ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Juan D. Godino
jdgodino@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8409-0258
Universidad de Granada
Granada, España

Recibido: 20/03/2023 **Aceptado:** 01/05/2023

Resumen

En este artículo, elaboro el constructo matemática educativa como una variedad ecológica de las matemáticas que estudia la articulación de las matemáticas formales y aplicadas, teniendo en cuenta los contextos educativos. Tras presentar una síntesis de las principales corrientes sobre filosofía de las matemáticas analizo los aportes del enfoque ontosemiótico (EOS) para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos y semióticos de la matemática educativa. El constructo configuración ontosemiótica de prácticas operativas y discursivas, la tipología de objetos y procesos matemáticos, así como las dualidades desde las cuales se pueden analizar las prácticas y los objetos aportan los elementos esenciales de una filosofía específica de la matemática educativa. En dicha filosofía se articula una posición empirista-factual para la dimensión aplicada con otra ficcionista-convencional para la dimensión formal, lo cual permite comprender y evitar los problemas educativos ligados al platonismo y fisicalismo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, el contexto educativo requiere adoptar un punto de vista transdisciplinar que permita relacionar las cuestiones filosóficas, con las psicológicas, socioculturales y pedagógicas, a fin de abordar los problemas del aprendizaje y difusión del conocimiento matemático. Finalmente presento la ecología de significados sistémico-pragmáticos como una metáfora esencial de la matemática educativa y una síntesis de los postulados filosóficos del EOS.
Palabras clave: Matemática Educativa. Filosofía de las Matemáticas. Enfoque Ontosemiótico. Transdisciplinariedad.

ABORDAGEM ONTOSEMIÓTICA DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Resumo

Neste artigo, elaboro o conceito de matemática educativa como uma variedade ecológica de matemática que estuda a articulação da matemática formal e aplicada, tendo em conta os contextos educativos. Após apresentar uma síntese das principais correntes da filosofia da matemática, analiso as contribuições da abordagem ontosemiótica (AOS) para enfrentar os problemas epistemológicos, ontológicos e semióticos da matemática educativa. A noção de configuração ontosemiótica das práticas operacionais e discursivas, a tipologia dos objectos e processos matemáticos, bem como as dualidades a partir das quais as práticas e objectos podem ser analisados fornecem os elementos essenciais de uma filosofia específica da matemática

educativa. Nesta filosofia, uma posição empírico-factual para a dimensão aplicada é articulada com uma posição ficcional-convencional para a dimensão formal, o que permite compreender e evitar os problemas educativos ligados ao platonismo e ao fisicalismo no ensino e aprendizagem da matemática. Do mesmo modo, o contexto educativo exige a adopção de um ponto de vista transdisciplinar que permita relacionar questões filosóficas, psicológicas, socioculturais e pedagógicas, a fim de abordar os problemas da aprendizagem e da difusão do conhecimento matemático. Finalmente, apresento a ecologia dos significados sistémico-pragmáticos como uma metáfora essencial da matemática educacional e uma síntese dos postulados filosóficos do AOS.
Palavras chave: Matemática Educativa. Filosofia da Matemática. Abordagem Ontosemiótica. Transdisciplinaridade.

ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO THE PHILOSOPHY OF EDUCATIONAL MATHEMATICS

Abstract

In this article, I elaborate on the construct educational mathematics as an ecological variety of mathematics that studies the articulation of formal and applied mathematics, considering educational contexts. After presenting a synthesis of the main currents in the philosophy of mathematics, I analyse the contributions of the onto-semiotic approach (OSA) to address the epistemological, ontological, and semiotic problems of educational mathematics. The construct onto-semiotic configuration of operative and discursive practices, the typology of mathematical objects and processes, as well as the dualities from which practices and objects can be analysed provide the essential elements of a specific philosophy of educational mathematics. In this philosophy, an empiricist-factual position for the applied dimension is articulated with a fictional-conventional one for the formal dimension, which makes it possible to understand and avoid the educational problems linked to Platonism and physicalism in the teaching and learning of mathematics. Likewise, the educational context requires adopting a transdisciplinary point of view that allows relating philosophical, psychological, socio-cultural, and pedagogical issues, to address the problems of learning and dissemination of mathematical knowledge. Finally, I present the ecology of systemic-pragmatic meanings as an essential metaphor of educational mathematics and a synthesis of the OSA philosophical postulates.
Keywords: Educational Mathematics. Philosophy of Mathematics. Onto-semiotic Approach. Transdisciplinarity.

Introducción

La reflexión filosófica sobre los fundamentos de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica y tecnológica es esencial para orientar adecuadamente la investigación, ya que condiciona la formulación de las cuestiones centrales y el diseño de modelos y recursos instruccionales. Así mismo, para comprender y optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es necesario abordar cuestiones de índole epistemológica sobre las matemáticas, como propone la Didáctica Fundamental (Gascón, 1998), y también cuestiones ontológicas, semióticas, cognitivas, sociológicas, entre otras. Clarificar la naturaleza de las matemáticas, tanto en los contextos de usos formales de creación y justificación del conocimiento matemático, como aplicados a la solución de problemas científicos, tecnológicos y de la vida cotidiana, es esencial para la educación matemática. Pero es insuficiente, ya que el estudio de los procesos de aprendizaje y difusión de las matemáticas requiere tener en cuenta aspectos psicológicos, pedagógicos, sociológicos, entre otros. En consecuencia, adoptar una perspectiva transdisciplinar parece necesario para la educación matemática[1] (Steiner, 1985; Arboledas y Castrillón, 2007).

La diversidad de teorías filosóficas, psicológicas y sociológicas, y los dilemas entre perspectivas epistemológicas, ontológicas, semiótica y cognitivas, constituye el trasfondo usado por el Enfoque Ontosemiótico en educación matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007) para generar una nueva visión sobre el conocimiento matemático, adaptada al contexto educativo y con rasgos transdisciplinares. En el EOS se asume que para poder comprender e intervenir de manera fundamentada en los procesos instruccionales es necesario ocuparse de problemas empíricos que son propios de la psicología y pedagogía de las matemáticas, tales como, ¿cómo aprendemos las ideas matemáticas y cómo podemos ayudar a aprenderlas? Pero estas cuestiones deben ser abordadas de manera integrada con otras propiamente filosóficas, como, ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos y en qué se diferencian de los objetos materiales?, ¿Cómo existen los objetos matemáticos?, ¿Tienen las matemáticas algún presupuesto ontológico?, ¿Qué es la verdad matemática?, ¿Qué es la demostración matemática?

En este trabajo planteo el problema de clarificar las relaciones entre los constructos y postulados del EOS sobre el conocimiento matemático y las corrientes predominantes en filosofía de las matemáticas. Para ello considero importante introducir el constructo *matemática educativa*, para distinguir, sin separar, las matemáticas puras y las aplicadas cuando se aborda el estudio del aprendizaje matemático. Reconocer las características específicas de la matemática educativa como una variedad ecológica de matemáticas, en la que el razonamiento formal convive de manera simbiótica con el razonamiento empírico-intuitivo, es importante para comprender los procesos de aprendizaje y diseñar intervenciones educativas fundamentadas. Así mismo, mostraré que el constructo configuración de prácticas, objetos y procesos (*configuración ontosemiótica*) introducido en el EOS permite articular de manera coherente

[1] Didáctica de las matemáticas en los países de Europa continental.

elementos básicos de una filosofía de la matemática educativa, imbricada con una psicología y sociología.

