 24,7% no responde.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	3	3,2
Parcialmente correcta	45	48,4
Incorrecta	22	23,7
No responde	23	24,7
Total	93	100

Tabla 0.85 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 3c)

Luego de clasificar las respuestas de acuerdo a su grado de corrección, se procedió a analizar los distintos tipos de argumentaciones presentes en las respuestas correctas y parcialmente correctas. Lo que nos permitió elaborar la tabla 5.86 en la cual se dan a conocer los distintos tipos de estrategias propuestas por los profesores.

Tipos de estrategias propuestas por los profesores	Frecuencia	Porcentaje
Realizar el experimento de manera concreta con bolitas.	3	3,2
Utilizar material concreto.	45	48,4

Tabla 5.86 Tipo de estrategias propuestas por los profesores en el ítem 3

Ejemplos de estos tipos de respuestas son los siguientes: *"En primer lugar haría el ejercicio de manera concreta, es decir, teniendo la caja y las bolas. Otra estrategia es partir con menos cantidad de bolas, por ejemplo, con dos colores y menos cantidad y así aumentaría progresivamente hasta llegar al ejercicio. Otra estrategia luego de lo concreto es hacer lo mismo de manera pictórica. Finalmente utilizaría otra situación parecida"* (profesor 29).

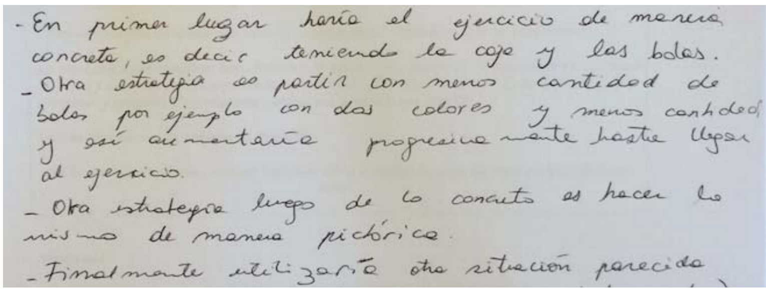

- En primer lugar haría el ejercicio de manera concreta, es decir teniendo la caja y las bolas.
- Otra estrategia es partir con menos cantidad de bolas por ejemplo con dos colores y menos cantidad y así aumentaría progresivamente hasta llegar al ejercicio.
- Otra estrategia luego de lo concreto es hacer lo mismo de manera pictórica.
- Finalmente utilizaría otra situación parecida

Figura 5.136 Respuesta del profesor 29 al subítem 3c)

El tipo de respuesta presentada en la figura 5.136 es el tipo de respuesta más completo con el cual nos hemos encontrado, pese a ello consideramos que aún se encuentra a un nivel muy general. Por su parte casi la mitad de los profesores solo se limita a responder que utilizaría material concreto, pero no señala ni el tipo de material, ni cómo, ni con qué propósito lo utilizaría. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Con material concreto"* (profesor 41).

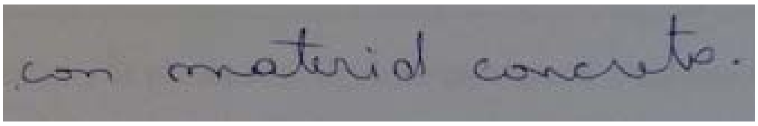


Figura 5.137 Respuesta del profesor 41 al subítem 3c)

De este modo a partir de la información proporcionada por los argumentos y explicaciones presentes en las respuestas de los profesores a la pregunta del subítem 3c), podemos evidenciar que el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza vinculado a la comprensión del concepto de suceso seguro y a la capacidad combinatoria, es muy débil, y prácticamente inexistente, pues un porcentaje muy pequeño logra describir de manera muy general la estrategia a utilizar.

5.3.3.3.5.4 Análisis del subítem 4d)

A través de este ítem (figura 5.138), se busca evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza vinculado al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables.

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Figura 5.138 Situación problemática ítem 4

Para ello se solicitó a los profesores que explicaran *¿qué estrategias utilizarían para ayudar a aquellos alumnos que no han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?* Los resultados de sus respuestas, de acuerdo al grado de corrección, se muestran en al tabla 5.87.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	3	3,2
Parcialmente correcta	45	48,4
Incorrecta	14	15,1
No responde	31	33,3
Total	93	100

Tabla 5.87 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 4d)

A partir de la tabla 5.87 se observa que este ítem presentó gran dificultad para los profesores pues solo 3 de ellos logran explicar adecuadamente una posible estrategia utilizar. Mientras que un 48,4% nombra y explica estrategias a un nivel muy general, limitándose solo a señalar, en la gran mayoría de los casos, que utilizarían material concreto. En tanto un 15,1% señala estrategias sin sentido. Cabe destacar el amplio porcentaje (33,3%) de preguntas sin responder.

Una vez clasificadas las respuestas según su grado de corrección, se procedió a analizar los distintos tipos de argumentos y explicaciones presentes en las respuestas correctas y parcialmente correctas, las cuales se resumen en la tabla 5.88.

Tipos de estrategias propuestas por los profesores	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Realizar el experimento y comparar cantidades.	3	3,2
Utilizar material concreto.	45	48,4

Tabla 5.88 Tipo de estrategias propuestas por los profesores en el ítem 4

Ejemplos de estos tipos de respuesta son los siguientes: *"Realizar el problema con material concreto. Luego realizar preguntas que los orienten a tener que comparar las cantidades de papelitos con nombres de niño y niña. Si no es suficiente con esto, expresar las cantidades en porcentajes y luego comparar. Realizar preguntas guías que los lleven a comparar posibilidad y luego probabilidades"* (profesor 91).

A partir de la figura 5.139, es posible observar que el profesor centra su estrategia en la comparación de las cantidades absolutas entre el número de niños y niñas, para de este modo facilitar la comparación de probabilidades.

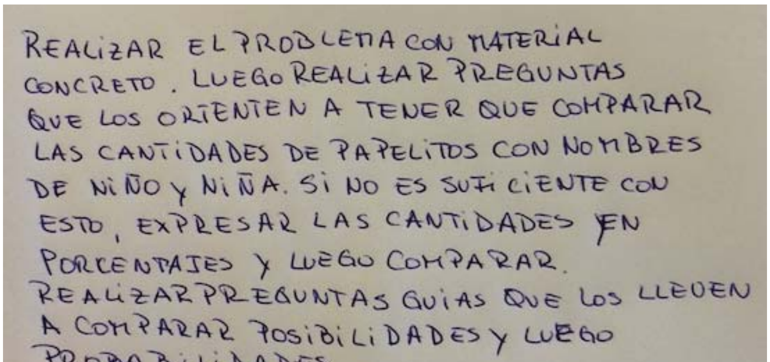


Figura 5.139 Respuesta del profesor 91 al subítem 4d)

No obstante, un porcentaje importante (48,4%) de los profesores solo se limita a indicar que realizaría el experimento o bien que utilizaría material concreto como una estrategia, pero sin ahondar más allá en la estrategia a utilizar. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Uso de material concreto que representen la situación"* (profesor 8).

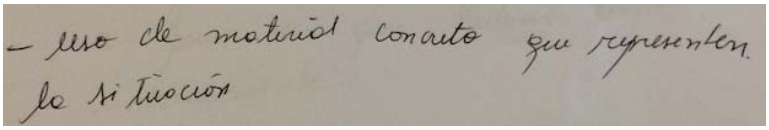

– uso de material concreto que representen la situación

Figura 5.140 Respuesta del profesor 8 al subítem 4d)

De esta manera, en base a la información anteriormente presentada, podemos concluir que el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza es de un nivel muy deficiente como para permitir una gestión adecuada de las situaciones de enseñanza vinculadas al cálculo y comparación de probabilidades.

5.3.3.3.5.5 Análisis del subítem 7c)

El objetivo de este subítem es evaluar el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza vinculado a la independencia de sucesos y al cálculo de probabilidades.

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Figura 5.141 Situación problemática subítem 7c)

Con este objetivo, se planteó la siguiente pregunta a los profesores: *¿qué tipo de recursos utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.*

Un resumen de sus respuestas, de acuerdo al grado de corrección, se muestra en al tabla 5.89.

Grado de Corrección	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Correcta	2	2,2
Parcialmente correcta	60	64,5
Incorrecta	5	5,4
No responde	26	27,9
Total	93	100

Tabla 5.89 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 7c)

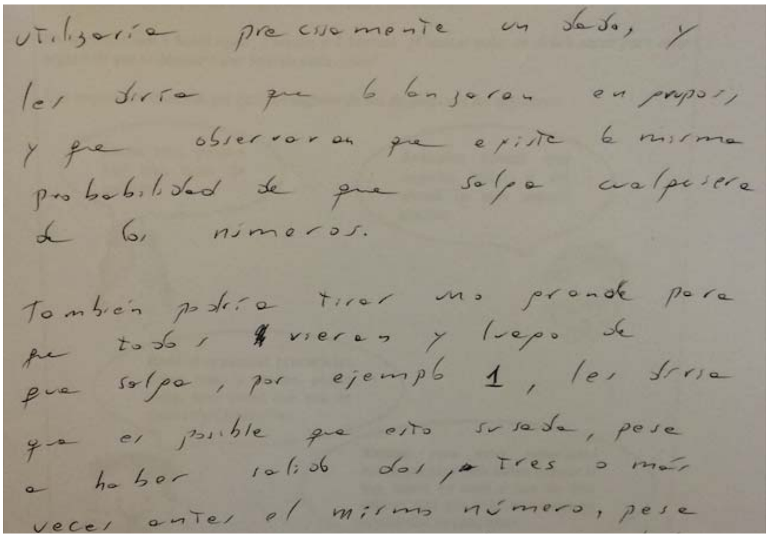
En la tabla 5.89 se observa que esta pregunta fue de gran dificultad para los profesores, ya que solo 2 de ellos responden adecuadamente. Mientras que un 64,5% solo se centra en indicar que utilizaría material concreto como un recurso de enseñanza. Por su parte, un 5,4% presenta respuestas incorrectas y un 27,9% no responde a la pregunta planteada.

De esta manera, a partir de la clasificación de acuerdo con el grado de corrección de las respuestas, hemos identificados los siguientes recursos, en lo que se refiere a preguntas correctas y parcialmente correctas, que se muestran en la tabla 5.90.

Tipos de estrategias propuestas por los profesores	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Realizar el experimento con un dado.	2	2,2
Utilizar material concreto.	60	64,5

Tabla 5.90 Tipo de estrategias propuestas por los profesores en el ítem 7

Algunos ejemplos de estos tipos de respuestas son los siguientes: *"Utilizaría precisamente un dado y les diría que lo lanzaran en grupos, y que observaran que existe la misma probabilidad de que salga cualquiera de los seis números. También podría tirar uno grande para que todos vieran y luego de que salga, por ejemplo, 1, les diría que es posible que esto suceda, pese a haber salido dos, tres o más veces antes el mismo número, pasa."* (profesor 43).


utilizaría precisamente un dado, y
les diría que lo lanzaran en grupos,
y que observaran que existe la misma
probabilidad de que salga cualquiera
de los números.

También podría tirar uno grande para
que todos vieran y luego de
que salga, por ejemplo 1, les diría
que es posible que esto suceda, pese
a haber salido dos, tres o más
veces antes el mismo número, pese

Figura 5.142 Respuesta del profesor 43 al subítem 7c)

A partir de este tipo de respuesta vemos que el profesor aborda la resolución del problema planteado desde una visión frecuentista de la probabilidad, utilizando como un recurso de enseñanza un dado.

Por otro lado, un gran porcentaje de los profesores (64,%) al igual que en las respuestas de los otros ítems, solo se limita a indicar que utilizaría material concreto como un tipo de recurso, sin especificar más allá su elección ni como lo utilizaría. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Material concreto"* (profesor 11).

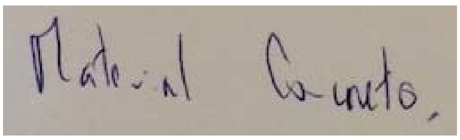

Material Concreto.

Figura 5.143 Respuesta del profesor 11 al subítem 7c)

Finalmente, en base a las respuestas correctas y parcialmente correctas podemos evidenciar que el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza vinculado a la independencia de sucesos y al cálculo de probabilidades es muy deficiente.

5.3.3.3.6 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

En base al análisis realizado en el apartado anterior, evidenciamos que el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza es de un nivel muy deficiente puesto que un porcentaje muy pequeño de los profesores logra describir correctamente estrategias y/o recursos que utilizarían para ayudar a superar posibles errores y/o dificultades a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos al resolver las situaciones problemáticas planteadas. Estos porcentajes de respuestas correctas no logran superar el 13%, observándose además cerca de un tercio de los profesores que no responde por falta de conocimientos. Esta situación se puede visualizar mediante el gráfico de la figura 5.144 que muestra la composición de los distintos tipos de respuestas de acuerdo con la variable "grado de corrección", es decir, los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, así como el porcentaje de respuestas sin responder, para cada uno de los ítems y subítems que evalúan el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

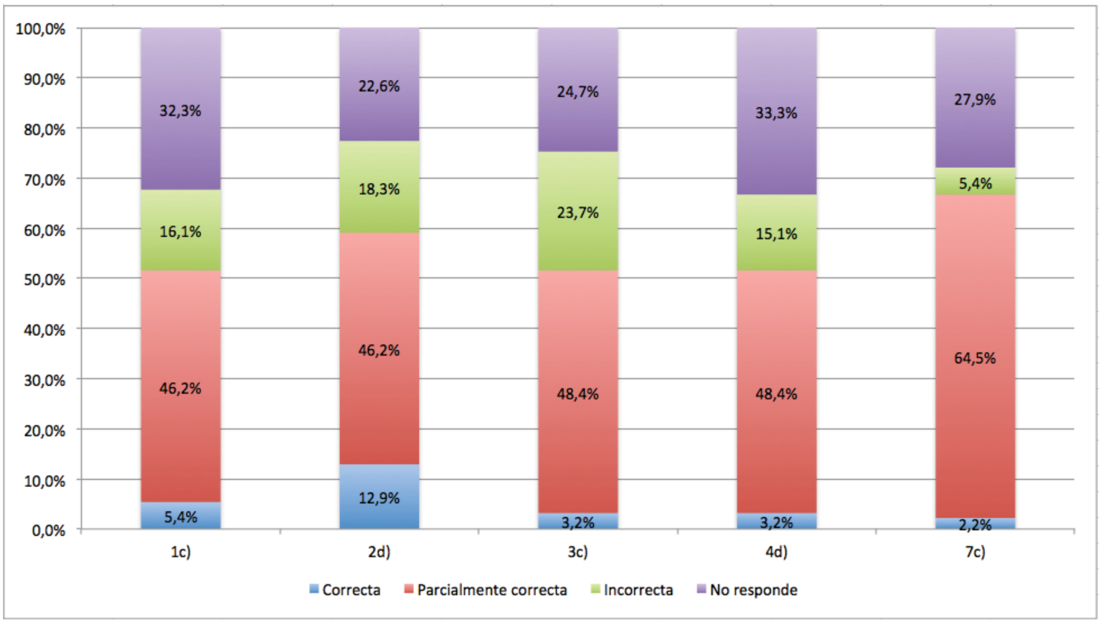


Figura 5.144 Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza de acuerdo con el grado de corrección

Como se observa en la figura 5.144 los porcentajes se concentran mayoritariamente en las respuestas parcialmente correctas, es decir, cerca del 50% de los profesores identifica estrategias pero a un nivel muy general sin dar mayor explicación acerca de cómo y por qué las utilizaría. Mientras que un amplio porcentaje no responde o lo hace de manera incorrecta.

A continuación se presenta un resumen estadístico de las puntuaciones (tabla 5.91) para este tipo de conocimiento, a partir de las puntuaciones obtenidas en los ítems y subítems que se refieren al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. Recordemos que para este tipo de contenido la puntuación máxima a obtener es de 10 puntos.

En la tabla 5.91 se observa que las puntuaciones totales para este tipo de conocimiento varían entre los 0 y los 8 puntos, es decir, ninguno de los profesores logró alcanzar la puntuación máxima de 10 puntos. El puntaje promedio obtenido por estos profesores es de 3 puntos aproximadamente, lo que se encuentra muy por debajo de lo esperado, siendo incluso inferior al 50% de la puntuación máxima.

	Estadístico	**Error típ.**
Media	3,08	0,196
Mediana	3,00	
Moda	5	
Desviación típica	1,890	
Varianza	3,570	
Asimetría	0,057	0,250
Curtosis	-0,909	0,495
Mínimo	0	
Máximo	8	
Rango	8	
Recuento	93	
Percentiles		
25	1,00	
50	3,00	
75	5,00	

Tabla 5.91 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Esto concuerda plenamente con el análisis de corte cualitativo que se presentó en el apartado anterior, pues de igual manera deja de manifiesto que estos profesores poseen un deficiente conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, puesto que sus puntuaciones en general son muy bajas. Complementamos esta información con la figura 5.145 que muestra las distribuciones de las puntuaciones totales así como la puntuación media para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

En la figura 5.145 se observa que el 50% central de los datos se concentra entre 1 y 5 puntos, mostrando así una marcada tendencia a los valores bajos de las puntuaciones. De igual manera, al observar el histograma con las puntuaciones totales de la figura 5.146, se observa claramente la distribución de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, dicha información se encuentra organizada por medio de una tabla de frecuencias que se muestra en la tabla 5.92.

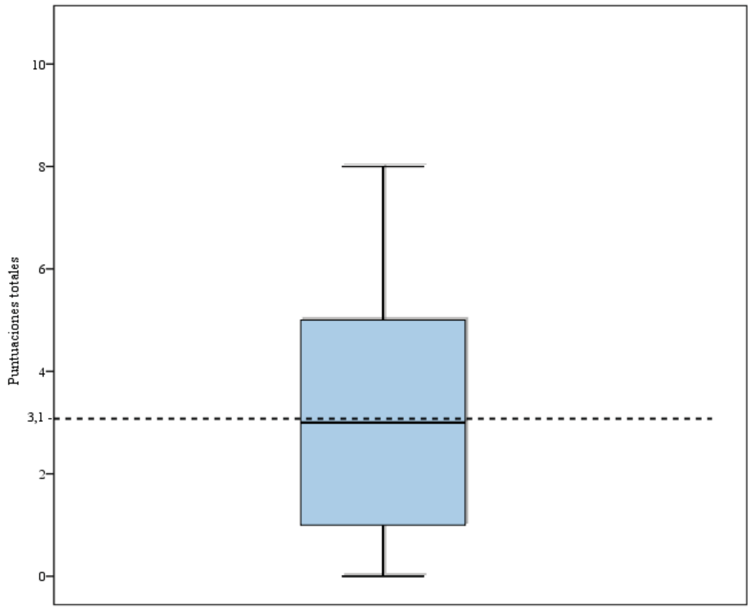


Figura 5.145 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

A partir de la tabla 5.92 se observa que un 54,8% de los profesores alcanzó una puntuación máxima de 3 puntos, es decir, tuvo un nivel de logro de un 30%. En consecuencia a partir de los datos antes presentados evidenciamos que los profesores presentan grandes deficiencias en lo que al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza se refiere.

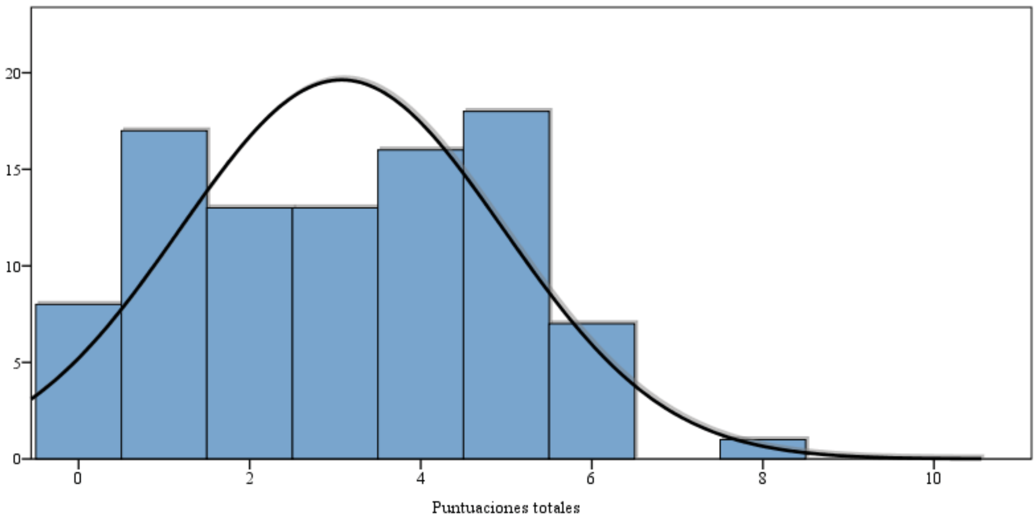


Figura 5.146 Puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Puntajes totales	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	8	8,6	8,6
1	17	18,3	26,9
2	13	14,0	40,9
3	13	14,0	54,8
4	16	17,2	72,0
5	18	19,4	91,4
6	7	7,5	98,9
8	1	1,1	100,0
Total	93	100,0	

Tabla 5.92 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Al igual que para los análisis de los otros tipos de conocimientos, a continuación se presenta un análisis de los resultados para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza de acuerdo con las características de los profesores que han respondido el cuestionario, pues creemos que esto nos puede a portar información de interés para nuestro posterior análisis.

