Implicaciones de la relaciones entre Epistemología e Instrucción Matemática para el Desarrollo Curricular: el caso de la Combinatoria[1]

Juan D. Godino, Carmen Batanero
Universidad de Granada

Resumen
Las tendencias actuales en filosofía de las matemáticas reconocen un triple carácter en esta disciplina: las matemáticas como quehacer humano, comprometido con la resolución de cierta clase de situaciones problemáticas; las matemáticas como lenguaje simbólico; y como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, emergente de la actividad de matematización. La instrucción matemática debe ser coherente, por tanto, con este triple carácter, tanto en la organización general del currículo, como en la planificación de las actuaciones del profesor en el aula. En este trabajo se analiza esta problemática, presentando el diseño de un currículo para la enseñanza de la combinatoria en los niveles de secundaria concordante con los supuestos epistemológicos explicitados.

Palabras clave: educación matemática, principios didácticos, diseño curricular, unidades didácticas, combinatoria

Abstract
Current trends in the philosophy of mathematics recognize a triple character in this discipline: mathematics as a human endeavor, committed to solving some types of problem situations; mathematics as a symbolic language and a conceptual system logically organized and socially shared, emerging from mathematization activities. Mathematics instruction should be consistent, therefore, with this triple character, both in the general organization of the curriculum, and in the planning of the teacher's actions in the classroom. In this paper we analyze this problem by presenting the design of a curriculum for teaching combinatory at secondary school levels consistent with the these epistemological assumptions.

Key words: mathematics education, educational principles, curricular design, didactical units, combinatory

1. Relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones

Aunque la epistemología o teoría del conocimiento es una rama de la filosofía que parece muy alejada de los intereses prácticos del profesor, desde hace tiempo se reconoce la importancia que tiene una visión adecuada de la naturaleza de las matemáticas como condicionante de los distintos modelos de instrucción, así como de la actuación de los profesores en clase (Dossey, 1992; Sriraman y English, 2010). Si se piensa, por ejemplo, que los objetos matemáticos tienen una existencia ideal, independiente del sujeto y de la realidad a la que se aplican, e incluso de la cultura, entonces quedaría justificada una

[1] *La matematica e la sua didattica,* 24 (1-2), 17-39. (2016).

instrucción basada en la presentación formal de los objetos matemáticos, que estarían determinados por sus definiciones. Las aplicaciones, los problemas matemáticos, serían, en esta concepción, un apéndice y en cierto modo serían un "adorno" que se tratarían después de que el alumno ya ha aprendido las matemáticas. En gran medida, la práctica de la enseñanza de las matemáticas en las pasadas décadas ha estado dominada por esta concepción.

Por el contrario, si se considera que las matemáticas son una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad y curiosidad del hombre por resolver cierta clase de problemas o disposiciones del entorno; que, asimismo, en la invención de los objetos matemáticos tiene lugar un proceso de negociación social y que estos objetos son falibles y sujetos a evolución, entonces el aprendizaje y la enseñanza debe tener en cuenta estos procesos. Esta última es la posición de las teorías psicológicas constructivistas, que están apoyadas en un constructivismo social como filosofía de las matemáticas, tal y como es descrito por Ernest (1998).

Esta dicotomía entre idealismo-formalista y constructivismo fue descrita, para el caso de la combinatoria, por Kapur (1970), quién en plena efervescencia de la "matemática moderna" abogaba por un desarrollo del currículo matemático que reconociera el papel esencial de las aplicaciones en el propio crecimiento de las matemáticas y, por tanto, también en su enseñanza - aprendizaje. En el trabajo mencionado, Kapur presenta una colección de problemas combinatorios cuyo tratamiento escolar permitiría sofocar el movimiento reformista que trataba de implantar un "baby Bourbaki" como texto de enseñanza de las matemáticas pre-universitarias, en consonancia con el Bourbaki universitario. Aunque ya se han superado estas ideas de la matemática moderna, este análisis puede todavía ser necesario para el recién graduado que se inicia como profesor y apenas conoce otra matemática que la “formal” aprendida en su licenciatura.

Kapur, en el artículo citado, describe dos concepciones extremas sobre las relaciones entre las matemáticas como disciplina científica, sus aplicaciones y el papel de éstas en los procesos de enseñanza-aprendizaje y que hemos recogido en nuestros trabajos (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2003). La primera de estas concepciones, todavía sostenida por algunos matemáticos, consiste en asumir que se deben construir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de una manera axiomática, rigurosa, abstracta y lógica, y después superponer sobre estas las estructuras de las aplicaciones. Según esta visión no se puede resolver ninguna aplicación, que no sea trivial, si antes no se ha dado un buen “fundamento matemático”. Para los que comparten esta visión, la matemática pura no tiene por qué guardar una estrecha relación con la matemática aplicada; podría desarrollarse de forma separada. El aprendizaje de los conceptos - en general, la adquisición de estructuras de pensamiento matemático puro- debe producirse con anterioridad al desarrollo de las aplicaciones. Éstas serían un "apéndice" en el conjunto de métodos matemáticos y no se produciría ningún perjuicio si este apéndice no es tenido en cuenta por el estudiante. Las personas que sostienen esta postura piensan que la matemática (en singular) es una disciplina autónoma que puede mantener intacta su vitalidad solamente mediante pura endogamia. Bajo los supuestos de esta concepción "idealista-platónica" de las matemáticas se puede construir un currículo casi perfecto, estéticamente satisfactorio. Filtrado por el proceso de abstracción sería un dominio de pensamiento purificado del "ruido" del mundo externo.