Comienzo el artículo con la caracterización del constructo matemática educativa, como una variedad ecológica de matemáticas que articula lo formal y aplicado en las matemáticas que viven en los diversos contextos educativos. Seguidamente sintetizo las principales escuelas de filosofía de las matemáticas sobre las cuales proyectaré la aproximación ontosemiótica al conocimiento matemático. En la siguiente sección presento el constructo configuración ontosemiótica del EOS como herramienta para el análisis de las matemáticas educativas. Finalizo el trabajo con una síntesis de los postulados filosóficos del EOS sobre el conocimiento matemático, resaltando su carácter transdisciplinar.

2. Caracterización de la matemática educativa

Para abordar de manera fundamentada los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consideramos esencial clarificar las características específicas de las matemáticas puras y aplicadas, así como de las relaciones entre las mismas. Este análisis revela la emergencia de una variedad ecológica de matemáticas que designamos como matemática educativa. Es necesario distinguir entre la dimensión formal y la factual (empírica) de la matemática educativa, lo cual no implica considerarlas como separadas, sino manteniendo estrechas relaciones simbióticas cuando estamos interesados en los procesos de generación y aprendizaje del conocimiento matemático. Según esto, el significado que atribuimos a "matemática educativa"[2] difiere sustancialmente de su uso en la comunidad de educación matemática mexicana donde se considera como sinónimo de educación matemática o didáctica de la matemática. "La matemática educativa es entonces una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo veinte y que, en términos generales, podríamos decir se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 29).

Seguidamente clarificamos las características de las matemáticas puras y aplicadas apoyándonos principalmente en Bunge (1985). Podemos describir las matemáticas puras contemporáneas, también designadas como abstractas, formales o axiomáticas (Marquis, 2014), como la investigación por medios conceptuales, de problemas sobre sistemas conceptuales, o

[2] Fischer (2006) usa la expresión "educational mathematics" para referir a las conexiones entre matemáticas puras y aplicadas que deben ser tenidas en cuanto en la enseñanza de las matemáticas.

miembros de estos, con el objetivo de encontrar patrones que satisfacen tales objetos, hallazgo que se debe justificar sólo por una demostración rigurosa. En la matemática, como una ciencia formal, intervienen símbolos y constructos, pero no objetos empíricos ni factuales (hechos, cosas, propiedades de cosas, y acontecimientos). Por otro lado, las matemáticas aplicadas consisten en la investigación de problemas que surgen en la ciencia fáctica, la tecnología o las humanidades, con la ayuda de constructos que pertenecen a la matemática pura. La matemática aplicada se distingue entonces de la matemática pura por

– el origen de los problemas, que es extramatemático en el primer caso e interno en el segundo;
– los referentes últimos, que son cosas reales en el caso de la matemática aplicada, y constructos en el otro caso, y
– el objetivo, que es ayudar a la disciplina no matemática en el primer caso, y hacer avanzar la matemática pura en el segundo.

Un problema pertenece a la matemática formal cuando su solución requiere pruebas o refutaciones formales (es decir, no empíricas). La matemática aplicada hace uso de constructos y modelos formales, pero también artefactos y constructos empíricos. A estos dos contextos, Echeverría (2007) añade el contexto de educación y difusión como ámbito de reflexión en filosofía de la ciencia, ya que constituye un componente fundamental de la actividad científica, tomada en toda su extensión.

En el contexto educativo se aborda el estudio de problemas que pertenecen tanto al mundo extramatemático como intramatemático, incluso desde los primeros niveles. Por ejemplo, el aprendizaje de los números naturales se comienza con problemas de conteo, de asignar un número al cardinal de conjuntos de objetos perceptibles. Pero esto requiere el aprendizaje simultáneo de una estructura matemática, la secuencia de palabras y símbolos numéricos y los principios del conteo, lo cual indica la interconexión de lo formal y aplicado en la matemática educativa. En los problemas aplicados intervienen objetos factuales y comprobaciones empíricas, que deben ser diferenciados de los constructos formales y de las reglas convencionales mediante las cuales se operan y justifican.

En la matemática educativa se estudian no solo proposiciones de razón, esto es constructos (objetos conceptuales como números o triángulos), que corresponden a la matemática pura, sino también proposiciones de hecho que refieren a cosas concretas (reales, materiales) como tamaños o dimensiones de cosas con forma triangular. En la enseñanza de las matemáticas es necesario poner sumo cuidado en que los estudiantes no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones materiales o simbólicas. Esto no tiene importancia en las aplicaciones de las matemáticas, ni tampoco en la matemática pura, que solo se ocupa de entidades abstractas. También los procedimientos de justificación en la matemática educativa son diferentes porque no solo se usan procedimientos lógicos y deductivos, sino también la analogía, la metáfora, la inducción y razonamiento plausible. Especial cuidado se tiene en distinguir entre justificaciones empíricas y las deducciones a partir de definiciones y postulados.

Como síntesis podemos decir que la matemática pura es una actividad[3] que tiene como objeto/motivo la creación de modelos matemáticos para abordar la solución de problemas cada vez más generales, para lo cual desarrolla constructos y teorías con progresivos niveles de abstracción y formalización. El objeto/motivo de la matemática aplicada es la solución de problemas específicos en las ciencias empíricas, las tecnologías y ciencias sociales aplicando modelos matemáticos disponibles. El objeto/motivo de la matemática educativa es el estudio de las relaciones dialécticas entre la matemáticas pura y aplicada, entre los procesos de creación y aplicación de los conocimientos matemáticos, en cuanto deben ser objeto de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, la matemática educativa no solo debe estudiar el proceso de abstracción (progresiva generalización, síntesis y formalización), sino también por el proceso inverso de interpretación (análisis, particularización y concreción), así como de las relaciones dialécticas entre los mismos.

3. Filosofías de las matemáticas

Las filosofías de las matemáticas que se han desarrollado en los últimos veinticinco siglos abordan aspectos como los siguientes:

– ontología: cuestiones sobre el estatus ontológico de los objetos matemáticos;
– semántica: cuestiones de sentido, de referencia y de verdad en matemáticas;
– epistemología: cuestiones sobre la naturaleza y las fuentes del conocimiento matemático;
– metodología: cuestiones de justificación (en particular prueba) y aplicación.

Sin duda estas cuestiones son esenciales y características de la filosofía de las matemáticas puras y aplicadas y también para la matemática educativa, aunque en este caso

[3] Entendemos la noción de actividad en el sentido que propone la Teoría Histórico Cultural de la Actividad (CHAT) en su versión de segunda y tercera generación (Engënstron, 1987). La actividad se considera como unidad de análisis cuya estructura viene dada por seis elementos: sujeto, objeto/motivo, instrumentos, comunidad, reglas y división del trabajo.

están entrelazadas con otras cuestiones relativas al aprendizaje y la enseñanza en los distintos contextos y niveles educativos. El Cuadro 1 resume los principios típicos de cinco filosofías de las matemáticas ampliamente reconocidas.

