

Análisis de trayectorias didácticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: superando posiciones objetivistas y constructivistas extremas¹

Juan D. Godino¹, Hernán Rivas², María Burgos¹ y Miguel R. Wilhelmi³

¹Universidad de Granada; ²Pontificia Universidad Católica de Chile; ³Universidad Pública de Navarra

Resumen

Actualmente existe un consenso en la enseñanza de las matemáticas que favorece los modelos instructivos constructivistas, que se basan en la indagación del conocimiento por parte de los alumnos. Sin embargo, existen diferentes opiniones que consideran que los modelos objetivistas, basados en la transmisión del conocimiento (enseñanza directa o explícita) son más eficaces en la enseñanza de las disciplinas científicas. En este artículo se analiza un proceso de instrucción sobre probabilidad elemental dirigido a futuros profesores de educación primaria, que fue diseñado bajo principios constructivistas y se basa en proyectos de análisis de datos. Un análisis sistemático del proceso de instrucción revela que la optimización del aprendizaje implica la implementación de momentos frecuentes que requieren la transmisión explícita de conocimientos por parte del profesor. Este análisis se basa en algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, que permiten identificar hechos didácticos significativos que sustentan un modelo instruccional mixto. Se concluye la relevancia para la educación matemática de contemplar el uso de modelos instruccionales mixtos que articulen enfoques constructivistas y objetivistas para promover el aprendizaje matemático.

Palabras clave: instrucción matemática, modelos didácticos, enfoque ontosemiótico, nociones probabilísticas, formación de profesores

Analysis of didactical trajectories in teaching and learning mathematics: overcoming extreme objectivist and constructivist positions

Abstract

There is currently a consensus in mathematics education that favors constructivist instructional models, which are based on the inquiry of knowledge by students. There are, however, different views that consider objectivist models, based on knowledge transmission (direct or explicit teaching) more effective in the teaching of scientific disciplines. In this article we analyze an instructional process on elementary probability directed to prospective primary education teachers, which was designed under constructivist principles and is based on data analysis projects. A systematic analysis of the study process reveals that the optimization of the learning process involves implementing frequent moments that require explicit transmission of knowledge by the teacher. This analysis is based on some theoretical tools from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction, which allow identifying significant didactical facts that support a mixed instructional model. The relevance for mathematics education to contemplate

¹ Godino, J. D., Rivas, H., María Burgos y Wilhelmi, M. R. (2019). Análisis de trayectorias didácticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: superando posiciones objetivistas y constructivistas extremas. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14 (1), 147-161. <https://doi.org/10.12973/iejme/3983>

the use of mixed instructional models that articulate constructivists and objectivist approaches to promote mathematical learning is conclude.

Keywords: mathematical instruction, didactical models, onto-semiotic approach, probabilistic notions, teachers' training

1. Introducción

El aprendizaje en general, y en particular el aprendizaje de las matemáticas, depende de múltiples factores. La selección de situaciones-problema que contextualicen y den sentido a los contenidos curriculares, los modos de interacción, así como los recursos utilizados son factores determinantes de las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Esta complejidad explica que existan diversas teorías instruccionales apoyadas en supuestos epistemológicos, psicológicos y pedagógicos diferentes.

En el campo de la Didáctica General y para Didácticas específicas se han desarrollado una variedad de modelos y teorías de diseño educativo “que ofrecen una guía explícita sobre la mejor forma de ayudar a que la gente aprenda y se desarrolle.” (Reigeluth, 2000, p. 15). Estas teorías están dirigidas a la práctica y describen métodos educativos y las situaciones en las que dichos métodos deberían utilizarse.

Godino, Batanero, Cañadas y Contreras (2015) hacen una síntesis de modelos instruccionales en educación matemática en los cuales se privilegia la indagación y construcción del conocimiento por los propios estudiantes, y de otros que atribuyen un papel predominante a la transmisión de conocimientos. Asimismo, argumentan la necesidad de implementar un modelo instruccional mixto que articule la construcción/ indagación con la transmisión de conocimientos, para lograr una instrucción matemática que optimice localmente los recursos disponibles y maximice los aprendizajes potenciales en un determinado contexto. Estos autores apoyan un modelo mixto de instrucción matemática basándose en razones de índole cognitiva (siguiendo las conclusiones de Sweller, Kirschner, & Clark, 2007) y ontosemiótica, asumiendo los presupuestos del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero, & Font, 2007; Font, Godino, & Gallardo, 2013).

En este artículo apoyamos la tesis según la cual un modelo instruccional mixto favorece la adquisición de conocimientos matemáticos y la gestión por el docente de estos conocimientos emergentes. Así, se describe y analiza el funcionamiento de un proceso de estudio de nociones probabilísticas elementales por un grupo de futuros profesores de Educación Primaria. Consideramos que las teorías generales del aprendizaje humano deben ser adaptadas según los tipos de conocimientos que se tratan de aprender. “Pensamos que la cuestión crítica que los diseñadores de instrucción deben responder no es ‘¿Cuál es la mejor teoría?’ sino ‘¿Qué teoría es la más efectiva para favorecer el dominio de tareas específicas por aprendices específicos?’” (Ertmer and Newby, 1993, p. 61). En particular, ¿qué paradigma es más efectivo el objetivismo o el constructivismo?

"El paradigma objetivista se basa en la suposición de que existe un mundo real y que el propósito de la educación es trazar las entidades de ese mundo en la mente del alumno. El paradigma constructivista se basa en la idea de que la realidad se construye durante la interacción con el entorno y los compañeros y que el conocimiento es tanto individual como comunitario [...] Los radicales de cada campo argumentan que es imposible mezclar los dos paradigmas [...] Sin embargo, los paradigmas dominantes, tanto en las ciencias físicas como en las sociales, [...] tienden a coexistir y se utilizan siempre que son apropiados" (Vrasidas, 2000, 358-359).

En lo que sigue, en primer lugar, se presenta una síntesis de los antecedentes del problema de investigación planteado haciendo referencia a distintos autores de ambas posiciones. Seguidamente se describen algunas nociones teóricas del EOS, que son el fundamento de nuestro análisis y finalmente se detalla el diseño de un proceso de instrucción en el que se estudian nociones probabilísticas elementales con maestros en formación inicial; proceso que se ha realizado de acuerdo a principios constructivistas de enseñanza basada en proyectos. Seguidamente se analiza la trayectoria didáctica implementada, identificando hechos didácticos significativos que condicionan los aprendizajes logrados. En las siguientes secciones se presenta la síntesis de la trayectoria didáctica implementada con un grupo de estudiantes. Finalmente, se discute las implicaciones que los resultados aportan para analizar la tensión existente entre los momentos de indagación y transmisión en el estudio de las matemáticas y la conveniencia de adoptar un modelo mixto de instrucción para incrementar la idoneidad didáctica del proceso.

2. Antecedentes

El debate entre el modelo de escuela que transmite conocimientos y la escuela en la que se construye conocimientos parece inclinarse actualmente a favor del segundo. “El marco de aprendizaje constructivista es un fundamento para la matemática de la reforma actual en los grados K-12. Muchos futuros profesores a lo largo de los Estados Unidos están siendo formados en que esta es la manera en la que los estudiantes aprenden mejor” (Andrew, 2007, p. 157). Esta preferencia se puede observar en las orientaciones curriculares de diversos países, que adoptan marcos teóricos de tipo constructivista o socio-constructiva.

Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de sus aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso. Cuando son desafiados con tareas elegidas de manera apropiada, los estudiantes adquieren confianza en su habilidad para abordar problemas difíciles, desean resolver las cosas por sí mismos, muestran flexibilidad al explorar ideas matemáticas e intentar vías de solución alternativas, y disposición para perseverar (NCTM, 2000, p. 20).

La familia de teorías instruccionales denominadas “Inquiry-Based Education” (IBE), “Inquiry-Based Learning” (IBL), “Problem-Based Learning” (PBL), postulan el aprendizaje basado en la indagación con poca guía por parte del profesor (Artigue & Blomhøj, 2013). Las distintas variedades de constructivismo comparten, entre otros, los supuestos de que el aprendizaje es un proceso activo, que el conocimiento es construido en lugar de innato o pasivamente absorbido y que para lograr un aprendizaje efectivo es necesario el planteamiento a los estudiantes de problemas significativos, abiertos y desafiantes (Ernest, 1994; Fox, 2001).

Posturas contrapuesta, como es el caso de Mayer (2004), Kirschner, Sweller & Clark (2006) y Sweller, Kirschner & Clark (2007) remiten a una extensa gama de investigaciones que concluyen sobre la mayor efectividad de los modelos instruccionales en los cuales se atribuye al profesor, y a la transmisión de conocimientos, un papel relevante.

No hay ninguna razón teórica para suponer o evidencia empírica que apoye la idea de que los procedimientos constructivistas de enseñanza basados en la manera en que los humanos adquieren información biológicamente primaria serán efectivos para adquirir la información biológicamente secundaria requerida por los ciudadanos de una sociedad

intelectualmente avanzada. Esa información requiere instrucción directa y explícita (Sweller, Kirschner and Clark, 2007, p. 121).

Los autores citados afirman que la investigación empírica del último medio siglo sobre este problema proporciona una abrumadora y clara evidencia de que una mínima guía durante la instrucción es significativamente menos efectiva y eficiente que una guía específicamente diseñada para apoyar el procesamiento cognitivo necesario para el aprendizaje. Resultados similares se reflejan en el meta-análisis realizado por Alfieri, Brooks, Aldrich & Tenenbaun (2011). En una línea similar, Radford afirma: "De hecho, no parece razonable esperar que el niño (trabajando solo o en grupos colaborativos) sea capaz de reconstruir por sí mismo las complejas teorías que aparecen en el currículo" (Radford, 2012, p.103).

El problema planteado sobre los modelos instruccionales indagatorios y transmisivos se puede relacionar con el debate entre *constructivismo* y *objetivismo* (Jonassen, 1991), así como con los modelos de enseñanza centrados en el aprendiz o en el profesor, respectivamente (Stephan, 2014). Para el *objetivismo*, en particular en su versión conductista, el conocimiento es públicamente observable y el aprendizaje consiste en la adquisición de ese conocimiento mediante la interacción entre estímulos y respuestas. Con frecuencia, la forma de condicionamiento usado para lograr conductas verbales deseables es mediante la instrucción directa o una pedagogía basada en lecciones (Boghossian, 2006).

En la tabla 1 se resumen los principales rasgos de las perspectivas objetivistas y constructivistas que consideramos en este trabajo como extremas cuando son aplicadas en el diseño instruccional como alternativas ideales puras. Con otras palabras, la tabla 1 resume características de perspectivas objetivistas y constructivistas radicales. Estas características están agrupadas en tres dimensiones:

- *Epistémica*: naturaleza del conocimiento objeto de instrucción.
- *Cognitiva*: aprendizaje de los conocimientos, destrezas y disposiciones.
- *Instruccional*: medios y modos de interacción.

Estos rasgos han sido elaborados a partir de los trabajos de diversos autores (Jonassen, 1991; Ertmer and Newby, 1993; Ernest, 1994; Murphy, 1997; Boghossian, 2006; Andrew, 2007).

El objetivismo y el constructivismo son dos extremos que apenas se proponen como métodos aislados en la enseñanza. Las investigaciones tratan de superar la tensión dualista entre estos dos extremos del constructivismo y el objetivismo, al abogar por un tipo de instrucción mixta. Por ejemplo, Ku, Ho, Hau y Lai (2014) a lo largo de un proceso de enseñanza del pensamiento crítico, realizaron una intervención instruccional con metodología cuantitativa y compararon tres modos de instrucción: a) la instrucción directa, b) la enseñanza basada en la indagación, y c) una instrucción mixta que combina aspectos de estos dos métodos anteriores. Sus conclusiones destacan los beneficios de adoptar más de un enfoque instructivo para enseñar el pensamiento crítico. "La enseñanza basada en la indagación y la instrucción directa no deberían ser excluyentes en las aulas. La investigación futura debería orientarse hacia la mejor manera de unir ambos enfoques para maximizar sus beneficios en el aprendizaje de los alumnos" (p. 263). Los autores citados también creen que los profesores no deben subestimar los beneficios de la instrucción directa para estimular la calidad del pensamiento de los alumnos. Lobato, Clarke y Ellis (2005) también analizan cómo la introducción directa de nueva información e ideas puede articularse con los postulados constructivistas.

Tabla 1. Rasgos del objetivismo y constructivismo como fundamentos de la instrucción

Dimensiones	Objetivismo	Constructivismo
<i>Epistémica</i> (Naturaleza del conocimiento objeto de instrucción)	<ul style="list-style-type: none"> - El conocimiento tiene una existencia externa al sujeto. - La estructura del conocimiento viene determinada por entidades, propiedades y relaciones. - El significado corresponde a entidades y categorías del mundo, independiente de la comprensión de cualquier organismo. - Los símbolos representan la realidad. 	<ul style="list-style-type: none"> - El conocimiento depende de la actividad mental del sujeto. - La estructura del conocimiento depende de las experiencias e interpretaciones personales. - El significado no está basado en una correspondencia con el mundo; depende de la comprensión personal. - Los símbolos son herramientas para construir la realidad.
<i>Cognitiva</i> (Aprendizaje de los conocimientos, destrezas y disposiciones)	<ul style="list-style-type: none"> - La mente es un procesador de símbolos y refleja la realidad. - El pensamiento se basa en la acumulación estructurada, reconocible y transmisible de conocimientos objetivos. - Los conocimientos previos de los estudiantes y las respuestas que proporcionan durante el proceso son aceptadas si concuerdan con el conocimiento objetivo. - La reflexión por parte de los estudiantes se considera irrelevante e innecesaria. 	<ul style="list-style-type: none"> - La mente es un constructor de símbolos y un sistema conceptual que construye una realidad. - El pensamiento se basa en la percepción y crece a partir de la experiencia física, corporal y social. - Los conocimientos previos de los estudiantes y las respuestas que proporcionan durante el proceso condicionan la instrucción, que debe ser adaptada a los marcos conceptuales de los estudiantes. - La reflexión y exploración por parte de los estudiantes es el motor de la resolución de problemas y de la indagación sobre situaciones planteadas.
<i>Instruccional</i> (Medios y modos de interacción)	<ul style="list-style-type: none"> - El profesor es finalmente la fuente del conocimiento objeto de enseñanza. - La exploración del estudiante no se considera necesaria y, por lo tanto, no se estimula. - Las interacciones entre estudiantes no son necesarias, porque el aprendizaje es un acto individual. - Se enfatiza la reproducción del conocimiento objetivo culturalmente aceptado. - Los errores se usan como ocasión para reforzar la conducta. 	<ul style="list-style-type: none"> - El profesor actúa como coach, dirigiendo los conocimientos emergentes en contextos cooperativos. - La exploración del estudiante se considera imprescindible y, por lo tanto, se estimula. - Se promueven las interacciones entre los estudiantes dentro y fuera de la clase, porque el aprendizaje es un acto social. - Se enfatiza la construcción del conocimiento mediante la resolución de tareas en entornos contextualizados. - Los estudiantes asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje.