5.3.3.3.6.1 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según "especialidad"

En el *box plot* de la figura 5.147 se observa que los profesores sin especialidad presentaron una mayor dispersión en sus puntuaciones siendo los que alcanzaron los puntajes más altos y más bajos dentro de esta aplicación.

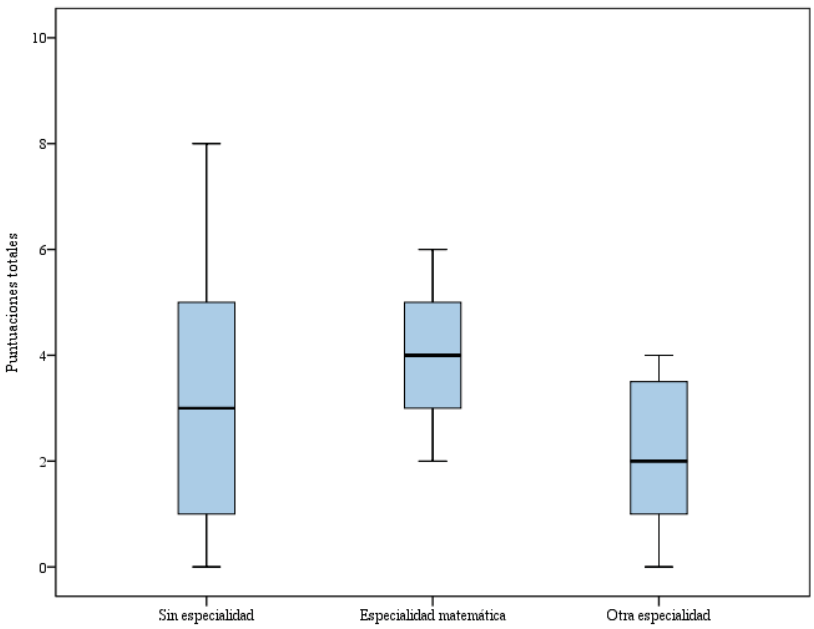


Figura 5.147 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según especialidad

Mientras que los profesores con especialidad presentan un rendimiento más homogéneos y con una mediana ligeramente mayor a la de los demás grupos, sin embargo, su rendimiento es igualmente bajo y muy inferior al puntaje ideal esperado.

Para complementar la información entregada por el *box plot,* en la tabla 5.93 se presenta un análisis descriptivo de las puntuaciones totales de acuerdo con la variable "especialidad".

	Sin especialidad		**Con especialidad matemática**		**Con otra especialidad**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	71		14		8	
Media	3,04	0,235	3,79	0,350	2,13	0,549
Mediana	3,00		4,00		2,00	
Varianza	3,927		1,720		2,411	
Desv. típ.	1,982		1,311		1,553	
Mínimo	0		2		0	
Máximo	8		6		4	
Rango	8		4		4	
Amplitud intercuartil	4		2		3	
Asimetría	0,121	0,285	-0,19	0,597	0,033	0,752
Curtosis	-0,980	0,563	-1,177	1,154	-1,886	1,481
Percentil						
25	1,00		2,75		1,00	
50	3,00		4,00		2,00	
75	5,00		5,00		3,75	

Tabla 5.93 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según especialidad

En la tabla 5.93 se observa que los profesores con especialidad matemática tuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que los demás profesores, con una desviación típica ligeramente menor. No obstante, no hay que olvidar que aun así sus puntuaciones son muy bajas y se encuentran por debajo del 50% del puntaje máximo teórico.

5.3.3.3.6.2 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según "años de experiencia"

El *box plot* de la figura 5.148 nos permite visualizar las distribuciones de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza en cada uno de los grupos de la variable "años de experiencia". De este modo, es posible observar, entre otras cosas, que los profesores con menos de 5 años de experiencia son quienes obtuvieron las puntuaciones más bajas. En el caso de los profesores con menos de 3 años de experiencia, sus puntuaciones se distribuyen unilateralmente ligeramente más concentradas en la parte superior de diagrama, puesto que la mediana se encuentra más próxima al tercer cuartil.

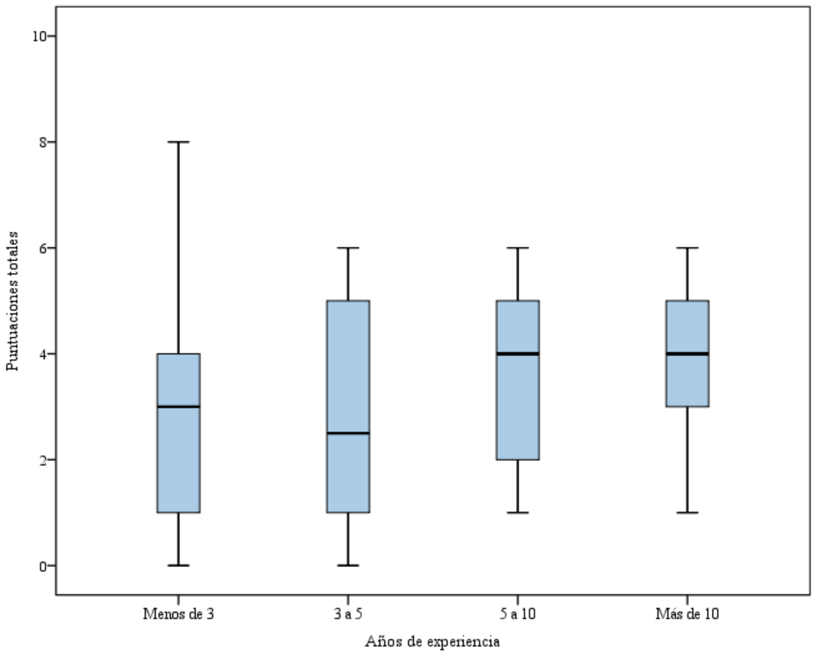


Figura 5.148 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según años de experiencia

Para los profesores con 3 a 5 años de experiencia se observa la mayor variabilidad en la distribución de las puntuaciones, además de que sus puntuaciones se concentran en la parte baja del *box plot* pues la media se encuentra ligeramente desplazada en dirección al primer cuartil. En tanto que los profesores con 5 a 10 años de experiencia presentan un rendimiento un poco mejor, pero aún así bajo si consideramos que la puntuación máxima a obtener es de 10 puntos. Por último, en el grupo de profesores con más de 10 años de experiencia, se observa que sus puntuaciones son más homogéneas y distribuyen simétricamente, pues la mediana se ubica en el centro del *box plot*.

Del mismo modo, la tabla 5.94 nos entrega información detallada de las distribuciones de las puntuaciones según la variable “años de experiencia”. Al observar la tabla 5.94 que contiene el resumen estadístico, se observa en mayor detalle y precisión la información contenida en el *box plot*. Corroborándose de este modo lo bajo de las puntuaciones obtenidas para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

	Menos de 3 años		Entre 3 a 5 años		Entre 5 a 10 años		Más de 10 años	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	43		20		16		14	
Media	2,70	0,279	2,95	0,489	3,44	0,418	4,00	0,432
Mediana	3,00		2,50		4,00		4,00	
Varianza	3,359		4,787		2,796		2,615	
Desv. típ.	1,833		2,188		1,672		1,617	
Mínimo	0		0		1		1	
Máximo	8		6		6		6	
Rango	8		6		5		5	
Amplitud intercuartil	3		4		3		3	
Asimetría	0,422	0,361	0,071	0,512	-0,316	0,564	-0,382	0,597
Curtosis	0,048	0,709	-1,584	0,992	-1,336	1,091	-0,871	1,154
Percentil 25	1,00		1,00		2,00		2,75	
Percentil 50	3,00		2,50		4,00		4,00	
Percentil 75	4,00		5,00		5,00		5,25	

Tabla 5.94 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según años de experiencia

5.3.3.3.6.3 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según "dependencia del establecimiento"

En la figura 5.149 podemos observar como distribuyen los puntajes del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según el tipo de dependencia en el cual se desempeñan los profesores.

A partir de la figura 5.149 se observa, primeramente, que ninguno de los profesores alcanzó el puntaje máximo de 10 puntos. Además de que los profesores que se desempeñan en establecimientos particulares pagados tuvieron un rendimiento levemente mejor que el resto, pero muy bajo de acuerdo con el puntaje máximo teórico (10 puntos). Mientras que los que presentan el rendimiento más bajo son los profesores que se desempeñan en establecimientos particulares subvencionados.

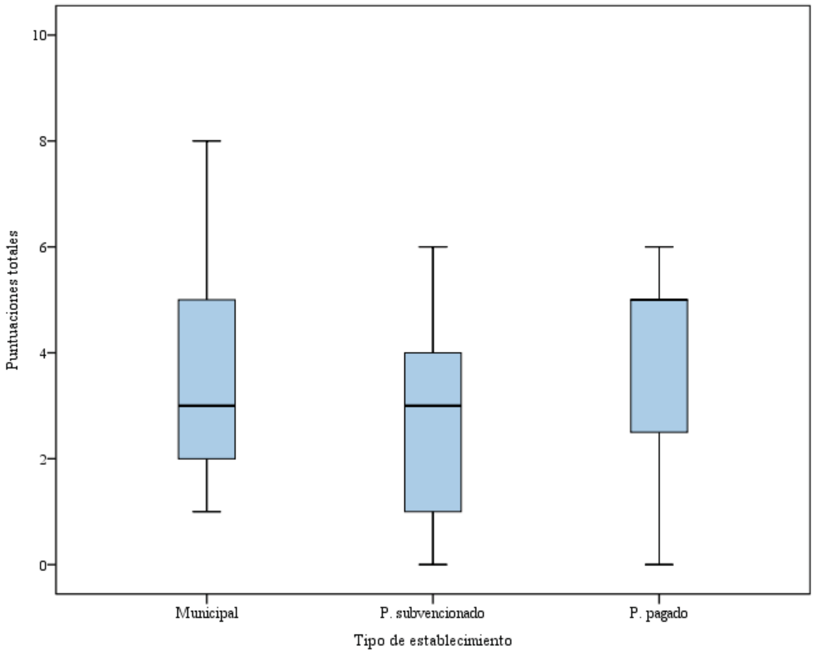


Figura 5.149 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según tipo de establecimiento

Para complementar la información entregada por la figura 5.149 a continuación se muestran los estadísticos descriptivos para la variable dependencia en la tabla 5.95. De modo tal de describir de mejor manera el comportamiento de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza a partir de la variable "dependencia del establecimiento".

	Municipal		**Particular subvencionado**		**Particular pagado**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	31		55		7	
Media	3,58	0,327	2,71	0,246	3,71	0,865
Mediana	3,00		3,00		5,00	
Varianza	3,318		3,321		5,238	
Desv. típ.	1,822		1,822		2,289	
Mínimo	1		0		0	
Máximo	8		6		6	
Rango	7		6		6	
Amplitud intercuartil	3		3		4	
Asimetría	0,463	0,421	-0,026	0,322	-1,030	0,794
Curtosis	-0,445	0,821	-1,420	0,634	-0,636	1,587
Percentil						
25	2,00		1,00		1,00	
50	3,00		3,00		5,00	
75	5,00		4,00		5,00	

Tabla 5.95 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según dependencia del establecimiento

5.3.3.3.6.4 Resultados para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según "género"

En el *box plot* de la figura 5.150 se muestra cómo distribuyen las puntuaciones totales en el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza al interior de cada uno de los grupos que conforman la variable género.

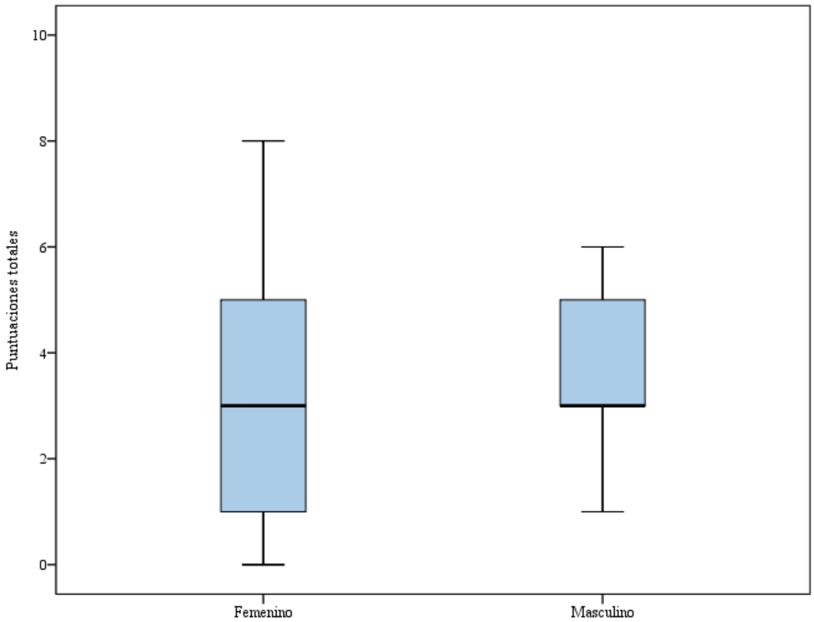


Figura 5.150 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según género

En la figura 5.150 se observa que las puntuaciones obtenidas por las mujeres presentan una mayor variabilidad a diferencia de las puntuaciones de los hombres que se concentran entre los 3 y 5 puntos. Además, se observa que tanto las puntuaciones máximas como mínimas han sido alcanzadas por el grupo de mujeres. No obstante, no hay que olvidar que las puntuaciones en general son muy bajas en relación al puntaje máximo real que es de 10 puntos para este tipo de conocimiento.

Para complementar este estudio sobre la distribución de los puntajes para la variable "género", en la tabla 5.96 se muestran los estadísticos descriptivos del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) al interior de cada uno de los grupos (mujer, hombre).

	Mujer		Hombre	
	Estadístico	Error típ.	Estadístico	Error típ.
Recuento	68		25	
Media	2,96	0,245	3,40	0,294
Mediana	3,00		3,00	
Varianza	4,073		2,167	
Desv. típ.	2,018		1,472	
Mínimo	0		1	
Máximo	8		6	
Rango	8		5	
Amplitud intercuartil	4		3	
Asimetría	0,185	0,291	-0,256	0,464
Curtosis	-0979	0,574	-0,836	0,902
Percentil				
25	1,00		2,50	
50	3,00		3,00	
75	5,00		5,00	

Tabla 5.96 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza según género

A partir de la tabla 5.96 se observa que ninguno de los profesores obtuvo la puntuación máxima teórica, siendo la puntuación media alcanzada de 3 puntos aproximadamente. Además, se observa que los hombres tuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que las mujeres. Sin embargo, al igual que en los casos anteriores, no debemos olvidar que las puntuaciones obtenidas por ambos grupos son muy bajas de acuerdo con la puntuación máxima para este tipo de conocimiento.

5.3.3.3.7 Análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido en relación con el currículo

No olvidemos que este tipo de conocimiento se fundamenta en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, considerando aspectos vinculados con el proceso de enseñanza y aprendizaje tales como: las actividades y tareas que el profesor propone para lograr desarrollar en los alumnos los objetivos de aprendizaje que proponen las orientaciones curriculares.

Para evaluar este tipo de conocimiento nos hemos centrado en el aspecto vinculado a las orientaciones curriculares de las faceta ecológica (Godino, 2009) que deben poner en juego los profesores para dar respuesta a la pregunta planteada. Para ello, se ha presentado a los profesores una situación problemática (ítem 7) sobre probabilidad en la cual se pide a los profesores que reflexionen y respondan a la siguiente pregunta: *¿qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?*

De esta manera se espera obtener información que permita evaluar el conocimiento del contenido en relación con el currículo que poseen los profesores de primaria en activo.

Para lograr nuestro objetivo de evaluar el conocimiento del contenido en relación con el currículo, hemos seguido las siguientes fases que se muestran en la figura 5.151.

Tales fases consisten en una breve presentación y descripción del ítem, que recuerda algunos de los aspectos presentados en el análisis *a priori* realizado en el capítulo 4; presentación de los resultados en base a la variable cuantitativa grado de corrección de la respuesta, para continuar con el análisis de las respuestas y sus justificaciones.

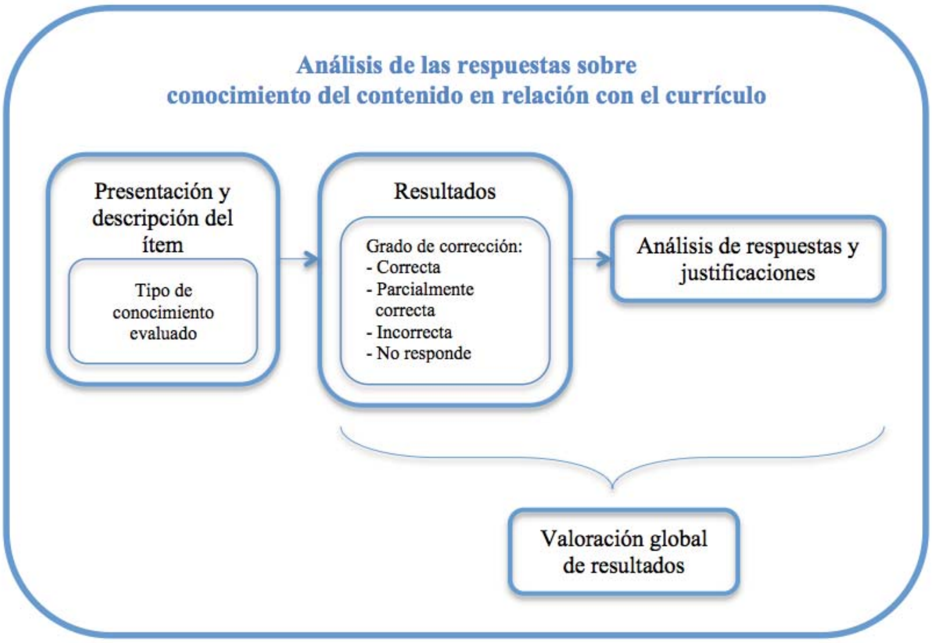


Figura 5.151 Fases presentes en el análisis de las respuestas referidas al conocimiento del contenido en relación con el currículo

Por último, finalizamos esta sección con una síntesis del análisis de los resultados sobre el conocimiento del contenido en relación con el currículo, y con un resumen estadístico de los puntajes obtenidos para este tipo de conocimiento.

5.3.3.3.7.1 Análisis del subítem 7b)

Uno de los propósitos de este subítem es evaluar el conocimiento del contenido en relación con el currículo vinculado a la independencia de sucesos y al cálculo de probabilidades.

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Figura 5.152 Situación problemática subítem 7b)

Con este propósito, se planteó la siguiente pregunta a los profesores: *¿qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?* ya que para dar respuesta a la pregunta los profesores requieren poner en juego el componente referido a las orientaciones curriculares de la faceta ecológica.

Un resumen de las respuestas obtenidas, de acuerdo al grado de corrección, se muestra en la tabla 5.97.

Grado de Corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	3	3,2
Parcialmente correcta	4	4,3
Incorrecta	18	19,4
No responde	68	73,1
Total	93	100

Tabla 5.97 Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de las respuestas al subítem 7b)

En base a la tabla 5.97 se puede evidenciar que la pregunta presentó gran dificultad para los profesores, dado su bajo porcentaje de respuestas correctas (3,2%) y parcialmente correctas (4,3%), concentrándose el 92,5% de los profesores entre las respuestas incorrectas (19,4%) o en el alto porcentaje de profesores que no responden a la pregunta.

Al analizar tanto las respuestas correctas como las parcialmente correctas nos hemos encontrado con el siguiente tipo de argumentos que se muestran en la tabla 5.98.

Tipos de objetivos identificados por los profesores	Frecuencia	Porcentaje
Independencia de sucesos y cálculo de probabilidades.	3	3,2
Cálculo de probabilidades.	4	4,3

Tabla 5.98 Tipo de objetivos identificados por los profesores en el ítem 7

Como se puede observar 3 de los 93 profesores identifica correctamente el propósito de la situación problemática planteada (independencia de sucesos y cálculo de probabilidades). Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: *"Identificar que independiente la cantidad de veces que haya salido un número y, si el dado no está cargado, cada número del dado por estar cada uno una vez tiene la misma probabilidad de salir. En conclusión los sucesos son independientes"* (profesor 29).

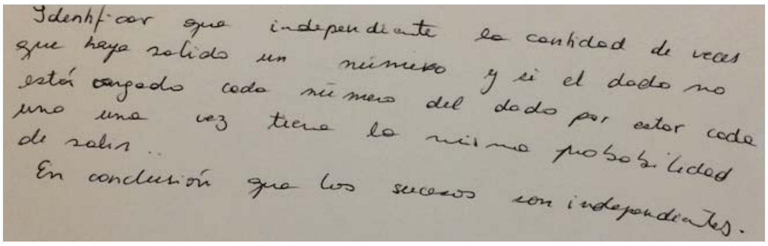

Identificar que independiente la cantidad de veces
que haya salido un número y si el dado no
está cargado cada número del dado por estar cada
uno una vez tiene la misma probabilidad
de salir..
En conclusión que los sucesos son independientes.