Cuadro 1 – Principios de cinco filosofías de las matemáticas

Filosofía	**Objeto matemático**	**Modo de introducción**	**Significado**	**Verdad**	**Conocimiento matemático**	**Actividad matemática**
Platonismo	Ideal auto-existente	Descubrimiento	No contradicción	Formal	A priori y conceptual	Deductiva
Nominalismo	Símbolos	Convenciones	Ninguno	Convención	Ninguno	Manipulación formal de símbolos
Intuicionismo	Construcciones mentales	Invención	Reducibilidad a enteros positivos	Reducibilidad a cálculo numérico	A priori e intuitivo	Intuitiva y racional
Empirismo	Mental	Descubrimiento	Referencia a experiencia	Empírica	Empírico	Ensayo y error, racional y empírico
Materialismo conceptualista y ficcionista	Ficciones (clases de procesos cerebrales)	Invención y descubrimiento	Referencia conceptual y sentido contextual	Formal	A priori y conceptual	Abstracción, generalización, ensayo y error, analogía, inducción y deducción

Fuente: Bunge (1985, p. 120)

El platonismo matemático puede definirse como la conjunción de las tres tesis siguientes: (a) existencia: existen objetos matemáticos, y las oraciones y teorías matemáticas proporcionan descripciones verdaderas de tales objetos; (b) abstracción: los objetos matemáticos son abstractos, es decir, entidades no espaciotemporales; y (c) independencia: los objetos matemáticos son independientes de los agentes inteligentes y de su lenguaje, pensamiento y prácticas. Además, según los platónicos, los objetos abstractos son totalmente no físicos, no mentales, no espaciales, no temporales y no causales (Linnebo, 2009). El realismo empírico comparte con el platonismo la opinión de que las matemáticas son la descripción de objetos que existen independientemente de las personas y del lenguaje utilizado para representar estos objetos. Sin embargo, en lugar de situarlos más allá del espacio y el tiempo, el realismo empírico sitúa dichos objetos dentro de un mundo espacio-temporal. Las principales perspectivas a este respecto son el fisicalismo, el empirismo holístico y el empirismo radical (Font et al., 2013). Ernest (1998) ha destacado las consecuencias negativas que el platonismo y el realismo matemático, así como las posturas fundacionalista y absolutista, pueden tener para la educación matemática.

Además de las cinco filosofías incluida en la Tabla 1, existen otras contribuciones relevantes para la filosofía de la matemática educativa, como son las posiciones filosóficas sobre las matemáticas de Wittgenstein y Lakatos.

Wittgenstein (1976) se ocupó sobre todo de cuestiones de aprendizaje, comprensión, invención, utilizando ideas matemáticas elementales. La filosofía de las matemáticas de Wittgenstein se sitúa en el extremo opuesto de las corrientes de tipo platónico-idealista y también de los enfoques psicologistas. Plantea el reto de superar el platonismo dominante, y por tanto dejar de hablar de objetos matemáticos como entidades ideales que se descubren, y dejar de considerar las proposiciones matemáticas como descripción de las propiedades de tales objetos. Nos propone una visión alternativa: Las proposiciones matemáticas deben verse como instrumentos, como reglas de transformación de proposiciones empíricas. Por ejemplo, los teoremas de la geometría son reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos, de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas. La visión de Wittgenstein del lenguaje matemático como herramienta es también relevante para la matemática educativa. Argumentó que deberíamos considerar las palabras como herramientas y clarificar sus usos en nuestros juegos de lenguaje. Por ejemplo, no debemos perder de vista el hecho de que las palabras-numéricas son instrumentos para contar y medir, y que los fundamentos de la aritmética elemental, esto es, el dominio de la serie de números naturales se basa en el entrenamiento en el recuento.

En cuanto a las ideas de Lakatos sobre las matemáticas (Lakatos 1976), se resumen en las siguientes tesis (Bunge, 1985). En primer lugar, la investigación matemática no es esencialmente diferente de la investigación científica, ya que también implica la formulación de conjeturas y la búsqueda de contraejemplos a las mismas. En segundo lugar, dado que a menudo se parte de conceptos inexactos y se pueden cometer errores al demostrar teoremas, hay que adoptar una epistemología falibilista de las matemáticas. En tercer lugar, el formalismo no representa fielmente el trabajo real del matemático, que implica procedimientos no deductivos. En opinión de Bunge las tres tesis son razonables, pero no constituyen una filosofía de las matemáticas. Por un lado, Lakatos no expresa ideas claras sobre la naturaleza de los objetos matemáticos: estaba más interesado en la historia que en la ontología o la semántica de las matemáticas. Como cualquier otra persona que trata de resolver un problema, el matemático profesional está obligado a utilizar la analogía y la inducción, y a probar conjeturas hasta dar con la solución correcta, usando incluso herramientas materiales. Sin embargo, la lógica del descubrimiento matemático y los procedimientos heurísticos en la solución de problemas que describe Lakatos aportan elementos importantes para la filosofía de la matemática educativa. El progresivo crecimiento matemático, tanto desde el punto de vista cognitivo como histórico-cultural, no tiene por qué estar ligado a un estilo deductivista sino seguir los pasos de la heurística descrita en el libro *Pruebas y refutaciones*. Pero esto no significa que la matemática pura, como una formación epistemológica específica no sea fundamentalmente diferente de las ciencias fácticas.

En el campo de la educación matemática encontramos autores que abordan cuestiones propias de la filosofía de la matemática educativa. Tal es el caso de Sfard (2000) cuando analiza las relaciones entre los símbolos y los objetos matemáticos. El problema que aborda, expresado en términos semióticos, es: "Los símbolos matemáticos refieren a algo - ¿pero a qué?, ... ¿Cuál es el estatuto ontológico de estas entidades?, ¿De dónde vienen? ¿Cómo podemos acceder a ellas (o construirlas)?" (p. 43). Sfard rechaza la concepción que propone los signos y los significados como entidades independientes y adopta la visión de psicólogos como Vygotsky y semióticos como Peirce, de que los signos (el lenguaje en general) tienen un papel constitutivo de los objetos de pensamiento y no meramente representacional. La tesis central que defiende Sfard es que

> el discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos: La actividad discursiva, incluyendo la producción continua de símbolos, es la que crea la necesidad de los objetos matemáticos; y son los objetos matemáticos (o mejor el uso de símbolos mediado por los objetos) los que, a su vez, influyen en el discurso y le lleva hacia nuevas direcciones (Sfard, 2000, p. 47).

En Font et al. (2013) se argumenta que la forma en que se enseñan las matemáticas en las escuelas lleva a los alumnos a desarrollar, aunque sea implícitamente, una visión realista de la naturaleza de los objetos matemáticos. Esta visión supone que los enunciados matemáticos son una descripción de la realidad, y que los objetos matemáticos descritos por dichos enunciados forman parte de esta realidad.

> En el proceso de enseñanza esta "realidad" a la que pertenecen los objetos matemáticos se sitúa en un punto intermedio entre lo que, en filosofía de las matemáticas, se denominan posiciones platónica y empirista, aunque dependiendo del proceso de enseñanza considerado se puede observar una clara preferencia por uno u otro de estos dos puntos de vista, por ejemplo, en la enseñanza contextualizada o en la matemática realista (Font et al., 2013, p. 99).