3. Marco teórico

Nuestro análisis está basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013), donde se han desarrollado herramientas teóricas que permiten describir y comprender la dinámica de los procesos de instrucción matemática, y pueden apoyar una teoría de diseño educativo del tipo mixto mencionado. Usaremos en este trabajo las nociones de configuración didáctica, trayectoria didáctica, idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, 2011), y hecho didáctico significativo (HDS) (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014), que resumimos a continuación.

Configuración didáctica

Una *configuración didáctica* es cualquier segmento de actividad matemática en un proceso de enseñanza y aprendizaje, que queda comprendido entre el inicio y fin de una tarea (situación – problema). Así, cada segmento incluye tanto las acciones de los estudiantes y del profesor como los medios usados para abordar la tarea. La secuencia de configuraciones didácticas constituye una *trayectoria didáctica*. La trayectoria didáctica incluye como uno de sus componentes a la “trayectoria hipotética de aprendizaje” (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004), ya que se tiene en cuenta no solo los objetivos, tareas instruccionales e hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, sino también los roles docentes y discentes y los medios instruccionales empleados.

La tarea que delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtarefas cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración. Además, tanto las configuraciones como las subconfiguraciones didácticas pueden ser descritas y analizadas según configuraciones parciales que hacen referencia a las dimensiones epistémica, instruccional y cognitivo-afectiva.

- a) *Configuración epistémica*: sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea.
- b) *Configuración instruccional*: sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes.
- c) *Configuración cognitiva - afectiva*: sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan.

La figura 1 resume los componentes y dinámica interna de las configuraciones didácticas, las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y los principales procesos matemáticos ligados a la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011; Font, Godino y Gallardo, 2013). Dicha modelización, tiene en cuenta la complejidad de las relaciones que se establecen en el seno de cualquier configuración didáctica, no reducible a momentos indagatorios o de transmisión de conocimientos.

En la figura 1, con la flecha inferior, del aprendizaje a la enseñanza, se quiere señalar que las relaciones no son lineales, sino cíclicas. En un momento de indagación, por ejemplo, el sujeto discente interactúa con la configuración epistémica sin intervención del docente (o con una influencia menor). Esta interacción condiciona las intervenciones docentes, que deben estar entonces previstas en la configuración instruccional, quizás no totalmente en su contenido, pero sí en su naturaleza, necesidad y utilidad. Esto, evidentemente, no es privativo de los momentos indagatorios. La trayectoria cognitiva produce ejemplos, significados, argumentos, etc., que condicionan el proceso de estudio y, en consecuencia, las configuraciones epistémica e instruccional, posibilitando o comprometiendo —en todo caso, condicionando—, el término del proyecto educativo previsto.

Hechos didácticos significativos

El análisis detallado de un proceso de estudio matemático, que permita revelar la dialéctica y sinergia entre los distintos componentes del sistema didáctico, requiere dividirlo en unidades, siendo útil para ello la noción de configuración y subconfiguración. A su vez la atención se puede centrar en determinados hechos didácticos significativos definidos por Godino et al. (2014):

“Un hecho didáctico es significativo si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del estudiante, o bien desde un punto de vista institucional externo al sistema didáctico, es decir, del sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional” (Godino, et al., 2014, p. 7).

Estos HDS son pues contextuales, es decir, un mismo hecho didáctico puede ser significativo en un contexto y no serlo en otro. Además, un HDS puede ser significativo en un contexto porque genera condiciones idóneas para la adquisición de un conocimiento o, por el contrario, por cercenar la vía de acceso prevista. Son pues necesarias herramientas adicionales que permitan la fundamentación de los HDS, para su identificación e interpretación. La noción de idoneidad didáctica (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2013), sus facetas y componentes, ayudan a dar significación a un hecho didáctico.

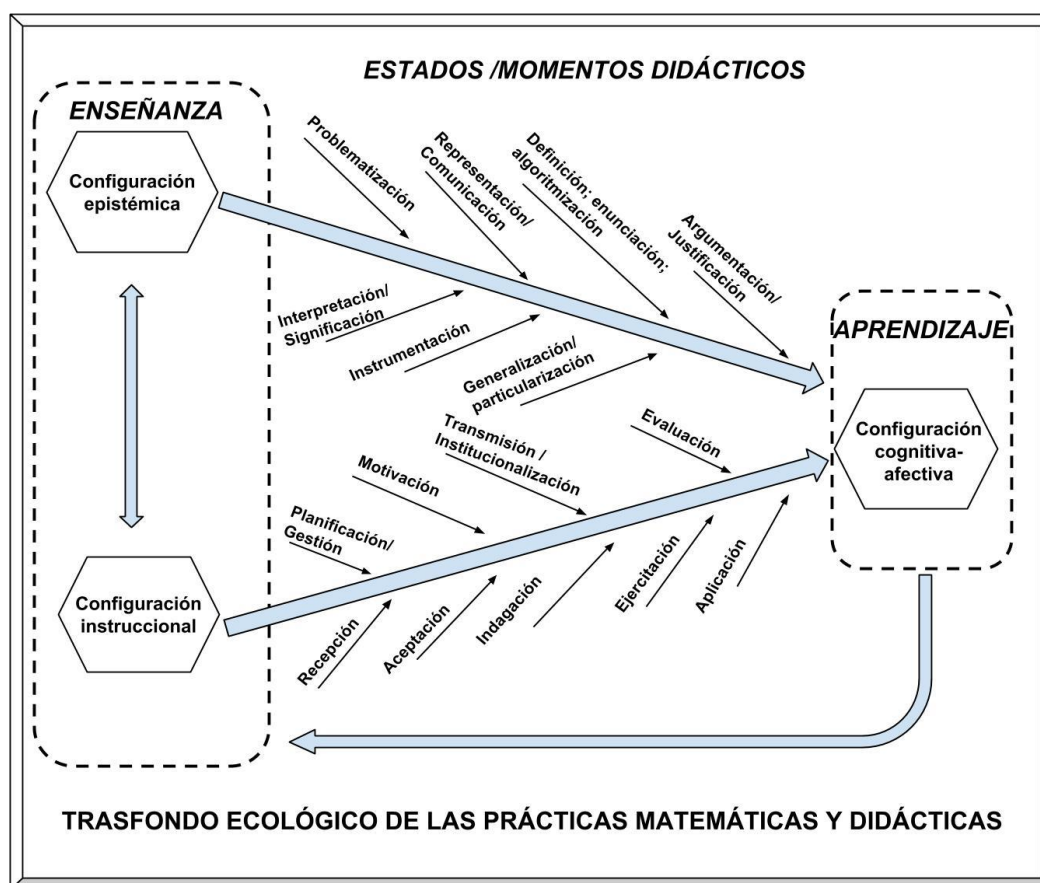


Figura 1. Componentes y dinámica interna de una configuración didáctica (Godino et al. 2015, p. 2646)

Idoneidad didáctica

La idoneidad didáctica se define como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como *óptimo* o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). Esto supone la

articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, Batanero y Font, 2007).