Figura 5.153 Respuesta del profesor 29 al subítem 7b)

Mientras que un 4,3% solo logra identificar el cálculo de probabilidades como objetivo de la situación problemática. Un ejemplo de esto es la siguiente respuesta: *"Calcular la probabilidad en un experimento aleatorio"* (profesor 60).

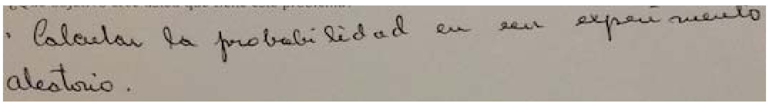

· Calcular la probabilidad en un experimento
aleatorio.

Figura 5.154 Respuesta del profesor 60 al subítem 7b)

De este modo, a partir del tipo de respuestas obtenidas, consideramos que el conocimiento del contenido en relación con el currículo es muy deficiente.

5.3.3.3.8 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento del contenido en relación con el currículo

En el apartado anterior ha quedado en evidencia que el conocimiento del contenido es muy deficiente, puesto que un porcentaje muy bajo de los profesores (3,2%) logra dar una respuesta correcta a la pregunta planteada. Mientras que un 73,1% de los profesores no responde por falta de conocimientos, distribuyéndose el 23,7% restante entre aquellos profesores que han respondido parcialmente correcto o de manera incorrecta.

A continuación se presenta un resumen estadístico de las puntuaciones (tabla 5.99) para este tipo de conocimiento. No olvidemos que para el conocimiento del contenido en relación con el currículo se ha planteado solo una pregunta, por lo que la puntuación máxima es de 2 puntos.

	Estadístico	Error típ.
Media	0,11	0,042
Mediana	0,00	
Moda	0	
Desviación típica	0,403	
Varianza	0,162	
Asimetría	3,922	0,250
Curtosis	14,988	0,495
Mínimo	0	
Máximo	2	
Rango	2	
Recuento	93	
Percentiles		
25	0,00	
50	0,00	
75	0,00	

Tabla 5.99 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento del contenido en relación con el currículo

En la tabla 5.99 se observan claramente los bajos resultados. Dado que este tipo de conocimiento ha sido evaluado por solo una pregunta, consideramos poco pertinente el realizar un análisis como el realizado para los demás tipos de conocimientos.

5.3.3.4 Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre conocimiento especializado.

Al igual que para el conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, presentamos una síntesis global de las respuestas para el conocimiento especializado. Para ello, se han considerado las respuestas otorgadas a las distintas subcategorías que conforman este tipo de conocimiento. A partir de los resultados obtenidos para los distintos ítems y subítems que evalúan el conocimiento del contenido especializado, el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y el conocimiento del contenido en relación con el currículo, hemos evidenciado que los profesores presentan un conocimiento especializado deficiente, y en algunos casos muy deficiente.

En lo que sigue presentamos el resumen estadístico de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado. Tales puntuaciones teóricamente van desde los 0 a los 34 puntos puesto que son diecisiete los ítems y subítems que evalúan este tipo de conocimiento. En la tabla 5.100 se muestra el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los 93 profesores.

	Estadístico	**Error típ.**
Media	8,88	0,481
Mediana	9,00	
Moda	7	
Desviación típica	4,634	
Varianza	21,475	
Asimetría	0,608	0,250
Curtosis	0,944	0,495
Mínimo	1	
Máximo	24	
Rango	23	
Recuento	93	
Percentiles		
25	5,00	
50	9,00	
75	12,00	

Tabla 5.100 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado

En la tabla 5.100 se observa que ningún profesor respondió de manera correcta los diecisiete ítems y subítems que miden el conocimiento especializado, puesto que los puntajes totales fluctúan entre 1 y 24 puntos. Esto sumado al hecho de que la media fue de 8,88 nos da evidencia de que el desempeño de los profesores fue muy bajo, ya que la media teórica para este tipo de conocimiento se encuentra en los 17 puntos, es decir, en promedio los profesores obtuvieron un rendimiento promedio muy por debajo de la media.

Por otro lado, se observa que el coeficiente de asimetría de Fisher de 0,608 nos indica que la distribución de los puntajes es asimétrica positiva, es decir, se observa una mayor concentración de los puntajes totales a la derecha de la media. Lo anterior, se aprecia de mejor manera por medio del *box plot* (figura 5.155) que muestra la distribución de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado.

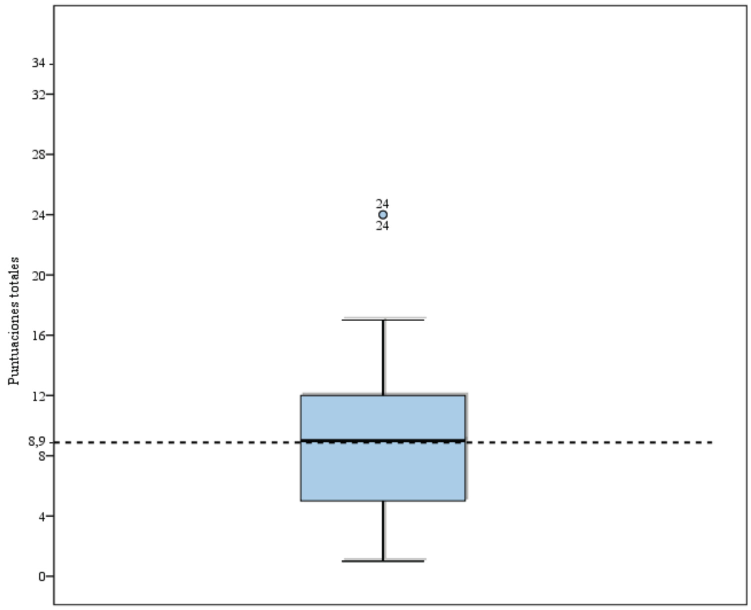


Figura 5.155 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media para el conocimiento especializado

En el *box plot* se observa que la mediana se encuentra muy ligeramente más cercana al tercer cuartil, lo que significa que las puntuaciones se encuentra ligeramente más concentradas en la zona superior del *box plot*. Además se observan dos observaciones extremas que corresponden a dos profesores que han obtenido una puntuación total, para este tipo de conocimiento, de 24 puntos. Así mismo, en el histograma de frecuencias de la figura 5.156 se observa que las puntuaciones totales se concentran ligeramente en torno a la media de 8,88 puntos, con una desviación típica de 4,634 puntos.

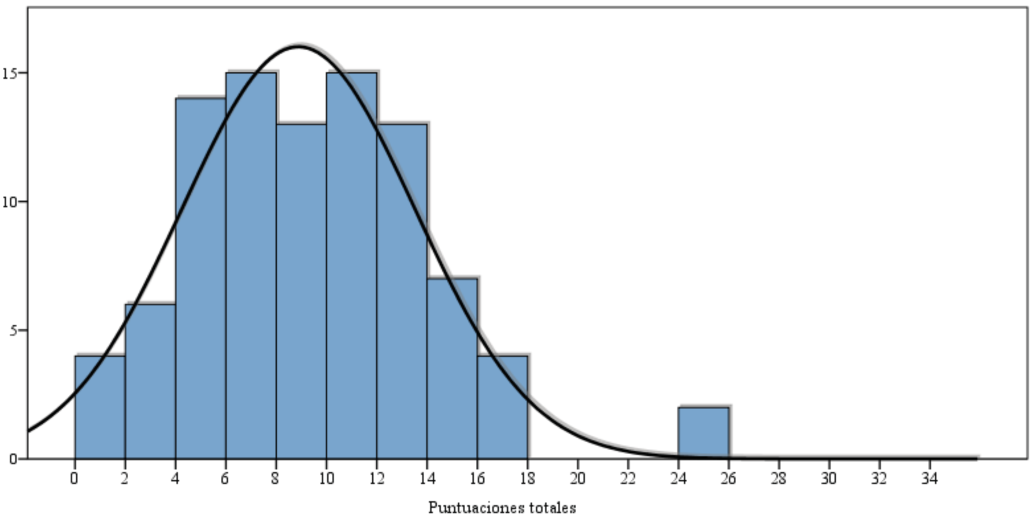


Figura 5.156 Puntuaciones totales del conocimiento especializado

Por su parte, la tabla 5.101 muestra las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los profesores en lo que se refiere al conocimiento especializado.

Puntajes totales	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1	4	4,3	4,3
2	4	4,3	8,6
3	2	2,2	10,8
4	8	8,6	19,4
5	6	6,5	25,8
6	5	5,4	31,2
7	10	10,8	41,9
8	3	3,2	45,2
9	10	10,8	55,9
10	9	9,7	65,6
11	6	6,5	72,0
12	8	8,6	80,6
13	5	5,4	86,0
14	4	4,3	90,3
15	3	3,2	93,5
16	2	2,2	95,7
17	2	2,2	97,8
24	2	2,2	100,0
Total	93	100,0	

Tabla 5.101 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del conocimiento especializado

A partir de la tabla 5.101 se observa que 91 profesores (97,8%) obtuvo una puntación igual o inferior al 50% de la puntación total teórica (17 puntos), mientras que el 2,2% restante obtuvo una puntuación superior a 17 puntos.

De esta manera, los datos y gráficos expuestos nos dan clara evidencia de los bajos resultados obtenidos por los profesores, es decir, que estos presentan una gran deficiencia en lo que al conocimiento especializado sobre probabilidad se refiere.

A continuación se presenta un análisis de los resultados para el conocimiento especializado de acuerdo con las características de los profesores que han respondido el cuestionario.

5.3.3.4.1 Resultados para el conocimiento especializado según "especialidad"

En la figura 5.157 podemos observar cómo se comportan las puntuaciones totales para el conocimiento especializado en relación a la variable "especialidad".

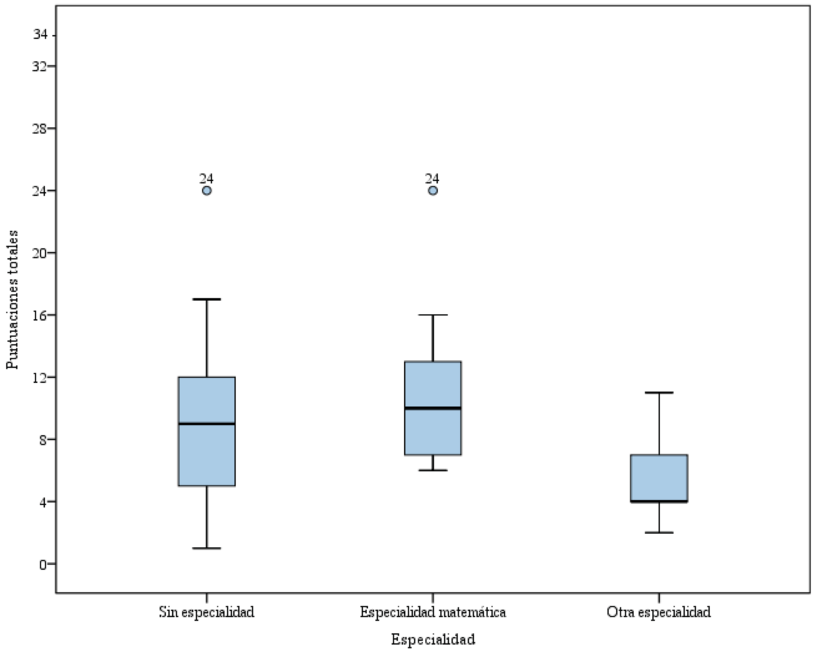


Figura 5.157 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento especializado según especialidad

Una primera observación que podemos realizar es que la mediana de los profesores con especialidad matemática se encuentra levemente por encima de la de los profesores sin especialidad y de otra especialidad, siendo estos últimos los que presentan una menor mediana.

En el caso de los profesores sin especialidad, se observa que el 50% de sus puntuaciones se concentra mayoritariamente entre los 9 y los 12 puntos aproximadamente, presentando una observación extrema de 24 puntos. Además se observa que este tipo de profesores son quienes han alcanzado las puntuaciones más bajas. En el caso de los profesores con especialidad matemática, estos concentran el 50% de sus puntuaciones entre los 10 y 13 puntos aproximadamente, presentando también una observación extrema de 24 puntos. Por último, los profesores con otra especialidad concentran el 50% de sus puntuaciones alrededor de los 4 puntos. Además de analizar la distribución de las puntuaciones totales según especialidad para el conocimiento especializado, consideramos necesario presentar el análisis descriptivo (tabla 5.102) del comportamiento de la variable puntuación total para cada uno de los grupos que componen la variable especialidad.

	Sin especialidad		**Con especialidad matemática**		**Con otra especialidad**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	71		14		8	
Media	8,82	0,539	11,21	1,285	5,38	1,017
Mediana	9,00		10,00		4,00	
Varianza	20,609		23,104		8,268	
Desv. típ.	4,540		4,807		2,875	
Mínimo	1		6		2	
Máximo	24		24		11	
Rango	23		18		9	
Amplitud intercuartil	7		7		4	
Asimetría	0,376	0,285	1,504	0,597	1,182	0,752
Curtosis	0,529	0,563	2,858	1,154	1,083	1,481
Percentil						
25	5,00		7,00		4,00	
50	9,00		10,00		4,00	
75	12,00		13,50		7,50	

Tabla 5.102 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado según especialidad

A partir de la tabla 5.102 se observa que los profesores con especialidad matemática tuvieron, en promedio, un mejor desempeño en los ítems y subítems referidos al conocimiento especializado. Sin embargo, este desempeño es bajo si consideramos que la puntuación teórica total, de los ítems y subítems referidos a este tipo de conocimiento, es de 37 puntos. Mientras que los que peor desempeño obtuvieron son los profesores que pertenecen a otra especialidad.

5.3.3.4.2 Resultados para el conocimiento especializado según "años de experiencia"

Para estudiar el comportamiento de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado en relación a la variable "años de experiencia", hemos construido un *box plot* (figura 5.158) que permite comparar las distribuciones de las puntuaciones totales en cada uno de los grupos.

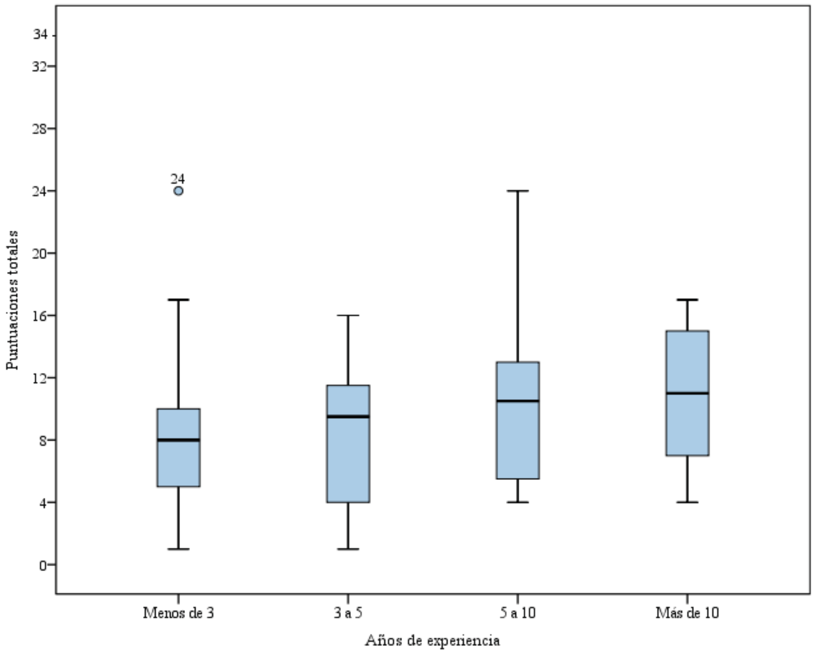


Figura 5.158 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento especializado según años de experiencia

A partir de la figura 5.158 se observa que la mediana de las puntuaciones totales de los profesores con más de 10 años de experiencia es ligeramente mayor que la del resto de los profesores, siendo el grupo de profesores con menos de 3 años de experiencia quienes presentan la mediana más baja. Del mismo modo se observa que las medianas, para todos los grupos, se encuentran próximas al tercer cuartil, lo que significa que las puntuaciones totales se concentran en la zona superior del *box plot*. Sin embargo, cabe destacar que en general las puntuaciones son bajas para los cuatro grupos, pues la puntuación teórica total referida al conocimiento especializado oscila entre los 0 y los 37 puntos.

Para complementar este estudio, presentamos el análisis descriptivo (tabla 5.103) del comportamiento de la variable puntuación total para cada uno de los grupos que componen la variable años de experiencia. Así, de la tabla 5.103 se desprende que los profesores con más de 10 años de experiencia tuvieron, en promedio, un mejor desempeño en los ítems y subítems referidos al conocimiento especializado. Mientras que los que peor desempeño obtuvieron son los profesores que tienen menos de tres años de experiencia.

	Menos de 3 años		Entre 3 a 5 años		Entre 5 a 10 años		Más de 10 años	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	43		20		16		14	
Media	8,09	0,683	8,20	1,009	10,19	1,327	10,79	1,075
Mediana	8,00		9,50		10,50		11,00	
Varianza	20,039		20,379		28,163		16,181	
Desv. típ.	4,476		4,514		5,307		4,023	
Mínimo	1		1		4		4	
Máximo	24		16		24		17	
Rango	23		15		20		13	
Amplitud intercuartil	5		8		8		8	
Asimetría	0,951	0,361	-0,027	0,512	0,969	0,564	-0,008	0,597
Curtosis	2,684	0,709	-1,280	0,992	1,671	1,091	-1,063	1,154
Percentil 25	5,00		4,00		5,25		7,00	
50	8,00		9,50		10,50		11,00	
75	10,00		11,75		13,00		15,00	

Tabla 5.103 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado según años de experiencia

Sin embargo, este desempeño es bajo si consideramos que la puntuación teórica total, de los ítems y subítems referidos a este tipo de conocimiento, es de 34 puntos.

5.3.3.4.3 Resultados para el conocimiento especializado según "dependencia del establecimiento"

La figura 5.159 nos muestra las distribuciones de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado según el tipo de dependencia del establecimiento en el cual se desempeñan los profesores. Es posible observar cierta similitud en las medianas de las puntuaciones obtenidas por los profesores, las cuales están muy cercanas a los 9 puntos. Sin embargo, si observamos cada uno de los *box plot* por separado, queda de manifiesto que las puntuaciones obtenidas por los profesores de establecimientos municipales son ligeramente mejores que las de los profesores que se desempeñan en establecimientos particulares pagados.

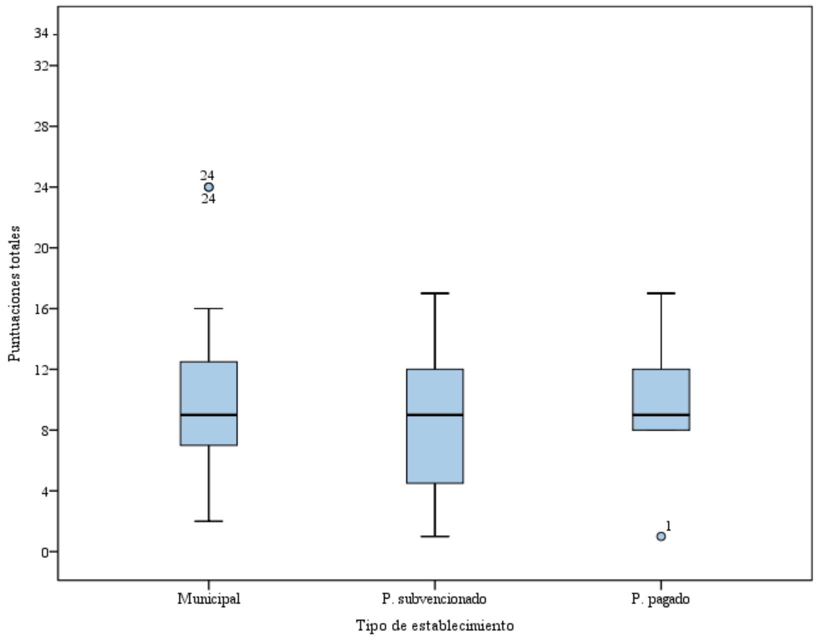


Figura 5.159 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento especializado según tipo de establecimiento

No obstante, es importante señalar, que al igual que en los casos anteriores, en general las puntuaciones son bajas para los tres grupos, pues los ítems y subítems referidos al conocimiento especializado oscilan entre los 0 y los 34 puntos.Por su parte, la tabla 5.104 nos muestra el resumen estadístico del comportamiento de la puntuación total para cada uno de los grupos que componen la variable "dependencia del establecimiento".

	Municipal		**Particular subvencionado**		**Particular pagado**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	31		55		7	
Media	10,10	0,907	8,11	0,570	9,57	1,974
Mediana	9,00		9,00		9,00	
Varianza	25,490		17,877		27,286	
Desv. típ.	5,049		4,228		5,224	
Mínimo	2		1		1	
Máximo	24		17		17	
Rango	22		16		16	
Amplitud intercuartil	6		8		7	
Asimetría	1,217	0,421	0,051	0,322	-0,111	0,794
Curtosis	2,085	0,821	-0,987	0,634	0,444	1,587
Percentil						
25	7,00		4,00		8,00	
50	9,00		9,00		9,00	
75	13,00		12,00		15,00	

Tabla 5.104 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado según dependencia del establecimiento

A partir de la tabla 5.104 se observa que los profesores que se desempeñan en establecimiento municipales tuvieron, en promedio, un mejor desempeño que los restantes. Ahora, si consideramos que la puntuación máxima en lo que refiere a conocimiento especializado es de 34 puntos, se evidencia que el desempeño indistintamente del tipo de establecimiento es muy bajo para los tres grupos.