El análisis que hacemos en este trabajo de las relaciones entre la matemática pura y aplicada aporta una explicación complementaria a este fenómeno educativo. Se trata de que los profesores y educadores matemáticos en general no discriminan las diferencias sustanciales entre las matemáticas aplicadas y las formales, y la necesidad que tiene la matemática educativa de identificar los conflictos y obstáculos que se generan en los procesos de aprendizaje cuando no se tienen en cuenta dichas diferencias.

4. Fundamentos de la matemática educativa según EOS

En el EOS se considera necesario problematizar el tipo de matemáticas cuyo estudio se realiza en los sistemas educativos. Asume que la matemática educativa debe adoptar una visión específica sobre la matemática adaptada al contexto del aprendizaje y la enseñanza. Esta visión debe complementar la visión lógica-formal, propia de los contextos de creación y justificación del conocimiento matemático, con la visión empirista-factual ligada a los contextos de aplicación. Se considera esencial distinguir entre la matemática pura o formal, la matemática aplicada y la matemática educativa, la cual es el resultado de procesos ecológicos de adaptación de las otras matemáticas a los distintos contextos y niveles educativos. En consecuencia, es necesario elaborar una filosofía de la matemática educativa que aborde los problemas epistemológicos (emergencia y desarrollo del conocimiento matemático), ontológicos (naturaleza y tipos de los objetos matemáticos) y semióticos (sintácticos, semánticos y pragmáticos) específicos de esta variedad de matemáticas.

El contexto educativo requiere, además, articular los problemas filosóficos de las matemáticas con cuestiones relativas a los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje, el cual tiene lugar en contextos histórico-culturales que los condicionan y soportan. Por tanto, el estudio de los fundamentos de la educación matemática requiere elaborar modelos teóricos específicos que tengan en cuenta los problemas filosóficos, psicológicos y socioculturales, entre otros, implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En los siguientes apartados presentamos una síntesis de los supuestos y constructos teóricos elaborados en el EOS que configuran los rasgos esenciales de una filosofía específica de la matemática educativa. Los constructos teóricos elaborados en el EOS que articulan cuestiones centrales de la filosofía con la psicología y sociología de la matemática educativa son:

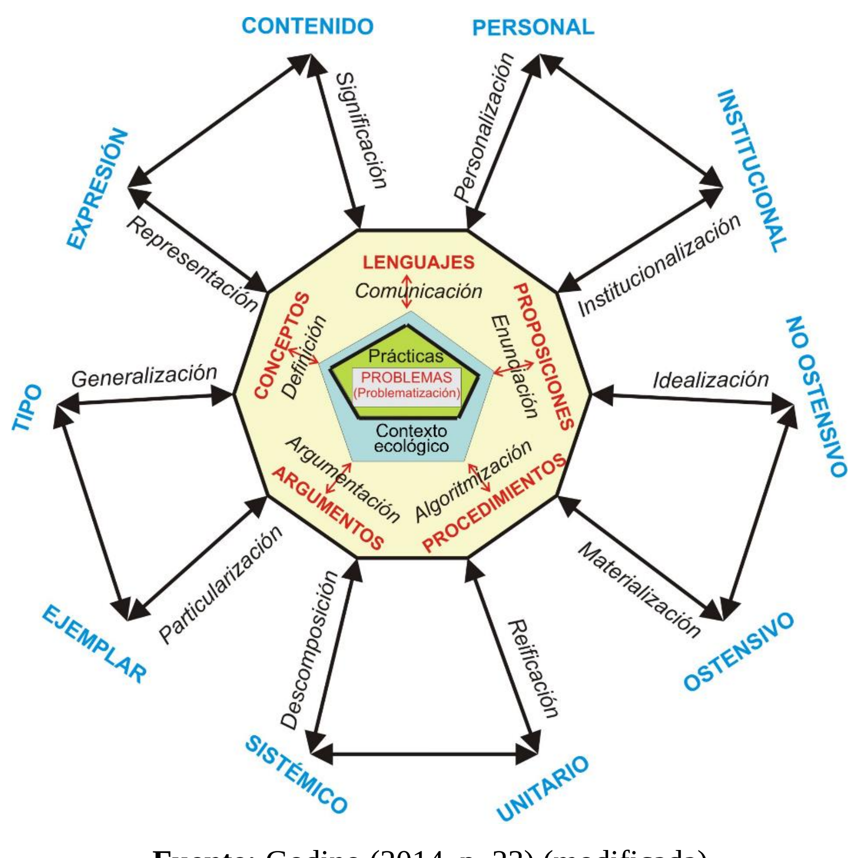
– Prácticas matemáticas.

- Objetos y procesos matemáticos.
- Atributos contextuales de las prácticas y objetos.

Estos constructos teóricos se articulan en la herramienta configuración de prácticas, objetos y procesos (*configuración ontosemiótica*) que explicamos en los siguientes apartados.

La herramienta configuración ontosemiótica (Figura 1) incorpora de manera híbrida elementos de las nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica usadas en educación matemática. En Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se puede ver el desglose analítico que aporta la noción de configuración ontosemiótica, tanto para los conocimientos institucionales como personales, con un ejemplo relativo al concepto de número natural. También se ejemplifica el uso de la herramienta función semiótica (dualidad expresión-contenido) para analizar un caso sobre el aprendizaje de la decena. Así mismo, en Font, Godino y Gallardo (2013) se analiza la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas realizadas para resolver problemas matemáticos.

Figura 1 – Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos



Fuente: Godino (2014, p. 23) (modificada)

4.1. La matemática como actividad

Como se indica en el Figura 1, la actividad de las personas para resolver problemas en un contexto ecológico (físico, biológico y social) determinado se considera el elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Esta manera de abordar el *problema epistemológico* de la génesis del conocimiento se hace operativa en el EOS con la noción de práctica matemática entendida como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Para resolver un problema el sujeto realiza una secuencia organizada de diversos tipos de prácticas operativas y discursivas con la intención de dar una respuesta al problema. A la cuestión epistemológico de cómo emerge y se desarrollan las matemáticas se da respuesta, por tanto, asumiendo una visión antropológica (Wittgenstein, 1953) y pragmatista (Peirce, 1958) de las matemáticas.

Un mismo tipo de problemas se resuelve con sistemas de prácticas que dependen de los contextos institucionales en que tienen lugar, por ejemplo, en el seno de comunidades de profesionales de las matemáticas, de personas que desarrollan nuevos conocimientos matemáticos o los aplican, así como en diversos contextos educativos. La relatividad de las prácticas respecto del contexto institucional y temporal añade una dimensión sociológica e histórica a la epistemología que asume el EOS.

> "Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen" (Godino y Batanero, 1994, p. 336).

Los problemas que son el origen o motivo de la actividad matemática pueden ser extramatemáticos, implicando por tanto cosas, objetos y hechos materiales, o bien intramatemáticos, en los que intervienen objetos de razón, no materiales o ideales. En la matemática educativa, sobre todo en los primeros niveles, se parte de problemas extramatemáticos, relacionados con el entorno y la vida cotidiana, y, por tanto, los objetos que intervienen en las prácticas pueden ser artefactos materiales y abstracciones, tanto empíricas como formales o teóricas.