La noción de idoneidad didáctica y sus seis facetas proporcionan criterios para delimitar la significatividad de los hechos didácticos que acontecen en los procesos de estudio matemáticos. Un hecho didáctico se considerará significativo si aporta información empírica relevante sobre el desarrollo del proceso que se corresponda con alguno de los criterios de idoneidad previamente establecidos en alguna de las facetas.

En este trabajo estamos interesados en identificar los rasgos del proceso que corresponden a un modelo didáctico de tipo constructivista u objetivista, resaltando la sinergia que se puede establecer entre los mismos. No obstante, sostenemos la hipótesis según la cual la adecuada articulación entre los momentos indagativos y transmisivos es un factor clave para lograr una alta idoneidad didáctica del proceso y, por lo tanto, es posible emitir algunos juicios sobre la idoneidad global del proceso instruccional.

4. Método

4.1. Contexto y muestra participante

El proceso formativo sobre el contenido de estadística descriptiva y probabilidad se aplicó a un grupo de 58 estudiantes en un contexto de formación inicial de docentes en Educación Primaria, donde se afrontan las bases matemáticas para esta etapa educativa. Esta formación incluye un tema sobre “Introducción a la estadística y probabilidad”, que se desarrolla en tres semanas, a razón de 3 horas de trabajo semanales en sesión de grupo completo y una sesión semanal de 1,5 horas de trabajos prácticos con el grupo clase dividido en tres subgrupos. El estudio se organizó en base al desarrollo de tres proyectos de análisis de datos, enfoque de enseñanza que es novedoso para la mayoría de los estudiantes y conlleva una metodología que los futuros maestros pueden trasladar a su desempeño profesional en Educación Primaria.

Describimos brevemente uno de los proyectos orientado a contextualizar el estudio de nociones probabilísticas y cuya implementación proporciona hechos didácticos significativos que usaremos de apoyo para la reflexión teórica acerca de la dialéctica entre los momentos indagatorios y transmisivos en los procesos de instrucción matemática.

4.2. Proyecto “Lanzamiento de dos dados”

El proyecto “Lanzamiento de dos dados” tiene como objetivo el estudio de las nociones probabilísticas elementales: experimento aleatorio, espacio muestral, probabilidad, regla de Laplace y ley de los grandes números. Las cuestiones propuestas a los estudiantes se presentan en la figura 2. El proceso de estudio ligado al proyecto “Lanzamiento de dos dados” fue implementado en dos sesiones de clase (correspondiente a tres horas cronológicas).

El proceso de estudio implementado contempló, además de la realización del proyecto “Lanzamiento de dos dados”, los siguientes recursos instruccionales:

Enunciado del proyecto “Lanzamiento de dos dados”

Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, o 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

- a) ¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta.
- b) ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Razona las respuestas.
- c) Simula el lanzamiento de dos dados. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B? ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué? Razona las respuestas.

Una vez recogidos los datos para el conjunto de las parejas formadas en la clase se plantean las siguientes cuestiones:

- d) ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar? ¿Qué puede hacer un profesor en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?
- e) Construir un diagrama de barras adosadas en el que se represente la distribución de frecuencias relativas y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados”. ¿Cómo piensas que cambiará este diagrama si en lugar de representar las frecuencias relativas al lanzar 100 veces los dados se hubieran lanzado 10000 veces?

Figura 2. Proyecto “Lanzamiento de dos dados”

- Texto de estudio; *Estocástica para maestros* (Batanero y Godino, 2003), donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.
- Una colección de ejercicios resueltos puestos a disposición de los estudiantes para su estudio personal, asistido por sesiones de tutoría.
- Tablón virtual de docencia, el cual se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación asincrónica entre los estudiantes y el profesor.

El uso de estos recursos supone que los estudiantes se comprometen con el proceso de estudio, no solo en las sesiones de clase presenciales en las cuales dialogan, trabajan cooperativamente con los compañeros y reciben información y retroalimentación por parte del profesor, sino que fuera del aula estudian personalmente los recursos complementarios puestos a su disposición.

La metodología didáctica diseñada sigue, por tanto, las orientaciones de los enfoques constructivistas. No obstante, los datos empíricos registrados por observación no participante, muestran que en el desarrollo efectivo del proyecto se contemplan frecuentes momentos claramente transmisivos no previstos en el diseño por el profesor. Estos momentos transmisivos han venido motivados por los conflictos de aprendizaje emergentes. El resultado es un modelo instruccional mixto en el que los momentos de enseñanza directa, con predominio de la transmisión de conocimiento, tienen lugar en el marco de un diseño global constructivista. El análisis del proceso efectivamente implementado que se incluye en la siguiente sección tiene como objetivo revelar la tensión dialéctica entre transmisión e indagación que tuvo lugar para tratar de incrementar la idoneidad didáctica del proceso.

5. Resultados

5.1. Hechos didácticos significativos en la trayectoria didáctica implementada

La actividad didáctica realizada conjuntamente entre el profesor y los estudiantes para dar respuesta a cada cuestión planteada y los medios utilizados constituyen conjuntamente una configuración didáctica, y la secuencia de dichas configuraciones la trayectoria didáctica implementada.

En lo que sigue, se presentan algunos HDS transcurridos en la implementación del proyecto “Lanzamiento de dos dados” con el fin de clarificar esta noción y su interés en el análisis del proceso de instrucción. Posteriormente, se incluye una síntesis de la trayectoria didáctica implementada, teniendo en cuenta la totalidad de los HDS transcurridos durante el proceso de estudio. La síntesis se realiza clasificando los HDS según las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional (interaccional y mediacional). Esta metodología de análisis de protocolos de clase puede ser útil para el estudio de lecciones en la formación de docentes.

HDS 1: (Transmisión de conocimientos por parte del profesor)

P: [...] Vamos a tratar hoy de motivar y justificar las nociones de probabilidad a través de un proyecto. Primero voy a presentar el proyecto y en la siguiente fase, ustedes van tratar de dar respuesta a las cuestiones planteadas. Vamos a utilizar este problema de tipo realista para reflexionar sobre los conceptos probabilísticos básicos como: probabilidad, espacio muestral, distribución de probabilidad, orientado a dar respuesta a la toma de decisiones en un ambiente de incertidumbre [...].

Este episodio se considera un hecho didáctico significativo porque describe una fase del proceso en la que el profesor *transmite* información a los estudiantes sobre la manera en que se va a proceder en el estudio de las nociones probabilísticas. El hecho didáctico es claramente transmisivo, pero está inmerso en una situación didáctica con rasgos esenciales constructivistas. El profesor indica que va a proponer un conjunto de cuestiones relacionadas con el proyecto. Dicho proyecto es una situación – problema de tipo realista que requiere el uso de conceptos probabilísticos; por tanto, corresponde a la *faceta epistémica*. Los estudiantes deben tratar de responder las cuestiones planteadas; por ello deben asumir un cierto grado de responsabilidad en *indagar* y dar respuesta a las cuestiones, lo que implicaría la *faceta interaccional*. En este episodio también está presente la *faceta afectiva* al tratar el profesor de relacionar los conceptos probabilísticos implicados en el proyecto con su papel en la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre.