5.3.3.4.4 Resultados para el conocimiento especializado según "género"

Por último, analizamos los resultados de acuerdo con la variable "género". Para ello, observamos primeramente, la distribución de las puntuaciones totales para mujeres y hombres por medio del *box plot* que se muestra en la figura 5.160.

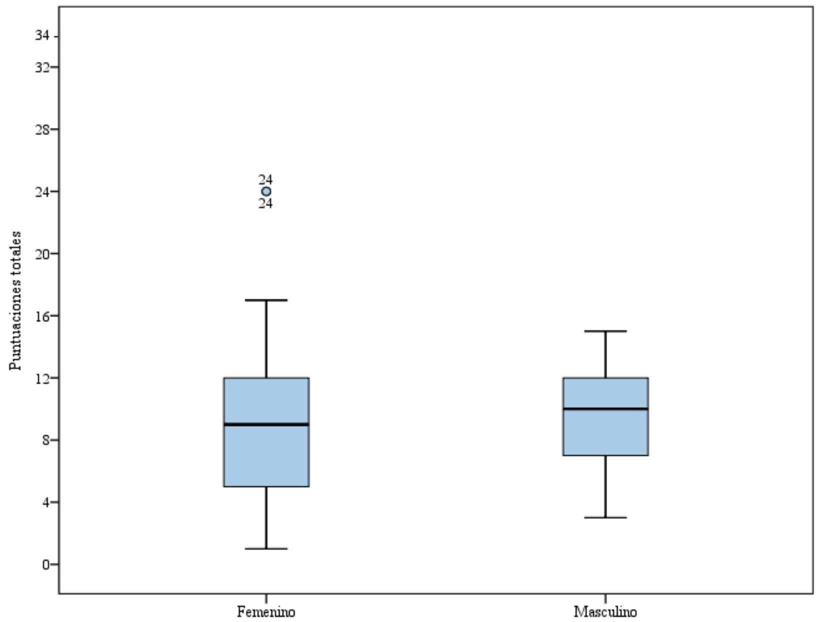


Figura 5.160 Distribución de las puntuaciones totales del conocimiento especializado según género

A partir de la figura 5.160 se observa que en el caso de las mujeres, la amplitud intercuartil es mayor, lo que quiere decir que sus puntaciones son más dispersas, presentando además dos observaciones extremas de 24 puntos. Mientras que en el caso de los hombres, las puntuaciones son más homogéneas. Además se observa que las mujeres cuentan con las puntuaciones máximas y mínimas obtenidas.

Por otro lado, en la tabla 5.105 se muestran los estadísticos descriptivos del comportamiento de la variable dependiente (puntuación total) al interior de cada uno de los grupos (mujer, hombre). En la que se observa que los hombres obtuvieron, en promedio, un desempeño ligeramente mejor que las mujeres. Es importante señalar que pese a lo anterior los resultados en sí son muy bajos.

	Mujer		Hombre	
	Estadístico	Error típ.	Estadístico	Error típ.
Recuento	68		25	
Media	8,78	0,613	9,16	0,657
Mediana	9,00		10,00	
Varianza	25,577		10,807	
Desv. típ.	5,057		3,287	
Mínimo	1		3	
Máximo	24		15	
Rango	23		12	
Amplitud intercuartil	7		6	
Asimetría	0,714	0,291	-0,322	0,464
Curtosis	0,794	0,574	-0,831	0,902
Percentil				
25	5,00		6,50	
50	9,00		10,00	
75	12,00		12,00	

Tabla 5.105 Descriptivos de las puntuaciones totales para el conocimiento especializado según género

5.3.4 Síntesis de las puntuaciones por categorías del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en la educación primaria

A lo largo de este capítulo hemos dado a conocer el Estudio 3 referido a la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad en los profesores de educación primaria en activo.

Para finalizar el capítulo, se presenta un resumen de las puntuaciones promedio para cada una de las categorías de conocimientos que conforman el conocimiento didáctico-matemático (tabla 5.106) de acuerdo con el modelo del CDM planteado por Godino y colaboradores.

Para poder establecer una comparación entre las distintas categorías de conocimiento, hemos recodificado las puntuaciones totales para cada tipo de conocimiento de acuerdo a una escala normada de 0 a 100. Esto dado que para cada una de las categorías evaluadas mediante el Cuestionario CDM-Probabilidad el número de ítems y subítems asociados a cada categoría difieren, por lo que las puntuaciones totales también difieren.

Por tanto, a partir de los datos de la figura 5.161 y de la tabla 5.106 se aprecia que los profesores que han respondido al Cuestionario CDM-Probabilidad poseen un deficiente conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad, puesto que el 50% de los profesores no logra superar el 34% de las puntuaciones normadas. Además se observa que estos profesores muestran tener, de manera leve, un mayor conocimiento común del contenido que de conocimiento ampliado del contenido y especializado.

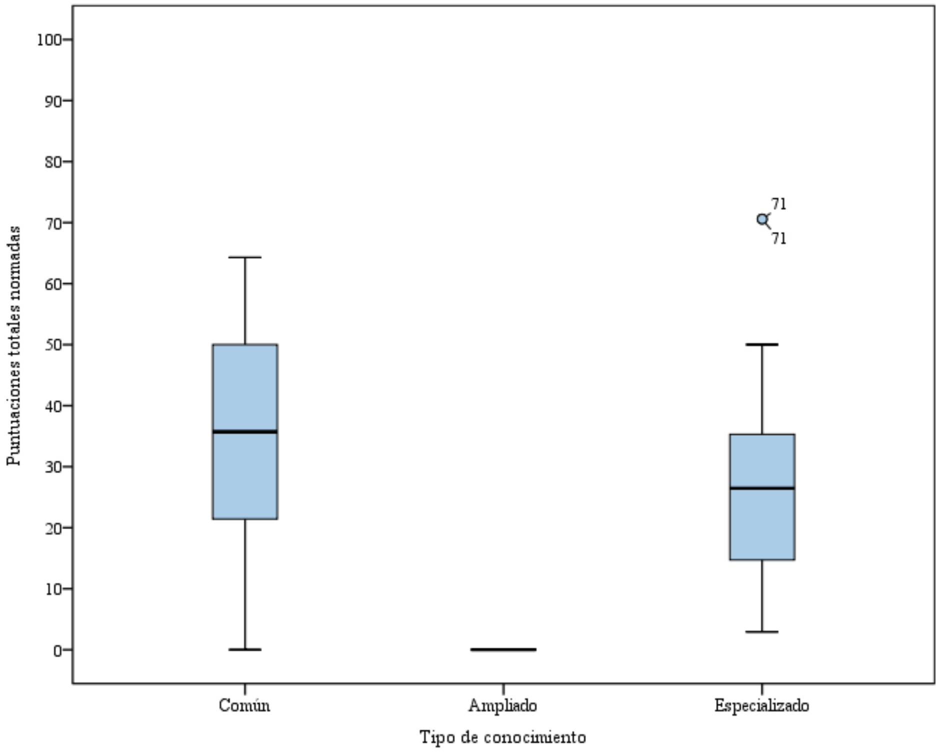


Figura 5.161 Distribución de las puntuaciones totales normadas según categorías del conocimiento didáctico-matemático

Categoría del conocimiento	**Conocimiento común del contenido**		**Conocimiento ampliado del contenido**		**Conocimiento especializado**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	93		93		93	
Media	33,9478	1,65857	0,0000	0,00000	26,1227	1,41334
Mediana	35,7143		0,0000		26,4706	
Varianza	255,830		0,000		185,770	
Desv. típ.	15,99467		0,00000		13,62974	
Mínimo	0,00		0,00		2,94	
Máximo	64,29		0,00		70,59	
Rango	64,29		0,00		67,65	
Asimetría	-0,152	0,250		0,250	0,608	0,250
Curtosis	-0,835	0,495			0,944	0,495
Percentil						
25	21,4286		0,0000		14,7059	
50	35,7143		0,0000		26,4706	
75	50,0000		0,0000		35,2941	

Tabla 5.106 Resumen de estadísticos descriptivos normados según categorías del conocimiento didáctico-matemático

Del mismo modo para establecer una comparación entre las distintas subcategorías del conocimiento especializado, se han recodificado las puntuaciones totales siguiendo el mismo criterio antes descrito. Así, a partir de la figura 5.162 y de la tabla 5.107 se puede evidenciar que estos profesores muestran tener, en promedio, un mayor conocimiento del contenido en relación con los estudiantes que de las restantes subcategorías.

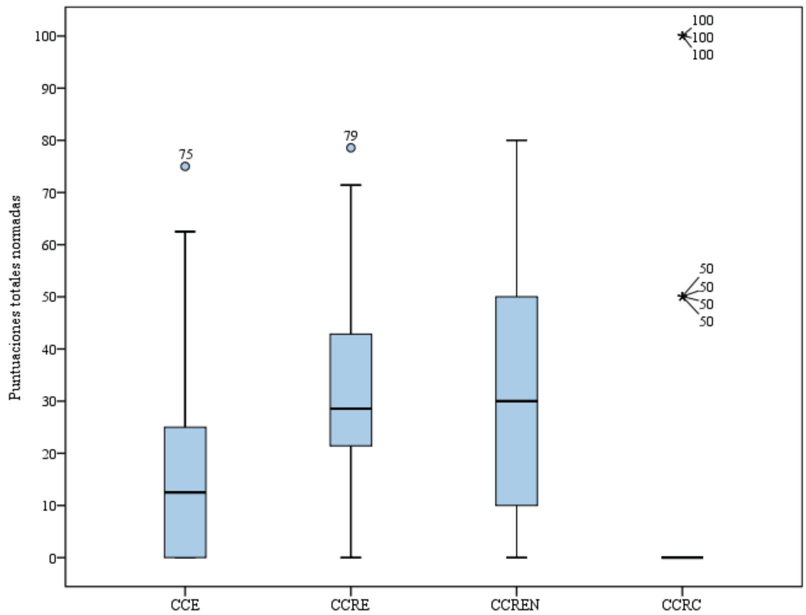


Figura 5.162 Distribución de las puntuaciones totales normadas según subcategorías del conocimiento especializado

Subcategoría del conocimiento especializado	**Conocimiento del contenido especializado**		**Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes**		**Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza**		**Conocimiento del contenido en relación con el currículo**	
	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.	Estadístico	Error tip.
Recuento	93		93		93		93	
Media	14,65	1,572	32,33	1,776	30,75	1,959	5,38	2,088
Mediana	12,50		28,57		30,00		0,00	
Varianza	229,700		293,469		357,036		405,563	
Desv. típ.	15,156		17,131		18,895		20,139	
Mínimo	0		0		0		0	
Máximo	75		79		80		100	
Rango	75		79		80		100	
Asimetría	1,195	0,250	0,461	0,250	0,057	0,250	3,922	0,250
Curtosis	2,150	0,495	-0,144	0,495	-0,909	0,495	14,988	0,495
Percentil								
25	0,00		21,43		10,00		0,00	
50	12,50		28,57		30,00		0,00	
75	25,00		42,86		50,00		0,00	

Tabla 5.107 Resumen de estadísticos descriptivos según subcategorías del conocimiento especializado

Sin embargo, tal y como se observa en la tabla 5.107 estos conocimientos son deficientes puesto que el 50% de los profesores no logra superar el 33% de las puntuaciones totales normadas.

En este capítulo hemos presentado los resultados, tanto cualitativos como cuantitativos, obtenidos al analizar las respuestas, de los 93 profesores de educación primaria en activo, al Cuestionario CDM-Probabilidad. Tales resultados nos han otorgado información muy útil y valiosa acerca del conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado que poseen los profesores chilenos para enseñar probabilidad en la educación primaria. Lo que nos ha permitido conocer cuáles son los conflictos, errores y dificultades que presentan en relación a la probabilidad y su enseñanza, para así comprender de mejor manera cuáles son las debilidades que presentan estos profesores, y contar así con pautas para establecer acciones que vayan en busca de la mejora y desarrollo de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores para enseñar probabilidad en la educación primaria.

En el capítulo 6 profundizamos en los resultados presentados, por medio de la discusión de los resultados obtenidos a partir de las respuestas de los 93 profesores al cuestionario. Además, se presentan las conclusiones finales, limitaciones y perspectivas de futuro de nuestra investigación.

CAPÍTULO 6
DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

6.1 Presentación

En esta investigación se ha realizado un estudio exploratorio sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria en activo. Con esta finalidad se ha construido, validado y aplicado un cuestionario basado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013) que busca medir el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado junto a sus subcategorías.

En este capítulo presentamos una discusión de los resultados obtenidos, a la luz del marco teórico y de las escasas investigaciones previas relacionadas. Además, se presentan las principales conclusiones de la investigación que han permitido dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados.

Finalizamos con algunas implicaciones didácticas para la formación continua del profesorado, así como la identificación de las limitaciones del estudio, con el objeto de clarificar los aportes realizados e identificar futuras líneas de investigación que permitan dar continuidad a nuestro estudio.

6.2 Discusión de los resultados obtenidos

La presente memoria pretende indagar en el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria, es decir, da respuesta a la pregunta de investigación: ¿qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo?

El interés por dar respuesta a este interrogante se fundamenta en los desalentadores resultados que obtienen tanto los alumnos chilenos en pruebas de medición sobre el aprendizaje de las matemáticas a nivel nacional (SIMCE) e internacional (TIMSS, PISA, etc.), como los profesores chilenos en estudios internacionales (OCDE, 2010, TEDS-M, 2010, WEF, 2011-2012).

Desde este punto de vista son diversos los estudios que pretenden indagar en los conocimientos que los profesores requieren para impartir una enseñanza de calidad a sus alumnos, lo que ha dado lugar a variados modelos que pretenden caracterizar el conocimiento del profesor. Dentro de estos modelos destaca, actualmente, el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008). Este modelo propone una caracterización de los componentes del conocimiento matemático que deben tener los profesores para la enseñanza, distinguiendo, siguiendo con la ideas de Shulman (1987), entre conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido. Sin embargo, no proporciona herramientas y criterios que permitan evaluar tales conocimientos. Es bajo esta mirada que optamos por utilizar como referente teórico el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013), que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). En esta tesis doctoral, pues, se ha asumido este modelo puesto que nos brinda herramientas adecuadas para evaluar los distintos conocimientos que el profesor debe tener para una enseñanza idónea de la matemática.

Desde esta perspectiva, nos planteamos una serie de objetivos que nos han permitido responder adecuadamente a la pregunta de investigación planteada. Para poder dar respuesta a estas finalidades, la investigación se ha organizado en dos partes: 1) una parte teórica, orientada a describir nuestro objeto de estudio considerando para ellos diversos aspectos, tales como: la evolución histórico-epistemológica de la probabilidad, la diversidad de significados en relación al concepto, aspectos relacionados con los errores y dificultes presentes en el procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, así como aquellos aspectos vinculados a la formación del profesorado par enseñar probabilidad; 2) y en una parte empírica, centrada en tres aspectos fundamentales para nuestro estudio: un estudio exploratorio sobre el tratamiento de la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de texto de educación primaria chilenos; la construcción del Cuestionario CDM-Probabilidad; y la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores de educación primaria en activo.

Dado que buscábamos evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo, nos propusimos, primeramente, aclarar algunas cuestiones en relación al objeto matemático probabilidad, como: ¿qué es la probabilidad?, ¿cuáles son sus significados?. Pues es a partir de tales significados que las instituciones o los profesores establecen un significado de referencia que nos llevó a identificar los significados pretendidos a implementar y evaluar el proceso de instrucción de un determinado tema (Godino, Batanero y Font, 2009).

De este modo, a partir de la parte teórica que se presenta en el capítulo 1, fue posible identificar y organizar los elementos de significado relacionados con la probabilidad. Esta parte teórica se estructuró en cinco apartados: Desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad; Significados de la probabilidad; Investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y educación primaria; Investigaciones sobre formación del profesorado para enseñar probabilidad; y Modelos del conocimiento del profesor. Así, por medio de estos apartados, fue posible dilucidar parte del conocimiento didáctico-matemático que debe poseer un profesor de educación primaria para enseñar probabilidad.

Es así como, a partir del estudio histórico-epistemológico, recogimos información sobre cómo se originó y cómo se dio el proceso de evolución de la probabilidad a lo largo de la historia, además de las problemáticas más relevantes asociadas a su surgimiento. Lo anterior permitió evidenciar la complejidad del objeto matemático probabilidad, el cual no ha estado exento de controversias y dificultades, producto de su multiplicidad de significados. Significados que deben ser introducidos de manera progresiva, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos, a lo largo de la educación matemática escolar, hasta llegar a una comprensión del objeto matemático desde sus distintos significados parciales (Batanero, 2005). Ésto nos llevó a realizar un análisis de los significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático) en el contexto de la matemática escolar. A partir de la concreción de estos significados se identificaron, en base a las investigaciones previas, los distintos elementos vinculados a las correspondientes configuraciones de objetos matemáticos primarios presentes en cada uno de los significados de la probabilidad analizados. Posteriormente, nos centramos en el análisis de la literatura especializada en relación al aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y primaria. Dicho estudio nos permitió conocer y comprender los diversos errores y dificultades asociados a la probabilidad, y que se hacen presentes, en muchas ocasiones, en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para ello, contemplamos los estudios de variados autores (Piaget e Inhelder, 1951; Green, 1983; Fischbein y Gazit, 1984; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982; Konold, 1991; Leocutre, 1992; Serrano, 1996; Cañizares, 1997, etc.) quienes destacan la importancia del desarrollo del razonamiento probabilístico de forma gradual a partir de las intuiciones probabilísticas primarias, para así lograr una comprensión adecuada de la probabilidad al finalizar la etapa escolar. Más aún si consideramos que la instrucción tendría un efecto positivo sobre el desarrollo de las intuiciones y concepciones probabilísticas de los alumnos (Fischbein y Gazit, 1984). De este modo, el contar con una instrucción adecuada permitiría a los alumnos superar errores sistemáticos y conductas estereotipadas que se manifiestan en el momento de tomar decisiones de tipo probabilístico. Dentro de los principales sesgos y heurísticas que afectan al razonamiento probabilístico, y que en algunas ocasiones ponen resistencia a la instrucción, nos encontramos con la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982), el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y el enfoque en el resultado o *outcome approach* (Konold, 1991). Sesgo que no tan solo se encuentran presentes en los alumnos, sino que en muchas ocasiones también están presentes en los profesores. Es por esta razón que dentro de nuestro instrumento de evaluación hemos considerado el estudio de dichos sesgos y heurísticas.

Una vez analizados los principales errores y dificultades presentes en el aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y educación primaria, nos centramos en indagar en la literatura previa los conocimientos del profesor para enseñar probabilidad. Las investigaciones relacionadas con este aspecto son escasas, y más aún las que se refieren a profesores de primaria en activo, pues la gran mayoría se centra en los futuros profesores (Begg y Edward, 1999; Sthol, 2005; Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Contreras, 2011; Mohamed, 2012, y Gómez, 2014). Las escasas investigaciones relacionadas con nuestra problemática de estudio revelan un conocimiento deficiente de los profesores de primaria sobre probabilidad, dado que cuando se ven enfrentados a la enseñanza de la probabilidad, se limitan a enseñar un conjunto de técnicas y formulas sin mayores interpretaciones. Este tipo de práctica docente, de acuerdo con Mohamed (2012) no facilita la comprensión de la probabilidad y de sus conceptos asociados por parte de los alumnos, mostrando de este modo una debilidad en la comprensión de los contenidos a enseñar y del conocimiento necesario para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Es así como, por medio de la revisión de diversas investigaciones sobre la probabilidad vinculadas al campo de estudio de la didáctica de la matemática, hemos recogido información sobre las problemáticas más relevantes asociadas al objeto matemático probabilidad, tanto desde una perspectiva del aprendizaje de los alumnos como de la formación del profesorado para enseñar probabilidad en la educación primaria. Por otro lado, esta revisión nos ha permitido evidenciar la carencia de investigaciones relacionadas con los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores de primaria en activo para enseñar probabilidad, y al mismo tiempo, nos ha ayudado a fundamentar el diseño y construcción de nuestro instrumento de evaluación, el cual incluye algunos ítems tomados de investigaciones previas relacionadas. (Para una mayor profundización en lo que respecta a las investigaciones analizadas, invitamos al lector a revisar el capítulo 1 de este estudio).