Desde el punto de vista educativo es importante postular que la actividad matemática que se realiza para aprender matemáticas es de naturaleza diferente a la actividad de los profesionales de las matemáticas, mediante la cual se construyen nuevos conocimientos. En el primer caso, el aprendiz reconstruye conocimiento, que ya tiene una existencia histórico-cultural, mientras que, en el segundo, se inventan nuevos postulados y se descubren nuevas relaciones derivadas de los conocimientos previamente elaborados. De este hecho se deriva que el primer encuentro de los estudiantes con nuevos tipos de problemas y con los objetos matemáticos inventados para su solución puede requerir la implementación de patrones de interacción en los que el trabajo colaborativo y la transmisión de conocimientos tenga prevalencia respecto al trabajo autónomo del aprendiz.

La dualidad contextual personal-institucional

La articulación de las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático se logra en EOS atribuyendo a las prácticas matemáticas un doble carácter, personal (individual) o institucional (social). Las prácticas matemáticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución o comunidad de prácticas. No hay instituciones sin personas, ni personas desligadas de las diversas instituciones de las que forma parte (familia, escuela, etc.). La distinción entre prácticas personales e institucionales permite tomar conciencia de las relaciones dialécticas entre las mismos; por una parte, las personas están sujetas a los modos de actuación compartidos en el seno de las instituciones de que forman parte; por otra, las instituciones están abiertas a la iniciativa y creatividad de sus miembros. Con este postulado se articula la dimensión cognitiva (psicológica) a la dimensión epistemológica y sociológica del conocimiento matemático. La matemática, además de la dimensión lógico-formal tiene otra dimensión fáctica que da cuenta de los procesos de creación de los objetos matemáticos, como emergentes de las prácticas, no como existentes ideales platónicos que se descubren (Font et al., 2013). Desde el punto de vista personal, los objetos matemáticos tienen una existencia mental/neuronal, mientras que desde el punto de vista institucional su modo de existencia es cultural.

4.2. La matemática como sistema de objetos y procesos

Las matemáticas no pueden ser comprendidas simplemente como una actividad de las personas sino también como un sistema de objetos culturalmente compartidos, emergentes de dicha actividad. Se debe abordar el problema ontológico, esto es, clarificar qué es un objeto matemático, qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática, cuál es el *modo de ser* de los objetos matemáticos, en qué sentido las matemáticas hablan de objetos (Parson, 2008).

En el EOS, las prácticas matemáticas, esto es, las acciones realizadas por las personas ante cierto tipo de situaciones problemas, son el origen y razón de ser de las abstracciones, ideas u objetos matemáticos (Font et al., 2013). Se postula que objeto matemático es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando o regulando su realización. Se trata de un uso metafórico del término objeto, puesto que un concepto matemático se concibe usualmente como una entidad ideal o abstracta, y no como algo tangible, como una roca, un dibujo o un artefacto manipulativo. Esta idea general de objeto, consistente con la propuesta en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Cobb & Bauersfeld, 1995), es útil cuando se complementa con una tipología de objetos matemáticos al tener en cuenta sus diferentes roles en la actividad matemática.

Los seis tipos de entidades primarias postuladas en la Figura 1 amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Los problemas son el origen o razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para las acciones; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Los conceptos (número, fracción, derivada, etc.), como componentes de las configuraciones ontosemióticas, son concebidos como definiciones, visión diferente de la propuesta por Vergnaud (1990) como la tripleta formada por las situaciones, invariantes operatorios y representaciones. Esta idea de concepto como sistema es asumida en el EOS por el constructo configuración ontosemiótica. A su vez las configuraciones se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales, teorías, etc.

La constitución de los objetos y relaciones, tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, los cuales son interpretados como secuencias de prácticas. Los objetos matemáticos emergentes constituyen la cristalización o reificación resultante de tales procesos. La manera de interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, proporciona criterios para categorizarlos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.) y argumentación. La resolución de problemas –y de manera más general, la modelización, debe ser considerada más bien como megaproceso, al implicar la articulación de procesos primarios (establecimiento de conexiones entre los objetos y generalización de procedimientos, proposiciones y justificaciones) (Godino et al., 2007).

La dualidad personal-institucional también se aplica a los objetos y procesos. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como objetos personales. Los objetos personales incluyen a constructos cognitivos, tales como concepciones, esquemas, representaciones internas, etc.

4.3. La matemática como sistema de signos

La matemática educativa debe abordar el *problema semiótico-cognitivo*, ¿Qué es conocer y comprender un objeto matemático? ¿Qué significa un objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? Estas cuestiones se abordan en el EOS considerando que la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se conciben como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. Por ejemplo, entre el símbolo 2 y el concepto de número 2, como también entre el concepto de número natural y el sistema de prácticas operativas y discursivas de donde emerge tal objeto matemático, se establece una relación que el EOS denomina *función semiótica*. La función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión/ significante) y otro consecuente (contenido/ significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia. Este constructo está incluido en la Figura 1 como la dualidad expresión-contenido, el cual permite dar cuenta de cualquier uso que se dé al significado: el significado es el contenido de una función semiótica (Godino et al., 2021). En el EOS se asume que toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de expresión (significante), contenido (significado) o interpretante (regla que relaciona expresión y contenido). Los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. Se tiene de este modo el constructo *significado sistémico-pragmático* de un concepto (en general de cualquier objeto) como el sistema de prácticas operativas y discursivas que realiza una persona (significado personal) o en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de problemas matemáticos.

El constructo función semiótica permite describir el conocimiento matemático de una manera detallada y operativa como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre los objetos y las prácticas matemáticas. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) funciones semióticas, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de prácticas y objetos. Puesto que los sistemas de prácticas que se ponen en juego en la resolución de los problemas son relativos a las personas y a las comunidades de prácticas (instituciones), los significados pragmáticos, y, por tanto, los conocimientos, son relativos. No obstante, es posible reconstruir un significado global u holístico de un objeto mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que se ponen en juego para su solución. Dicho significado holístico se usa como modelo epistemológico y cognitivo de referencia de los significados parciales o sentidos que puede adoptar dicho objeto (Godino et al., 2021). Los constructos de significado institucional y personal permiten interpretar la comprensión en términos de acoplamiento progresivo de los significados personales del sujeto con los institucionales de referencia (Godino y Batanero, 1994).

La semiótica-cognitiva del EOS asume que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas etc.), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, incluso los problemas, pueden ser también antecedentes de las funciones semióticas. Por ejemplo, tiene sentido y es necesario, preguntarse tanto por el significado del concepto de número, como por el significado de las proposiciones, procedimientos, argumentos, situaciones y representaciones que intervienen en las prácticas numéricas. Los funtivos en la función semiótica también pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales. Se genera de este modo una variedad de tipos de significados, por tanto, de conocimientos y comprensiones, que orienta y apoya la realización de análisis ontosemióticos de la actividad matemática a nivel macro y micro, tanto desde el punto de vista socioepistémico (institucional) como cognitivo (personal) (Godino et al., 2021). De este modo la cognición, entendida en los términos semióticos del EOS es pragmatista, pero también empirista y racionalista. La acción es fuente de conocimiento, pero también la percepción y la razón.