HDS 2: (Interacción dialógica – indagativa)

P: [...] ¿Qué habéis puesto?

E₅: Es mejor ser B, porque lleva más probabilidades de ganar.

P: ¿Por qué?

E₅: Porque A tiene cuatro números y B tiene hasta 12.

P: Fíjense bien en el problema y traten de explicar lo realizado [...].

Los estudiantes tratan de responder a la primera cuestión, *¿Qué prefieres ser jugador A o B? Razona la respuesta*, trabajando en parejas o pequeños grupos; el profesor va preguntando por las respuestas que van elaborando. Este breve episodio lo consideramos un HDS porque un estudiante responde de manera errónea, al no comprender el espacio muestral del experimento (implica la faceta cognitiva). Justifica la respuesta teniendo en cuenta el número de resultados en que gana cada jugador, y no de las sumas posibles para cada resultado; lo que supone una aplicación abusiva de la probabilidad de Laplace, sin la observación de la necesidad de que los casos sean equiprobables.

Desde el punto de vista interaccional, se observa un formato dialógico de interacción entre el profesor y los estudiantes, así como una organización constructivista del proceso de enseñanza-aprendizaje por parte del profesor, que espera que los alumnos determinen por ellos mismos la respuesta correcta, sin necesidad de que él la anticipe.

HDS 3: (Institucionalización de los conocimientos pretendidos)

P: [...] Vamos a sistematizar este contenido. Aquí tenemos la suma de puntos de lanzar los dados. [Se presenta una tabla con los casos posibles del experimento, figura 4]. Tenemos los dos dados, dado uno y dado dos; si se lanzan los dados y se suman los puntos salen 36 casos posibles de sumar. Las sumas son estas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4,... El *espacio muestral* del experimento aleatorio de lanzar dos dados y sumarlos que es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Son las 11 posibilidades distintas de sumas [...].

[...] En este experimento tenemos que ver de los 36 casos posibles, ¿en cuántos casos gana A y en cuántos gana B? Hay 20 casos en que gana A y 16 donde gana B. Hay más casos en los cuales gana A [...].

P: [...] Veamos la segunda cuestión “¿Es equitativo este juego?”

E₁₆: No, el jugador A tiene más posibilidades de ganar.

P: ¿Cuál es la probabilidad de que gane A?

E₁₆: 20 partido en 36.

P: Ese cálculo es la probabilidad aplicando la regla de Laplace [...].

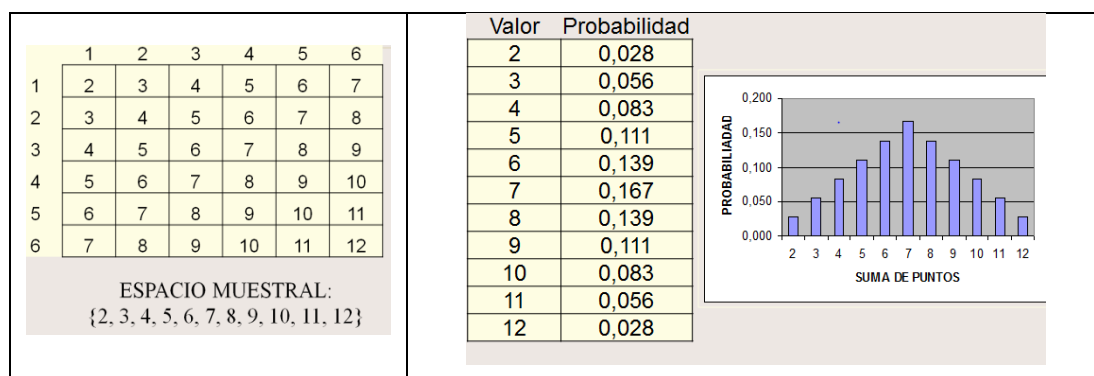


Figura 4. Institucionalización de conocimientos pretendidos

En este episodio el profesor procede a institucionalizar los conocimientos puestos en juego para dar respuesta a las dos primeras cuestiones. No se conoce la solución obtenida por cada estudiante y el grado de comprensión respecto a dichas cuestiones, aunque por los episodios previos se puede inferir que tales conocimientos son dispares: unos prefieren ser el jugador A y otros B, basados en los resultados de sus experimentaciones, y en algunos casos basados en argumentaciones probabilísticas. La explicación del profesor (transmisión de conocimientos) es necesaria para avanzar en el proceso de estudio, pues pretender que todos los estudiantes (o la gran mayoría) descubran la solución institucional pretendida en un tiempo razonable parece una ilusión. Tras la presentación y explicación de la tabla donde se representan los resultados posibles del experimento y las sumas posibles, las preguntas sobre si el juego es equitativo y la probabilidad de que gane A obtienen respuesta inmediata del estudiante.

HDS 4: (Institucionalización dialógica de la ley de los grandes números)

P: [...] Veamos ahora qué ha pasado con la simulación que hemos realizado. ¿Quién ha ganado más veces A o B?

E₁₇: Nos ha salido que gana A.

E₁₈: Nuestro resultado es que gana A.

E₁₉: A nosotros nos ha salido lo mismo. Gana A.

E₂₀: Gana A.

E₂₁: De acuerdo con nuestros resultados gana B.

P: Vamos a la pregunta siguiente “¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?”

E₂₂: No se volvería a repetir porque se trata de probabilidad y no hay una regla que permita determinar los resultados.

P: Bien, sin embargo, una de las cosas que ha sucedido en el experimento es que casi siempre ha ganado A. Tú dices que no se sabe exactamente lo que va pasar en 100 lanzamientos, porque es un experimento aleatorio y podría pasar que gane B. Bien. Imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces ¿qué pasará?

E₂₂: Ganará el jugador A.

P: Es decir, a largo plazo se espera que gane A, aunque en algún experimento pudiera suceder lo contrario.

E₂₃: Lo que sucede es que en 100 veces es muy poco, hay que hacer el experimento más veces.

P: Entonces, una cuestión importante es el tamaño de la muestra para que se cumplan las predicciones [...].

En este episodio el profesor y los estudiantes comparten conocimientos sobre el comportamiento aleatorio del experimento; no se tiene seguridad si ganará A o B a pesar de que el experimento se repita 100 veces, pero “a largo plazo se espera que gane A, aunque en algún experimento pudiera suceder lo contrario”. El profesor está introduciendo una aproximación de la ley de los grandes números, apoyándose en la intuición de al menos uno de los estudiantes, quien afirma: “Ganará el jugador A”.