Por otro lado, puesto que nos interesa conocer cómo es el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo, consideramos necesario analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo y en los libros de textos de educación primaria. De este modo identificamos el significado de referencia a nivel curricular pretendido en el currículo chileno de educación primaria, para lo cual se analizaron orientaciones curriculares internacionales (EE.UU. y España) y nacionales (Chile), puesto que las orientaciones curriculares chilenas consideran variados aspectos de las orientaciones internacionales. Además, se realizó un análisis de los libros de texto oficiales para la educación primaria chilena. Lo anterior, junto al análisis del objeto probabilidad y a las investigaciones previas presentadas en el capítulo 1, nos permitió caracterizar el significado de referencia de la probabilidad para nuestra investigación. Por medio de la identificación de los objetos matemáticos primarios asociados al estudio de la probabilidad en el currículo chileno, que se han contrastado con los presentes en los libros de texto de educación primaria, se ha detectado una falta de alineación entre ambos. Por otro lado, la identificación de éstos objetos matemáticos nos ha permitido establecer el significado institucional de referencia para nuestra investigación.

En el marco de los resultados del análisis realizado encontramos que tanto las orientaciones internacionales como las nacionales coinciden en la importancia de desarrollar el razonamiento probabilístico desde las primeras edades y de forma gradual y progresiva a lo largo del currículo escolar, partiendo desde el desarrollo del significado intuitivo de la probabilidad. No obstante, en las orientaciones nacionales, el estudio de la probabilidad es abordado desde la perspectiva de Glayman y Varga (1975), es decir, se presenta un proceso de enseñanza de la probabilidad vinculado a la experimentación, razonamiento proporcional y medida de la probabilidad, sin embargo éste es aborda de manera muy general, centrándose mayoritariamente en la utilización de datos, tablas y gráficos, aproximándose de manera muy tangencial a los restantes significados (subjetivo, frecuencial y clásico de la probabilidad), sin profundizar mayormente en ninguno de ellos. A diferencia de las orientaciones curriculares del NCTM (2000) y el currículo español (MEC, 2007) que ofrecen un estudio de la probabilidad con una mayor profundidad.

En lo que respecta al análisis de los libros de texto chilenos, consideramos los seis libros de texto oficiales para la educación primaria (1º a 6º año), distribuidos gratuitamente por el Ministerio de Educación. De los seis libros, solo tres abordan el estudio de la probabilidad de manera explícita incorporando lecciones destinadas a tratar los distintos conceptos vinculados con el estudio de la probabilidad. Respecto al resto de libros de texto, uno trata la probabilidad de forma implícita presentando nociones de probabilidades distribuidas a lo largo de distintas lecciones que no se relacionan con el estudio de la probabilidad, y dos simplemente no la abordan.

Para llevar a cabo el análisis de la probabilidad en los libros de textos, utilizamos como referente teórico algunas herramientas del EOS, como la "guía para el reconocimiento de objetos y significados" (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) ya que ésta nos da claridad acerca de los objetos matemáticos presentes, además de la diferenciación entre algunos de los significados de la probabilidad que se hacen presentes en la educación primaria (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). La metodología utilizada para llevar el análisis se basa en la propuesta para el análisis de los libros de texto de Cobo (2003), que consiste en seleccionar aquellos capítulos en los que se trata la probabilidad y los objetos matemáticos vinculados a su estudio. Una vez realizada la selección, se lleva a cabo una lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen: situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos presentes, utilizando como base los objetos matemáticos identificados en las orientaciones curriculares chilenas, las cuales constituyen nuestro significado de referencia institucional a utilizar. De este modo nos fue posible responder a algunas cuestiones tales como: ¿existe una alineación entre los libros de texto y las orientaciones curriculares?; ¿se tienen en cuenta los distintos significados de la probabilidad en su planteamiento?; o bien, ¿cuáles son los conceptos/propiedades presentes en el tratamiento de la probabilidad?

El resultado del análisis realizado nos revela un tratamiento de la probabilidad en la educación primaria centrado mayoritariamente bajo un enfoque intuitivo de la probabilidad, muy ligado a situaciones cotidianas de los niños, lo cual concuerda con lo planteado por Godino, Batanero y Cañizares (1987). Sin embargo, el problema radica en que el tratamiento otorgado -pese a comenzar desde un enfoque adecuado- se realiza de manera muy superficial, y abordando solo aspectos parciales a los establecidos en las orientaciones curriculares chilenas. En los libros de texto si bien se presenta el estudio de la probabilidad desde varios enfoques, no se observa un significado claro de ésta y en concordancia al pretendido en el currículo, que muestra que la probabilidad se debe desarrollar desde el significado intuitivo para poco a poco ir incorporando el estudio de la probabilidad desde los demás significados (MINEDUC, 2012).

En consecuencia, los resultados obtenidos permiten evidenciar un tratamiento incompleto de la probabilidad en los libros de texto de educación primaria, lo que podría traer consigo un deficiente tratamiento de la probabilidad en las aulas ya que, en muchas ocasiones, el libro de texto constituye el único significado de referencia para el profesor, siendo uno de los principales recursos educativos en que los profesores basan sus decisiones a la hora de diseñar y organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Stylianides, 2009).

Otro aspecto a considerar dentro de los resultados obtenidos es que, a pesar de que en las orientaciones curriculares se enfatiza el trabajo manipulativo con dados y monedas, en los libros de texto son muy pocas las actividades que incluyen la utilización y manipulación de generadores de azar, y cuando se incluyen se vinculan a generadores con espacios muestrales finitos y sucesos elementales equiprobables, como ruletas, urnas, monedas y dados. Además, se observa la nula presencia de actividades en las que sea necesaria la utilización de *software*, pese a la riqueza que éste presenta a la hora de trabajar, por ejemplo, la probabilidad desde un enfoque frecuencial.

En el capítulo 3 ha quedado de manifiesto lo muy escasas que son las investigaciones que se centran en el análisis de la probabilidad en los libros de texto, dentro de las cuales la mayoría se centra en libros de texto de educación secundaria (Ortiz, 1999; Ortiz y Serrano, 2001; Serradó, 2003; Ortiz, 2002; Azcárate y Serradó, 2006). Éstas nos aportan información acerca de la caracterización de los conceptos vinculados a la probabilidad propuestos, así como de las actividades que forman parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Son muy pocas las investigaciones relacionadas con la probabilidad en los libros de texto de educación primaria, quizás ésto se deba a la reciente incorporación de la probabilidad en la educación primaria. Dentro de éstas últimas nos encontramos con la investigación realizada por Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) quien analiza el tipo de lenguaje asociado al estudio de la probabilidad presente en dos colecciones de libros de textos de primaria españoles, observando una fuerte predominancia del lenguaje coloquial. A partir de las conclusiones de este estudio observamos algunos factores comunes en el tratamiento de la probabilidad, pues tanto en los libros de texto españoles como chilenos se da inicio al estudio de la probabilidad desde su significado intuitivo, sin dar definiciones ni propiedades formales. Además, en ambos libros de textos, se observa una ausencia de actividades relacionas con la simulación mediante la utilización de *software*, pese a que éstas son consideradas en las orientaciones curriculares de ambos países.

Por otro lado, en los libros de texto analizados por Gómez (2014), sí se observa un tratamiento parcial de la probabilidad desde sus cuatro significados (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico), a diferencia de los libros de textos chilenos que se quedan solo en el trabajo intuitivo y en un leve desarrollo de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial, el cual consideramos leve puesto que no se logra concretar en ningún caso la importancia que tiene la estabilización de las frecuencias desde este significado de la probabilidad, lo que lleva a que finalmente el trabajo desde este enfoque se diluya.

Del mismo modo, al igual que en el análisis de los libros de texto españoles realizado por Gómez (2014), al analizar las prácticas matemáticas propuestas en los libros de texto chilenos, se observa que éstas se fundamentan principalmente en argumentaciones a partir de ejemplos que involucran una diversidad de expresiones verbales provenientes del lenguaje ordinario, apareciendo en los últimos cursos el uso de un lenguaje numérico que permite a los alumnos cuantificar la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso, como un número entre 0 y 1, para posteriormente introducir la regla de Laplace, pero de manera muy informal y sin hacer alusión al principio de equiprobabilidad de los sucesos.

Así, a partir de los resultados presentados en el capítulo 3, referidos al análisis de las orientaciones curriculares y de los libros de texto chilenos, consideramos que el tratamiento que se realiza de la probabilidad es poco adecuado y no se encuentra totalmente alineado con lo establecido en las orientaciones curriculares chilenas.

De este modo, por medio de este estudio, hemos obtenido información de interés para la construcción del cuestionario CDM-Probabilidad, tal es el caso de los objetos matemáticos y sus significados, identificados en los libros de texto como en las orientaciones curriculares, que forman parte del significado de referencia considerado en nuestra evaluación.

Una vez concluidos los análisis anteriores, dimos inicio a la construcción de un instrumento para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado sobre probabilidad en profesores de educación primaria en activo, puesto que al analizar las investigaciones previas en relación al conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad, no encontramos instrumentos que permitan evaluar las distintas categorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático, pues si bien existen algunos, éstos se centran solo en algunas de ellas. Tal es el caso de la investigación realizada por Contreras (2011), en la que se analiza el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del contenido y la enseñanza en relación a la probabilidad que ponen de manifiesto los futuros profesores de educación primaria en el cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionales a partir de datos presentados en una tabla de contingencia de 2x2. Del mismo modo, Mohamed (2012) evalúa el conocimiento común del contenido y el conocimiento didáctico sobre probabilidad que presentan los futuros profesores de educación primaria, centrándose en el caso del conocimiento didáctico, en el conocimiento especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes. Más recientemente, encontramos la investigación de Gómez (2014), quien evalúa el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria, considerando para ello la evaluación del conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado, pero sin ahondar en las subcategorías que conforman este último.

Es dado lo anterior que decidimos diseñar y construir un instrumento de evaluación adecuado a nuestras necesidades, es decir, que permitiera evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado sobre probabilidad en profesores de educación primaria en activo, así como las distintas subcategorías que comprenden el conocimiento especializado (conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, conocimiento del contenido en relación con el currículo). Para así, por medio de los resultados obtenidos en la aplicación del Cuestionario CDM-Probabilidad, dilucidar ¿qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo?

Para el diseño del cuestionario se tuvo en cuenta el significado de referencia establecido a partir del análisis histórico-epistemológico, las investigaciones previas en relación al aprendizaje y preparación de futuros profesores para enseñar probabilidad, y el análisis de las orientaciones curriculares y libros de texto de educación primaria chilenos. Estos datos permitieron dar inicio a la construcción de la versión piloto del Cuestionario CDM-Probabilidad, para lo cual se consideró la selección de tipos de tareas y contenidos principales, y la selección de los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que nos interesaba evaluar.

Para la selección de los tipos de tareas y contenidos principales, analizamos las tareas incluidas en investigaciones previas sobre razonamiento probabilístico en niños y adolescentes, puesto que éstas nos informan sobre los errores y dificultades más recurrentes, además, se analizaron las investigaciones relacionadas con los conocimientos de los futuros profesores sobre probabilidad, tales como las realizadas por Contreras (2011), Mohamed (2012) y Gómez (2014). De esta forma, se estableció un banco de tareas para los contenidos principales expuestos en las investigaciones sobre el tema, así como aquellos presentes en las orientaciones curriculares y los libros de texto analizados.

Este procedimiento nos permitió elaborar la versión piloto del instrumento, la cual estaba compuesta por 10 ítems de respuesta abierta, algunos provenientes de investigaciones previas y otros de elaboración propia. Por medio de estos ítems se abordaron los diversos contenidos seleccionados y los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que nos interesaba evaluar (conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado, junto a sus subcategorías), de acuerdo con el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino, Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013). Luego, se sometió la versión piloto a un proceso de validación que consideró el juicio de 8 expertos en didáctica de la matemática y la aplicación piloto del cuestionario a un grupo de 8 profesores de educación primaria en activo. A partir del análisis de los resultados, las observaciones y los comentarios obtenidos de este proceso se realizaron ciertas modificaciones que llevaron a que el cuestionario en su versión final quedara compuesto por 7 ítems. Así, por medio de este proceso se garantizó la validez de contenido del instrumento (Muñiz, 1994).

Cada uno de los ítems se encuentra estructurado en una situación problemática y distintos subítems cuyo propósito es el de evaluar los distintos aspectos del conocimiento didáctico-matemático que son de nuestro interés. Es importante señalar que para cada uno de los ítems se realizó un análisis *a priori* que contemplaba un análisis del ítem en relación a: el componente del conocimiento didáctico-matemático a evaluar, contenidos principales y secundarios que se deben poner en juego para su resolución, elementos de significado en los que se centra el ítem, propuesta de respuesta experta, análisis de la configuración epistémica en términos de objetos y significados primarios, y por último se señalaron algunos potenciales conflictos de significado (para un análisis en mayor profundidad del proceso de diseño, construcción y validación del instrumento, invitamos al lector a revisar el capítulo 4 de esta tesis).

Una vez construido el instrumento, éste fue aplicado a un grupo de 93 profesores chilenos de educación primaria, las características de los sujetos así como los resultados de dicha aplicación se exponen en el capítulo 5.

Como vemos, gran parte de la investigación ha estado orientada a identificar y caracterizar los significados de referencia de la probabilidad, para así a partir de la aplicación del cuestionario CDM-Probabilidad, poder evaluar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo, y de este modo, contar con información detallada que nos permita determinar ¿Qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo?

En lo que sigue realizamos la discusión de los resultados obtenidos de la aplicación del Cuestionario CDM-Probabilidad. La discusión se estructura de acuerdo con las categorías del conocimiento que conforman el modelo del conocimiento didáctico-matemático.

6.2.1. Evaluación del conocimiento común del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria

Para analizar cómo es el conocimiento común del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria, nos centramos en los conocimientos matemáticos puestos en juego para resolver las situaciones problemáticas presentadas en los 7 ítems que conforman el Cuestionario CDM-Probabilidad. Por medio de estos ítems se abordaron, ya sea implícita o explícitamente, los contenidos de experimento aleatorio, suceso aleatorio, espacio muestral, posibilidad de ocurrencia de un suceso, los distintos significados de la probabilidad, cálculo de probabilidades, comparación de probabilidades e independencia de sucesos.

A partir de los resultados obtenidos, interpretamos que el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de la gran mayoría de los profesores de educación primaria que participaron de este estudio es muy insuficiente, puesto que el porcentaje de respuestas correctas no logra superar el 22,4% en promedio. Además se observan que presentan serias dificultades para resolver correctamente las situaciones problemáticas planteadas, manifestando variados errores y dificultades, evidenciándose además la presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos al igual que en los resultados obtenidos por Azcárate (1995) con futuros profesores de educación primaria. Además, se ha puesto en evidencia el uso de estrategias incorrectas en casi la totalidad de las situaciones problemáticas planteadas.

Si nos centramos en los resultados obtenidos en relación a la percepción de la independencia de sucesos, estos resultados nos permiten detectar la fuerte influencia que tiene el dar a conocer la secuencia de los resultados anteriores obtenidos en un experimento aleatorio como, por ejemplo, el lanzamiento sucesivo de una moneda o un dado. Esta comprensión inadecuada de la independencia de sucesos llevó a los profesores a responder equivocadamente aquellas preguntas vinculadas a este conocimiento, presentado en muchos casos el sesgo de la recencia positiva (predominantemente) y el recencia negativa (en una menor proporción). Sesgos que han sido descritos por Piaget e Inhelder (1951), y atribuidos más tarde, a la heurística de la representatividad por Kahnemann, Slovic y Tversky (1982).

De manera similar nos encontramos con conocimientos inadecuados en lo que respecta al cálculo y a la comparación de probabilidades, ya que los resultados evidencian un conocimiento insuficiente. Este déficit se fundamenta, principalmente, en estrategias de resolución muy elementales (como por ejemplo la comparación del número de casos desfavorables), que en su gran mayoría son características de la etapa pre-operacional (Piaget e Inhelder, 1951). Además, se observa, en algunas de las situaciones problemáticas vinculadas a este contenido, la presencia del sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988) que lleva, en un alto porcentaje, a que los profesores realicen una incorrecta generalización de la regla de Laplace, obviando el supuesto de equiprobabilidad de sucesos.

Por su parte, al analizar los distintos argumentos otorgados en aquellas situaciones problemáticas en las que es necesario aplicar una adecuada comprensión de nociones básicas de probabilidad, tales como: experimento aleatorio, espacio muestral, suceso probable, seguro, etc., los resultados nos muestran que éstas nociones, pese a ser básicas, son de gran dificultad para los profesores. Estos resultados concuerdan con Fischbien y Gazit (1984), para quienes la noción de suceso seguro presenta mayores dificultades en su comprensión, que la de suceso posible.

Otra noción que muestra dificultad para estos profesores es la noción de juego equitativo. Si bien en las tareas vinculadas a esta noción se observa una mejoría en el porcentajes de respuestas correctas, éstos son aún bajos si consideramos que son respuestas de profesores de educación primaria en activo, quienes en su mayoría basan sus respuestas en argumentos muy elementales y característicos de aquellos sujetos que se encuentran al final de la etapa pre-operacional, en la que aún no son capaces de establecer relaciones entre el todo y las partes, es decir, entre casos favorables y el total de casos posibles de un experimento aleatorio.

En lo que se refiere a los significados de la probabilidad, los resultados muestran gran dificultad en relación a la comprensión de los distintos significados, pues los profesores fundamentan sus respuestas en nociones intuitivas erróneas, y básicamente en la información que entrega las situación problemática planteada, dejándose llevar equivocadamente por la información disponible. De acuerdo con los resultados, no hay diferencia entre la comprensión de los distintos significados, puesto que los resultados en general son muy insuficientes y se comportan de manera muy similar.

Si comparamos nuestros resultados con los obtenidos por Cañizares (1997) en niños de 10 a 14 años, en problemas similares a los nuestros, se observa que los resultados de nuestro grupo de profesores son muy inferiores y preocupantes, ya que en la investigación de Cañizares (1997) la gran mayoría de los niños responde correctamente a situaciones muy similares a las que hemos planteado en el Cuestionario CDM-Probabilidad.

Lo mismo ocurre si contrastamos nuestros resultados con los obtenidos en investigaciones que al igual que la nuestra miden el conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad, pero en futuros profesores de educación primaria. Tal es el caso de la investigación de Contreras (2011), cuyos resultados muestran que los futuros profesores de educación primaria poseen un conocimiento insuficiente en relación al cálculo de probabilidad desde tablas de doble entrada. Si bien nuestro significado de referencia no considera a la probabilidad condicional, consideramos de interés el conocer los resultados de Contreras (2011) en un tema de la probabilidad más avanzado en el currículo que el nuestro. Por su parte, Mohamed (2012) al evaluar el conocimiento común del contenido sobre probabilidad en futuros profesores de educación primaria por medio de un cuestionario con tareas similares, y en algunos casos iguales a las nuestras, evidenció que la resolución de problemas sobre probabilidad es una tarea difícil para los futuros profesores; sin embargo, sus resultados son bastante más alentadores que los nuestros, pese a ser bajos. Del mismo modo, al contrastar nuestros resultados con la investigación de Gómez (2014) observamos, al igual que en los casos anteriores, que el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de nuestros profesores de educación primaria en activo se encuentran muy por debajo que los obtenidos por futuros profesores en investigaciones de similares características. Incluso a los obtenidos por alumnos de primaria en la resolución de problemas muy similares de probabilidad, como es el caso de los resultados obtenidos por Cañizares (1997). Esta situación es alarmante, si consideramos que en nuestro caso se trata de profesores de educación primaria en activo, es decir, que ya se encuentran enseñando probabilidad en la educación primaria, y que podrían transmitir tales sesgos a sus alumnos.

En lo que respecta a los conceptos que los profesores deben poner en juego al resolver las situaciones problemáticas planteadas, los resultados evidencian que todos los contenidos resultaron difíciles para los profesores, sin embargo los que han resultado de mayor dificultad son los vinculados a la identificación de la independencia de sucesos para realizar el cálculo de probabilidades simples. Ante este tipo de situaciones problemáticas, los profesores presentan fuertemente el sesgo de la recencia positiva, lo que les conduce a una incorrecta asignación de probabilidad y a una confusión con la noción de suceso seguro, que es confundida por un amplio porcentaje con la de suceso posible. De manera similar ocurre con la noción de espacio muestral, en que el error más frecuente es no identificarlo correctamente, puesto que se confunden las nociones de suceso seguro y suceso posible. Cabe señalar que, contrariamente a los resultados obtenidos por Mohamed (2012), nuestros profesores muestran un desempeño levemente mejor en la comprensión de la noción de juego equitativo, presentando en la situación problemática relacionada con este concepto un porcentaje aceptable de respuestas correctas.

En resumen, los resultados obtenidos muestran que casi la totalidad de los profesores de educación primaria que han participado en nuestra investigación, poseen un conocimiento común del contenido sobre probabilidad a un nivel muy elemental y muy insuficiente, es decir, no cuentan con un dominio adecuado de conceptos básicos sobre probabilidad acordes al nivel educativo en el que se desempeñan. Este déficit les impide poder abordar con éxito la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria, dado que, como ya hemos dicho, no cuentan con los conocimientos mínimos necesarios para llevar a cabo un proceso de instrucción idóneo de la probabilidad.

6.2.2 Evaluación del conocimiento ampliado del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria

Para estudiar el conocimiento ampliado del contenido sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo se analizaron las prácticas matemáticas presentes en las respuestas obtenidas a la pregunta 7d) del Cuestionario CDM-Probabilidad.