4.4. Idealización, reificación y generalización según EOS

Para dar cuenta de los procesos de idealización, reificación y generalización se han introducido en la ontología del EOS tres pares de atributos contextuales desde los cuales se pueden considerar las prácticas y los objetos primarios: ostensivo-no ostensivo (material, inmaterial), unitario-sistémico y extensivo-intensivo (particular-general; ejemplar-tipo). Estos constructos permiten describir los tipos de abstracción (empírica y formal) que se ponen en juego en la actividad matemática, así como los objetos que intervienen y emergen en esos procesos. Así mismo, ayudan a comprender la imbricación entre las matemáticas puras y aplicadas, entre constructos y cosas, lo cual es necesario en la matemática educativa ya que, en los procesos de aprendizaje, al menos en los primeros niveles, es necesario partir de la realidad tangible para acceder a la realidad virtual de las matemáticas formales.

Dualidad ostensivo-no ostensivo

En el EOS se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar directamente a otro. Los símbolos, notaciones, gestos, representaciones gráficas, artefactos materiales tienen ese carácter; son objetos reales o concretos. Los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos son constructos, creaciones de la mente humana, objetos no ostensivos; dependen de los sujetos, de sus acciones y artefactos reales para su existencia. Pueden ser objetos mentales (cuando intervienen en las prácticas personales), u objetos institucionales (cuando intervienen en las prácticas compartidas). No obstante, el procesamiento mental y comunicación interpersonal de los objetos no ostensivos requiere que sean materializados mediante representaciones empíricas ostensivas. En ambos casos los objetos no ostensivos regulan la actividad matemática, mientras que sus representaciones ostensivas sirven de soporte o facilitan la realización de dicho trabajo. La distinción entre objeto ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en el que participan. Los objetos ostensivos también pueden ser pensados, imaginados por un sujeto o estar implícitos en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicación en notación algebraica); en estos casos, funcionan como intensivos. Esta dualidad permite dar cuenta de los procesos duales de idealización y materialización en la actividad matemática.

La dualidad unitario-sistémico

En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se supone, son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su análisis. “Un mismo objeto se puede considerar ora un individuo, ora un conjunto (o una colección concreta). No hay nada definitivo en ser un individuo (Bunge, 2011, p. 145). Por ejemplo, en el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, etc.) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje. Tanto las configuraciones ontosemióticas (en su versión socioepistémica o cognitiva) como los objetos primarios que las componen pueden considerarse desde las perspectivas unitaria o sistémica, dependiendo del juego de lenguaje en que participen. En el primer caso tienen lugar procesos de reificación (síntesis) y en el segundo de descomposición (análisis) del sistema en sus componentes.

Dualidad extensivo-intensivo (ejemplar-tipo)

Un rasgo característico de la actividad matemática es tratar de generalizar los tipos de problemas que se abordan, los procedimientos de solución, las definiciones, proposiciones y justificaciones. Las soluciones se organizan y justifican en estructuras progresivamente más generales. No obstante, en los procesos de instrucción se comienza a estudiar modelos particulares de dichas estructuras generales. El análisis de la actividad matemática requiere, por tanto, tener en cuenta ambos procesos, particularización y generalización, y los objetos que intervienen en dichos procesos. El proceso de generalización consiste en encontrar o conjeturar un patrón a partir de casos similares, mientras que la particularización en generar o mostrar ejemplares individuales que siguen un patrón.

En el EOS se ha introducido el atributo contextual extensivo-intensivo (ejemplar-tipo), aplicable a las prácticas y objetos primarios, para analizar la dialéctica entre particularización y generalización. Según el juego de lenguaje en que participe un objeto puede ser un ejemplar (extensivo) si interviene por sí mismo, o un tipo (intensivo) si interviene como representante de una clase más amplia.

> "Un objeto extensivo se utiliza como un caso particular (un ejemplo específico, p. e, la función $y = 2x + 1$), de una clase más general (p. e., la familia de funciones $y = mx + n$), que es un objeto intensivo. Los términos extensivo e intensivo vienen sugeridos por las dos formas de definir un conjunto, por extensión (un extensivo es uno de los miembros del conjunto) y por intensión (se consideran todos los elementos a la vez). Por extensivo entendemos un objeto particularizado (individualizado) y por intensivo, una clase o conjunto de objetos" (Font et al, 2008, p. 169).

Font y Contreras (2008) realizan un análisis microscópico de los objetos, procesos y funciones semióticas que se ponen en juego en la definición del concepto de derivada de una función. La aplicación de las dualidades ostensivo-no ostensivo, extensivo-intensivo, expresión-contenido les permite explicar los conflictos semióticos que plantea la dialéctica entre lo particular y lo general en educación matemática.

4.5. Procesos de abstracción y objetos abstractos en el EOS

En una primera aproximación podemos decir que la dualidad ostensivo-no ostensivo, y los procesos asociados de materialización e idealización dan cuenta de los objetos concretos (ostensivos) y abstractos (ideales) usualmente considerados en el lenguaje cotidiano. Pero el análisis de la actividad matemática, tanto desde un punto de vista profesional como educativo, requiere profundizar en la naturaleza del proceso de abstracción y de los objetos abstractos emergentes, así como en el proceso inverso de interpretación. Por esta razón se propone en el EOS complementar la dualidad ostensivo-no ostensivo con las dualidades unitario-sistémico y ejemplar-tipo, con lo cual el objeto abstracto matemático no es sólo un ente ideal (no ostensivo) sino también una generalidad, considerada como un todo unitario o como un sistema, según el juego de lenguaje en que participe. Como afirma Sinaceur (2014, p. 93), “la división abstracto/concreto integra la división general/particular y la división clase/individuo”. Además, dado que los objetos reificados son representados simbólicamente para intervenir en nuevos sistemas de prácticas, en el proceso de abstracción, esto es, de generación de conocimiento matemático, también interviene la dualidad expresión-contenido, y los procesos de representación y significación.

El postulado de la emergencia del objeto a partir de las prácticas (acciones) requiere sin duda relacionar el modelo de abstracción aquí descrito con la *abstracción reflexiva* de la epistemología genética Piagetiana. El proceso genético fundamental que permite construir una nueva estructura a partir de una anterior es el de la "abstracción reflexiva", que consiste en extraer determinados elementos de las estructuras inferiores para reflejarlos en nuevas operaciones, generalizando dichos elementos en una estructura superior.

> La abstracción reflexiva a partir de las acciones no implica una interpretación empirista en el sentido psicologista del término, pues las acciones en cuestión no son las acciones particulares de los sujetos individuales (o psicológicos): son las coordinaciones más generales de todo sistema de acciones, expresando así lo que es común a todos los sujetos, y refiriéndose por tanto al sujeto universal o epistémico y no al individual. (Beth & Piaget, 1974, p. 238).

Por otra parte, las prácticas matemáticas de las que emergen los objetos abstractos son intencionales, en el sentido de que se realizan con el fin de resolver problemas en contextos específicos. En consecuencia, el megaproceso de abstracción y los objetos abstractos emergentes, está condicionado y apoyado por el contexto ecológico (material, biológico y social) en el que tiene lugar la actividad. Esta observación lleva a relacionar la abstracción vista en el marco del EOS con el modelo de *abstracción en contexto* elaborado por Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus (2001).

> Un proceso de abstracción está influido por la(s) tarea(s) en la(s) que trabajan los estudiantes; puede capitalizar herramientas y otros artefactos; depende de las historias personales de los estudiantes y los profesores; y tiene lugar en un entorno social y físico particular. Adoptamos, pues, un punto de vista sociocultural, por oposición a un punto de vista puramente cognitivo o situacionista (Hershkowitz et al., 2001, p. 195-6)

No obstante, el análisis de las concordancias y complementariedades del modelo de abstracción derivada de los supuestos del EOS con la abstracción reflexiva y la abstracción en contexto deberá ser abordado en otros trabajos.