Siguiendo con la exposición de Kapur (1970), una segunda concepción sobre las matemáticas considera, por el contrario, que las matemáticas y sus aplicaciones deben mantenerse en íntima relación a lo largo del currículo. En esta concepción, ampliamente asumida por diferentes enfoques teóricos usados en la educación matemática actual, los estudiantes deberían comprender la necesidad de cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada. Incluso se piensa que los estudiantes deberían “crear” por sí mismos estos contenidos y comprender cómo estas matemáticas creadas satisfacen la necesidad sentida (para resolver un problema o responder una pregunta). Si se acepta esta postura, las aplicaciones de las matemáticas, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; éstas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y la creatividad humana a los problemas del entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. Cuando se aplica esta concepción a la enseñanza, se asume que los estudiantes deben ver, por sí mismos, que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias, con el fin de comprender los problemas de la Naturaleza y la Sociedad. Los partidarios de esta visión de las matemáticas y su enseñanza desearían poder aislar algunas estructuras fundamentales de la Naturaleza y la Sociedad y construir las estructuras fundamentales de las matemáticas alrededor de ellas, de modo que tuviera lugar una imbricación lo más perfecta posible entre las matemáticas y sus aplicaciones.

La elaboración de planes de formación matemática de acuerdo con esta concepción *constructivista* es más difícil, pues las estructuras de las ciencias físicas, biológicas, sociales son relativamente más complejas y además, el profesor de matemáticas debería adquirir suficiente conocimiento de los temas que usará para plantear las aplicaciones. Por tanto, el reconocimiento del isomorfismo de las estructuras de estas ciencias con las puramente matemáticas no es fácil. Hay una abundancia de material disperso que debe ser seleccionado, pero la tarea de selección e integración, así como la coordinación con otras restricciones del sistema de enseñanza no son fáciles de lograr.

2. Las matemáticas como quehacer humano, lenguaje simbólico y sistema conceptual

Teniendo en cuenta tendencias recientes en filosofía de las matemáticas (Tymoszko, 1986; Ernest, 1998), que sintetizan posiciones de autores como Witgenstein y Lakatos, Godino, Batanero y Font (2003) distinguen en las matemáticas tres aspectos esenciales, mutuamente imbricados, que deben ser tenidos en cuenta en la organización de su enseñanza:

a) Las matemáticas constituyen una actividad socialmente compartida de resolución de situaciones problemáticas, que se pueden referir al mundo natural y social, o bien pueden ser internas a la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, ...).
b) Las matemáticas pueden verse como un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones- problemas y las soluciones a los mismos; al igual que la música,

son un lenguaje universal en el que los signos empleados, su semántica y sintaxis son compartidos en los diferentes grupos humanos. Como todo lenguaje, implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.

c) Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, lógicamente organizado y socialmente compartido; la organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explican también gran número de las dificultades en el aprendizaje; un sistema no puede reducirse a sus componentes aislados, ya que las interrelaciones entre los mismos son una parte esencial. Surge así una paradoja en la enseñanza de las matemáticas: cada concepto no puede enseñarse adecuadamente de forma aislada de otros conceptos; tampoco pueden enseñarse los diferentes conceptos simultáneamente; en consecuencia, cabría pensar que no es posible su enseñanza. Este problema se resuelve, al menos parcialmente, con la consideración del currículo "en espiral" (Bruner, 1960): cada concepto es tratado varias veces a lo largo de la enseñanza, las primeras veces de modo implícito; progresivamente se va tomando como objeto de estudio en sí mismo, aumentando el grado de complejidad y completitud.

Las matemáticas constituyen, por tanto, una *realidad cultural* constituida por conceptos, proposiciones, teorías,... (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de las situaciones-problemas (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007).

Como ingredientes característicos de la actividad de matematización (Freudenthal, 1991) podemos destacar la representación simbólica, la búsqueda de lo esencial entre los distintos contextos, situaciones, problemas o procedimientos, la generalización, axiomatización, validación, etc.

3. Conocer y aprender matemáticas: su relación con la resolución de problemas

Como consecuencia de esta conceptualización del conocimiento matemático, *conocer* o *saber* matemáticas, por parte de una persona, no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Debe implicar ser capaz de usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas. Un sujeto no puede atribuir un sentido pleno a los objetos matemáticos a menos que éstos se relacionen con la actividad de la que indisolublemente emergen (Font, Godino y Gallardo, 2013).

En consecuencia, la actividad de resolución de problemas es uno de los pilares del aprendizaje significativo de las matemáticas. La resolución de problemas no debe considerarse como un nuevo contenido a añadir al currículo matemático, como un apéndice de la enseñanza tradicional. Esta actividad es uno de los vehículos esenciales del aprendizaje de las matemáticas, además de una fuente de motivación intrínseca hacia la misma, ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Permite, asimismo, atribuir significado a las prácticas de índole matemática realizadas, mediante el reconocimiento de una finalidad o intención en las mismas (Godino y Batanero, 1994).

De acuerdo con Brousseau (1986; 1998) el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos: el alumno debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles. Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo del matemático profesional: debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos, ya que debe buscar las mejores situaciones que den sentido a dichos conocimientos y ayudar al alumno en la búsqueda de las soluciones.

La dimensión cultural del conocimiento matemático es tenida en cuenta en la epistemología descrita por Brousseau, al proponer que el profesor debe ofrecer a los alumnos los medios de encontrar lo que es el "saber cultural" que se le quiere enseñar. Los alumnos deben, a su vez, redescontextualizar y redespersonalizar su saber, de modo que identifiquen su producción con el saber que se usa en la comunidad científica y cultural de su época.

Esta formulación del aprendizaje matemático se corresponde con las teorías constructivistas, ampliamente asumidas, como lo prueba su inclusión en documentos curriculares de amplia difusión (NCTM, 2000):

> "Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de sus aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso. Cuando son desafiados con tareas elegidas de manera apropiada, los estudiantes adquieren confianza en su habilidad para abordar problemas difíciles, desean resolver las cosas por sí mismos, muestran flexibilidad al explorar ideas matemáticas e intentar vías de solución alternativas, y disposición para perseverar" (NCTM, 2000, p. 20).

Los puntos de vista constructivistas sobre el aprendizaje desplazan el centro de atención hacia los procesos propios de la disciplina, el trabajo práctico, la realización de proyectos y resolución de problemas, en lugar de priorizar el estudio de los hechos, leyes, principios y teorías que constituyen el cuerpo de conocimientos de dicha disciplina.