En lo que respecta al conocimiento ampliado del contenido sobre probabilidad, son escasas las investigaciones existentes con las cuales podemos contrastar nuestros resultados. Dentro de las pocas investigaciones en relación al conocimiento ampliado del contenido probabilidad, podemos considerar la de Batanero, Cañizares y Godino (2005) quienes analizan un conocimiento algo más avanzado sobre probabilidad en futuros profesores de primaria, observando, al igual que nuestros resultados, la presencia de sesgos probabilísticos tales como la heurística de la representatividad, el sesgo de la equiprobabilidad y el enfoque en el resultado (*outcome approach*) (Konold, 1991). Cabe señalar que en nuestro caso la presencia de la mayoría de estos sesgos es más fuerte que la observada en la mencionada investigación. Del mismo modo, Gómez (2014) al evaluar el conocimiento ampliado del contenido sobre probabilidad evidencia que los futuros profesores presentan un bajo nivel en relación a este conocimiento. Sin embargo, sus resultados son mejores que los obtenidos por nuestro grupo de profesores.

Finalmente, podemos decir que al interpretar los resultados obtenidos en nuestro estudio se pone en evidencia que el conocimiento ampliado del contenido es de un nivel extremadamente insuficiente, puesto que ninguno de los profesores logró responder de forma correcta ni parcialmente correcta la pregunta planteada, mostrando en su gran mayoría estrategias de resolución incorrectas a partir de concepciones erróneas. Es decir, los profesores de educación primaria en activo participantes en nuestro estudio no cuentan con un conocimiento adecuado y suficiente que les permita identificar los distintos contenidos involucrados en la resolución de las situaciones problemáticas planteadas y relacionarlos con otros temas y/o contenidos más avanzados del currículo escolar.

6.2.3 Evaluación del conocimiento especializado sobre probabilidad que poseen los profesores de educación primaria

Tal y como se ha señalado en el capítulo 4 en lo que respecta al conocimiento especializado, si bien analizamos las distintas subcategorías que lo componen, lo hemos hecho de manera parcial centrándonos en algunos aspectos parciales o iniciales que son de nuestro interés, ya que el llevar a cabo un análisis exhaustivo de las distintas subcategorías resultaría muy ambicioso y pretencioso para nuestro estudio.

Así, a partir de los resultados obtenidos, evidenciamos que el conocimiento especializado es de un nivel muy insuficiente, pues el porcentaje promedio de respuestas correctas no logra superar el 9,9%, siendo el segundo tipo de conocimiento con peor resultado, antecedido por el conocimiento ampliado del contenido. Cabe señalar que, al igual que en el caso del conocimiento común del contenido y del conocimiento ampliado del contenido, no se observan mayores diferencias en relación al desempeño obtenido de acuerdo con las variables que caracterizan a los sujetos. A pesar de que algunos presentan, en promedio, un mejor rendimiento, dichas diferencias son muy leves.

Estos resultados coinciden con los de Gómez (2014), que evidencia un conocimiento especializado de la probabilidad de un nivel insuficiente en los futuros profesores de educación primaria. No obstante, los resultados de Gómez (2014) pese a ser insuficientes, son mejores que los obtenidos por nuestros profesores.

Considerando los bajos resultados de nuestro estudio, hemos decidido centrar nuestra discusión en los datos obtenidos para cada una de las subcategorías que componen el conocimiento especializado (conocimiento del contenido especializado, el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y el conocimiento del contenido en relación con el currículo), pues creemos que de esta forma obtendremos una mayor claridad acerca de cómo se comportan los profesores en relación a este tipo de conocimiento, es decir, cuáles son las mayores debilidades que presentan.

Al interpretar nuestros resultados sobre el conocimiento del contenido especializado, se pone en evidencia que los profesores no cuentan con los conocimientos matemáticos necesarios que les permitan identificar adecuadamente los conceptos y/o propiedades sobre probabilidad que los alumnos deben poner en juego para resolver adecuadamente la situación problemática planteada, puesto que solo un 1,4% de los profesores logra identificar correctamente cuatro o más conceptos y/o propiedades de interés involucradas en la resolución de la situación problemática planteada. La mayoría de los profesores logra identificar un solo contenido involucrado, el cual por lo general lo asocian con probabilidad. Incluso aquellos profesores que respondieron correctamente a las situaciones no logran identificar más de dos conceptos necesarios para dar respuesta a la situación problemática. Lo anterior coincide, en cierta medida, con los resultados obtenidos por Chick y Pierce (2008), quienes evidencian que los profesores de primaria no cuentan con los conocimientos necesarios para identificar los conceptos presentes en la resolución de un problema de estadística o probabilidad. Del mismo modo, estos resultados son congruentes con los obtenidos por Contreras (2011) en una investigación de características similares con futuros profesores de educación primaria, en la cual éstos también demostraron tener un bajo nivel de conocimiento especializado del contenido. Quizás ésto se deba a la reciente incorporación del estudio de la probabilidad en la educación básica, y en la escasa preparación que los profesores poseen para enseñar probabilidad. Por su parte, en el estudio de Mohamed (2012) con futuros profesores, se evidencia una situación similar, en que si bien los resultados no son tan bajos como los nuestros, los futuros profesores no cuentan con la capacidad para reconocer los objetos matemáticos que se deben poner en juego para resolver un determinado problema de probabilidad.

En el caso del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, al igual que en los tipos de conocimientos anteriores, los resultados nos muestran que estos profesores no cuentan con un conocimiento adecuado y suficiente que les permita anticiparse y comprender los principales tipos de conflictos de aprendizaje presentes en los argumentos y respuestas de los alumnos cuando éstos se ven enfrentados a resolver un determinado problema del ámbito de la probabilidad. Si bien el porcentaje promedio de respuestas correctas para este conocimiento es algo más elevado que para los anteriores, sigue siendo muy bajo (21,8%). Y más aún si consideramos la sencillez de las situaciones problemáticas planteadas y el hecho de que quienes han respondido al cuestionario son profesores de educación primaria que se encuentran realizando clases en las aulas. Por otro lado, al igual que en el estudio de Mohamed (2012), éstos profesores, si bien logran identificar algunos errores y/o dificultades a los cuales podrían verse enfrentados los alumnos, no logran argumentar y justificar lo suficiente el por qué de tales errores. Además, el tipo de errores y/o dificultades encontrados son de un carácter muy básico y se centran, principalmente, en cuestiones de tipo procedimental o conceptual. Este dato concuerda con los resultados obtenidos por Watson (2001) al evaluar el conocimiento de los profesores para reconocer las dificultades de sus alumnos en relación a la probabilidad y la estadística.

Por su parte, los resultados referidos al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza evidencian un conocimiento insuficiente para describir estrategias y/o recursos que utilizarían para ayudar a superar posibles errores y/o dificultades de los alumnos al resolver las situaciones problemáticas planteadas. Un promedio del 5,4% de los profesores logra dar una respuesta correcta a lo solicitado, mientras que un porcentaje muy superior, que corresponde casi a la totalidad de los profesores, ante la pregunta ¿qué estrategias utilizarían para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema? solo se limita a responder que utilizaría material concreto, pero no señala a qué tipo de material se refiere ni cómo lo utilizaría para reforzar la comprensión de los conceptos de probabilidad involucrados en la resolución del problema. Esto concuerda, por ejemplo, con los resultados obtenidos por Sthol (2005), quien muestra que los profesores tienen dificultades a la hora de trabajar la probabilidad de una forma más experimental y basada a en la simulación, ya sea por medio de la utilización de material concreto o *software*, pues se centran en la utilización de muestras pequeñas, lo que impide a los alumnos observar la convergencia de los resultados.

Esta situación es bastante alarmante, más aun si consideramos que los profesores que han respondido se encuentran ya realizando clases de probabilidad en el aula, por lo que su respuesta en relación a la utilización de estrategias debería ir más allá de tan solo limitarse a indicar que usarían material concreto, sobre todo si consideramos la potencialidad que tienen los diversos generadores de azar para el estudio de la probabilidad.

Por último, de acuerdo con los resultados obtenidos para el conocimiento del contenido en relación con el currículo, los profesores de educación primaria en activo que han participado de nuestro estudio muestran un dominio insuficiente, pues solo un 3,2% responde correctamente en relación a la capacidad para identificar los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la situación problemática propuesta, es decir, no logran identificar el objetivo y/o finalidad que se encuentra detrás de dicha situación en relación a las orientaciones curriculares chilenas.

En resumen, los resultados obtenidos en nuestra investigación evidencian un conocimiento didáctico-matemático muy insuficiente, pues los participantes no logran superar el 23% de respuestas correctas en ninguno de los distintos aspectos evaluados. Dentro de los conocimientos que muestran un mejor nivel se encuentra el conocimiento común del contenido, pero aun así este es muy bajo e insuficiente. Por lo tanto, estos profesores no cuentan con un nivel de conocimientos adecuados que les permita desempeñar de manera exitosa la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Es más, de acuerdo a lo presentado en el capítulo 5, éstos presentan a nivel de conocimiento común del contenido sobre probabilidad más errores y dificultades para resolver las situaciones problemáticas, que alumnos españoles de 10-14 años que han participado en estudios en que se presentan situaciones problemáticas bastantes similares a las nuestras (Cañizares, 1997) o que futuros profesores de educación primaria que han participado en estudios similares al nuestro (Mohamed, 2012). Quizás esto se deba a la poca preparación que han recibido durante su formación inicial, pues sólo un 31,2% de los profesores declaró haber recibido formación disciplinar sobre probabilidad durante su formación inicial.

Por otro lado, en lo que respecta al efecto de las variables que caracterizan a los profesores, solo hemos encontrado una leve influencia del tipo de especialidad sobre el conocimiento común del contenido, ya que los profesores con especialidad matemática manifiestan un conocimiento común del contenido sobre probabilidad un poco mejor que el resto de los profesores, sin embargo éste continua siendo bajo e insuficiente.

Esta situación es alarmante, y nos indica que urge contar con un proceso de formación continua que ayude a mejorar los conocimientos didáctico-matemáticos para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.

6.3 Conclusiones del estudio

En esta memoria hemos presentado un estudio que se centra en evaluar qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo. Este interés surge a partir de los actuales planteamientos curriculares tanto a nivel nacional como internacional, los cuales incluyen el estudio de la probabilidad de manera temprana, continua y progresiva a los largo del currículo escolar. Esta reciente incorporación de la probabilidad significa un verdadero desafío para los profesores en activo, puesto que en muchos casos no han recibido formación al respecto durante su proceso de formación inicial, tal y como lo hemos podido constatar en los profesores participantes de nuestro estudio, de los cuales solo un 31,2% ha recibido formación disciplinar al respecto y 0% ha recibido formación en didáctica de la probabilidad.

Otro argumento que nos ha impulsado a realizar el estudio presentado es que las investigaciones realizadas hasta el momento sobre el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de educación primaria en activo para enseñar probabilidad han sido escasas, y mayoritariamente focalizadas en futuros profesores de educación primaria y secundaria, y aún más escasas en países como Chile en los cuales no hemos encontrado investigaciones al respecto.

Por las razones anteriores, consideramos que esta tesis doctoral constituye una aportación relevante y novedosa que permite dar cuenta de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores de educación primaria en activo para enseñar probabilidad, para así en un futuro próximo proponer y ejecutar acciones de mejoramiento.

En lo que sigue presentamos las principales conclusiones de nuestra investigación de acuerdo con los resultados obtenidos. Estos resultados, como se ha indicado, han permitido responder a los objetivos planteados en nuestro estudio, que a su vez derivan de la pregunta de investigación planteada:

¿Qué conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo?

Considerando, pues, esta pregunta y los correspondientes objetivos, las principales conclusiones de nuestro estudio son:

1. *La complejidad de la incorporación progresiva de los distintos significados del objeto matemático probabilidad en la educación primaria.*

A lo largo de este estudio hemos podido constatar la complejidad que conlleva el incorporar el estudio del objeto matemático probabilidad en la educación primaria. Por esta razón, se considera necesario introducir sus diversos significados de forma progresiva a lo largo del currículo escolar, iniciando su estudio a partir de su significado intuitivo para que los alumnos vayan adquiriendo poco a poco los conocimientos y las herramientas necesarias que les permitan incorporar los demás significados (subjetivo, frecuencial y clásico) para construir un conocimiento y comprensión sólidas en relación a la probabilidad (Batanero, 2005). Para llevar a cabo este proceso, es fundamental que el profesor de educación primaria sea poseedor de un conocimiento didáctico-matemático adecuado que le permita llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de manera idónea. Es por esta razón que nos hemos centrado en dilucidar el tipo de conocimiento que poseen los profesores de educación primaria en activo. Para lo cual hemos diseñado, construido y aplicado el Cuestionario CDM-Probabilidad.

2. *La necesidad de mejorar el tratamiento de la probabilidad en los libros de texto de educación primaria.*

Del mismo modo es necesario mejorar la calidad de los libros de texto de educación primaria en lo que respecta al tratamiento otorgado al estudio de la probabilidad, puesto que de acuerdo con nuestros resultados, la probabilidad es abordada de manera muy superficial, y lo que es más grave aún de forma no alineada de acuerdo con las orientaciones curriculares. Lo cual resulta preocupante si consideramos por un lado que los conocimientos sobre probabilidad de los profesores de educación primaria son muy insuficientes en todos los ámbitos evaluados, y por otro, no hay que olvidar que el libro de texto constituye en la gran mayoría de los casos un referente a seguir en el diseño e implementación del procesos de enseñanza y aprendizaje. Por lo que un inadecuado tratamiento de la probabilidad en los libros de texto sumado a la escaza preparación de los profesores, podría traer consigo un muy inadecuado tratamiento de la probabilidad en las aulas, y por consiguiente una muy inadecuada comprensión ésta en los alumnos.

3. *El bajo nivel de los conocimientos matemático-didácticos para enseñar probabilidad del profesorado de educación primaria en activo.*

A partir de la aplicación del Cuestionario CDM-Probabilidad, el cual tenía por objetivo evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad, podemos afirmar que los profesores participantes en el estudio poseen un conocimiento didáctico-matemático de un nivel muy insuficiente e inadecuado.

En las respuestas obtenidas se observa la presencia de diversos sesgos y heurísticas que, en muchas ocasiones, son propias de una inadecuada comprensión de la probabilidad, la cual es muy similar, e inclusos en algunos casos inferior, a la reportadas en estudios similares con alumnos de educación primaria. Si nos concentramos en los distintos componentes del conocimiento didáctico-matemático observamos que el conocimiento común del contenido sobre probabilidad resulta ser de un nivel ligeramente mejor que el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado. No obstante, el nivel de desempeño obtenido por este grupo de profesores ha sido demasiado bajo para todos los tipos de conocimientos involucrados.

4. *El efecto negativo que puede causar el bajo nivel de los conocimientos matemático-didácticos para enseñar probabilidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en educación primaria.*

Como se ha indicado, una de las principales conclusiones del estudio realizado es que los profesores participantes poseen un conocimiento didáctico-matemático insuficiente e inadecuado. Este déficit, que en muchos casos es debido a una formación disciplinar y didáctica escasa o nula, podría afectar el logro de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad idóneo. Incluso podría ocurrir que los sesgos y heurísticas que presentan estos profesores fuesen transmitidos a sus alumnos, puesto que el conocimiento didáctico-matemático del profesor tiene una fuerte influencia en el logro de aprendizaje de sus alumnos (Ball, 1990; Wilson, Shulman y Richert, 1987).

5. *La necesidad de realizar un programa de intervención que permita mejorar el nivel de los conocimientos matemático-didácticos para enseñar probabilidad del profesorado de educación primaria en activo.*

En base a los resultados presentados en el capítulo 5, se evidencia que la situación, en términos de conocimientos, es alarmante por lo que urge realizar una intervención que permita mejorar, adquirir y desarrollar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre probabilidad de los profesores de educación primaria en activo, en sus distintas facetas. Dicho programa de intervención deberá considerar el desarrollo de conocimientos vinculados a la probabilidad como objeto matemático, conocimientos vinculados directamente con la didáctica de la probabilidad, así como promover la integración entre ambos tipos de conocimientos. De modo tal que permita contribuir al mejoramiento de la preparación para enseñar probabilidad de los profesores de educación primaria.

6.4 Aportaciones del estudio

Dentro de las principales aportaciones de nuestro estudio hemos considerado la siguientes:

- El estudio realizado en torno al objeto matemático probabilidad, el cual fue abordado desde distintas perspectivas, considerando un estudio histórico-epistemológico a partir de sus distintos significados. Además, de la síntesis realizada de las investigaciones previas sobre los aspectos cognitivos vinculados a la comprensión de la probabilidad en la cual consideramos los distintos errores, dificultades, sesgos y heurísticas presentes en el aprendizaje de la probabilidad en niños y adolecentes. Por último, la síntesis de las investigaciones previas relacionadas con la formación del profesorado para enseñar probabilidad y con aspectos instruccionales. Esta síntesis y recopilación de los distintos los conocimientos aportados por las investigaciones previas sobre aprendizaje de la probabilidad y la formación del profesorado para enseñar probabilidad en educación primaria, constituye un referente teórico que puede ser de gran utilidad para el desarrollo de futuras investigaciones asociadas a la probabilidad o bien para otros investigadores que quieran abordar el estudio de la probabilidad.

- Otra aportación de este estudio se relaciona con el análisis y contrastación curricular realizada sobre el tratamiento otorgado a la probabilidad en el currículo norteamericano, español y chileno, el cual entrega información de interés sobre el tratamiento de la probabilidad en el currículo chileno en relación a otros contextos internacionales. Al igual que en la aportación anterior esta información puede ser utilizada para el desarrollo de futuras investigaciones.

- Asimismo el análisis de la probabilidad en los libros de texto chilenos, realizado desde una perspectiva ontosemiótica, constituye un aporte que ha permitido identificar los distintos objetos matemáticos y sus significados presentes en los libros de texto en relación a la probabilidad, así como su vinculación con las orientaciones curriculares. Esta información podría ser utilizada para sugerir propuestas de mejoramiento de los libros de texto en relación al tratamiento de la probabilidad en la educación primaria.

- La principal aportación de nuestro estudio ha sido la construcción de un cuestionario para evaluar el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado sobre probabilidad, así como las cuatro subcategorías que conforman este último (conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, conocimiento del contenido en relación con el currículo). Si bien algunos de los ítems fueron tomados de investigaciones previas, estos fueron adaptados de acuerdo a nuestro objetivo, permitiéndonos obtener resultados originales e información de interés en relación al conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.

  Pese a que el cuestionario CDM-Probabilidad solo evalúa algunos aspectos parciales o iniciales del conocimiento didáctico-matemático, posee la característica de que evalúa ciertos aspectos de las distintas facetas presentes en el conocimiento didáctico-matemático. Lo que constituye, en cierta medida, una fortaleza de nuestro instrumento.

- Por último, otra aportación de interés sobre todo para el contexto chileno, es contar con resultados originales sobre el conocimiento didáctico-matemático en relación a la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo. Dado que prácticamente no existen investigaciones realizadas con profesores de educación primaria en activo y que den a conocer sus necesidades de formación. Dicha información puede ser utilizada para diseñar programas de intervención o de formación continua que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de la probabilidad en las escuelas primarias.

6.5 Limitaciones del estudio

Como toda investigación la nuestra también tiene sus limitaciones, dentro de las cuales identificamos las siguientes:

- La muestra a la que se ha aplicado el instrumento es una muestra pequeña, de 93 profesores de educación primaria en activo, por lo que los resultados podrían no ser generalizables a todos los profesores de educación primaria. Quizás se podría replicar el estudio con un número mayor de sujetos y observar si se comportan de manera similar con nuestro actual grupo de estudio.

- El cuestionario que hemos construido para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo, si bien ha considerado todas las categorías y subcategorías de conocimientos que componen el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, lo hace de manera inicial o parcial, centrándose solo en algunos de los aspectos que propone Godino (2009). Dado que el realizar un estudio en mayor profundidad hubiese requerido, por ejemplo, de la observación de clases, para analizar las interacciones que se dan, la revisión de planificaciones y de entrevistas clínicas en profundidad con los profesores participantes. Condiciones a las que durante el transcurso de esta investigación no fue posible acceder. Por lo que se decidió evaluar solo algunos aspectos parciales o iniciales de las distintas facetas que componen el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

- Por otro lado, en lo que se refiere al análisis de los libros de texto de educación primaria, solo nos hemos centrado en aquellos que el Ministerio de Educación chileno distribuye de manera gratuita a los establecimientos municipales y particulares subvencionados. Pero no hemos considerado, en nuestro estudio, aquellos libros de texto que se comercializan en el mercado y que son utilizados mayoritariamente por los establecimientos particulares pagados.

6.6 Líneas de investigación futuras

Como ya sabemos, a diferencia de otros temas matemáticos, las investigaciones relacionadas con nuestro tema de estudio son aún muy escasas, por lo que se presenta una amplia variedad de líneas de investigación que se pueden desarrollar a futuro, dentro de las cuales ejemplificamos con las siguientes:

- Ampliar el estudio a una muestra mayor de profesores de educación primaria en activo y comparar los resultados con los obtenidos en nuestro estudio, y de este modo ver si los resultados pueden ser generalizados.

- Ampliar el Cuestionario CDM-Probabilidad con otros contenidos y preguntas que permitan indagar en mayor profundidad en cada uno de los conocimientos evaluados.

- Complementar el Cuestionario CDM-Probabilidad con los diversos aspectos que quedaron por evaluar para cada una de las distintas facetas que forman parte de los distintos tipos de conocimientos. O bien se podrían desarrollar varios instrumentos de evaluación que apunten en su conjunto a evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo.

- Desarrollar estudios de similares características, con profesores de matemática de secundaria y con futuros profesores de educación primaria y secundaria, y comparar si existen diferencias en el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad.

- Realizar un análisis de libros de texto comparativo entre los que se distribuyen de manera gratuita por el Ministerio de Educación y los que se comercializan en el mercado. Para de este modo establecer si existen o no diferencias en el tratamiento otorgado a la probabilidad.

- Diseñar un programa de intervención, a partir de los resultados obtenidos, que permita mejorar y desarrollar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad de los profesores de primaria, y posteriormente medir su efecto.

Finalizamos esta tesis doctoral con el anhelo de haber aportado con un pequeño granito de arena que contribuya a dilucidar las necesidades formativas de los profesores de educación primaria en relación al objeto probabilidad. Esperamos que las investigaciones en relación a este tema sigan en aumento y que contribuyan cada vez más a desarrollar una comprensión profunda de la probabilidad tanto en los profesores como en sus alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abad, F; Garrido, J; Olea, J; Ponsoda, V. (2006). *Introducción a la Psicometría, Teoría Clásica de los Tests y Teoría de Respuesta al Ítem*. Tema V. Baremación de un test. Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado de la pagina web: http://www.uam.es/personal_pdi/psicologia/cadalso/Docencia/Psicometria/Apuntes/tema5TyP_4.pdf

Alsina, Á (2013). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, Nº 7, págs. 4-22.

Alsina, Á. (2009). Matemáticas en la educación primaria. En N. Planas y À. Alsina (2009). *Educación matemática y buenas prácticas*. (pp. 93-144). Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números*, 80, 7-24.

Amir, G., y Williams, J. (1999). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. En J.P. Pontes y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 24-31). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Aspinwall, L., y Tarr, J. E. (2001). Middle school students' understanding of the role sample size plays in experimental probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 229-245.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaría sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97.

Azcárate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 365-402). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Ball, D. L., Hill, H.C, y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), p. 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers` mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Alemania. Disponible en: www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem.

Barbero, M. (2003). Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas. Madrid: UNED.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2007). Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp.25-37). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and mis conceptions about probability? In G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 260-289). Dordrecht: Kluwer.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). *Joint ICMI and IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey: ICMI and IASE.

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* New York: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teacher to teach probability. *Journal of Statistics Education* [en línea], 12 (1). Recuperado el 20 de diciembre de 2012, de www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), Proceedings of ICMI First African Regional Conference. CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., y Contreras, J. M. (2013). Reconocimiento de la aleatoriedad por futuros profesores españoles de educación primaria. *Actas de Simposio de matemáticas y educación matemática. III Congreso internacional de matemáticas asistida por computador* [CD-ROM]. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics,* 32, 181-199.

Batanero, C., Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO*, 44, 7-16.

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education.* (pp. 107-127). New York: Springer.

Batanero, C., y Godino, J. D. (2004). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada; Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), Proceedings of ICMI First African Regional Conference. CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Ortiz, J.J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO*, 44, 7-16.

Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne: AARE & NZARE. Recuperado el 23 de Agosto de 2012, de http://www.aare.edu.au/99pap/beg99082.htm.

Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1997). *Métodos de investigación en Psicopedagogía*. Madrid: McGraw-Hill.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Campanario, J.M. (2001). ¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como este? Una relación de actividades poco convencionales. *Enseñanza de las Ciencias*. 19, 351-364.

Canavos, G.C. 1988. *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. Mc Graw-Hill, México.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed). *Proceedings of the 21st Conference on the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprension de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.

Cañizares, M. J., Ortiz, J. J., Batanero, C., y Serrano, L. (2002). Probabilistic language in Spanish textbooks. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers* (pp.207-211). Cape Town: IASE.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability* (preservice teachers). Unpublished doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.

Chick, H. L., y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. On line: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). Research methods in education. Londres: Routledge.

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Retrieved on 30 September 2011, from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Thompson. Pacific Grow. CA.

Davies, C. M. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development,* 36(3), 779–788.

Ebel, R. L. (1965). *Measuring educational achievement*. Englewood: Prentice-Hall.

English, L. D. (2005). Combinatories and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292–297). Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1988). Conditional probabilities. Insights and dificulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.). The Proceedings of the Second International Conference of Teaching Statistics. University of Victoria.

Falk, R., Falk, R., y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 181-204.

Falk, R., y Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. *Developmental Psychology, 34*(6), 1340-1357.

Fennema, E. y Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact in: D.A. Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (New York: Macmillan Publishing).

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?*. Educational Studies in Mathematics. 15, 1-24.

Fischbein, E., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probability judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 523–549.

Fischbein, E., Pampu, I., y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology*, *40*(3), 261-270.

Fishbein, E., y Schnarch, D. (1996). Intuitions and schemata in probabilistic thinking. En Puig, L. y Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 353-360). Universidad de Valencia.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2): 2 -7.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Glayman, M y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona. Ed. Teide.

Godino, J D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). A semiotic analysis of combinatorial problems and its resolution by university students. *Educational Studies in Mathematics.* 60(1), 3-36.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En, L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNION, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 3325 – 3326).* Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE.

Godino, J. D., Batanero, C., y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Gonzato, M., y Fernández, L. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. En *Actas VI Jornadas de educación matemática región de Murcia* (pp. 25-49). Murcia: Centro de profesores y recursos de Lorca, Mar Menor, Murcia I y Murcia II.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4.2: 1–26.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Reunión de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (pp. 25- 45). Guimaraes (Portugal).

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. (Madrid: Síntesis).

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M.R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27* (2), 221-252.

Goldberg, S. (1966). Probability judgments of preschool children: Task conditions and performance. *Child Development*, 37, 158–167.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza dela probabilidad en futuros profesores de educación primaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema 28 (48), 209-229.*

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, *35*, 75-91.

Graeber, A., y Tirosh, D. (2008). Pedagogical content knowledge. Useful concept or elusive notion. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 1 - Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development, pp. 117–132). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, 2, Teaching Statistics Trust. (pp. 766-783).

Guillén, G; González, E y García, M.A. (2009) Criterios Específicos Para Analizar La Geometría En Libros De Texto Para La Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. *Actas de XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 247-257. Santander, España.

Hacking, I. (1995) *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística*. Barcelona: Gedisa.

Hart, L., Smith, S., Swars, S. y Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 1(3), 26-41.

Hill, H. C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S. G., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105*(1), 11- 30.

Hoemann, H. W., y Ross, B. M. (1975). Children's concepts of chance and probability. In C. Brainerd (Ed.), Children's logical and mathematical cognition: *Progress in cognitive developmental research* (pp. 93–121).

Johnson, R. B., y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14-26.

Jones (Eds.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). New York: Springer.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Mogill, T. A. (1996). Using children's probabilistic thinking to inform instruction. En L. Puig y A. Gutérres (Eds), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp.137-144). Universidad de Valencia.

Jones, G. A.; Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School (Challenges for Teaching and Learning)*, 65-92. New York: Springer.

Kahhenam, P., Slovic, A., y Tversky (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J. y Lipson, A (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 392-414.

Konold. C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von GLASERSFELD (Ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (139-156). Dordrecht: Kluwer.

Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework of teacher knowledge and understanding of probability. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814).

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive Models and Problem spaces in "Purely Random" Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effect du mode de presentation d'un problem aleatoire sur les modeles développés par les élèves. *Bulletin de l' APMEP, 372*, 9-22.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d´une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics* (19), pp. 357-368.

Lee, H. S., y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, (pp. 429-459). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía), Brasil: International Association for Statistics Education.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Millman, J., y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), Educational Measurement (pp. 335-366). London: Macmillan.

Ministerio de Educación (2009). *Ajuste Curricular.* Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2011). *Estándares Orientadores para la Formación Inicial Docente.* Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Boletín oficial del Estado. ORDEN ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria*. Madrid, España.

Mises, R. von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Moivre de, A. (1967). *The doctrine of chances*. New York: Chelsea Publishing (Trabajo original publicado en 1718).

Morales, R. y Ruíz, K. (2013). Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 137-142). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests.* Madrid: Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).New York: Springer-Verlag.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: *The danishkom project* (Proyecto KOM. The national academies: The national academies). Descargado el 25 de octubre 2007, desde http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learnin g_of_mathematics.pdf.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (2), 217-253.

OECD (2010). Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010. Retrieved on 15 September 2012 from http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf

Ortiz J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C., y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2010). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM. CD ROM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P, Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Ortiz, J., Batanero, C., y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa 15* (1), 63-91.

Osterlind, S. J. (1989). *Constructing test items*. Boston: Kluwer.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education* (pp. 151-162). New York: Springer.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., y Castro, W. F (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3195 – 3205). Antalya, Turkey: CERME.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1). *REVEMAT*, 8 (2), 1-49. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p1

Pino-Fan, L., Font, V., y Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137-151). México, D. F. : Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., y Castro, W. F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. In Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.

Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 285-314.

Ponte, J. P. (2008). Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics, 18*(3), 2-11.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 602-625.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (pp. 171-189). New York: Springer.

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? *Elementary School Journal,* 100(4): 331-350.

Rivas, M. y Godino, J.D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere*, 14(48), 189-205.

Rocamora, P., Riquelme, M., Aldunate, V., Falconi, P. y Chala, J. (2013). *Matemática 5º básico*. Galileo.

Rocamora, P., Riquelme, M., Aldunate, V., Falconi, P. y Chala, J. (2013). *Matemática 6º básico*. Galileo.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 1º básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 2º básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 3º básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rodríguez, M. y Carreño, C. (2013). *Matemática 4º básico*. Pearson Educación de Chile Ltda.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005) 'Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi'. *Journal of Mathematics Teacher Education* 8(3) pp. 255-281.

Sáenz, C. (1998) Teaching probability for the conceptual change. *Educational studies in mathematics, 35*(3), 233-254.

Santaló, L. A. (1977). *La educación matemática hoy.* Teide. Barcelona.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, C. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. Proceedings of CERME 4. Disponible en: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/SerradAzcarCarde.pdf

Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teachingand learning* (pp. 465-494). New York: MacMillan.

Shield, M. J. y Dole, S. (2009) *An analysis of middle-years school mathematics textbooks.* In: CoSMEd 2009 Proceedings, 10-12 November, 2009, SEAMEO RECSAM Penang, Malaysia.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher. 15(2): 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 499-511.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: ISI.

Steinbring, H. (1991). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: ISI.

Stewart, W. (2009). *Probability, Markov chains, queues and simulation*, Princeton University Press.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297–324). New York: Springer.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

Sullivan, P., y Wood, T. (2008). The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Tarr, J. E. y Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, (pp. 215-239). Nueva York: Springer

Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, pp. 337-344). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. *Science.185*, 1124-1131.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. Journal of Mathematics Teacher Education 4(4), 305-337.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal, 9*, 60-82.

Yost, P. A., Siegel, A. E., y Andrews, J. M. (1962). Nonverbal probability judgments by young children. *Child Development,* 33, 769–780.

ANEXOS

Anexo I

Carta y pauta para expertos

EVALUACIÓN DE EXPERTO

Instrumento: "Cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidades, en profesores de educación básica"

Estimado evaluador,

A continuación le presentamos nuestra propuesta de instrumento[1] para evaluar el conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidades en profesores de educación básica. Para este propósito, hemos definido las siguientes dimensiones y tipos de ítems:

Dimensión	Tipo de ítem
Conocimiento del contenido: común, especializado y ampliado	Resolución de problemas Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta
Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes	Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta
Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza	Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta
Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares	Casos con preguntas Preguntas de respuesta abierta

El concepto de conocimiento didáctico-matemático que se maneja en este instrumento corresponde al sistema de categorías o componentes del conocimiento del profesor (del contenido matemático y didáctico) propuesto por Godino (2009), de acuerdo al cual el conocimiento del profesor se encuentra compuesto por un conjunto de facetas y niveles para el análisis didáctico, que interactúan entre sí (ver Figura 1), donde cada uno de los elementos presentes puede ser considerado como categorías o componentes del conocimiento matemático y didáctico de los profesores.

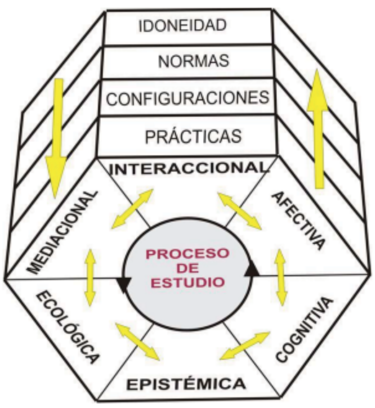


Figura 1: Facetas y niveles del conocimiento del profesor (Godino, 2009, Pág. 21)

Proponiendo a partir de ellas un desglose del conocimiento didáctico-matemático del profesor que se encuentra constituido por las siguientes categorías de conocimientos fundamentales necesarios para que un profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje:

[1] El cuestionario se encuentra compuesto por 10 ítems de respuesta abierta. Para su construcción se tuvieron en cuenta algunos de

a) **Conocimiento del contenido: común, especializado y ampliado:** se fundamenta en la faceta epistémica del conocimiento del profesor, a través del cual se espera indagar en los conocimientos matemáticos correspondientes al contexto institucional en el que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello se elaboran consignas orientadas a identificar, clasificar y evaluar aspectos específicos del conocimiento que se pone en juego para resolver tareas o problemas matemáticos (conocimiento común); del conocimiento especializado del contenido el cual considera las distintas formas de representar (lenguajes) ideas y problemas matemáticos, así como los distintos procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos que permiten alcanzar su solución; y por último el conocimiento ampliado del contenido que pretende evidenciar la relación entre el contenido a enseñar con ideas matemáticas más avanzadas.

b) **Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes:** se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del profesor, por lo que incluye conocimientos relativos a conocimientos personales de los alumnos, errores, dificultades y conflictos presentes en sus aprendizajes y su progresión, además de las actitudes, emociones, creencias y valores vinculados al proceso de estudio y a los objetos matemáticos vinculados a las probabilidades en la educación básica.

c) **Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza:** se fundamenta en las facetas interaccional y mediacional del conocimiento del profesor, por lo que involucra conocimientos relativos a los patrones de interacción entre el profesor y sus alumnos, su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados, además de aspectos vinculados a los conocimientos del profesor en relación a los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

d) **Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares:** tiene sus fundamentos en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, pues considera aspectos del currículo, entorno social, político, económico, etc. que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, las actividades y tareas que se proponen para lograr los objetivos planteados.

I.- Por favor, evalúe el grado de adecuación que tiene cada ítem con la dimensión propuesta de acuerdo a:

- **Grado de correspondencia:** determine si cada ítem en particular pertenece o no a la dimensión, de acuerdo a la definición entregada (refiérase a: pertenece, no pertenece).
- **Formulación:** defina su opinión respecto a la claridad y al lenguaje utilizado en cada ítem (refiérase a: adecuada, no adecuada, a mejorar)
- **Pertinencia:** indique el grado de pertinencia del ítem respecto a la dimensión (refiérase a: pertinente, no pertinente, con dudas)

A) Dimensión: conocimiento del contenido: común, especializado y ampliado

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertinencia
1.- a)			
1.- b)			
1.- c)			
2.- a)			
2.- c)			
3.- a)			
3.- b)			
3.- c)			
4.- b)			
5.-			
6.-			
7.- a)			
8.-			
9.-			
10.-			

B) Dimensión: conocimiento del contenido en relación a los estudiantes

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertinencia
1.- d)			
2.- b)			
4.- a)			
8.-			
9.-			
10.-			

C) Dimensión: conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertinencia
3.- d)			
4.- c)			
7.- c)			
8.-			
9.-			
10.-			

D) Dimensión: conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertinencia
7.- b)			
8.-			
10.-			

II.- Además nos gustaría conocer su opinión sobre si ¿considera o no conveniente el realizar un pilotaje del cuestionario con un grupo de 5 a 6 profesores de educación básica, como parte del proceso de validación de ítems?

III.- Si tiene algún comentario adicional en relación al grado de adecuación que tiene cada ítem con la dimensión propuesta, se agradecería escribir su comentario a continuación.

Comentarios Ítem 1

Comentarios Ítem 2

Comentarios Ítem 3

Comentarios Ítem 4

Comentarios Ítem 5

Comentarios Ítem 6

Comentarios Ítem 7

Comentarios Ítem 8

Comentarios Ítem 9

Comentarios Ítem 10

MUCHAS GRACIAS POR SU TIEMPO Y GENTIL COLABORACIÓN.

Anexo II

Versión Inicial del Cuestionario CDM-Probabilidad

CUESTIONARIO PILOTO PARA PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

DATOS DE IDENTIFICACIÓN

1. Sexo (marque con una X): Femenino ( ) Masculino ( )

2. ¿Cuál es su titulo profesional?
____

____

3. Indique la cantidad de años de experiencia realizando clases de matemáticas en educación básica:_____

4. Indique el tipo de dependencia del establecimiento en el cual actualmente se desempeña como profesor de matemática (marque con una X):
   - Municipal ( )
   - Particular subvencionado ( )
   - Particular pagado ( )

5. ¿En cuál de los siguientes cursos se desempeña actualmente? (marque con una X)
   - Primero Básico ( )
   - Segundo Básico ( )
   - Tercero Básico ( )
   - Cuarto Básico ( )
   - Quinto Básico ( )
   - Sexto Básico ( )

INSTRUCCIONES PARA RESPONDER AL CUESTIONARIO

- Al responder, no debería detenerse más de 2 o 3 minutos por cada problema. Imagine que usted está respondiendo a situaciones reales de aula y seleccione la alternativa más parecida a lo que usted haría o diría en ese momento.
- Recuerde que sus respuestas son confidenciales y voluntarias. Le agradecemos que responda la mayor cantidad de preguntas que le sea posible.

<u>Ítem 1:</u>

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿Qué es más probable que pase?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Luis: es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara

Andrés: es igual de probable que salga cara o sello

Lucia: es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos

Responda:

a) Resuelva el problema

b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?

c) ¿Qué contenidos matemáticos deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?

d) Exponga las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas de estos alumnos, ¿qué estrategia utilizaría para remediar los errores encontrados?

<u>Ítem 2:</u>

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja prefieren hacer la extracción?

Responda:

a) Resuelva el problema

b) ¿Cuál podría ser la respuesta errónea más común entre los alumnos? ¿a qué considera usted que se debe?

c) ¿Qué contenido matemático deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?

d) ¿Qué objetivo cree usted que tiene este problema?

<u>Ítem 3:</u>

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Obteniendo las siguientes respuesta por parte de algunos de sus alumnos:

Carla: tres, porque hay tres tipos de

Karina: para estar segurísimo habrá que sacar seis bolas, porque si hay nueve en total, y hay de tres variedades, sacar bolas de cada variedad hasta que quede una de

Raúl: si se sacaran primero las bolas rojas y verdes, serian siete, pero como son una de cada color, pues ocho.

Antonio: tendrá que cogerlas todas y ahí estará lo más seguro

Responda:

a) Comente la respuestas dadas por estos alumnos y justifique su veracidad o falsedad.

b) ¿Qué respuesta debería aceptar el profesor como correcta? ¿Por qué?

c) ¿Qué conceptos o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?

d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 4:

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar, ¿qué es más probable que suceda?

Frente a lo cual uno de sus alumnos responde:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".

Responda:

a) ¿Qué error está cometiendo éste alumno?

b) ¿Qué conceptos o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema?

c) ¿Qué estrategia utilizaría usted para convencer a este alumno de su error?

Ítem 5:

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

<u>Ítem 6:</u>

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es su opinión sobre esto?

<u>Ítem 7:</u>

Usted ha seleccionado el siguiente problema para que sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces, han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema

b) ¿Qué objetivo cree usted que tiene este problema?

c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría. Justifique su elección.

<u>Ítem 8:</u>

¿Qué contenidos del eje temático de datos y probabilidades considera usted que es importante que sus alumnos de quinto básico dominen, antes de comenzar con la enseñanza de las probabilidades en ese curso?

Ítem 9:

¿Qué ejemplo considera usted que es el más apropiado para lograr que los alumnos comprendan la regla de Laplace?

<u>Ítem 10:</u>

Usted quiere iniciar a sus alumnos de segundo básico en el aprendizaje de las probabilidades. ¿Qué dificultades pueden ocasionar en dicho aprendizaje las ideas previas que pueden tener los alumnos de azar/suerte, azar/casualidad y azar/magias? ¿Qué actividad les propondría para superar tales dificultades?

MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

POR FAVOR INDÍQUENOS LOS COMENTARIOS QUE CONSIDERE NECESARIOS

Anexo III

Consentimiento Informado

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Universitat de Girona

CONSENTIMIENTO INFORMADO

La Pontificia Universidad Católica de Chile, Campus Villarrica, en conjunto con la Universidad de Girona, España llevan a cabo la investigación "Conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad en la educación básica". Esta iniciativa aportará materiales especialmente adecuados para apoyar la preparación para la enseñanza de la probabilidad en profesores de enseñanza básica.