El proceso de estudio continúa siguiendo un “modelo didáctico” de tipo mixto indagatorio – dialógico – transmisivo que se ha puesto de manifiesto en los HDS descritos anteriormente. Se introduce la noción de variable aleatoria, distribución de probabilidad y distribución de frecuencias, ilustradas mediante la comparación de los correspondientes diagramas de barras (Figura 2)

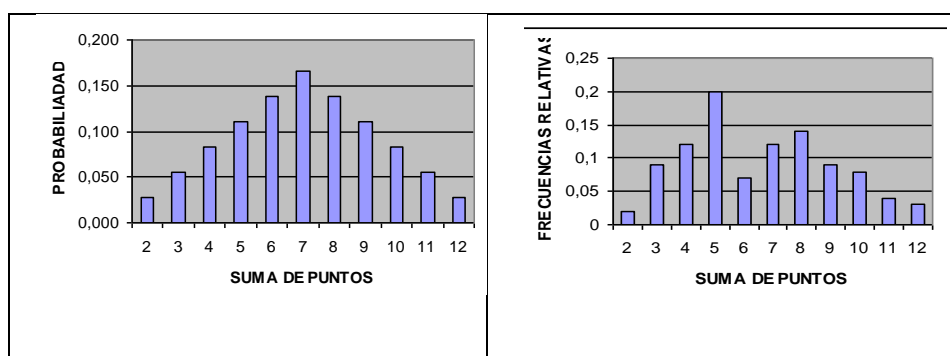


Figura 5. Distribuciones de probabilidad y de frecuencias

5.2. Síntesis de la trayectoria didáctica implementada

Además de los ejemplos mostrados en el apartado anterior se identificaron otros HDS que sintetizamos a continuación, clasificados según pongan en juego las facetas epistémica, cognitiva e instruccional (interaccional y mediacional). La faceta afectiva no fue objeto de observación específica, aunque podemos afirmar que, en general, los estudiantes estuvieron interesados y comprometidos con el desarrollo del proyecto en el transcurso de las sesiones de clase.

HDS relativos a las dimensiones epistémica y ecológica, donde se indica si el modelo instruccional de cada hecho tiene un carácter eminentemente constructivista (CONST), transmisivo (TRANS), o mixto (MIXTO).

- (TRANS) El profesor recuerda las *representaciones de uso convencional* en probabilidad (tabla y gráfico de distribución de probabilidad), así como los conceptos

- de espacio muestral casos favorables y casos posibles a partir de la presentación de la solución esperada y de la síntesis de los contenidos estudiados.
- (TRANS) Durante la sesión 2 el profesor muestra algunos programas informáticos que permiten justificar gráficamente la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad. Simula ante el conjunto de la clase el experimento del lanzamiento de dos dados y el lanzamiento de una moneda.
 - (MIXTO) Se proponen *procesos de traducción* entre distintas representaciones: sumas obtenidas de lanzar dos dados en tablas de conteo, casos posibles en tablas de distribución de probabilidad y de las sumas obtenidas en tablas de frecuencias, representación de la distribución de probabilidad y distribución de frecuencias en gráficos.
 - (TRANS) El profesor recuerda los *conceptos y definiciones básicas* de probabilidad (experimento aleatorio, casos posibles, espacio muestral, casos favorables, regla de Laplace, distribución de probabilidad, proporción, variable estadística, porcentaje, distribución de frecuencias, gráfico de barras adosadas, diagrama de árbol) en intervenciones puntuales y durante la presentación al conjunto de la clase de la solución esperada.
 - (CONST) Los *procedimientos fundamentales* del tema de estudio son mayoritariamente aplicados por los estudiantes para dar respuesta a las cuestiones planteadas (realización del experimento, registro de los resultados, elaboración de tablas de frecuencias, construcción de gráficos de barras adosadas y cálculo de probabilidad).
 - (TRANS) La tabla y el gráfico de distribución de probabilidad del experimento de lanzar dos dados es presentada por el profesor.
 - (TRANS) Las principales *propiedades* del tema de estudio (regla de Laplace, ley empírica de los grandes números, convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad) son dados por el profesor a través de institucionalizaciones puntuales y de la síntesis de contenidos presentada en la clase.
 - (CONST) Los estudiantes tienen la oportunidad de *comparar* gráficamente la *distribución de probabilidad* del experimento “Lanzamiento de dos dados” con la *distribución de frecuencia* al haber realizado el experimento 100 veces. Para ello realizan gráficos manualmente y también mediante la hoja de cálculo.
 - (CONST) Frente a la siguiente pregunta hecha por el profesor “imaginemos ahora que se juega 100 veces, muchas veces, ¿qué pasará?”, los estudiantes se ven enfrentados a *realizar predicciones en base a la probabilidad* de que gane el jugador A o B; aunque, es el profesor quien tiene que justificar la solución aplicando la propiedad de la “ley de los grandes números”.
 - (MIXTO) Durante el desarrollo del proyecto el profesor favorece permanentemente la capacidad de *argumentar*, pidiendo a los estudiantes que justifiquen de manera razonada sus respuestas.
 - (TRANS) En diversos momentos el profesor establece conexiones con el currículo escolar y situaciones “reales” del entorno social y cultural (faceta ecológica).

HDS relativos a la dimensión cognitiva:

- Frente a la cuestión “¿qué prefieres ser jugador A o B?”, se observan distintos conflictos, que obligan al profesor a intervenir para tratar de resolverlos, y por tanto se trata de momentos tipo TRANS, referidos a estudiantes particulares o al conjunto de la clase:
 - Creer que todos los resultados del experimento son equiprobables (*sesgo de la equiprobabilidad*).
 - Dificultad para determinar las sumas posibles y obtener el espacio muestral del experimento.
 - Considerar equiprobables los valores de la variable aleatoria “suma de puntos al lanzar dos dados” asociados a cada jugador, en lugar de considerar las sumas posibles para cada valor. Es decir, considerar sólo que hay cuatro valores (resultados) donde gana A (6, 7, 8 y 9) y siete donde gana B (2, 3, 4, 5, 10, 11 y 12).
 - Los estudiantes responden en base a los resultados obtenidos al simular el lanzamiento de los dados 10 veces (*heurística de representatividad*).
 - Los estudiantes no logran representar las sumas posibles al lanzar dos dados (uso de tabla de doble entrada y diagrama de árbol).
 - Dos sumas que aparecen en distinto orden se consideran como un único suceso; por ejemplo, 5+1 y 1+5 se contabiliza solo una vez. El profesor no aborda este conflicto durante la clase, en su lugar, alude a la solución esperada para que los estudiantes corrijan su respuesta.
- Ante las cuestiones tales como “¿qué ha ocurrido? o ¿por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?”, se observa que algunos estudiantes insisten en que siempre ganará B, justificando su respuesta en base a los resultados obtenidos al realizar el experimento 100 veces (*heurística de representatividad*). Este conflicto motiva la intervención directa del profesor (momento TRANS).
- Conflictos en la construcción del diagrama de barras adosadas:
 - Hay estudiantes que utilizan las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas al comparar las dos distribuciones (distribución de probabilidad y de frecuencias).
 - Error en el uso de la escala; se escriben las frecuencias absolutas en lugar de las frecuencias relativas en el eje de ordenada.
 - Se construyen todas las barras juntas a modo de histograma.
 - No se incluye título ni etiquetas en el gráfico.

Por un lado, la naturaleza regulativa de los convenios de representación, así como de los propios conceptos y procedimientos estadísticos, y, por otro lado, las dificultades que emergen en el proceso de estudio, obligan a frecuentes explicaciones e instrucciones directas por parte del profesor. Los conocimientos previos de los estudiantes, la heterogeneidad de la clase y restricción de tiempo disponible son factores condicionantes que dificultan la aplicación de un modelo didáctico exclusivamente constructivista.