4. Instrucción matemática: necesidad de una teoría de situaciones didácticas

Como se ha indicado, en términos generales, nuestra concepción de las matemáticas y su aprendizaje se sitúa en la posición constructivista. No obstante, consideramos que el aprendizaje de conceptos científicos complejos, en adolescentes y personas adultas, no sigue solamente las pautas del constructivismo individualista en sentido estricto (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2015). Es necesario indagar sobre la aplicación, a la enseñanza de las matemáticas, de teorías cognitivas del aprendizaje más integradoras, como las de Vigotsky y Ausubel, y los planteamientos didácticos de educadores matemáticos como Freudenthal (1991), con su propuesta metodológica para la enseñanza de las matemáticas que denomina "reinvención guiada", o la Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986; 1998).

Una interpretación ingenua del constructivismo conduce a atribuir un papel limitado a la enseñanza, esto es, al trabajo del profesor en su labor de facilitar el aprendizaje; ésta quedaría reducida a la selección de situaciones problemáticas significativas para los alumnos.

Como se ha indicado, las matemáticas no constituyen solamente una actividad sino también son un lenguaje simbólico y un sistema conceptual lógicamente organizado, aunque no en una jerarquía estricta de niveles de abstracción y complejidad. Si consideramos el aprendizaje de una lengua, aunque la práctica en la conversación desde el comienzo del aprendizaje sea una cuestión fundamental, si queremos lograr un aprendizaje funcional que permita la comunicación, el progreso conseguido, una vez superada la etapa inicial, es muy escaso si no se realiza un estudio sistemático de la gramática de dicha lengua.

Por otro lado, disponemos de todo un sistema conceptual previo que nos proporcionan la solución de un sinnúmero de problemas y que resulta del trabajo anterior de las mentes matemáticas más capaces,. Esta herencia quedaría desaprovechada si cada estudiante tuviese que redescubrir por sí mismo toda la matemática que se le tratan de enseñar. La ciencia, y en particular las matemáticas, no se construyen en el vacío, sino sobre los pilares de los conocimientos construidos por nuestros predecesores. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos.

Consideramos, en consecuencia, que las teorías asociacionistas del aprendizaje (Ausubel, Novak, y Hanesian, 1983) aplicadas a la formación de conceptos y al conocimiento de ciertas relaciones y representaciones puede lograrse de un modo eficaz con la ayuda de las explicaciones del profesor y la interacción social en el aula, añadida a la actividad de resolución de problemas.

La atención sistémica a los tres aspectos o dimensiones de las matemáticas (actividad, lenguaje, red conceptual) está en la base, según nos parece a nosotros, de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986; 1998), quien propone el diseño de situaciones de formulación/ comunicación, validación e institucionalización como complementos imprescindibles de las situaciones de acción o investigación. El tipo de discurso, o sea la comunicación oral o escrita en el aula, realizada por el profesor y los alumnos es un aspecto central determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si el núcleo de la comunicación solo se produce por el profesor hacia los alumnos, de forma escrita a través de la pizarra, los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas, y adquirirán una visión diferente de las matemáticas, que si tiene lugar una comunicación más rica entre profesor y alumnos y entre éstos entre sí.

Además, las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos a fin de que los asuman como propios y deseen resolverlos; constituyen un primer encuentro de los alumnos con los objetos matemáticos implícitos, en el que se les ofrece la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.

La Teoría de Situaciones Didácticas formulada por Brousseau constituye, desde nuestro punto de vista, una teoría del aprendizaje organizado de las matemáticas, esto es, una teoría de la instrucción matemática, en consonancia con los presupuestos epistemológicos y psicológicos expresados anteriormente. Describe un entorno de aprendizaje potente en el que no sólo se presta atención al saber matemático puesto en juego en las tareas, sino también a las actividades de comunicación en el aula, todo ello en una secuencia organizada de situaciones didácticas.

5. Implicaciones para el desarrollo curricular: el caso de la combinatoria en secundaria

La perspectiva de las matemáticas y de su enseñanza esbozadas en los apartados anteriores ha de tener consecuencias sobre el diseño de planes de educación matemática, esto es, en el currículo matemático, entendido este como un plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje (NCTM. (1989).

A continuación se sintetizan, los supuestos didácticos que consideramos deben guiar la elaboración de propuestas curriculares para la educación matemática, que sean coherentes con los presupuestos epistemológicos explicitados anteriormente:

1. El fin primordial de la acción del profesor en el aula es ayudar a los alumnos a desarrollar su razonamiento matemático, su capacidad de resolución de problemas, de formulación y comunicación de ideas matemáticas y el establecimiento de relaciones entre las distintas partes de las matemáticas y restantes disciplinas. Asimismo, es prioritario favorecer una buena disposición hacia las matemáticas y su quehacer.
2. Se debe prestar una atención especial a la organización de la enseñanza y el aprendizaje: lo que los alumnos aprenden depende fundamentalmente de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Este supuesto implica, además de una cuidadosa selección de las tareas, el diseño de situaciones didácticas que proporcionen oportunidades a los alumnos de indagar personalmente problemas significativos para ellos y relevantes desde el punto de vista matemático, a formular hipótesis y conjeturas, utilizar diversos tipos de representaciones; a validar sus soluciones y comunicarlas a otros, dentro de un clima cooperativo y de discusión científica.
3. Hay que llevar al alumno al reconocimiento progresivo del grado de desarrollo actual de las matemáticas, como conjunto de conocimientos y de su aplicabilidad en distintas ramas de la actividad humana. El fin perseguido es la asimilación progresiva del conocimiento matemático por los alumnos, esto es, la construcción de una red de conceptos y procedimientos, así como el dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático objetivo. Con dicho fin se deben diseñar situaciones específicas de institucionalización de los conocimientos pretendidos.
4. El currículo ha de ser flexible, para poder ser adaptado a las capacidades de los distintos alumnos.

5. Los objetivos de aprender a realizar conjeturas y argumentos, formular y resolver problemas, o sea, el aprendizaje significativo de las matemáticas, deben alcanzar a todos los alumnos. Para ello se deben proponer situaciones problemáticas introductorias sobre las que toda la clase puede trabajar, pero, además, se deben proporcionar actividades de desarrollo y sugerencias para los alumnos más capacitados.
6. La observación continuada de los procesos de enseñanza- aprendizaje debe ser la principal estrategia evaluadora de los mismos.

5.1. Elementos de un diseño curricular para la enseñanza del análisis combinatorio

A título de ejemplo, describimos, a continuación, los principales elementos de una propuesta de desarrollo curricular sobre Combinatoria, presentada con detalle en Batanero, Godino y Navarro- Pelayo (1994). La organización general de este currículo tiene en cuenta la estructura de la Combinatoria, el campo de problemas que da sentido a las misma, así como los aspectos representacionales y simbólicos. Las actitudes matemáticas y la valoración del quehacer matemático por parte de los alumnos se lograrán como consecuencia del diseño global del currículo y de las relaciones personales y afectivas que el profesor cultive en el aula.

En España, la enseñanza de la Combinatoria ha estado aislada del resto de los temas del currículo matemático, excepto de la probabilidad. Esta enseñanza se ha centrado en el aprendizaje de fórmulas combinatorias y en la realización de ejercicios de cálculo de expresiones combinatorias, o en la identificación de la operación combinatoria contenida en un enunciado verbal. Posiblemente debido a este planteamiento, el tema ha sido considerado como uno de los más difíciles por los profesores, quienes con frecuencia, han preferido omitir su enseñanza. Incluso, en los diseños curriculares (MEC, 2007; MECD, 2014), el tema se ha suprimido prácticamente, siendo reducido a una tímida mención al conteo y a los diagramas en árbol dentro del bloque de la probabilidad.

Estas propuestas contrastan con las presentadas en los "Estándares" del NCTM (1989), en los que se afirma que el razonamiento combinatorio es una herramienta útil en los esquemas cognitivos de los estudiantes puesto que es la base de la matemática discreta, cuya enseñanza había sido reclamada por numerosos autores (Kenney y Hirsch, 1991). En los Principios y Estándares 2000 (NCTM, 2000) se incluyen las principales cuestiones de esta rama de las matemáticas, que se distribuyen a través de diferentes Estándares de contenido, en vez de recibir un tratamiento separado, y se tratan en todos los niveles. Como rama activa que es de las matemáticas contemporáneas, ampliamente utilizada en los negocios y en la industria, así como en las ciencias biológicas, física y química (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997; English, 2005).

Los problemas combinatorios constituyen un medio excelente para que los estudiantes realicen actividades de matematización, dar significado a otras herramientas conceptuales básicas y relacionar entre sí varias ramas de las matemáticas Finalmente, se debe recordar que la capacidad combinatoria es considerada por Piaget e Inhelder (1951) como un constituyente fundamental del razonamiento formal y que Fischbein (1975) señala la necesidad de estimular el desarrollo psicoevolutivo del razonamiento combinatorio mediante una instrucción apropiada. A pesar de ello, el razonamiento combinatorio no se desarrolla en forma espontánea; y la enseñanza implementada hasta la fecha no parece mejorar el razonamiento combinatorio ni en los alumnos de secundaria ni tampoco en estudiantes con preparación matemática avanzada (Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997; Godino, Batanero y Roa, 2005).

Por las razones descritas, la combinatoria debiera ser una parte integral del currículo y desarrollarse a lo largo de diferentes etapas educativas, siguiendo la idea de currículo en espiral. Una primera elección en la elaboración de dicho currículo es su distribución a lo largo de un prolongado período de tiempo. En Batanero, et al. (1994), proponemos unidades didácticas desde los últimos años de educación primaria (10-11 años) hasta el final de la secundaria no obligatoria (17-18 años). Los conceptos y procedimientos se presentan cíclicamente, incrementando progresivamente la profundidad del estudio. En lugar de limitarnos a las clásicas unidades sobre variaciones, combinaciones y permutaciones, el análisis combinatorio elemental se presenta estructurado de acuerdo con tres modelos específicos que permiten resolver una gran cantidad de problemas combinatorios, tanto simples como complejos: los modelos de muestreo, colocación de objetos en urnas y partición de conjuntos (Batanero, Navarro-Pelayo y Godino,1997). La potencia de los procedimientos combinatorios se presenta también con referencia a las sucesiones recurrentes, métodos lógicos, grafos y árboles, etc., que se usan para conectar el tema con la matemática discreta, de la que el análisis combinatorio es un núcleo central (English, 2005).

Consideramos que el currículo matemático debe atender a la estructura de los campos conceptuales y procedimentales correspondientes, su interdependencia con los campos de situaciones-problemas prototípicas de los cuales emergen y a las peculiaridades del lenguaje simbólico matemático. Asumiendo esta idea de currículo y teniendo en cuenta los supuestos epistemológicos y didácticos enunciados en las secciones anteriores, nuestra propuesta de un currículo coherente para la enseñanza de la Combinatoria desarrollada en Batanero, et al. (1994), incluye los siguientes elementos:

a. Una muestra de problemas combinatorios en los que están sistemáticamente representados los distintos tipos de problemas y situaciones de uso y las variables de tarea correspondientes, clasificados según niveles de complejidad. La Combinatoria se ha dividido en una serie de núcleos temáticos (Tabla 1), para cada uno de los cuáles hemos seleccionado una secuencia de situaciones - problemas que, desde nuestro punto de vista, dan sentido a dicho núcleo conceptual o procedimental, mostrando a los alumnos la gama de diversas aplicaciones de la combinatoria y sus conexiones con otras nociones matemáticas. En la Tabla 2 se clasifican los problemas combinatorios según distintos criterios. La Tabla 3 describe los contextos de aplicación incorporados en la colección de problemas incluidos en la propuesta curricular.

b. Los conceptos, modelos y técnicas combinatorias elementales, emergen y adquieren sentido a través de la muestra de situaciones-problemas y delimitan el conocimiento matemático objetivo del análisis combinatorio elemental. La Tabla 4 contiene los distintos modelos combinatorios y procedimientos tenidos en cuenta en el desarrollo de las distintas unidades didácticas.