En el marco de esta investigación se aplica un cuestionario sobre los conocimientos didáctico-matemáticos para enseñar probabilidad en los profesores de educación básica. Este cuestionario no tiene ningún efecto sobre los participantes, de quienes no se demanda más que su tiempo y seriedad al responder.

La información así generada no será utilizada con ningún otro fin que no sea el de la investigación que se explicitó. En dicha investigación se resguardará la privacidad de los participantes. Es decir, el equipo de investigación se compromete a no divulgar la información recogida en ninguna otra forma que no sean comunicaciones de índole académica, propias de la investigación, las que en ningún caso contendrán referencias individualizadas a personas e instituciones objetos de estudio.

CONSENTIMIENTO

Yo, ……………………………………………………………………………profesor de educación básica del colegio…………………………………………., acepto participar en el cuestionario sobre los conocimientos didáctico-matemáticos para enseñar probabilidad en los profesores de educación básica, en las condiciones anteriormente descritas.

El profesor identificado ratifica con su firma el consentimiento que otorga:

…………………………………………………

Claudia Vásquez Ortiz, RUT 14.358.828-9, correo electrónico cavasque@uc.cl académica a cargo del proyecto de investigación, suscribe el compromiso de respetar cabalmente las condiciones detalladas.

…………………………………………………

En Villarrica,………………………………….de 2013

(Se firman 2 copias, quedando una en poder de cada firmante y una para el proyecto de investigación)

Departamento de Matemática, Campus Villarrica, Pontificia Universidad Católica de Chile, O'Higgins 501, Villarrica, Chile. Teléfono (45) 2 411830

Anexo IV

Versión Final del Cuestionario CDM-Probabilidad

CUESTIONARIO PARA PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

DATOS GENERALES

6. Sexo (marque con una X): Femenino ( ) Masculino ( )

7. ¿Cuál es su título profesional?

____

____

8. Indique con una X la cantidad de años de experiencia realizando clases de matemáticas en educación básica:

   Menos de 3 ( )
   Entre 3 y 5 ( )
   Entre 5 y 10 ( )
   Más de 10 ( )

9. Indique el tipo de dependencia del establecimiento en el cual actualmente se desempeña como profesor de matemática (marque con una X):

   Municipal ( )
   Particular subvencionado ( )
   Particular pagado ( )

10. ¿En cuál de los siguientes cursos se desempeña actualmente? (marque con una X)

   Primero Básico ( )
   Segundo Básico ( )
   Tercero Básico ( )
   Cuarto Básico ( )
   Quinto Básico ( )
   Sexto Básico ( )
   Séptimo Básico ( )
   Octavo Básico ( )

11. ¿Cuán preparado se siente para enseñar probabilidad? (marque con una X)

   Muy preparado ( )
   Medianamente preparado ( )
   No se siente preparado ( )

12. ¿En sus cursos aborda las unidades referidas a probabilidad? (marque con una X)

   Si ( )
   No ( )

13. ¿En su formación universitaria tuvo cursos de probabilidad? (marque con una X)

    Si ( )
    No ( )

14. ¿En su formación universitaria tuvo cursos de didáctica de la probabilidad? (marque con una X)

    Si ( )
    No ( )

15. ¿Durante los años que lleva trabajando como profesor de matemáticas en educación básica ha realizado algún curso de probabilidad?

    Si ( )
    No ( )

16. ¿Durante los años que lleva trabajando como profesor de matemáticas en educación básica ha realizado algún curso de didáctica de la probabilidad?

    Si ( )
    No ( )

<u>INSTRUCCIONES PARA RESPONDER AL CUESTIONARIO</u>

- Al responder las preguntas que a continuación se presentan, no debería detenerse más de 2 o 3 minutos en cada una de ellas.
- Imagine que usted está respondiendo a situaciones reales de aula, por lo que es necesario que describa y responda de la manera más parecida a lo que usted haría o diría en ese momento.
- Explique brevemente todas sus respuestas.
- Recuerde que sus respuestas son confidenciales y voluntarias.
- Le agradecemos que responda la mayor cantidad de preguntas que le sea posible.
- Utilice lápiz pasta.

<u>Ítem 1:</u>

La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Responda:

e) Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez.

f) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?

g) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

h) Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.

i) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

<u>Ítem 2:</u>

La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Responda:

e) Resuelva el problema.

f) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

g) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.

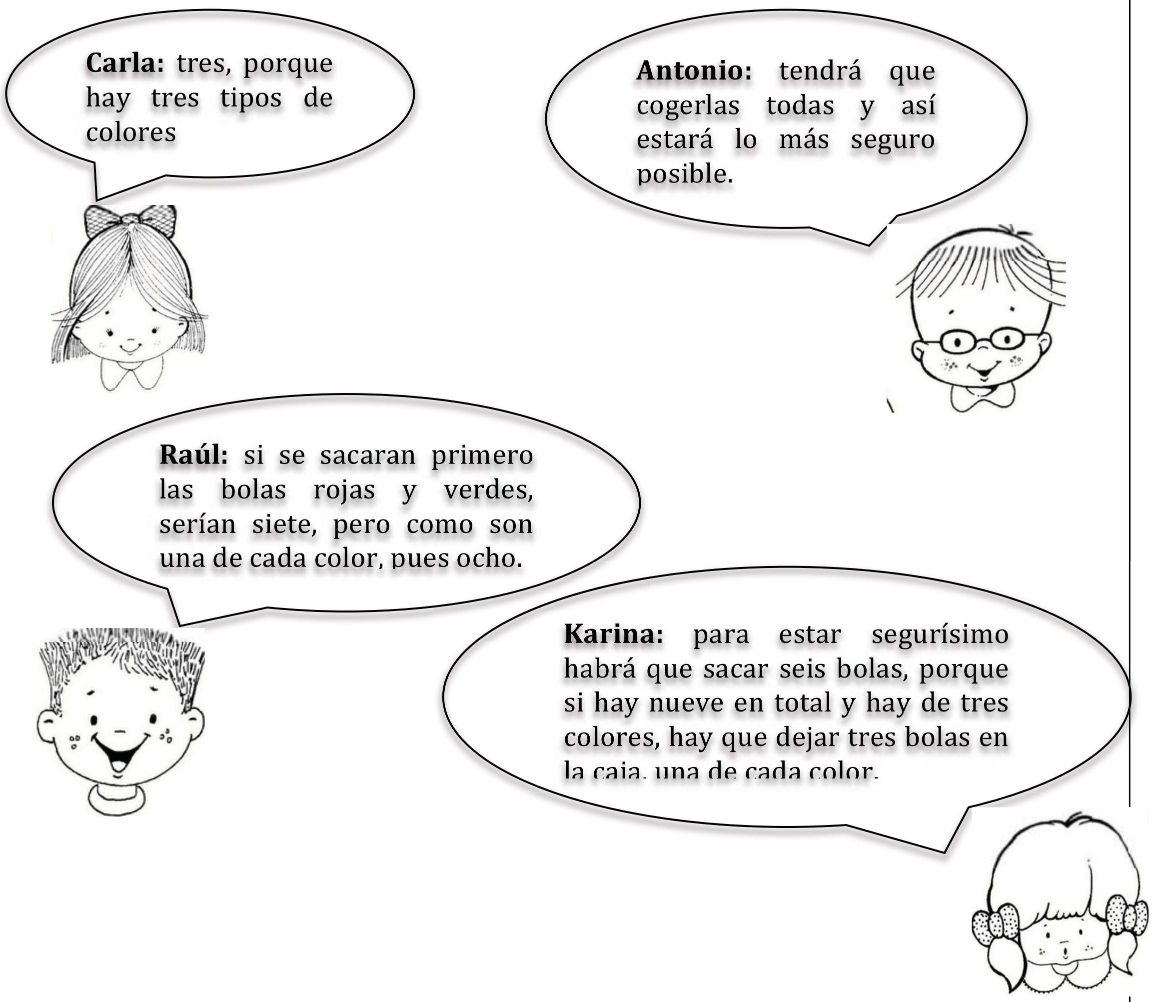
h) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

<u>Ítem 3:</u>

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:



Responda:

e) ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?

f) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

g) ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 4:

Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno de los trozos de papel, sin mirar, y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual".

Responda:

d) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

e) ¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?

f) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.

g) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 5:

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: "*la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima*".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Ítem 6:

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continua. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya.

¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

<u>Ítem 7:</u>

Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

a) Resuelva el problema

b) ¿Qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?

c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.

d) ¿Con qué conceptos más avanzados del currículo escolar, relaciona el contenido involucrado en la resolución de este problema?

MUCHAS GRACIAS POR SU TIEMPO Y GENTIL COLABORACIÓN.

Anexo V

Rúbrica para la Corrección

		RÚBRICA DEL GRADO DE CORRECCIÓN DE LAS RESPUESTAS		
		Respuesta Correcta (2 puntos)	**Respuesta Parcialmente Correcta (1 punto)**	**Respuesta Incorrecta (0 puntos)**
Ítem 1	**a)**	Para el noveno lanzamiento de la moneda, es igualmente probable obtener cara o obtener sello (equiprobabilidad de los sucesos), pues los resultados obtenidos en los distintos lanzamientos son independientes entre sí.	Responde correctamente que para el noveno lanzamiento de la moneda, es igualmente probable obtener cara o obtener sello, pero no reconoce que los sucesos son equiprobables ni la independencia de ensayos repetidos bajo las mismas condiciones.	Ninguna de las anteriores. Manifiesta el sesgo de la recencia positiva o negativa, atribuido a la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982)
	b)	Andrés ha dado con la respuesta correcta, pues ha identificado que la probabilidad de ocurrencia para ambos sucesos es la misma.	Reconoce que Andrés dio con la respuesta correcta, pero no justifica su respuesta. O bien otorga una justificación inadecuada.	Reconoce como correcta(s) la(s) respuesta(s) de Luís y/o Lucía. Manifestando de este modo que se ha dejado influenciar por la información referida a los resultados obtenidos en los lanzamientos anteriores.
	c)	Logra identificar 4 o más conceptos y/o propiedades sobre probabilidad asociados a la resolución de la situación-problemática planteada. Dentro de los contenidos matemáticos que los alumnos deben movilizar para dar respuesta a la situación planteada, se encuentran: experimento aleatorio, espacio muestral, concepto de probabilidad, equiprobabilidad, simetría de la moneda e independencia de sucesos.	Logra identificar 2 o 3 contenidos matemáticos sobre probabilidad que deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema.	Identifica 1 o ningún contenido matemático sobre probabilidad vinculado a la resolución del problema.
	d)	En las respuestas de Luís y Lucía se puede observar una fuerte incidencia de los resultados obtenidos en los 8 lanzamientos previos, lo que les lleva a guiarse por la intuición y responder de manera equivocada.	Describe posibles dificultades, pertinentes, para Luís o Lucía.	No lora identificar posibles errores o dificultades.

	e)	Una estrategia puede ser, realizar el experimento de lanzar una moneda, repetidamente, y registrar en una tabla qué se observa tras caer. Una manera de medir qué tan probable es obtener cara o sello es observar el resultado de muchos lanzamientos en los que se ha realizado el experimento de manera independiente y manteniendo cada vez las misma condiciones. Luego, registrar los resultados de los lanzamientos en una tabla de frecuencias y observar a partir de ésta el comportamiento de las frecuencias relativas. Esto facilitaría que el alumno comprenda que es igualmente probable obtener cara o obtener sello en el noveno lanzamiento. Otra estrategia podría ser simular el experimento en un *software* como Excel y graficar las frecuencias relativas para diferentes números de lanzamientos de una monedas, observando que el valor al que se acerca cada vez más a 0.5, que es el valor, que por simetría de la moneda, se esperaría obtener en una moneda honesta (no cargada), mostrando de este modo que la probabilidad de obtener sello es la misma que de obtener cara.	Menciona estrategias adecuadas, pero no las explica. O bien menciona estrategias pero a un nivel muy general.	Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema. O no logra mencionar ninguna estrategia.

Ítem 2	**a)**	Para determinar de cuál caja es preferible realizar la extracción, es necesario aplicar la regla de Laplace o por medio de un razonamiento de tipo proporcional. Por lo que la caja A es la que da mayor probabilidad de obtener una bola blanca. $P_{CAJA\,A}(obtener\,bola\ blanca)=\frac{3}{6}$ $P_{CAJA\,B}(obtener\,bola\ blanca)=\frac{3}{8}$ Luego la caja A otorga mayor probabilidad, dado que $\frac{3}{6}>\frac{3}{8}$.	Determina que se debe realizar la extracción desde la caja A, pero no argumenta su respuesta o otorga un argumento inadecuado.	Otras respuestas o argumentaciones erróneas.
	b)	Identifica 4 o más conceptos y/o propiedades sobre probabilidad asociados a la resolución de la situación problemática planteada. Para dar respuesta a la situación planteada, los alumnos deben poner en juego la regla de Laplace, comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables, además de los conceptos de experimento y suceso aleatorio y posibilidad de ocurrencia de un evento.	Logra identificar 2 o 3 contenidos matemáticos sobre probabilidad que deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema.	Reconoce 1 o ningún contenido matemático sobre probabilidad vinculado a la resolución del problema.
	c)	Identifica posibles errores o dificultades que los alumnos podrían tener para resolver el problema, se encuentran relacionadas con un razonamiento proporcional incorrecto, que les lleva a, por ejemplo: comparar el número de casos posibles, comparar	Solo menciona a nivel muy general que los errores y dificultades se pueden relacionar con una inadecuada comprensión y manejo de los conceptos y/o propiedades sobre probabilidad.	Otras respuestas y argumentaciones inadecuadas.

		el número de casos favorables, comparar el número de casos desfavorables. O bien, podrían pensar que en ambas cajas hay la misma posibilidad de extraer una bola blanca puesto que en ambas hay la misma cantidad de bolas blancas (casos favorables). Otro posible error o dificultad podría estar en la comparación de probabilidades.		
	d)	Una posible estrategia para ayudar a los alumnos a superar las dificultades a las cuales se pueden ver enfrentados para al resolver este tipo de situaciones, consiste en desarrollar la situación por medio de situaciones experimentales concretas, a través de las cuales puedan desarrollar y aplicar un razonamiento proporcional adecuado que les permita mejorar sus estrategias.	Menciona estrategias adecuadas, pero no las explica.	Ninguna de las anteriores. Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema.
Ítem 3	**a)**	Las respuesta correcta es la de Raúl, 8 bolas dado que nos preguntan por el número de bolas que hay que extraer para estar seguros de que hay una de cada color. Pues puede ocurrir, por ejemplo, que se extraigan primeramente las cuatro rojas, una a continuación de la otra, luego las 3 verdes también de manera sucesiva y por último una blanca.	Reconoce la respuesta de Raúl como la correcta, pero no argumenta su respuesta, o da un argumento inadecuado	Identifica como correcta la respuesta de Carla o Antonio o Karina, a partir de argumentos inadecuados.

	b)	Para responder de manera correcta al problema los alumnos deben movilizar su conocimiento y comprensión de la noción de espacio muestral y suceso seguro vinculado a nociones de combinatoria elemental, en que se puede considerar al experimento como experimentos sucesivos dependientes pues al realizar las extracciones cambia la composición de la caja. Señala al menos dos de estos conceptos.	Señala por lo menos un concepto y/o propiedad matemática que deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema.	Ninguna de las anteriores.
	c)	Mostrar por medio de situaciones experimentales concretas, experimentos similares al planteado en el cual se pueda observar si se presenta de manera sistemática la tendencia a intercambiar el espacio muestral implícito de tres sucesos no equiprobables {r, v, b} por un espacio muestral equiprobable {r, r, r, r, v, v, v, b, b}. Además de mostrar situaciones donde se evidencia la diferencia entre las ideas de seguro y posible. Esto, dado que la mayoría de los errores se deben a confusión de los concepto involucrados en la resolución del problema. Como es el caso de Carla quien responde que hay que sacar tres bolas, pues confunde la noción de suceso seguro con el espacio muestral. Mientras que Antonio y Karina presentan errores en su razonamiento combinatorio.	Menciona estrategias adecuadas, pero no las explica.	Ninguna de las anteriores. Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema.

Ítem 4	**a)**	La respuesta del alumno es incorrecta, puesto que hay mayor número de niñas por lo que es más probable que salga niña. Quizás el error en su respuesta se deba a una confusión entre las nociones de aleatoriedad y equiprobabilidad, lo que lleva a establecer una asociación intuitiva que conduciéndole a pensar que finalmente es la suerte quien decide (dado que el espacio muestral se encuentra conformado por dos posibles valores: niños y niñas) aún cuando haya más niñas que niños.	Reconoce que la respuesta del alumno es incorrecta, pero no explica el posible razonamiento incorrecto que ha llevado al alumno a responder de dicha manera.	Considera que la respuesta dada por el alumno es correcta.
	b)	Identifica 4 o más conceptos y/o propiedades sobre probabilidad asociadas a la resolución de la situación problemática planteada. Los conceptos y/o propiedades que los alumnos deben poner en juego para responder adecuadamente a la pregunta planteada son: noción de aleatoriedad y equiprobabilidad, cálculo de probabilidades de sucesos no equiprobables y comparación de probabilidades.	Señala 2 o 3 conceptos y/o propiedades matemáticas sobre probabilidad que deben usar los alumnos para dar una solución correcta a este problema.	Reconoce 1 o ningún contenido matemático sobre probabilidad vinculado a la resolución del problema.
	c)	Dentro de los posibles errores o dificultades que pueden presentar los alumnos, está el realizar una generalización incorrecta de la regla de Laplace a partir del espacio muestral y pensar que hay igual probabilidad de elegir el nombre de una niña o niño. Otro error sería el	Identifica errores y dificultades muy generales.	Otras respuestas y argumentos inadecuados

		interpretar la pregunta como obtener la probabilidad que tiene cada alumno de ser elegido, lo que vinculado a una comprensión errónea del espacio muestral del experimento llevaría a pensar en la probabilidad que tiene cada alumno de ser escogido. Otra posible dificultad podría encontrarse en realizar la comparación de las probabilidades absolutas de escoger el nombre de un niño o niña.		
	d)	El desarrollo de problemas similares que permitan diferenciar entre las nociones de aleatoriedad y equiprobabilidad podría ser una estrategia adecuada para ayudar a los alumnos a comprender de mejor manera el problema y superar sus errores o dificultades.	Menciona estrategias adecuadas, pero no las explica.	Ninguna de las anteriores. Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema.
Ítem 5		El razonamiento de Pedro es incorrecto. Pues, si bien la lotería es un juego basado en la suerte, no existe relación entre las jugadas, por lo que la probabilidad de ganar en alguna partida próxima es independiente de los resultados obtenidos en los sorteos anteriores.	Reconoce que el razonamiento de Pedro es incorrecto pero no explica por qué, o da un argumento inadecuado	Considera correcto el razonamiento de Pedro.
ítem 6		La respuesta del alumno es incorrecta. Dado que ambas tienen la misma proporción de bolas blancas y negras, por lo que la probabilidad de obtener una bola blanca es la misma en las dos cajas (esto se puede establecer por	Reconoce que la respuesta del alumno es incorrecta, pero no explica por qué. O bien otorga un argumento inadecuado.	Considera correcta la respuesta del alumno.

		medio de la comparación de fracciones). Por lo tanto, el juego es un juego justo.		
ítem 7	**a)**	En el siguiente lanzamiento del dado, es igualmente probable obtener cualquiera de los elementos que conforman el espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6}, pues los resultados obtenidos en los distintos lanzamientos son independientes entre sí.	Responde correctamente que para el próximo lanzamiento del dado, es igualmente probable obtener cualquiera de los elementos que conforman el espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6}, pero no explica a qué se debe esto. O bien lo explica inadecuadamente.	Responde dejándose llevar por la intuición a partir de los resultados dados de lanzamientos anteriores.
	b)	Este problema tiene por objetivo evidenciar la independencia de sucesos en el lanzamiento de un dado honesto.	Reconoce que el objetivo se encuentra vinculado con los posibles resultados al lanzar un dado, pero no identifica la independencia de sucesos como parte del objetivo.	Ninguna de las anteriores.
	c)	Una estrategia puede ser, realizar el experimento de lanzar un dado, repetidamente, y registrar en una tabla qué se observa tras caer. Una manera de medir qué tan probable es obtener {1, 2, 3, 4, 5, 6} es observar el resultado de muchos lanzamientos en los que se ha realizado el experimento de manera independiente y manteniendo cada vez las misma condiciones. Luego, registrar los resultados de los lanzamientos en una tabla de frecuencias y observar a partir de ésta el comportamiento de las frecuencias relativas. Esto facilitaría que el alumno comprenda que es igualmente probable obtener {1, 2, 3, 4, 5, 6} en el	Menciona estrategias adecuadas, pero no las explica.	Ninguna de las anteriores. Menciona estrategias poco adecuadas para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema.

		siguiente lanzamiento. Otra estrategia podría ser simular el experimento en un software como Excel y graficar las frecuencias relativas para diferentes números de lanzamientos de un dado, observando que el valor al que se acerca cada vez más a 1/6, que es el valor, que por simetría del dado, se esperaría obtener.		
	d)	Identifica la independencia de sucesos y la equiprobabilidad y argumenta su importancia para la posterior formalización de la regla de Laplace.	Solo identifica la regla de Laplace pero no argumenta cómo ésta se vincula con el problema.	No logra realizar conexiones con otros contenidos más avanzados.