4.6. La matemática educativa como ecología de significados

Toulmin (1977) introdujo la expresión *ecología intelectual* en la epistemología del conocimiento para describir las cuestiones de función y adaptación de los conceptos y los métodos de pensamiento a las necesidades y exigencias reales de las situaciones problemáticas. Por su parte, Morín (1992) considera tan inadecuada la creencia en la realidad física de las ideas, como el negar un tipo de realidad y existencia objetiva al hábitat, vida, costumbres y organización de las ideas. Para Morin, las ideas en general (y por tanto las nociones matemáticas), además de constituir instrumentos de conocimiento, tienen una existencia propia y característica. El locus o lugar de la realidad matemática es para White (1983) la tradición cultural, es decir, el continuum de conducta expresada por símbolos. Dentro del cuerpo de la cultura matemática ocurren acciones y reacciones entre los distintos elementos. "Un concepto reacciona sobre otros; las ideas se mezclan, se funden, forman nuevas síntesis" (White, 1983; p. 274).

La metáfora ecológica sobre las ideas es útil para analizar las relaciones entre las matemáticas escolares y las matemáticas expertas. Estas relaciones suelen ser de subordinación, razón por la cual se usan las metáforas de la transposición didáctica, elementarización y transformación (Scheiner et al., 2022) para describir los procesos de selección y elaboración de las matemáticas escolares. En el EOS se propone la metáfora de la ecología de significados para describir dichos procesos y las relaciones entre los distintos tipos de matemáticas (Godino y Batanero, 1998). Cada objeto matemático tiene distintos significados, con diferentes grados de generalidad y niveles de formalización, por tanto, los agentes educativos seleccionan y secuencian los significados idóneos según el contexto, las capacidades y motivaciones de los estudiantes. La metáfora ecológica refleja bien los fenómenos de competición, simbiosis, colaboración y, en cierto sentido, las cadenas tróficas que se establecen entre los distintos tipos de conocimientos matemáticos (Godino, 1994). Solo los conocimientos mejor adaptados al contexto sobreviven o prosperan.

La metáfora ecológica sobre los conocimientos escolares parte del supuesto de que no hay una única matemática, sino múltiples y diversas, no solo como punto de partida (contextos profesionales) sino también como punto de llegada (contextos escolares). El progresivo crecimiento de los conocimientos a lo largo del currículo se describe mejor como un fenómeno de mutación impulsado por la acción educativa, desde formas más simples a formas más complejas, que como un fenómeno de transposición o transformación desde formas más abstractas hacia formas más elementales (Scheiner et al., 2022). La ecología de los significados, entendiendo los significados de los conceptos de forma sistémica y pragmática (Godino et al., 2021), refleja más fielmente las correspondencias entre los diferentes tipos de conocimiento implicados en los entornos educativos. La interpretación de los significados de un objeto matemático en términos de sistemas de práctica facilita la consideración de dichos sistemas, y en consecuencia los significados pragmáticos, como nuevos objetos que se relacionan con otros para formar nuevas estructuras.

5. Síntesis de los postulados filosóficos del EOS

La pluralidad de paradigmas y teorías que concurren en la educación matemática, la necesidad de su clarificación y articulación, son fuente de inspiración para la emergencia del EOS como campo de indagación científica y tecnológica (Godino, 2022). Con el fin de superar las fronteras entre las disciplinas filosóficas, psicológicas y sociológicas, en la medida en que se interesan por las matemáticas, su aprendizaje y difusión, se ha elaborado el constructo configuración ontosemiótica que incorpora elementos transdisciplinares, como se ha razonado en la sección 4. Un postulado esencial del EOS es la emergencia de los constructos matemáticos (conceptos, proposiciones, etc.) de las prácticas operativas y discursivas que hacen las personas al resolver problemas (Font et al., 2013). Los constructos o ideas matemáticas no tienen una existencia independiente de las personas, sino que son simultáneamente creación y descubrimiento (Cañón, 1993), asumiendo, por tanto, una posición antiplatonista. Los axiomas y postulados matemáticos son invenciones que tienen lugar en el cerebro de las personas, y aunque las proposiciones que se derivan de ellos no se conocen a priori y dan la impresión de que se descubren esto no justifica el platonismo.

La filosofía de la matemática educativa que propone el EOS, incorporada de manera implícita en el constructo configuración ontosemiótica (Sección 4), se resume en los siguientes postulados:

Dimensión ontológica

– Naturalismo. Admite existentes materiales y descarta la existencia independiente de las ideas, sean abstracciones físicas o formales. Pero rechaza el fisicalismo ya que niega que todos los objetos sean entidades físicas. Las prácticas matemáticas son acciones de las personas, y por tanto son procesos cerebrales y corporales (manipulativos y gestuales); cuando esas prácticas son compartidas en el seno de una comunidad se dice que son prácticas institucionales, las cuales son dependientes de la actividad cerebral de sus miembros y de las interacciones interpersonales que se establecen entre ellos.
– Sistemismo. Asume como tema de estudio los sistemas de prácticas, objetos y procesos, y los contextos en que tiene lugar la actividad matemática, articulados en el constructo configuración ontosemiótica.
– Emergentismo. Asume que el objeto matemático abstracto proviene de otras entidades previas (las prácticas operativas y discursivas) y no son reducibles a ellas.
– Pluralismo. Respecto de la diversidad de prácticas, objetos y procesos requeridos para la descripción y comprensión de la actividad matemática en sus diversas variedades.
– Dinamismo. Asume que los significados cambian con el tiempo y las circunstancias personales y contextuales.

Dimensión epistemológica

– Realismo. Se acepta que el conocimiento matemático, tanto formal como aplicado, emerge de las prácticas operativas y discursivas de las personas al resolver problemas. Se concede un tipo de realidad virtual o ficcionista a los objetos que emergen de la actividad matemática en interacción con objetos perceptibles y artefactos del entorno.
– Evolucionismo. Asume el postulado de que los significados personales e institucionales evolucionan y se desarrollan con el tiempo a medida que los sujetos abordan sucesivos problemas, progresivamente más complejos. La construcción de nuevos conocimientos parte de los que ya existen, ampliando y corrigiendo los que previamente se han producido por los individuos en el seno de comunidades históricas.

- Constructivismo social. Las configuraciones ontosemióticas cognitivas son creaciones de los sujetos, y las configuraciones socioepistémicas son fruto de la comunicación interpersonal. La construcción del conocimiento tiene lugar por el sujeto, pero en comunidad, cuyas normas promueven o inhiben la actividad investigativa.
- Racionalismo y empirismo moderado. Tanto la razón como la experiencia son necesarias para la construcción del conocimiento matemático; las prácticas matemáticas pueden ser operativas (implicando el uso de artefactos empíricos) como discursivas (implicando objetos de razón).
- Convencionalismo. Los conceptos-definiciones, las proposiciones y procedimientos matemáticos son reglas convencionales, no arbitrarias sino motivadas por la actividad de descripción y explicación de los objetos y hechos del mundo real y de los constructos virtuales. Este carácter convencional explica la necesidad y universalidad de los constructos matemáticos.
- Justificacionismo. Incluye los argumentos como un tipo de objeto primario. Estos argumentos pueden ser descriptivos, explicativos y justificativos, y utilizar los distintos tipos de razonamientos, basados tanto en la razón como en la experiencia.