HDS relativos a la dimensión interaccional y mediacional, donde se señala el modelo instruccional privilegiado.

- (MIXTO) En las actividades de trabajo en pequeños grupos, el profesor apoya permanentemente el trabajo de los estudiantes aclarando dudas y evaluando sus aprendizajes (evaluaciones espontaneas). Frente a algunas dificultades, hay veces en que insinúa la solución rebajando la dificultad inicial del proyecto.
- (MIXTO) Al finalizar la sesión 1, se recogen los informes del proyecto con los avances de los grupos como parte de un proceso de evaluación formativa. En la siguiente clase (sesión 2), el profesor realiza la retroalimentación a partir de los informes que contienen respuestas correctas sin profundizar mayormente en los errores.
- (TRANS) En los procesos de institucionalización, el profesor sistematiza convenientemente los contenidos centrales del tema.
- (CONST) La simulación física de los datos mediante el uso de trozos de papel ha resultado bastante eficaz, aun cuando, en el principio se presentaron algunas dificultades.
- (MIXTO) El tiempo ha resultado insuficiente para abordar algunas actividades; específicamente, en la actividad “b” no se utilizaron los datos del experimento realizado por los grupos por falta de tiempo y en su lugar, se emplearon datos entregados por el profesor.

El análisis de los HDS identificados en la faceta epistémica representan una descripción discreta de la trayectoria epistémica efectivamente implementada, esto es, los conceptos, representaciones, proposiciones, procedimientos y justificaciones probabilísticas que han sido tratados en clase para dar respuesta a las cuestiones planteadas. Los correspondientes a las facetas interaccional y mediacional permiten reconocer el papel del profesor y los estudiantes en la gestión de tales conocimientos revelándose un cierto predominio de la transmisión del conocimiento respecto a la indagación autónoma por parte de los estudiantes. Asimismo, es preciso señalar que ambos modelos no tienen momentos temporales estancos, estrictamente delimitados, siendo usual la determinación de secuencias donde el proceso de estudio se gestiona con momentos dialógicos donde las respuestas de los estudiantes sirven de origen y motivación a una explicación del docente.

La secuencia de HDS relativos a la faceta cognitiva muestra la progresiva construcción de los conocimientos por los estudiantes, los puntos conflictivos que se presentan y si tales conflictos son reconocidos y abordados por el profesor. En este estudio destacan las dificultades para construir el espacio muestral del experimento, el sesgo de equiprobabilidad y la heurística de representatividad. La comparación mediante diagramas de barras adosadas de las distribuciones de frecuencias relativas y de probabilidad también ha requerido una atención específica.

6. Discusión: La tensión entre indagación y transmisión

En la implementación del proceso de estudio hemos identificado con frecuencia intervenciones del docente que disminuyen la demanda cognitiva de la tarea inicialmente propuesta, bien proponiendo un problema más fácil o introduciendo información que deberían conocer los estudiantes o buscarla por ellos mismos. Estas intervenciones representan HDS puesto que constituyen un tipo de patrón de interacción tipo “embudo” (funnel pattern) (Voigt, 1985; Bauersfeld, 1988). Además, el formato de trabajo

cooperativo mediante la organización de equipos de estudiantes que abordan la resolución de un problema, hace que en ciertas ocasiones los alumnos más aventajados respondan a las preguntas y bloqueos de los estudiantes menos capaces, quienes con frecuencia se limitan a imitar lo que hacen sus compañeros.

Usando la noción de idoneidad didáctica podemos decir que de ese modo se rebajan los objetivos de aprendizaje, por lo que se disminuye la idoneidad epistémica de la actividad matemática pretendida. También se disminuye la idoneidad interaccional al suprimir o disminuir la autonomía del estudiante. Sin embargo, aumenta la idoneidad cognitiva; entendida ésta aquí como la ejercitación de determinadas rutinas, frente a una ausencia de adquisición de conocimiento de una parte considerable de estudiantes en una instrucción puramente transmisiva. De hecho, también se aumenta la idoneidad afectiva, evitándose la frustración y el abandono del estudiante.

Las explicaciones y los cambios en las tareas se dan dentro de un grupo, por el profesor cuando es cuestionado por un grupo, o por un miembro a nivel individual. Los momentos de institucionalización, entendidos como momentos de regulación, es decir, segmentos de la actividad didáctica en los que se recuerdan o fijan normas sociomatemáticas (Yackel, & Cobb, 1996) y reglas epistémicas que provienen de la práctica matemática institucionalizada (Font, Godino & Gallardo, 2013), son densos en el proceso de instrucción matemática. La institucionalización puede darse en las fases de presentación colectiva de las tareas, para que los alumnos las comprendan y se pongan de acuerdo con ellas (el profesor repasa convenciones lingüísticas, conceptos, procedimientos o propiedades supuestamente conocidas). También puede ocurrir en la fase exploratoria del trabajo (individual o en equipo), donde el profesor repasa, aclara o introduce normas a un estudiante o a un pequeño grupo que está bloqueado y no puede avanzar en la actividad matemática requerida. Estos momentos puntuales de institucionalización, aunque con frecuencia reducen las expectativas de aprendizaje, tratan de mejorar la idoneidad cognitiva, afectiva y temporal del proceso de instrucción.

El análisis de las observaciones ha revelado que ha habido frecuentes momentos transmisivos, no previstos por el profesor, que podrían ser considerados incluso como conductistas:

- El proceso ha estado orientado hacia el aprendizaje de un conocimiento científico que tiene una existencia cultural externa (conceptos, procedimientos, representaciones probabilísticas).
- El profesor ha sido finalmente la fuente de dicho conocimiento cultural cuya institucionalización ha asumido.
- La solución a la tarea no es negociable. Los conceptos y propiedades que hay que aplicar para hallar la solución del problema, aunque puedan admitir diversas formulaciones más o menos formales, son reglas epistémicas que se deben respetar.
- Los conocimientos previos de los estudiantes y las respuestas que proporcionan durante el proceso son aceptados si concuerdan con las del profesor.

Por otro lado, como se ha mostrado, en el desarrollo del proceso de instrucción ha habido momentos que concuerdan con supuestos de una pedagogía constructivista, lo cual estaba previsto en el diseño de la instrucción:

- La actividad ha estado orientada a la resolución de un problema.
- El profesor ha actuado como coach.

- Se han manifestado las ideas y estrategias de los estudiantes.
- Se han usado los errores y comprensiones de los estudiantes para proporcionales feedback.
- Se ha animado a los estudiantes a explorar la situación planteada para que ellos mismos encontraran la solución.
- Se ha favorecido el aprendizaje colaborativo y cooperativo.

Hudson, Miller & Butler (2006) justifican la implementación de modelos instruccionales mixtos que adapten y mezclen la instrucción explícita (centrada en el profesor) con la instrucción basada en la resolución de problemas (centrada en el aprendiz) por la necesidad de realizar adaptaciones curriculares ante la diversidad de capacidades de los estudiantes. A conclusiones similares llega Steele (2005), para quien, “La mejor enseñanza a menudo integra ideas de principios constructivistas y conductistas” (p. 3).

7. Observaciones finales

El análisis realizado de la trayectoria didáctica aporta razones a favor de diseñar e implementar un modelo instruccional de tipo mixto, que incluya momentos de tipo *indagatorio*, *cooperativo*, *dialógico* y también momentos basados en la *transmisión*; dichas razones se refieren a la naturaleza de los objetos matemáticos. Los estudiantes tienen que aprender, en una gran medida, reglas, así como las circunstancias para una aplicación pertinente. "La verdad está dictada por los respectivos regímenes de verdad de la ciencia y las matemáticas, que sirven para estructurar lo que se debe esperar del sujeto" (Radford, 2012, p. 108).

El aprendiz parte de reglas conocidas (conceptos, proposiciones, procedimientos) y produce otras, que deben ser compartidas y compatibles con las ya establecidas en la cultura matemática. Tales reglas (conocimientos) tienen que ser almacenadas en la memoria a largo plazo del sujeto y puestas a funcionar en el momento oportuno en la memoria a corto plazo.

Las herramientas teóricas aplicadas en este trabajo han permitido revelar que el desarrollo de una clase de matemáticas, aunque inicialmente centrada en la resolución de una situación – problema (proyecto), tiene que contemplar momentos de transmisión de conocimientos por parte del profesor. Se trata de compartir con los estudiantes un ejemplo completamente desarrollado, pero con una dinámica mixta en la que trata de involucrar a los estudiantes, a partir del recuerdo y aplicación de las nociones y técnicas probabilísticas que han estudiado en secundaria, en la adquisición de un significado matemático que puede ser utilizado en su desempeño profesional futuro.

El análisis de las sesiones ha puesto de manifiesto que los momentos de indagación de los propios estudiantes para dar respuestas a las cuestiones planteadas son entrelazados por momentos claramente transmisivos del docente, que involucran a toda la clase, a grupos de estudiantes o a estudiantes individuales. Las intervenciones del profesor en estos momentos de transmisión de conocimientos, con frecuencia, no pueden ser previstas en la fase de diseño. El docente establece regulaciones del proceso de estudio ligadas, más que a momentos o fases de la situación propuesta, a comportamientos observados de los estudiantes, que sean indicadores de conflictos semióticos o de progreso en la adquisición de significados.

Se ha mostrado que en la fase de implementación del proceso instructivo las nociones de configuración, subconfiguración, hecho didáctico significativo e idoneidad didáctica permiten, por una parte, delimitar y condensar la crónica del proceso de estudio y, por otra parte, realizar una descripción y análisis detallado de los contenidos puestos en juego, los patrones de interacción y los conflictos que han tenido lugar. El análisis realizado apoya la afirmación de que la optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica y compleja entre los roles del profesor como instructor (transmisor) y facilitador (gestor) y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo de información significativa. La necesidad de este modelo mixto viene reforzada por la necesidad de adecuar el proyecto educativo a las restricciones temporales y la diversidad de modos y ritmos de aprendizaje en grupos de estudiantes numerosos. “Dada la miríada de situaciones potenciales de diseño, la “mejor” aproximación al diseño puede que nunca sea idéntica a ninguna otra previa, sino que verdaderamente “dependa del contexto” (Ertmer y Newby, 1993, p. 62).

La enseñanza de las matemáticas, y en particular de la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia para dar sentido a las técnicas y teorías estudiadas, y para propiciar momentos exploratorios de la actividad matemática. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) (Font, Godino y Gallardo, 2013), que deben ser reconocidos por el profesor para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento y competencia.

La relevancia de los modelos mixtos, que combinan perspectivas objetivistas y constructivas, debe guiar el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las TIC en muchos casos ponen el énfasis en el aprendizaje autónomo, en el que el alumno recurrirá a momentos de aprendizaje transmisivo. Por ejemplo, el ‘flipped classroom’ (Reidsema, Kavanagh, Hadgraft, & Smith, 2017) es una estrategia instruccional y un tipo de aprendizaje mixto que integra dos estrategias, la presencial y la virtual; esta segunda estrategia es, en muchos casos, más bien transmisiva (por ejemplo, en un flipped classroom, los estudiantes ven clases online). Así, el uso generalizado de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje sugiere una futura línea de investigación para analizar el significado de las perspectivas objetivista y constructiva.

Además, en futuros trabajos, se considera también medir las competencias y habilidades de los profesores que participan en el proyecto, tener en cuenta tres dimensiones (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015): 1) dimensión matemática (sobre "el conocimiento que permite al profesor resolver el problema o actividad matemática que se va a implementar en el aula y vincularlo con los objetos matemáticos que luego se pueden encontrar en el currículo matemático escolar", p. 1433); 2) dimensión didáctica (que considera seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica); y 3) dimensión meta didáctico-matemática (sobre las normas y metanormas en los procesos de enseñanza y aprendizaje).

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias

- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 1-18.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education* 45, 797–810.
- Batanero, C. & Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En T. Coony y D. Grows (Eds.), *Effective Mathematics Teaching* (p. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics/ Erlbaum.
- Boghossian, P. (2006). Behaviorism, constructivism, and Socratic pedagogy. *Educational Philosophy and Theory*, 38 (6), 713-722.
- Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Ertmer, P. A. & Newby, T. J. (1993). Behaviorism, cognitivism, constructivism: comparing critical features from an instructional design perspective. *Performance Improvement Quarterly*, 6(4), 50–72.
- Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.
- Fox, R. (2001). Constructivism examined. *Oxford Review of Education*, 27 (1), 23-35.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. Contreras, J. M. (2015). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. En K. Krainer & N. Vondrobá (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CEME9, 4-8 February 2015)* (pp. 2642-2648). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics* 77 (2-3), 247-265.
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.
- Hudson, P., Miller, S. P., & Butler, F. (2006). Adapting and merging explicit instruction within reform based mathematics classrooms. *American Secondary Education*, 35 (1), 19-32.
- Jonassen, D. H. (1991). Objectivism vs. constructivism: do we need a new philosophical paradigm? *Educational Technology Research & Development*, 39 (3), 5-14.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery,

- problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41 (2), 75-86.
- Ku, K.Y. I., Ho, I. T., Hau, K. T. & Lai, E. C. M. (2014). Integrating direct and inquiry-based instruction in the teaching of critical thinking: an intervention study. *Instructional Science*, 42, 251-269.
- Lobato J., Clarke D., & Ellis A. B. (2005). Initiating and eliciting in the teaching: a reformulation of telling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(2), 101-136.
- Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59 (1), 14 - 19.
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pino-Fan L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
- Radford L. (2012). Education and the illusions of emancipation. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 101-118. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9380-8>
- Reigeluth, C. M. (2000). ¿En qué consiste una teoría de diseño educativo y cómo se está transformando?. En C. M. Reigeluth (Ed.), *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción* (pp. 15-40). Madrid: Santillana.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114 – 145.
- Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 91 – 104.
- Steele, M. M. (2005). Teaching students with learning disabilities: Constructivism or behaviorism? *Current Issues in Education* [On-line], 8 (10). Available: <http://cie.ed.asu.edu/coume8/number10/>
- Stephan, M. (2014). Learner-Centered teaching in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Sweller, J., Kirschner, P. A., & Clark, R. E. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist*, 42 (2), 115-121.
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (1), 69-118.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, (4), 458-477.