Tabla 1: *Relación de unidades didácticas*

Enseñanza primaria 1. Enumeración sistemática 2. Regla del producto y diagramas en árbol **Enseñanza secundaria (1er ciclo)** 3. Grafos. Regla de la suma 4. Modelo de colocaciones. Caso de objetos distinguibles 5. Modelo de colocaciones. Caso de objetos indistinguibles	**Enseñanza secundaria (2º ciclo)** 6. Muestras ordenadas. Variaciones. 7. Permutaciones. Números factoriales. 8. Muestras no ordenadas. Combinaciones **Bachillerato** 9. Colocación y distribución de objetos 10. Subpoblaciones y particiones. Números combinatorios 11. Principio de inclusión y exclusión. Otros métodos lógicos 12. Procedimientos analíticos. Funciones generatrices.

Tabla 2: *Clasificación de los problemas combinatorios*

Por la solución pedida: - Existencia - Enumeración - Recuento - Clasificación - Optimización - Propiedades de los números combinatorios y manipulaciones algebraicas **Por el número de operaciones combinatorias:** - simple - compuesto **Por el modelo combinatorio implícito en el enunciado:** - selección, - colocación, - partición, - ordenación,	**Por el tipo de objetos que se combina:** - personas, - números, - letras, - objetos, ... **Por el tamaño de los parámetros y si son variables:** - pequeños - grandes - no variables - variables

Tabla 3: *Contextos de aplicación de la combinatoria*

Probabilidad: Enumeración de posibilidades Aplicación de la regla de Laplace Distribuciones discretas de probabilidad Caminatas aleatorias Números aleatorios; aleatoriedad Coincidencias **Estadística:** Cálculo de momentos Diseño de experimentos Muestreo **Geometría** Recubrimientos planos	**Biología** Transmisión de caracteres hereditarios Código genético **Física** Teoría cinética de los gases **Química** Enumeración de isómeros **Teoría de grafos** Caminos, circuitos, trayectorias Colorear vértices, aristas, regiones **Matemática recreativa y juegos** Cuadrados mágicos

Figuras geométricas Intersecciones, retículas Composición de figuras **Teoría de números:** Números figurados Descomposición de un entero en sumandos Numero de divisores de un entero; divisibilidad Sistemas de numeración Aritmética modular Números enteros **Algebra** Grupos de permutaciones; grupos cíclicos Potencia del binomio; triángulo de Pascal Matrices , Determinantes Ecuaciones con soluciones enteras Funciones polinómicas; desarrollo en serie Teoría de conjuntos; aplicaciones	Arte, dibujo, manualidades Pasatiempos numéricos Dominós Ajedrez Otros **Ciencias de la computación** Almacenamiento de la información Códigos y lenguajes Algoritmos **Investigación Operativa** Determinación de rutas; transporte Asignaciones Distribución y colocación de objetos y personas Organización de comités, torneos,.. Producción

Tabla 4: *Modelos y procedimientos combinatorios*

MODELOS COMBINATORIOS	PROCEDIMIENTOS COMBINATORIOS
1. Modelo de selección: Población y muestra -Muestreo ordenado con reemplazamiento: Variaciones con repetición -Muestreo ordenado sin reemplazamiento: Variaciones; Permutaciones Permutaciones con repetición Permutaciones circulares -Muestras no ordenadas con reemplazamiento: Combinaciones con repetición -Muestras no ordenadas sin reemplazamiento: Combinaciones **2. Modelo de colocación/asignación: aplicaciones** - Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas: Aplicaciones inyectivas: variaciones Aplicaciones biyectivas: permutaciones Aplicaciones cualesquiera: variaciones con repetición - Colocación de objetos indistinguibles en casillas distintas: Aplicaciones inyectivas: combinaciones Aplicaciones cualesquiera: combinaciones con repetición - Otras posibilidades en el modelo de colocación **3. Modelo de partición:** - Traducción al modelo de colocación - Caso de la bipartición	**Procedimientos gráficos:** Diagramas en árbol Grafos **Procedimientos numéricos:** Reglas básicas de cálculo combinatorio: Regla del producto Regla de la suma Regla del cociente Números combinatorios Números factoriales Números de Stirling **Procedimientos lógicos:** Clasificación Demostración por reducción al absurdo Demostración por inducción Enumeración sistemática Principio de inclusión-exclusión Recurrencia **Procedimientos tabulares:** Matrices Tablas **Procedimientos analíticos:** Funciones generatrices

5.2. Elementos para la programación de aula

En el texto citado de Batanero, et al. (1994) se proporciona a los profesores información básica para el diseño de unidades didácticas en consonancia con los supuestos pedagógicos descritos. Proponemos que cada unidad se organice alrededor de un contenido matemático específico (enumeración sistemática, regla del producto, etc.), que es el concepto o procedimiento cuyo aprendizaje se pretende de modo más específico. Esto no quiere decir que este objeto matemático se trate sólo en dicha unidad, ni que aparezca aislado. Muy al contrario, en cada unidad se "trabajará" con un rico "enjambre" de objetos, la mayor parte de una manera implícita, o sea como herramientas conceptuales que intervienen en la resolución de los problemas. Además, el contenido pretendido en una unidad será usado y relacionado con otros en distintas unidades, lo que complementa su significación.

La información que proporcionamos al profesor sobre cada unidad como orientaciones metodológicas (no prescripciones, aunque a veces indiquemos "se debería ..."), puede ser útil para la elaboración de sus proyectos curriculares de aula sobre el tema de combinatoria. Esta información se ha estructurado en los cuatro apartados que describimos a continuación.

Descriptores de la unidad:

Aquí indicamos el nivel de enseñanza para el cual se propone, los objetivos prioritarios pretendidos, los contenidos (conceptos, propiedades y procedimientos) que desglosan el contenido indicado en el título de la unidad, los requisitos previos que, en cuanto a conocimientos, los alumnos deben satisfacer para el desarrollo de la unidad y el material manipulativo cuando se precisa alguno.

Situaciones, problemas y ejercicios:

En este apartado proporcionamos una colección de enunciados de "situaciones problemáticas" en torno de las cuales debería girar la actividad de la clase y el discurso del profesor y de los alumnos. Estas actividades las clasificamos en tres grupos: (1) Situaciones introductorias; (2) Situaciones complementarias y (3) Ejercicios y aplicaciones.

En las situaciones introductorias y complementarias se proponen actividades de las cuales emerge específicamente el contenido pretendido en la unidad. Generalmente para cada situación se plantean varias cuestiones de complejidad progresiva, comenzando por preguntas en que se deje al estudiante explorar el problema tratando sus propias soluciones. Constituyen, por tanto, las consignas iniciales para generar en la clase un entorno que promueva el interés de los alumnos (así al menos lo deseamos) y la actitud investigadora de los mismos.

Las situaciones y cuestiones que siguen la secuencia atienden a distintas variables de tarea y niveles de complejidad del contenido pretendido y procuran progresivamente profundizar en dicho contenido, guiando al alumno en su construcción del conocimiento. Por tanto, pueden ser usadas para tener en cuenta la diversidad de capacidades de los alumnos. Aunque inicialmente todos los alumnos puedan trabajar sobre una misma situación introductoria, las cuestiones más complejas y las situaciones complementarias pueden ser propuestas a los alumnos más aventajados.

Los enunciados de los "ejercicios y aplicaciones" responden a la necesidad de que los alumnos adquieran un cierto dominio de las técnicas introducidas y las apliquen a nuevas situaciones.

Análisis de los contenidos y de la gestión de la clase

Como se ha indicado, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986; 1998) que nos sirve de referencia resalta el papel de las situaciones de acción para que los alumnos doten de sentido a las nociones y procedimientos matemáticos. Pero es ingenuo pensar que proponiendo problemas más o menos ingeniosos a los alumnos, éstos van a reinventar todas las matemáticas. Así pues, tras de cada situación de acción, en la que los alumnos han tratado de encontrar y de formular las respuestas pertinentes (trabajando en equipo, preferentemente) es necesario organizar situaciones (o momentos) de comunicación de los resultados y de argumentación o validación de las soluciones propuestas.

De este modo se habrá logrado crear unas condiciones propicias para el momento o situación de institucionalización de los conocimientos pretendidos, con el grado de formalización que el profesor juzgue pertinente según el desarrollo de las situaciones previas y el nivel particular de los alumnos. Asimismo, el profesor deberá hacer referencia a otros objetos matemáticos ya conocidos por los alumnos y a problemas previamente trabajados; esto ayudará al establecimiento de conexiones matemáticas.

Todo este trabajo del profesor encierra una notable complejidad y es de suma importancia, ya que pequeños cambios en la gestión de la clase (en el orden de presentación de las cuestiones, sugerencias que proporcione a los alumnos en momentos claves de los procesos de resolución, y en el grado de formalización que finalmente exponga) condiciona el aprendizaje logrado por los alumnos.

Con el fin de tratar de ayudar al profesor en esta delicada labor hemos incluido en la sección que denominamos "análisis de los contenidos y de la gestión de la clase" algunas indicaciones sobre posibles conexiones matemáticas y el tipo de institucionalización deseable. Como se describe en Godino, Batanero, Cañadas y Contreras (2015), aunque es necesario establecer diseños instruccionales basados en el uso de situaciones – problemas ricas, que guíen el aprendizaje y la toma de decisiones a nivel global e intermedio, el funcionamiento local de los sistemas didácticos requiere una atención especial a la gestión de los conocimientos previos necesarios de los estudiantes para la solución de las situaciones, y a la sistematización de los conocimientos emergentes. Las decisiones sobre el tipo de ayuda que es necesario dar a los estudiantes tienen un componente esencialmente local y son responsabilidad del profesor, quién necesitará de guías que le orienten en la toma de decisiones para optimizar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio que debe gestionar.

Soluciones de las situaciones, problemas y ejercicios
Aunque creemos que los profesores a los que va dirigido el libro citado están capacitados para resolver las cuestiones que se proponen en las distintas unidades hemos creído conveniente ofrecer la solución de las mismas. En algunos casos porque la resolución puede requerir un tiempo excesivo del que el profesor no dispone habitualmente. Además, sólo mediante un examen pormenorizado de los posibles procesos de resolución se pueden apreciar los conceptos, procedimientos matemáticos, proposiciones y argumentaciones que se despliegan en los mismos, las dificultades específicas que puedan surgir y la índole específica del razonamiento combinatorio que interesa desarrollar.

Como ejemplo incluimos en un anexo una unidad didáctica sobre la "regla del producto y diagramas en árbol" desarrollada según el esquema que hemos descrito.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos explicitado nuestra concepción acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como las consecuencias instruccionales que, según nuestro criterio, se derivan de la misma. También hemos explicado cómo se tuvo en cuenta estos supuestos en la elaboración de un currículo de Combinatoria, analizando en este trabajo las decisiones tomadas en su elaboración y presentando como anexo un ejemplo de unidad didáctica.

Creemos que la atención a los tres aspectos del conocimiento matemático (quehacer, lenguaje, sistema conceptual) en los procesos de enseñanza-aprendizaje hace más compleja la labor de los profesores en las aulas, por lo que se precisa el desarrollo de materiales curriculares que, sin sofocar su necesaria creatividad, hagan viable la renovación de la educación matemática. La selección de situaciones problemáticas prototípicas precisa de un conocimiento profundo del campo de problemas y del contenido correspondiente, que normalmente no está al alcance de los profesores. Frecuentemente, el discurso psicopedagógico ignora las complejidades del contenido de enseñanza, reclamando del profesor tareas que no están a su alcance, exigiéndole que aplique a su práctica cotidiana análisis que requieren un tiempo y unos conocimientos teóricos que no están a disposiciones de los profesores. La investigación didáctica debe aportar soluciones prácticas a estos problemas. La elaboración de textos para la formación inicial y permanente de profesores como el descrito puede ser una contribución significativa para este fin.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

Referencias

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2, ed.). México: Trillas.

Batanero, M.C., Godino, J.D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis. [Edición en formato electrónico, http://www.sintesis.com/educacion-matematica-en-secundaria-70/razonamiento-combinatorio-ebook-1309.html]

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C**.**, Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dossey, J.A. (1992). The nature of mathematics: its role and its influence. En D.A. Grouws (E.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics.* New York: SUNY

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. En G. Jones (Ed.), Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning (pp. 121-141). New York: Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuive sources of probabilistics thinking in children.* Dordrecht: D. Reidel.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. London: The Falmer Press.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, B. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (Comp.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269). Universidad de la Sabana (Bogotá, Colombia).

Godino, J. D., Batanero, **C.** y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Los autores. ISBN: 84-932510-6-2.

[Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm]

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education *ZDM, The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2) 127-135.

Godino, J D., Batanero, C**.** y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60(1), 3-36.

Kapur, J.N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 3, 111-127.

Kenney, M. J. y Hirsch, C. R. (1991). *Discrete mathematics across the curriculum, K-12. 1991 Yearbook*. Reston: VA: N.C.T.M.

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC. (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

N.C.T.M (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idèe de hasard chez l'enfant*. Paris: Press Universitaires de France.

Sriraman, B. y English, L. (2010). Surveying theories and philosophies of mathematics education. En B. Sriraman y L. English, (ed.), *Theories of mathematics education* (pp. 7 – 32). Berlin: Springer.

Tymoczko, T. (ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston: Kirkhauser.

ANEXO: Ejemplo de unidad didáctica incluida en Batanero, et al. (1994). Regla del producto y diagramas en árbol

1. Descriptores de la unidad didáctica

ALUMNOS: Educación primaria (10-11 años)
OBJETIVOS: Se pretende que los alumnos:

- Refuercen la adquisición de procedimientos sistemáticos de enumeración.
- Conozcan el diagrama en árbol para representar situaciones de enumeración.
- Descubran la regla del producto, con apoyo del diagrama en árbol, y la apliquen para resolver problemas sencillos de recuento.

CONTENIDOS:
Conceptos y propiedades:

- Regla del producto: número de elementos del producto cartesiano de dos o más conjuntos.

Procedimientos:

- Experimentación con juegos manipulativos de enumeración.
- Enumeración de los elementos del producto cartesiano de dos conjuntos
- Construcción de un diagrama en árbol para representar los elementos del producto cartesiano.
- Interpretación de diagramas en árbol previamente construidos.
- Cálculo del número de configuraciones combinatorias aplicando la regla del producto.

REQUISITOS PREVIOS: Destrezas básicas sobre los números naturales.
MATERIAL: Regletas encajables de distintos colores. Cartulina para dibujar y cortar figuras de animales diversos. Recortables de una muñeca con varias faldas y jerséis para recortar. Papel y lápices para colorear.

2. Situaciones, problemas y ejercicios

SITUACIONES INTRODUCTORIAS
A. El juego de las torres
Se divide la clase en grupos de 6 alumnos, dando a cada grupo una caja con regletas encajables de dos colores diferentes, por ejemplo, azul y rojo.
Se les propone formar todas las torres diferentes encajando tres regletas. Por ejemplo, pueden construir una torre con tres regletas rojas, como se ve en la figura 1.
Gana el equipo que primero haya formado todas las torres posibles. Una vez finalizada la actividad, se les puede plantear las siguientes preguntas:

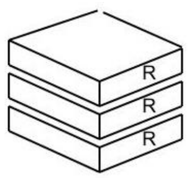

Figura 1

1) ¿Cuántas torres diferentes se pueden formar? ¿Estás seguro de que no falta ninguna? Trata de inventar un gráfico (dibujo o esquema) que muestre el método que has seguido.
2) ¿Serías capaz de calcular, sin llegar a construirlas, cuántas torres diferentes puedes construir con cuatro pisos? ¿Cómo has calculado la repuesta?
3) ¿Cuántas torres de t res pisos puedes construir con cuatro colores diferentes? (azul, blanco, rojo y verde).

B. El árbol genealógico

Se trata de que cada alumno construya o dibuje su árbol genealógico hasta llegar a sus bisabuelos o tatarabuelos. Comenzamos con un recuadro en el cual el alumno escribe su nombre y apellidos (figura 2):

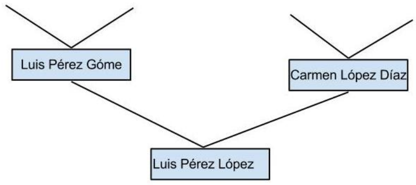

Figura 2

A continuación traza dos ramas por encima del cuadro y, en los extremos de las mismas, coloca los nombres y apellidos de sus padres. Para cada uno de ellos repite la operación, hasta donde le sea posible recordar. Puede pedir ayuda a sus padres y abuelos, para reconstruir el árbol tan completamente como sea posible. A propósito de esta actividad, se plantea la siguiente cuestión: a la vista del árbol, ¿podrías calcular sin contarlos cuántos bisabuelos, tatarabuelos y tatatarabuelos tiene cada niño? Usando el árbol genealógico escribe todos tus apellidos en el orden legal.

SITUACIONES COMPLEMENTARIAS

c. Patrones de color

(1) Tenemos una tira o banda formada por cinco rectángulos adosados, cada uno de los cuales lo podemos colorear de blanco o de negro. ¿Cuántas franjas diferentes se pueden hacer, teniendo en cuenta las diversas formas en que podemos colorear estos rectángulos?

(2) Algunos de los patrones producidos son simétricos, como el de la figura 3, por ejemplo:

¿Cuántas formas distintas tenemos de colorear la tira de cinco rectángulos con los colores blanco y negro, de modo que se obtenga un patrón simétrico?


Figura 3

(3) Tomemos ahora un cuadrado. Trazamos una diagonal (figura 4), y coloreamos cada región de un color diferente. Girando el cuadrado anterior 90 grados obtenemos los cuadrados de la figura 5.

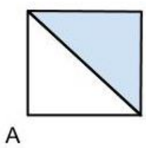

Figura 4

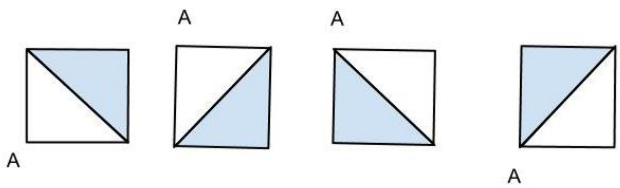

Figura 5

Si ahora pegamos dos de estos cuadrados, uno a derecha de otro, ¿cuántos dibujos diferentes podemos obtener? Puedes dibujar alguno de los patrones que se formarán.

(4) ¿Y si los unimos de cuatro en cuatro formando una tira?

D. Prisioneros

(1) En una prisión hay sólo 6 celdas individuales. Escribe todas las formas en que se pueden distribuir 2 prisioneros en las celdas. Trata de ayudarte con un gráfico.

(2) ¿Cuántas distribuciones posibles resultan si se tienen que colocar 4 prisioneros en las 6 celdas?

E. Ejercicios y aplicaciones

(1) El vestuario de la muñeca

Con una muñeca real o un recortable y un número dado de faldas y blusas diferentes, averiguar de cuántos modos distintos puede vestirse a la muñeca. Puede usarse un diagrama en árbol.

(2) Semáforos

Se trata de colorear todos los modos diferentes en que pueden encenderse las luces de un semáforo (tiene tres luces, roja, amarilla y verde; suponemos que es un semáforo averiado y que pueden encenderse simultáneamente una, dos, tres luces, ¡o ninguna!)

(3) Animales imaginarios

Dibujar en cartulina diferentes animales. Por ejemplo, un perro, un cerdo, un tigre y un león. De cada cartón se hacen dos partes, cortando la cabeza. Formar todos los posibles animales combinando cabezas y cuerpos entre sí. ¿Cuántos resultan?

(4) Número de teléfono

¿Cuántos números de teléfono de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?

(5) Código secreto

Pedro y Juan han encontrado un código secreto. Para descifrar un mensaje tienen que buscar las letras que lo componen con ayuda de la clave dada en el diagrama en árbol de la figura 6. Un 0 indica que hay que seguir la rama izquierda y un 1 la rama derecha. Cuando se llega a una letra se
vuelve a comenzar al principio del árbol. Por ejemplo, el mensaje ADELA se escribe:

000001010001001000

¿Puedes descifrar el siguiente mensaje?: 0100000011000111110010001111101110001000

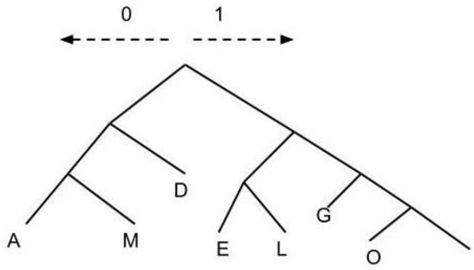

Figura 6

3. Análisis de los contenidos y de la gestión de la clase

El contenido matemático pretendido en las situaciones de esta unidad es la "regla del producto", expresada en casos sencillos y en contextos manipulativos¸ y la introducción de una representación gráfica importante en la enseñanza de la Combinatoria que es el diagrama en árbol.

El número de piezas de las torres de la situación A y de los colores de las mismas son variables de control de la situación que permiten poner al alumno ante la necesidad de generalizar recursivamente las soluciones encontradas a valores mayores.

Al finalizar el desarrollo de la actividad A (juego de las torres), o durante la misma si surgen dificultades insuperables, se introducirá el diagrama en árbol como recurso utilizable en estas actividades. Una explicación posible podría ser la siguiente: "Vamos a hacer un diagrama para representar las fases en la construcción de la torre. El diagrama tiene forma de árbol con una ramificación por cada piso. En la figura 7 puedes ver cómo hemos comenzado el diagrama. Completa el diagrama anterior".

Figura 7

También puede materializarse el diagrama usando materiales manipulativos (regletas encajables, etc.)
Una vez que el alumno ha comprendido la técnica de construcción del diagrama en árbol puede *explicitarse* la regla del producto para el cálculo del número de elementos que se obtienen al formar todas las parejas posibles a partir de dos o más conjuntos de elementos.
Pueden efectuarse los juegos anteriores cambiando las reglas y poniendo la condición de que no pueden repetirse los elementos. Por ejemplo, se les puede preguntar: "¿Cuántas torres diferentes de dos pisos se pueden hacer con tres colores sin repetir ninguno?
Como criterio general aplicable a las distintas unidades didácticas debe dejarse al alumno que trate de resolver los problemas mediante sus propios recursos. En el caso de esta unidad, puede encontrar procedimientos sistemáticos de recuento y formas propias de representación, mediante ensayo y error. Colectivamente se presentarán y discutirán las soluciones obtenidas por los alumnos.

CONEXIONES MATEMÁTICAS

La regla del producto es una nueva aplicación de la multiplicación de números naturales que el alumno ya conoce. Los problemas de regla del producto son una categoría dentro de los problemas multiplicativos. En consecuencia, esta unidad didáctica puede ser utilizada en el aprendizaje de la multiplicación en niveles anteriores.
Los diagramas en árbol tendrán una gran utilidad posterior en Combinatoria y en probabilidad. Este diagrama facilitara la introducción de la idea de experimento aleatorio compuesto y el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos, aplicando la regla del producto de la probabilidad. En toda la unidad se usa de modo implícito el producto cartesiano de conjuntos, de modo que estas situaciones podrían ser utilizadas como introductorias de este contenido matemático.

4. Soluciones de las situaciones, problemas y ejercicios de la unidad didáctica

(Se pueden encontrar en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 2004, pp. 129-131)