Dimensión semiótica

- Realismo. En las teorías realistas del significado (Kutchera, 1979) las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades (objetos, atributos, hechos). Las palabras, los signos se hacen significativos por el hecho de que se le asigna un objeto, un concepto o una proposición como significado. De esta forma hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados. En la ontosemiótica se postula un tipo de funciones semióticas que son referenciales, designan en virtud de unas convenciones, ciertas entidades. De este modo se da cuenta de la *valencia representacional* de los lenguajes.
- Pragmatismo. En las teorías pragmáticas (operacionales) el significado depende del contexto en que se usan las palabras. Los signos se hacen significativos por el hecho de desempeñar una determinada función en un juego lingüístico, por el hecho de ser usados en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Los significados de los objetos matemáticos como sistemas de prácticas operativas y discursivas implican la aceptación de los postulados de las teorías pragmáticas y el reconocimiento de la *valencia instrumental* de los lenguajes.

En la ontosemiótica se asigna un papel esencial a la creación y manipulación de sistemas de signos como medios de representación de los distintos tipos de objetos y como instrumentos de la actividad matemática. Se consideran, por tanto, compatibles y complementarios los postulados representacionistas e instrumentalistas en las teorías semiótico-cognitivas.

6. Reflexiones finales

El EOS proporciona una visión transdisciplinar sobre la actividad matemática al tener en cuenta, de manera articulada, diferentes puntos de vista de las disciplinas interesadas por el conocimiento matemático, su aprendizaje y difusión. Se trata de los puntos de vista

– Epistemológico, la matemática como un modo particular de actividad humana, y su producto como un tipo especial de conocimiento.
– Ontológico, la matemática como producto acabado, como sistema de objetos y teorías.
– Psicológico, como un tipo particular de actividad mental (o cerebral).
– Sociológico, la matemática como un tipo de actividad social y su producto como un tipo especial de artefacto cultural.
– Histórico, las matemáticas como un proceso histórico de descubrimiento, invención y difusión en una sociedad determinada.
– Instrumental, la matemática como una herramienta para la ciencia, la tecnología y las humanidades.

Estas diferentes formas de ver las matemáticas son mutuamente compatibles, incluso complementarias. Por lo tanto, sería erróneo adoptar una de ellas y excluir todas las demás, ya que las matemáticas son simultáneamente todo lo que esos diferentes puntos de vista proporcionan.

Diversos autores han elaborado constructos y teorías para responder a los problemas epistemológicos, ontológicos y semiótico-cognitivos descritos en este trabajo como propios de la matemática educativa. El estudio de las concordancias y complementariedades del modelo propuesto por el EOS para estas cuestiones se ha abordado en trabajos previos[4]. En particular, se ha abordado la comparación con la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1992), la teoría APOS (Dubinsky & McDonald, 2001), la teoría de la objetivación (Radford, 2014), registros de representación semiótica (Duval, 1995), entre otras. Estos estudios de articulación

[4] Disponibles en el apartado “articulación de marcos teóricos” del repositorio web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

de marcos teóricos deberán ser ampliados en futuras investigaciones, en particular las concordancias con el marco de la "commognition" de Sfard (2008).

Los fundamentos de la matemática educativa descritos en la sección 4 están sirviendo para elaborar herramientas que permiten abordar cuestiones relativas al diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática. Los constructos, significados institucionales y personales, entendidos en términos pragmáticos y los tipos de significados propuestos, aportan criterios para el diseño curricular y el diseño de lecciones (Godino et al., 2014). Para abordar las cuestiones relativas al análisis de la implementación de los procesos de instrucción se ha elaborado la herramienta configuración didáctica (Godino et al., 2006). Así mismo, mediante la teoría de la idoneidad didáctica (Godino, 2013; Breda et al., 2018) se abordan cuestiones de evaluación de los procesos instruccionales y de formación de profesores. Todas estas herramientas se apoyan en la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático.

Referencias

Arboledas, L. C. y Castrillón, G. (2007). Educación matemática, pedagogía y didáctica. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 2.1, 5-27.

Beth, E. W. y Piaget , J. (1974). *Mathematical epistemology and psychology*. Springer.

Blumer, H. (1969). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32* (60), p. 255 - 278.

Bunge, M. (1977). *Ontology I: The furniture of the world.* Treatise on basic philosophy, Volume 3. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Bunge, M. (1985). *Epistemology and methodology III: Philosophy of science and technology*. Treatise on basic philosophy. Volume 7. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 6 (1), 27-40. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560102

Cañón, C. (1993). *La matemática: creación o descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une aproche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73–112.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne, Switzerland: Peter Lang.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton et al. (Eds.), *The teaching* *and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273–280). Dordrechet: Kluwer Academic Publishers.

Echeverría, J. (2007). *Filosofía de la ciencia.* Akal.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen, 1991.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany: State University of New York Press

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24* (2), 139-162.

Fischer, W. L. (2006). Historical topics as indicators for the existence of fundamentals in educational mathematics. An intercultural comparison. In F. K.S. Leung. K.-D. Graf and F. J. Lopez-Real (Editors), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A Comparative Study of East Asia and the West*. (Chapter 1-4, pp. 95-110). Springer.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52. DOI 10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*/1(52), 7-33.

Godino, J. D. (1994). Ecology of mathematical knowledge: an alternative vision of the popularization of mathematics. In A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, & R. Rentschler (Eds.), *First European Congress of Mathematics* (vol. 3, pp. 150–156). Birkhauser.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2013_idoneidad_didactica.pdf

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *2*(2), 1-24 - e202201.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In: A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.https://revue-rdm.com/2006/analisis-de-procesos-de/

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77* (2), 247-265

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34* (2/3), 167-200.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education 32*, 195-222.

Lakatos, l. (1976). *Proof and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Linnebo, Ø. (2009). Platonism in the philosophy of mathematics. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy*. Retrieved 02/01/2023 from https://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

Marquis, J. P. (2014). Mathematical abstraction, conceptual variation and identity. In P. Schroeder-Heister, W. Hodges, G. Heinzmann, and P. E. Bour (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the Fourteenth International Congress* (Nancy), 1-24. https://philpapers.org/archive/MARMAC-14.pdf

Morin, E. (1992). *El método. Las ideas. Su hábitat, su vida, sus costumbres, su organización*. Cátedra.

Parson, C. (2008). *Mathematical thought and its objects.* Cambridge University Press.

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vols. C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks (Eds.). Harvard University Press.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Scheiner, T., Godino, J. D., Montes, M. A., Pino-Fan, L. y Climent, N. (2022). On metaphors in thinking about preparing mathematics for teaching. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10154-4

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 38–75). London: Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sinaceur, H. (2014). Facets and levels of mathematical abstraction. *Philosophia Scientiæ*, 18(1), 81-112. https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.914

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics, 5*(2), 11-17.

Toulmin, S. (1977). *Human understanding*. Oxford University Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

White, L. A. (1983). The locus of mathematical reality: An anthropological footnote. *Philosophy of Science*, *14*(4), 289–303.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. The MacMillan Company.

Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza.