Complejidad ontosemiótica de la integral definida. Implicaciones para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo[1]

María Burgos[a], Seydel Bueno[b], Juan D. Godino[a] y Olga Pérez[b]

[a] Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España

[b] Universidad de Camagüey, Cuba,

Resumen

La enseñanza y aprendizaje de los conceptos y procedimientos del Cálculo, en particular el concepto de integral definida, es un desafío para los profesores y estudiantes de las carreras universitarias. Para elaborar propuestas fundamentadas de mejora de los procesos instruccionales, es necesario prestar atención a la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida que se espera que los estudiantes comprendan y apliquen. En este trabajo, complementamos los análisis realizados por diversos autores, aplicando herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos para identificar los conocimientos requeridos para comprender diversos significados del concepto de integral definida y potenciales conflictos semióticos. Centramos la atención en un primer significado intuitivo, que involucra principalmente conocimientos aritméticos, y en el significado formal como límite de sumas de Riemann predominante en las propuestas curriculares. El reconocimiento de la complejidad ontosemiótica de los objetos matemáticos se presenta como un factor clave para explicar las dificultades de aprendizaje de los conceptos, procedimientos y su aplicación a la resolución de problema, así como para tomar decisiones fundamentadas sobre la enseñanza. La metodología de análisis de un texto matemático que ejemplificamos en este trabajo, aplicando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, proporciona un nivel microscópico de análisis que nos permite identificar algunos hechos semiótico-cognitivos de interés didáctico. También permite identificar algunos *estratos epistémicos*, esto es, conocimientos institucionales que deberían ser estudiados previamente, los cuales pasan desapercibidos en los procesos de enseñanza.

***Palabras clave*:** Definite integral, Mathematical practices, Onto-semiotic complexity, Teaching, Learning

1. Introducción

En la revisión elaborada por Bressoud, Ghedams, Martinez-Luances & Törner (2016) se describe la evolución de la investigación y principales tendencias sobre los diversos temas implicados en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, como son las dificultades de los estudiantes, el diseño de tareas, las prácticas de clase, el uso de la tecnología, etc. Estos autores identifican una variedad de cuestiones relativas a los aspectos epistemológicos, cognitivos, institucionales e instruccionales planteados por la investigación. En particular resaltan la preocupación por las relaciones entre el pensamiento de los estudiantes sobre las nociones fundamentales del Cálculo y las expectativas de aprendizaje establecidas en los currículos. En

---

[1] Versión en español del artículo: Burgos, M., Bueno, S., Godino, J.D., & Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. doi: 10.17583/redimat.2021.6778

estas relaciones se identifican al menos tres tensiones dialécticas con relación al Cálculo: el infinito potencial versus actual, lo dinámico frente a lo estático, y la visualización frente a la formalización. Estas dialécticas llevan a plantear como cuestiones abiertas: "¿Qué consideraciones epistemológicas deberían tenerse en cuenta para abordar tales tensiones? ¿Cuál es el papel de la enseñanza y las prácticas de aula?" (Bressoud et al., 2016, p. 30).

Bressoud et al. (2016) mencionan los principales marcos teóricos que han sido aplicados en las investigaciones educativas sobre el Cálculo con énfasis en el desarrollo cognitivo, destacando los enfoques "Concept Image and Concept Definition" (Tall and Vinner 1981), la teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995), la teoría Action- Process-Object-Schema (Dubinsky, 1991) y la teoría Three Worlds of Mathematics (Tall 2004). Otras investigaciones enfocadas en aspectos institucionales, socio-culturales y discursivos han usado la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992) y el Commognitive Framework (Sfard, 2008). Attorps, Björk, Radic y Tossavainen (2013) aplican el modelo de Estudio del Aprendizaje basado en la Teoría de la Variación (Marton, Runesson y Tsui, 2004) y Kouropatov y Dreyfus (2013; 2014) adoptan una metodología de investigación basada en la teoría de la Abstracción en el Contexto (AiC) (Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, 2001).

A pesar de la gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo consideramos que es importante problematizar los significados de los conceptos claves del Cálculo, como son los de límite, derivada e integral, con el fin de identificar una secuencia de situaciones-problemas cuya resolución permita contextualizar los conocimientos y desarrollar progresivamente la comprensión y competencia matemática de los estudiantes.

En este trabajo centramos la atención en la integral definida. En algunos países su estudio se inicia en los últimos grados de high school presentando a los estudiantes un primer encuentro con este objeto matemático de una manera informal/intuitiva, preparándoles de este modo para la comprensión de los significados más generales y formales que se abordan en los estudios universitarios. Por el contrario, en otros países, los que los estudiantes de ciencias experimentales, ingeniería y otras carreras técnicas, son introducidos de una manera abrupta en el estudio de la integral con toda su generalidad, siendo, por tanto, un reto para la comprensión del concepto y la justificación de los procedimientos.

El trabajo que aquí presentamos aborda el problema de clarificar significados claves de la integral definida, aplicando las herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Font, Godino y Gallardo, 2013; Godino, Batanero y Font, 2019). La noción de significado parcial (o sentido) de un concepto matemático, entendido de manera pragmatista y antropológica, proporciona una mirada macroscópica del significado global de un objeto matemático. Además, el EOS aporta herramientas para hacer un análisis microscópico de la actividad matemática, permitiendo identificar la trama de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la solución de problemas, los cuales son la razón de ser de un concepto, como, por ejemplo, la integral definida. Estos análisis permiten tomar conciencia de la complejidad del concepto, lo cual conducirá a la reflexión, por parte del formador de profesores y del profesor, sobre las posibles dificultades que pueden presentarse en la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El artículo lo organizamos en las siguientes secciones. Después de esta introducción, que consideramos como sección 1, en la sección 2 describimos las herramientas teóricas, el problema específico de investigación y la metodología que aplicamos. En la sección 3 incluimos una síntesis de investigaciones previas focalizadas en el estudio de los componentes y estructura de la integral definida y en la caracterización de sus significados. En las secciones 4 y 5 aplicamos las herramientas del EOS para analizar la complejidad de las prácticas matemáticas que se ponen en juego en el estudio de la integral de Riemann. Para poner de relieve la tensión dialéctica entre lo intuitivo y lo formal, en primer lugar, analizamos la presentación propuesta por Starbird (2006), que puede ser considerada como un primer encuentro informal con la integral; después, en la sección 5 analizamos la definición formal general que hace Stewart (2006), la cual viene precedida por una contextualización previa basada en el estudio de problemas relacionados con el cálculo de áreas y distancias. Los análisis microscópicos de los significados de la integral realizados en estas secciones muestran cómo se abordan el problema ontológico y semiótico-cognitivo de la educación matemática usando las herramientas del EOS. El análisis en estas secciones nos lleva en la sección 6 a establecer una discusión en relación a la articulación de los mismos con otras investigaciones. Las implicaciones de nuestra investigación y cuestiones abiertas son objeto de las reflexiones finales de la sección 7.

2. Marco teórico, problema específico y metodología

El análisis de la diversidad y complejidad de los objetos matemáticos y los significados implicados en el cálculo integral, como factor explicativo de las dificultades y conflictos de aprendizaje, lo realizamos aplicando algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos.

2.1. Marco teórico

El EOS aborda los problemas epistemológico, ontológico y semiótico-cognitivo implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas proponiendo nociones teóricas y herramientas metodológicas para abordarlos (Godino et al., 2019). Seguidamente incluimos una síntesis de las nociones que usamos en este trabajo.

EL problema epistemológico

El EOS da una respuesta al problema epistemológico de cómo emerge y se desarrollan las matemáticas, asumiendo una visión antropológica (Wittgenstein, 1953) y pragmatista (Peirce, 1958) que considera la actividad de las personas en la resolución de problemas como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión epistemológica se hace operativa en el EOS con la noción de *práctica matemática*, asumiendo su relatividad institucional y personal. Se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

La génesis institucional del conocimiento matemático se investiga en el EOS mediante el siguiente método: (1) la identificación y categorización de las situaciones-problemas que requieren una respuesta; (2) la descripción de las secuencias de prácticas que se ponen en juego en la resolución.

El problema ontológico

La matemática, además de ser una actividad, es también un sistema lógicamente organizado de objetos. Para el EOS, *objeto matemático* es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. Esta idea general de objeto es útil cuando se complementa con una tipología de objetos matemáticos al tener en cuenta sus diferentes roles en la actividad matemática. Los símbolos, las representaciones externas y manipulativos intervienen en la actividad matemática escolar y profesional, de manera pública, material y perceptible. Por tanto, se consideran objetos matemáticos ostensivos. Los *conceptos* de número, fracción, derivada, integral, etc., son objetos matemáticos de diferente naturaleza y función que sus representaciones ostensivas. Son objetos no-ostensivos, objetos mentales (cuando intervienen en las prácticas personales), u objetos institucionales (cuando intervienen en las prácticas socioculturales o compartidas). Junto con las *proposiciones, procedimientos* y los *argumentos* que las justifican son objetos que regulan la actividad matemática, mientras que sus representaciones ostensivas sirven de soporte o facilitan la realización de dicho trabajo.

No hay actividad matemática sin objetos, ni objetos matemáticos sin actividad. Como las prácticas pueden ser vistas desde la perspectiva institucional (prácticas sociales, compartidas) o personal (individuales, idiosincrásicas), los objetos también pueden ser contemplados desde la dualidad institucional – personal, lo que origina el siguiente principio:

En las prácticas matemáticas intervienen diversas clases de objetos que cumplen diferentes roles: instrumental /representacional; regulativo (fijación de reglas sobre las prácticas), explicativo, justificativo.

Dada la generalidad con la que se entienden las nociones de práctica y objeto, así como la gran diversidad de secuencias de prácticas (procesos) que se pueden realizar, se considera necesario y útil proponer una tipología de objetos y procesos básicos, que son los reflejados en la figura 1, designada como *configuración ontosemiótica*. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). En la literatura psicológica y educativa se habla de otros procesos diferentes de los mencionados en la figura 1, por ejemplo, proceso de resolución de problemas, modelización, entre otros. Dichos procesos se pueden describir usando los procesos básicos que propone el EOS, por lo que en cierto sentido se trata de *megaprocesos*.

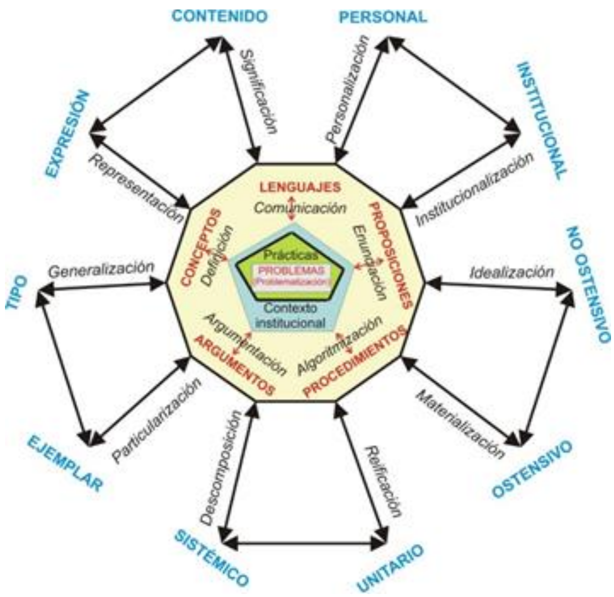


Figura 1. Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (Fuente: Godino (2014, p. 23)

Se entienden los conceptos, proposiciones, y procedimientos, en su versión *unitaria* (tratados como un todo o unidad) según propone Wittgenstein, es decir, como reglas gramaticales de los lenguajes usados en las prácticas que se realizan para describir nuestros mundos y dar respuesta a las situaciones-problemas a las que nos enfrentamos. En el EOS los conceptos y demás objetos matemáticos también se pueden considerar de una perspectiva *sistémica* (como un sistema de componentes).

El problema semiótico-cognitivo

El *conocimiento* se asume en el EOS como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre los objetos y las prácticas, relaciones que se modelizan mediante la noción de *función semiótica*. La función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución), según un criterio o regla de correspondencia. Un acto de interpretación o semiosis pone en relación un objeto antecedente con otro consecuente según un cierto convenio o regla de correspondencia. El acto de semiosis puede consistir en dar sentido, uso o finalidad a una acción, o secuencia de acciones, en el marco de la actividad en desarrollo.

Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de prácticas y objetos. De ahí, el siguiente principio:

> *La correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto se interpreta como el "significado de dicho objeto" (en la doble perspectiva, institucional y personal).*

Puesto que los sistemas de prácticas que se ponen en juego en la resolución de las situaciones – problemas son relativos a las personas y a las comunidades de prácticas (instituciones), los significados, y, por tanto, los conocimientos, son también relativos. No obstante, es posible reconstruir un *significado global* u holístico de un objeto mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que se ponen en juego para su solución. Dicho significado holístico se usa como modelo epistemológico y cognitivo de referencia de los significados parciales o *sentidos* que puede adoptar dicho objeto y constituye una herramienta metodológica onto-semiótica-cognitiva:

> *Un método para delimitar los diversos significados de los objetos matemáticos, y, por tanto, para la reconstrucción de los modelos de referencia epistemológica y cognitiva es el análisis de los sistemas de prácticas (personales e institucionales) y de las configuraciones de objetos y procesos implicados en los mismos.*

La reconstrucción de cada significado parcial de un objeto matemático, por ejemplo, el concepto de integral definida, implica la descripción de la configuración ontosemiótica relativa a un tipo de problema que se debe resolver en un contexto de uso o marco institucional determinado, así como el sistema de prácticas correspondientes y los objetos y procesos implicados en las mismas.

2.2. Problema específico de investigación y metodología

La cuestión educativa-instruccional de tratar de comprender las razones de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes sobre el tema de la integral definida, para poder intervenir de manera fundamentada en los procesos de enseñanza, se puede formular de manera específica usando las herramientas teóricas y metodológicas del EOS. Desde una perspectiva macroscópica y epistemológica, se debe comenzar por caracterizar los diversos significados de la integral definida y las diversas generalizaciones que se han desarrollado para abordar los problemas de aplicación. Para ello se deben identificar y categorizar las situaciones-problemas que son la razón de ser de cada significado y los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas que se ponen en juego en su resolución. Esta es la perspectiva adoptada por autores como Ordóñez (2011) y Crisóstomo (2012), que identifican y analizan los significados parciales de la integral definida desde una aproximación histórica-epistemológica. Otros estudios que han aplicado el EOS sobre diferentes aspectos del aprendizaje de la integral son Mateus (2016); Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, & Breda (2018); Borji & Font (2019).

En este trabajo focalizamos la atención en el problema ontológico y semiótico-cognitivo que plantean dos significados parciales de la integral definida, un significado informal/intuitivo, y otro significado formal de la integral como límite de las sumas de Riemann. Aplicamos un análisis microscópico orientado al reconocimiento explícito de los objetos (problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas, así como la identificación de los procesos (interpretación/ significación, representación, argumentación, generalización, etc.) que se ponen en juego en dichas prácticas. El análisis ontosemiótico lo aplicamos a dos textos con una cierta difusión a nivel internacional: la presentación intuitiva de la integral definida que propone Starbird (2006) y la presentación de Stewart (2016) de la integral como límite de las sumas de Riemann.

3. Antecedentes sobre la caracterización de la integral definida

Con la finalidad de diseñar procesos de enseñanza idóneos que capaciten a los estudiantes para aplicar la integral definida en la solución de problemas, diversos autores han estudiado los diversos significados de este objeto matemático, sus componentes y estructura. También han identificado las diversas maneras en que los estudiantes comprenden la integral. En este apartado incluimos una síntesis de estos estudios.

3.1. Componentes y estructura de la integral definida

Aunque una gran parte de las investigaciones sobre la integral definida se han realizado con una mirada puesta en caracterizar los tipos de aprendizaje logrados por los estudiantes, esto es, con un enfoque cognitivo (Orton, 1983; Grundmeier, Hansen & Sousa, 2006; Rasslan y Tall, 2002; Serhan, 2015) encontramos algunos autores que analizan la estructura y componentes de la integral desde una perspectiva epistémica. Tal es el caso de Sealey (2014) quien desarrolla un marco para caracterizar la comprensión de los estudiantes de las sumas de Riemann y la integral definida. Indica que la parte más compleja del proceso de resolución de problemas que involucran la integral es la conceptualización del producto de $f(x)$ por Δx, a pesar de la simplicidad de las operaciones matemáticas requeridas en este paso. Este autor presenta un marco de referencia para la comprensión de la estructura de la integral de Riemann que distingue cuatro capas, *Producto*, *Suma*, *Límite* y *Función*, correspondientes a las operaciones matemáticas implicadas en el cálculo de la integral como $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, donde los x_i representan cualquier valor en el i-ésimo intervalo asociado a una partición de $[a, b]$ y $\Delta x=\frac{b-a}{n}$.

La capa Producto está compuesta de la multiplicación de dos cantidades, $f(x_i)$ y Δx, donde $f(x_i)$ (p.e., la velocidad de un objeto) es una tasa y Δx una diferencia (tiempo transcurrido); el producto de ambas cantidades corresponde a la distancia recorrida en un intervalo particular. La capa Adición (Sumation) incluye la suma desde $i=1$ a $i=n$, dando las sumas de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Así, si $f(x_i)$ es la velocidad de un objeto durante un intervalo de tiempo Δx, la sumatoria sería una aproximación de la distancia recorrida en el intervalo de a a b, puntos extremos del intervalo. La tercera capa Límite corresponde al límite cuando n tiende al infinito en la expresión de las otras dos capas, dando la integral de Riemann. La cuarta capa permite considerar la integral definida como una función cuya variable es el límite superior (i. e. el extremo superior del intervalo) y el valor de la función es el valor numérico de la integral definida.

Como resultado de su investigación experimental, Sealey (2014) introdujo una capa preliminar, que denomina, de orientación (Orienting), para tener en cuenta las actividades que realizan los estudiantes para visualizar la situación, comprender las variables del problema, comprender las magnitudes y cantidades (presión, fuerza, etc.). El producto de las cantidades dadas por $f(x)$ y Δx representa nuevas cantidades en el contexto del problema que es necesario visualizar.

Thompson y Silverman (2008) presentan la integral definida de Riemann en términos de la idea matemática de función de acumulación $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, y tratan de explicar las dificultades de comprensión y de su uso por los estudiantes teniendo en cuenta sus partes constituyentes. El concepto de acumulación es central a la idea de integración y está en el núcleo de la comprensión de muchas ideas y aplicaciones del Cálculo, pero el significado que adquiere en esta rama de las matemáticas no es simple. Los estudiantes encuentran dificultades para pensar en algo que se acumula cuando no tienen claro los "bits" que se acumulan. Por ejemplo, para comprender la idea de trabajo realizado como algo que se acumula incrementalmente significa que se debe pensar la cantidad total de trabajo en cada momento como la suma de incrementos anteriores, y que cada bit incremental adicional de trabajo está compuesto de una fuerza aplicada a lo largo de una distancia.

Por otro lado, Jones (2013, 2015) hace una aproximación al tema de la integral definida en la que distingue tres conceptualizaciones de la integral: a) como área bajo una curva; b) como valores de una antiderivada; c) como límite de sumas de Riemann. La conceptualización a) usa la representación "perímetro y área" para indicar la función que se integra, el área de una región del plano cartesiano y el contorno de la región. La conceptualización b) usa la notación que indica la relación entre antiderivada, derivada y función original, $F'(x) = f(x)$. La conceptualización c) utiliza la sumatoria de piezas infinitamente pequeñas.

Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm y Weigand (2016) proponen un modelo de comprensión del concepto de integral definida que considera tres ejes o dimensiones: 1) Aspectos del contenido que sirven de base para una definición del concepto (antiderivada, suma de productos, medida); 2) Concepciones o modelos mentales (Grundvorstellungen) sobre el concepto (reconstrucción, área, valor medio, acumulación); 3) Niveles de comprensión del concepto (intuitivo, temático, integrado, crítico). Combinando los diferentes aspectos, concepciones y comprensiones, elaboran un modelo tridimensional con 48 celdas (8 de ellas vacías) en cada una de las cuales se ponen en juego conocimientos, habilidades y destrezas específicas para la comprensión y el uso del concepto integral.

3.2. Esquemas cognitivos sobre la integral

Rasslan y Tall (2002) describen los esquemas cognitivos que tienen los estudiantes de high school sobre la integral definida, aplicando las nociones de *concept image* and *concept definition*. Aunque la definición del concepto se introduce en la escuela, los estudiantes usan the concept image, esto es, "all the mental pictures, properties and processes associated with the concept in their mind" (Tall & Vinner, 1981). Rasslan & Vinner (1997) consideran que "The concept definition is essentially an incidental part of the process which is far more concerned in practice with developing experience and images of the concepts themselves" (p. 4-96).

Serhan (2015) investiga el conocimiento conceptual y procedimental de los estudiantes de la integral definida, aplicando el marco cognitivo de Hiebert & Lefevre (1986) y las nociones de concept image and concept definition de Tall & Vinner (1981). Para Hiebert y Lefevre (1986), "Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network" (p.3). El conocimiento procedimental, "is made up of two distinct parts. One part is composed of the formal language, or symbol representation system, of mathematics. The other part consists of the algorithms, or rules, for completing mathematical tasks" (p. 6).

Concretamente el estudio de Serhan (2015) se plantea las siguientes cuestiones: 1) En el conocimiento de los estudiantes sobre la integral definida ¿predomina el conocimiento procedimental o el conceptual? 2) ¿Son capaces los estudiantes de tratar con áreas negativas y explicar sus respuestas? 3) ¿Qué imágenes conceptuales asocian los estudiantes al concepto de integral definida? (p. 85). Los resultados concuerdan con los de Orton (1983) en el sentido de que los estudiantes tienen habilidad para usar el conocimiento procedimental y resolver problemas de integración, pero tienen una comprensión limitada de los conceptos básicos de integración.

3.3. Significados de la integral definida

El concepto de integral se ha generado y evolucionado a lo largo de la historia de las matemáticas, partiendo de sus aplicaciones a la solución de problemas, fundamentalmente los relacionados con la física y la geometría. Tras un período donde el énfasis estaba en el cálculo de primitivas, llegó la integración aproximada (a través de métodos numéricos, gráficos y mecánicos) donde se buscaban procesos para encontrar un valor aproximado para la integral definida de funciones cuya primitiva no se podía determinar. Seguidamente, el desarrollo matemático de la integral definida se interesó por su fundamentación con la elaboración de definiciones más precisas, independientes de la geometría y basadas en el paso al límite. La formalización final de la integral estaría apoyada en la teoría de la medida.

El universo de significados de la integral definida se puede estructurar según diferentes criterios, teniendo en cuenta los campos de problemas que se resuelven con la integral, las técnicas de resolución y el grado de generalidad y formalización con el que se abordan. En Contreras y Ordoñez (2006), Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010), así como en las tesis doctorales de Ordóñez (2011) y Crisóstomo (2012), se estudian los significados de la integral definida aplicando los supuestos y herramientas del EOS. Ordoñez (2011) realiza un estudio histórico-epistemológico de los significados de la integral definida para usarlo como marco de referencia en un estudio sobre los significados institucionales y personales de este objeto matemático en Bachillerato. En el caso de Crisóstomo (2012) se hace también un estudio similar con la finalidad de indagar en los significados institucionales de la integral en los estudios universitarios de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Desde el punto de vista de los procesos de instrucción matemática en los niveles de bachillerato y carreras universitarias consideramos útil distinguir cuatro tipos de significados; la integral como,

1) Cantidad de magnitud acotada entre dos secuencias de cantidades convergentes. La magnitud puede ser geométrica, física o de otro tipo (longitud, área, volumen, distancia, trabajo, densidad, etc.).
2) Límite de sumas de Riemann, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$
3) Función acumulativa, G(x) = $\int_a^x f(t)dt$
4) Diferencia incremental de la función acumulativa, $\int_a^b f(x)dx$ = G(b)–G(a), si $G'(x) = f(x)$.

Cada uno de estos significados parciales de la integral proporciona aspectos relevantes del significado global u holístico de este objeto matemático, entendido como la red articulada de los significados parciales. El significado 1) de la integral definida como cantidad de magnitud acotada entre dos secuencias de cantidades convergentes constituye un primer encuentro con la integral, que se presta a un tratamiento intuitivo y conectado con las aplicaciones que constituyen su razón de ser originaria. Esta concepción por sí sola no es suficiente para una comprensión sólida de las integrales; las integrales tienen capas adicionales de significado por encima y más allá del límite (Jones, 2013; Thompson y Silverman, 2008). Como sugiere Sealey (2006), un exceso de confianza en ciertas interpretaciones de la integral, como el "área bajo una curva", puede limitar la aplicabilidad de la integral a otras áreas.

El significado parcial 2) como límite de sumas de Riemann introduce precisión a la estrategia de cálculo de la integral como “una sumatoria infinita de piezas infinitamente pequeñas” asociada al significado 1). “Adding up pieces is not equivalent to the Riemann integral, since the students tend to think of the summation happening with an infinite number of infinitesimally small pieces. By contrast, the Riemann integral constructs a sequence of finite summations and then considers the limit of this sequence.” (Jones, 2015).

Pero el cálculo de la integral definida aplicando el significado 2), esto es, mediante el cálculo del límite de sumas de Riemann, es complejo en la mayoría de los casos, comparado con la aplicación de los significados 3) y 4), esto es, hallar primero la función antiderivada y después la diferencia incremental.

La planificación curricular del estudio de la integral debe tener en cuenta esta perspectiva macroscópica sobre los diversos significados parciales y su articulación como estrategia para promover la comprensión y competencia de los estudiantes. Pero la gestión de los procesos de aprendizaje y enseñanza requiere que el profesor sea consciente de la complejidad ontológica y semiótica de cada uno de los significados, incluso de los significados que consideramos como informales o intuitivos. En las secciones 4 y 5 incluimos el análisis de dos significados de la integral aplicando la metodología del análisis ontosemiótico.

4. Significado intuitivo de la integral de Riemann

En esta sección analizamos la presentación intuitiva que hace Starbird (2006, p. 18-21) de la integral mediante la cual llega finalmente a justificar las sumas de Riemann para el caso de calcular la distancia recorrida por un móvil con una velocidad variable. La presentación se apoya en el siguiente problema:

> *Imagina que has sido raptado y puesto atado en la parte trasera de un coche, que comienza a circular a lo largo de una carretera recta. No puedes ver el exterior del coche, pero afortunadamente, puedes ver el velocímetro, y usar una videocámara para tomar imágenes del velocímetro. Después de 1 hora te sueltan a un lado de la carretera. ¿Qué distancia ha recorrido el coche?*

4.1. Proceso de resolución: secuencia de prácticas operativas y discursivas

Incluimos a continuación el proceso de resolución (abreviado) del problema mediante el cual Starbird llega a enunciar las sumas de Riemann y el concepto de integral definida. Para el análisis posterior descomponemos el proceso en configuraciones epistémicas, y en cada una identificamos las prácticas matemáticas elementales que las componen.

Configuración 1 (CE1): Velocidad constante

P1.1: Supongamos un caso simple: El coche se mueve a velocidad constante.

P1.2: Si vamos a 1 milla por hora, entonces habremos recorrido 60 millas. Si vamos a 2 millas por minuto durante 20 minutos, habremos viajado 2×20, o sea, 40 millas; en una hora la distancia recorrida será 3×40, o sea, 120 millas.

P1.3: Sobre un gráfico, la velocidad constante aparecerá como una línea horizontal.

Configuración 2 (CE2): Velocidad constante a trozos

P2.1: Supongamos que la velocidad cambia, pero que es constante en intervalos de tiempo.

P2.2: Por ejemplo, en los primeros 10 minutos la velocidad ha sido de 1 milla por minuto; entre los minutos 10 a 20, de 2 millas por minuto; 3 millas por minuto entre 20 y 30; 4 millas por minuto entre 30 y 40; 5 millas por minuto entre 40 y 50; y finalmente, 6 millas por minuto entre los minutos 50 y 60.

P2.3: En este caso la distancia total recorrida será
$(1 \times 10) + (2 \times 10) + (3 \times 10) + (4 \times 10) + (5 \times 10) + (6 \times 10)$, esto es, 210 millas.

Configuración 3 (CE3): Velocidad variable

P3.1: Supongamos que el coche se mueve en cada tiempo t a la velocidad $2t$ millas por minutos.

P3.2: Esto es, transcurrido el minuto 1 viajamos a 2 millas/minuto; a los 2 minutos viajamos a 4 millas/minuto; y así sucesivamente.

P3.3: La estrategia que vamos a seguir es, primero, subestimar la distancia recorrida, después sobre estimarla y afirmar que la distancia recorrida estará entre estas dos estimaciones.

P3.4: En cada minuto nuestro coche acelera suavemente, de modo que la velocidad al comienzo del minuto es menor que al final.

P3.5: Como ya sabemos calcular la distancia que recorre un coche que va dando saltos bruscos de velocidad en cada intervalo, calculamos la distancia que recorren dos *coches bruscos (*jerky), uno con la velocidad de nuestro coche al comienzo del intervalo y otro con la velocidad del final del intervalo.

P3.6: En los 3 primeros minutos, si cada minuto lo dividimos en intervalos de 0.5 minutos, la distancia que recorre el coche brusco retrasado es 7.5 millas y el coche brusco adelantado 10.5 millas.

P3.7: Mientras que si dividimos los intervalos de tiempo en 1/10 de minuto; en ese intervalo la distancia subestimada es de 8.7 millas mientras que la sobreestimada es de 9.3 millas.

P3.8: La distancia correcta recorrida estará comprendida entre las dos estimaciones anteriores; a medida que consideramos intervalos de tiempo más pequeños más precisa será la estimación de la distancia.

P3.9: La distancia exacta recorrida no se puede encontrar con una única división del intervalo de tiempo. Se obtiene mirando las *infinitas aproximaciones* progresivamente mejoradas.

P3.10: Las estimaciones cada vez más finas se aproximan cada vez más a un único valor - el límite de las aproximaciones.

P3.11: “Este proceso infinito es la segunda idea fundamental del cálculo - la integral. Si conocemos la velocidad de un coche en cada momento en un intervalo de tiempo, la integral nos dice la distancia recorrida durante ese intervalo”. (p. 20)

Configuración 4 (CE4): El espacio como función del tiempo y la velocidad variable

P4.1: En el ejemplo anterior en el que el velocímetro siempre marca números que siguen la regla *2t*, ¿dónde estamos después de 1, 2, 2.5, 3 minutos?

P4.2: En cada caso, usaremos este procedimiento infinito para ver la distancia recorrida desde 0 hasta esos tiempos. Obtenemos la tabla adjunta.

Instantaneous velocity: $v(t) = 2t$

Time (min)	Distance
0.5	0.25
1	1
1.5	2.25
2	4
3	9

Position: $p(t) = t^2$

P4.3: ¿Podemos ver si existe un patrón?

P4.4: Vemos que en cualquier tiempo t el cuentakilómetros marcará la distancia t^2: la distancia recorrida es, por tanto, el cuadrado del intervalo de tiempo tomado, o sea, $p(t) = t^2$.

Configuración 5 (CE5): La integral como límite de sumas

P5.1: El proceso integral implica dividir el intervalo de tiempo en pequeños incrementos, ver qué distancia recorrería el coche si hubiera ido a velocidad constante durante cada intervalo pequeño de tiempo, y después sumar esas distancias para aproximar la distancia total recorrida.

P5.2: Por tanto, la fórmula para determinar la distancia recorrida entre el tiempo a y el b es:

$$(v(a) \times \Delta t) + (v(a + \Delta t) \times \Delta t) + (v(a + 2\Delta t) \times \Delta t) + \cdots + (v(b - \Delta t) \times \Delta t)$$

cuando Δt se hace cada vez más pequeño.

P5.3: Haciendo subdivisiones cada vez más pequeñas y tomando límites, llegamos al valor de la integral.

4.2. Análisis de las prácticas: intencionalidad, objetos y procesos

A continuación incluimos el análisis detallado de las tramas de prácticas objetos y procesos identificados en cada una de las configuraciones anteriores con las que Starbird introduce el significado intuitivo de integral de Riemann. En las tablas 1 a 5, en la columna 1 indicamos los grupos de prácticas (configuraciones) mencionadas anteriormente, en la columna 2 identificamos el uso o intencionalidad de cada práctica, en las columnas 3 y 4 mencionamos los tipos de objetos y procesos que intervienen en las prácticas o grupos de prácticas, distinguiendo los tipos de lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. En el EOS se considera como *proceso matemático* a toda secuencia de prácticas, y se proponen 16 procesos básicos (Figura 1). Consideramos importante tomar conciencia de los procesos de interpretación/ significación, particularización/ generalización, algoritmización, argumentación, entre otros. El mega-proceso de resolución del problema se compone de la secuencia de prácticas matemáticas descritas anteriormente; dicho mega-proceso se puede descomponer en procesos más básicos, fijando la atención en las secuencias de prácticas elementales que se van realizando.

Tabla 1. Configuración ontosemiótica CE1 *Velocidad constante*

Práctica	Uso/intencionalidad	Objetos	Procesos
P1.1 P1.2 P1.3	Plantear un caso sencillo de movimiento uniforme Plantear y resolver un caso particular de movimiento uniforme	Lenguaje: natural y numérico; gráfico Conceptos: movimiento uniforme; magnitudes distancia, tiempo, velocidad; unidades de medida, millas, hora, minutos; función $v(t)$=constante Gráfica cartesiana; función constante Proposición: En una hora la distancia recorrida será de 120 Procedimiento: cálculo aritmético de la distancia recorrida Proposición: La velocidad constante aparecerá como línea horizontal Argumentos: porque en el movimiento uniforme $p(t) = vt$.	*Interpretación/significación*: -El enunciado general del problema no se puede resolver a menos que se introduzcan hipótesis particulares sobre la velocidad del coche. -Se asigna significado a los términos usados para describir el movimiento uniforme: velocidad constante; unidades de medida de las magnitudes velocidad, tiempo y espacio; -Gráfico se relaciona con la representación cartesiana de funciones; la representación gráfica de la función constante es una recta paralela al eje de abscisas *Particularización:* -Se supone que el movimiento es uniforme, la velocidad es constante; -Dar valores específicos a la velocidad. Algoritmización/Cálculo: Secuencia de cálculos aritméticos para hallar las millas recorridas en las condiciones dadas. *Argumentación* (implícita): En el movimiento uniforme, el espacio recorrido se obtiene multiplicando la velocidad constante por el tiempo transcurrido.

En la CE1, las prácticas persiguen resolver un caso sencillo de cálculo de la distancia en un movimiento uniforme. El movimiento se particulariza a determinados valores de la velocidad y se procede a calcular las millas recorridas en unas situaciones simples y concretas. La argumentación aparece implícita, apoyada por el conocimiento de las condiciones físicas que caracterizan el movimiento uniforme.

Tabla 2. Configuración ontosemiótica CE2 *Velocidad constante a trozos*

Práctica	Uso/intencionalidad	Objetos	Procesos
P2.1 P2.2 P2.3	Plantear y resolver un caso más general; movimiento uniforme a trozos. Primer encuentro con sumas tipo Riemann	Lenguaje: natural y numérico Conceptos: función constante a trozos; Procedimiento: cálculo aritmético de la distancia recorrida Proposición: La distancia total recorrida es 210 millas Argumentos: En cada tramo el movimiento es uniforme.	*Generalización:* De velocidad constante se pasa a velocidad constante a trozos. *Algoritmización/cálculo*: secuencia de cálculos aritméticos *Argumentación:* En el movimiento uniforme $e = vt;$ la distancia es una magnitud aditiva

En la CE2, se da un paso más asumiendo que la velocidad ahora es constante a intervalos de tiempo. Esto permite aplicar "localmente" los procedimientos empleados en la configuración CE1, que pasa a tener entidad como un nuevo objeto matemático susceptible de ser involucrado como argumento o técnica en una nueva configuración.

Tabla 3. Configuración ontosemiótica CE3. *Velocidad variable*

Práctica	Uso/intencionalidad	Objetos	Procesos
P3.1 P3.2 P3.3 P3.4	Plantear el caso de velocidad variable dependiente del tiempo en un caso sencillo, $v(t)=2t$ Explicar la función $v(t)=2t$ Describir el procedimiento de cálculo aproximado de la distancia por acotación Establecer la aceleración del coche	Conceptos: función continua, función lineal v=2t; estimación por defecto y exceso de la distancia; aceleración; Lenguaje: natural, simbólico Proposición: la relación entre el tiempo, t, y la velocidad $v=v(t)$, es $v(t)=2t$. Proposición: La velocidad al comienzo del minuto es menor que al final. Argumento: se asume que el coche acelera suavemente, la función $v(t)=2t$ es creciente	*Generalización:* De velocidad constante a trozos se pasa a velocidad lineal (continua) *Particularización:* De la función lineal a valores de la velocidad para ciertos valores del tiempo. *Argumentación:* explicativa del problema y del procedimiento a seguir
P3.5 P3.6 P3.7	Descripción del procedimiento de acotación por defecto y exceso de velocidad Plantear y resolver un caso particular de acotación como ejemplo ilustrativo Idem, con acotación más fina	Concepto: velocidad inicial, velocidad final, cambio discontinuo de velocidad; intervalo de tiempo; amplitud del intervalo; Procedimientos: cálculo aritmético de la distancia recorrida	*Algoritmización/cálculo*: Calculo de estimaciones por exceso y defecto de la distancia recorrida *Particularización:* Obtención de la distancia para dos subdivisiones particulares de los intervalos.

P3.8	Establecer la acotación para la solución, distancia exacta recorrida	Proposiciones: p1:la distancia real está comprendida entre las dos estimaciones; p2: la estimación es más precisa cuando los intervalos son más pequeños	*Enunciación*: cota inferior y superior de la distancia exacta recorrida, precisión de la cota
P3.9 P3.10	Identificar la relación entre la distancia exacta y el límite de las aproximaciones	Concepto: valor límite de las aproximaciones Proposición: p3: la secuencia de estimaciones se aproximan a un único valor límite Argumentos: las prácticas P3.5, P3.6 y P3.7 justifican de manera plausible las proposiciones p1, p2 y p3.	*Enunciación:* la distancia como límite de las aproximaciones Argumentación: deductiva en base a prácticas previas
P3.11	Introducir la integral	Concepto: integral como valor límite de un proceso infinito	*Definición*: La distancia recorrida en un intervalo de tiempo como integral de la velocidad en dicho intervalo.

En la CE3 la velocidad es directamente proporcional al tiempo, $v(t)=2t$. Se pasa de una función constante (luego continua) a trozos (con discontinuidades de salto) a una función continua. El crecimiento de la función permite establecer estimaciones por defecto (considerando la velocidad al inicio de cada intervalo) y por exceso (considerando la velocidad final en cada intervalo). En la práctica P3.5 se dice que "Como ya sabemos calcular la distancia que recorre un coche que va dando saltos bruscos de velocidad en cada intervalo", es decir, la CE2, como objeto matemático aparece involucrada en esta nueva configuración, como proceso a aplicar de manera particular en cada una de estas estimaciones. La P3.9 establece la "necesidad de mirar infinitas aproximaciones". La mejora de estas supone divisiones cada vez más pequeñas de los intervalos, de manera que "progresivamente" se acerquen hasta ser indistinguibles las estimaciones tomadas por defecto y por exceso. La integral aparece como "idea fundamental del cálculo tras este proceso infinito".

Tabla 4. Configuración ontosemiótica CE4. *Espacio como función del tiempo y la velocidad variable*

Práctica	**Uso/intencionalidad**	**Objetos**	**Procesos**
P4.1 P4.2	Plantear el problema de cálculo de la distancia para una colección de valores del tiempo Relacionar la solución de P4.1 con el procedimiento desarrollado en la CE3	Problema: cálculo de $p(v, t)$ para 4 valores de t. Lenguajes: tabular y algebraico-funcional Conceptos: velocidad instantánea; función lineal Procedimiento: cálculo de la distancia para 4 valores de tiempo	*Problematización:* Hallar la distancia en función del tiempo *Algoritmización/cálculo*: Calcular 5 valores del espacio recorrido cuando v=2t aplicando el procedimiento de los límites. *Representación:* Disposición tabular de los 5 pares de valores de la función

P4.3 P4.4	Plantear el problema de identificar un patrón en la tabla. Enunciar la función que relaciona el espacio con el tiempo transcurrido	Conceptos: función cuadrática Proposición: $p(t)=t^2$ Argumento: Razonamiento inductivo a partir de los 5 valores de la tabla.	*Problematización*: Analizar la existencia de un patrón. *Generalización:* Del caso discreto de cinco pares de valores se infiere el caso continuo. *Enunciación*: la distancia recorrida es el cuadrado del intervalo de tiempo tomado *Argumentación:* Inductiva, del caso de 5 pares de valores se enuncia la expresión de la función continua.

En la CE4 la generalización debe permitir obtener el espacio $p(t) = t^2$ como función primitiva de la velocidad en función del tiempo. De nuevo el "procedimiento infinito" establecido en la CE3, se emplea para obtener los valores particulares que permitan "deducir un patrón". En esta configuración observamos dos procesos de "generalización abusiva" que pueden ser fuente de conflictos semióticos potenciales. Uno de ellos se refiere a la obtención del espacio recorrido para los cinco valores del tiempo, que requiere aplicar procesos de paso al límite apenas evocados previamente; el otro, la inferencia de la fórmula general del espacio para cualquier valor de t, a partir solo de 5 pares de valores.

Tabla 5 Configuración ontosemiótica CE5. *La integral como límite de sumas*

Práctica	Uso/intencionalidad	Objetos	Procesos
P5.1 P5.2 P5.3	Describir de manera discursiva el proceso integral Describir de manera simbólica la fórmula sumatoria para hallar la distancia recorrida en un intervalo de tiempo finito cualquiera Definir el valor de la integral como límite de las sumas	Conceptos: valor de la integral; límite, fórmula Procedimiento: producto de velocidades instantáneas por intervalos de tiempo pequeños; suma de productos; cálculo del límite. Argumento: secuencia de configuraciones CE1 – CE4.	*Algoritmización:* Se regulan los pasos para calcular el valor de la integral (proceso integral) *Representación:* Expresión simbólica de las sumas de la secuencia de cantidades de espacio recorrido. *Definición:* El valor de la integral es el límite de las sumas de las secuencias cuando las subdivisiones se hacen progresivamente cada vez más pequeñas

En la primera práctica elemental de la CE5 se establece cual es la esencia del "proceso integral": 1º dividir el intervalo de tiempo en pequeños incrementos, 2º ver qué distancia recorrería el coche si hubiera ido a velocidad constante durante cada intervalo pequeño de tiempo; 3º sumar esas distancias para aproximar la distancia total recorrida. Tomando límites cuando las subdivisiones son cada vez más finas, se llega al valor de la integral, que aparece vinculada a la distancia recorrida durante dicho intervalo de tiempo.

5. Significado formal-algebraico

En esta sección realizamos un análisis ontosemiótico del significado de la integral definida que suele ser objeto de estudio en los cursos universitarios sobre Cálculo, el cual se caracteriza por su progresiva generalización y formalización lograda con el uso de las herramientas del álgebra. Optamos por elegir el libro de Stewart (2016) ampliamente utilizado a nivel internacional. La lección 5 de dicho texto, *Integral*, comienza con una primera sección en la que se presentan y resuelven problemas sobre áreas y distancias aplicando procesos de cálculo de límites de sumas de Riemann, con un fuerte apoyo de representaciones gráficas. Esta sección sirve de contexto y fundamento para introducir seguidamente (sección 5.2, p. 378) la definición general de integral definida.

En los siguientes apartados presentamos primero una síntesis de la trayectoria epistémica desarrollada por Stewart, con el planteamiento y solución de problemas y ejercicios sobre cálculo de áreas y distancias, destacando las principales configuraciones epistémicas desarrolladas. Dado que el análisis de las prácticas, objetos y procesos de estas configuraciones requiere un espacio excesivo para este artículo, hemos optado por hacer dicho análisis solo para la definición general de integral, el cual incluimos en el apartado 5.2.

5.1. Preparando la definición general de integral definida: significado geométrico y cinemático

Para comprender la validez y utilidad de la generalidad con la cual se presenta la definición de integral es necesario partir de problemas específicos en cuya resolución se pone en juego las prácticas matemáticas condensadas en la definición. Es necesario comprender la razón de ser, el origen y motivación de la práctica normativa que constituye la definición de integral en su conjunto. Por esta razón, el texto de Stewart (2016) incluye la sección 5.1 en la que se abordan dos tipos de problemas: cálculo de áreas y distancia recorrida por un móvil.

El problema del cálculo de áreas

Se plantea el cálculo de áreas de superficies planas limitadas por curvas, usando como ejemplo particular la función $f(x) = x^2$, en el intervalo [0,1] (Figura 2a).

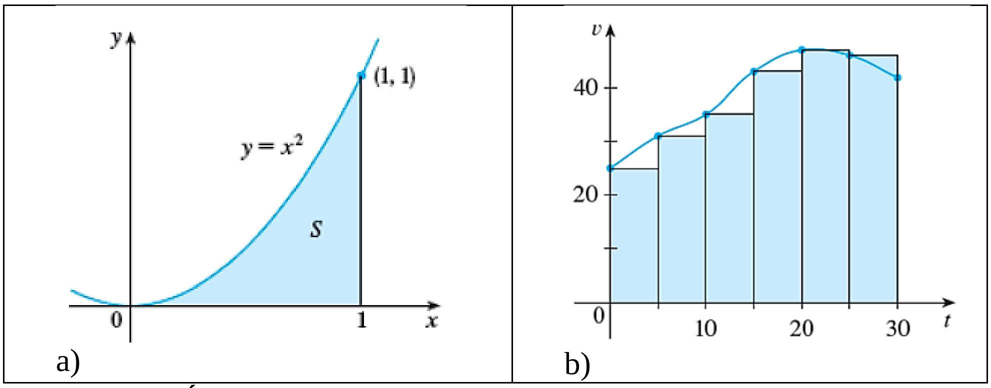
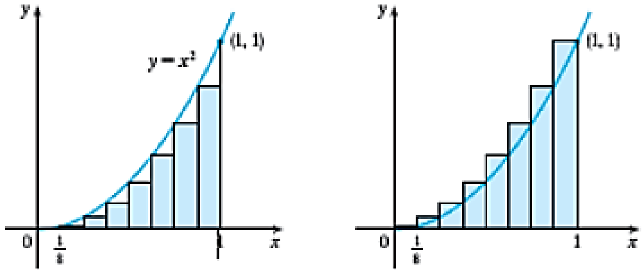


Figura 2. a) Área bajo una curva; b) Espacio recorrido

Mediante un proceso de generalización, apoyado en representaciones gráficas y tablas con estimaciones numéricas de áreas por defecto y exceso (Figura 3), se observa que conforme crece el número n de rectángulos, tanto las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación L_n (cuyas alturas se toman en los puntos extremos de la izquierda), como las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación R_n (cuyas alturas se toman en los puntos extremos de la derecha) son cada vez mejores aproximaciones del área de la región S bajo la gráfica de una función continua f .



a) defecto b) exceso

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

(c) Secuencia de aproximaciones

Figura 3. Acotaciones del área por defecto y exceso.

Esto permite establecer la definición del área A de la región S bajo la gráfica de una función continua f como límite de las sumas anteriores (Figura 4).

2 Definition The area A of the region S that lies under the graph of the continuous function f is the limit of the sum of the areas of approximating rectangles:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Figura 4. Definición de área de una región (Stewart, 2016, p. 371).

La existencia de dicho límite "puede demostrarse" a partir de la continuidad de la función f, de la misma manera que "puede demostrarse" que se obtiene el mismo valor si se cambia R_n por L_n.

El problema de la distancia recorrida

Se trata de encontrar la distancia recorrida por un objeto en un periodo de tiempo si la velocidad del objeto es conocida en función del tiempo (Figura 2b). En este caso, tras varios ejemplos particulares, resueltos con procedimientos aritméticos, y su representación cartesiana (Figura 2b) lleva a observar la semejanza de las sumas para calcular el espacio y las sumas para calcular las áreas. Ahora el área de cada rectángulo se debe interpretar como una distancia porque la altura representa velocidad y la anchura representa tiempo.

Tras la discusión de los ejemplos particulares, explicados con un lenguaje aritmético, dado que se usan conjuntos finitos de números particulares y operaciones aritméticas, se pasa al caso general en que la velocidad $v=f(t)$, donde $a \le t \le b$, y $f(t)\ge 0$, haciendo plausible que la distancia exacta d recorrida sea el límite la expresión,

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Comparando las expresiones del cálculo del área y de distancias se sigue que la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad. Posteriormente se estudia el caso de otras relaciones entre cantidades de magnitudes de interés en el campo de las ciencias naturales y sociales que pueden ser interpretadas como el área bajo una curva.

Debido a limitaciones de espacio no es posible hacer un análisis detallado de las prácticas matemáticas descritas en esta sección similar al realizado en la sección 4. Ese análisis microscópico de la actividad matemática lo aplicamos a la definición general de la integral como límite de las sumas Riemann enunciada por Stewart como hito final de los conceptos y procedimientos particulares que ha introducido en la sección 5.1. En este caso el análisis ontosemiótico se aplica a un texto que no corresponde al proceso de resolución de un problema, sino solo al proceso de definición general de un concepto matemático.

5.2. Análisis ontosemiótico de la definición de integral como límite de sumas de Riemann

La práctica matemática de la definición de la Figura 5 se puede descomponer en prácticas más elementales, en cada una de las cuales intervienen distintos tipos de objetos (ostensivos y no ostensivos) interrelacionados entre sí por medio de funciones semióticas, cada una de las cuales constituye un conocimiento específico. El reconocimiento de la trama de funciones semióticas permite revelar la complejidad de los procesos de interpretación y actuación requeridos, así como la lógica e intencionalidad de cada acción.

> **2 Definition of a Definite Integral** If f is a function defined for $a \leqslant x \leqslant b$, we divide the interval $[a, b]$ into n subintervals of equal width $\Delta x = (b - a)/n$. We let $x_0 (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ be the endpoints of these subintervals and we let $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ be any **sample points** in these subintervals, so x_i^* lies in the ith subinterval $[x_{i-1}, x_i]$. Then the **definite integral of f from a to b** is
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$
>
> provided that this limit exists and gives the same value for all possible choices of sample points. If it does exist, we say that f is **integrable** on $[a, b]$.

Figura 5. Definición de integral definida (Stewart, 2016, p. 378)

A continuación, incluimos la descomposición de la definición (Figura 5) en prácticas elementales.

P0: Definition of a Definite Integral

P1: If f is a function defined for $a \leq x \leq b$,

P2: we divide the interval $[a,b]$ into n subintervals of equal width $\Delta x = (b-a)/n$

P3: We let x_0 (=a), x_1, x_2, . . . , x_n (=b) be the endpoints of these subintervals

P4: and we let x_1^*, x_2*, . . . , x_n^* be any sample points in these subintervals, so x_i * lies in the i th subinterval $[x_{i-1}, x_i]$.

P5: Then the definite integral of f from a to b is $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

P6: provided that this limit exists and gives the same value for all possible choices of sample points.

P7: If it does exist, we say that f is integrable on $[a, b]$.

La intención de P0 es asignar un nombre a la secuencia de prácticas que siguen y clasificarla como definición/regla. Consideramos las prácticas P1, P2, P3 y P4 como una configuración epistémica de la definición general (CE1-DG), las cuales tienen un papel preparatorio de la definición propiamente dicha, la cual se hace en las prácticas P5, P6 y P7 (CE2-DG).

En las Tabla 6 y 7 aparecen estas prácticas elementales (columna 1) relacionadas con su uso o intencionalidad (columna 2), los objetos (columna 3) y procesos (columna 4) que se ponen en juego.

Tabla 6. Configuración ontosemiótica CE1-DG: función, intervalo, partición y puntos muestra

Práctica	Intencionalidad	Objetos	Procesos
P1	Establecer una condición al tipo	Lenguaje: natural, simbólico	*Interpretación/significación*:

	de funciones que se van a considerar y representarla con *f*	Conceptos: función; intervalo de números reales; dominio; variable	-El término función refiere al concepto de función real de variable real. - El dominio de la función es el intervalo de números comprendido entre dos números reales fijos pero arbitrarios, *a* y *b*. *Representación: f* designa a una función cualquiera de variable real; *x* la variable independiente; $a \leq x \leq b$ representa el dominio de la función.
P2	Establecer la amplitud de los intervalos de la partición	Conceptos: intervalo origen y extremo, amplitud del intervalo Procedimientos: cálculo de la amplitud del intervalo en función de la longitud y el número de puntos, descomposición en subintervalos equiespaciados con dicha amplitud. Procedimiento: Determinación de amplitud de los intervalos	*Interpretación/significación:* A la expresión $[a,b]$ se asigna como contenido (significado) un intervalo genérico de números reales, cuyos extremos se designan con las letras *a* (origen) y *b* (extremo). Δx designa la amplitud de cualquier subintervalo; interviene como variable. Dividir (el intervalo) en *n* subintervalos, quiere decir descomponerlo en *n* partes disjuntas. La letra *n* refiere al número finito, pero cualquiera, en que se divide el intervalo. *Definición:* $\Delta x = (b-a)/n$ Representación: Asignación de símbolos a los extremos del intervalo, número de intervalos y amplitud del intervalo
P3	Asignar un símbolo a los puntos extremos de los subintervalos de la partición	Lenguaje: representación simbólica de puntos Conceptos: puntos extremos de subintervalos; secuencia finita de puntos Procedimiento: elección de la partición.	*Interpretación/significación:* Puntos extremos de estos subintervalos. Un intervalo viene dado por dos puntos, inferior (izquierda) y superior (derecho); como los subintervalos son contiguos, el superior de uno coincide con el inferior del siguiente, excepto el primer subintervalo: x_0 (=*a*) y el último: x_n (=*b*). Representación: Asignación de símbolos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ a la secuencia de puntos que dividen el intervalo.
P4	Asignar un símbolo a cada punto muestra de los intervalos; Recordar qué significa punto muestra	Lenguaje: representación simbólica de un punto muestra genérico Concepto: punto muestra Procedimiento: elección de puntos muestra en cada intervalo.	*Definición:* Los puntos muestra en cada intervalo refieren a puntos específicos interiores en cada intervalo. *Interpretación/significación:* -Los puntos muestra representarán al conjunto de puntos de cada subintervalo. -Cada punto muestra x_i^*, pertenece al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. *Representación*: Los símbolos $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ refieren a puntos particulares de cada uno de los *n* subintervalos.

El sujeto que lee y comprende la definición de integral definida (Figura 5) debe movilizar un sistema de conocimientos previos, lo cual supone relacionar los diferentes objetos que intervienen en las prácticas y reconocer el papel que desempeña cada una de ellas en el proceso de definición. En la trama de procesos reconocidos en las Tablas 6 y 7, destacan especialmente los de interpretación/ significación, que un sujeto epistémico (experto o ideal) pone en juego de manera implícita cuando lee, interpreta y comprende la definición.

Tabla 7. Configuración ontosemiótica CE2-DG: definición de integral definida y de función integrable

Práctica	Intencionalidad	Objetos	Procesos
P5	Definir la integral definida de cualquier función *f*, como límite de una suma de productos	Lenguaje: simbólico Conceptos: integral definida; valor de la función en un punto; amplitud del subintervalo; producto; suma y límite.	*Interpretación/significación:* -La expresión $f(x_i^*)$ refiere al valor de la función *f* en el punto muestra x_i^* del intervalo *i*. -La expresión Δx refiere a la amplitud constante de cada subintervalo dada en P3. -La expresión $f(x_i^*)\,\Delta x$ refiere al producto del valor de la función en el punto muestra *i* con la amplitud del intervalo. -La expresión $\sum_{i=1}^{n}$ refiere a la suma de los *n* productos. -La expresión $\lim_{n\to\infty}$ refiere al cálculo del límite de la sucesión sumatoria en *n*. $\int_a^b f(x)dx$ designa el valor de la integral de la función *f* en el intervalo $[a,b]$ El número resultante del límite se asigna a la integral definida, símbolo que interviene como variable usada como receptor. *Representación:* Asignación de símbolos a la integral definida, límite y sumatoria *Algoritmización:* Productos; suma de secuencia de productos; cálculo del límite de la secuencia de sumas. *Definición:* Se define la integral como el número resultante del cálculo de límite regla
P6	Establecer condiciones sobre la validez de la regla/definición	Lenguaje: natural Conceptos: límite; igualdad de números; punto muestra	*Interpretación/significación:* Existencia del límite, refiere a que $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ sea una sucesión convergente de números naturales Da el mismo valor para todos las posibles elecciones de puntos muestras, refiere a que el valor de dicho límite no depende de los puntos nuestra en que se evalúa la función.
P7	Asignar un nombre a las funciones que cumplen una condición	Concepto: función integrable; intervalo; existencia del límite.	*Definición*: Función integrable en un intervalo

En todo el *proceso de definición* los símbolos alfabéticos a y b están interviniendo como parámetros: el número real que se va a designar como integral de la función *f* depende en cada caso del valor que se asigne a los extremos del intervalo. Los términos intervalo, subintervalo y amplitud se relacionan con sus respectivos conceptos/ reglas.

Encontramos un *proceso de generalización* con relación al conjunto de ejemplos planteados y resueltos en la sección 5.1 del texto (Stewart, 2016, pp. 366-378), los cuales refieren a situaciones en las que intervienen magnitudes, cantidades, medidas y correspondencias entre magnitudes, la definición general de integral de integral se refiere a una función *f* cualquiera de variable real; desaparecen las magnitudes y la correspondencia se establece números.

En la práctica P6 puede surgir un conflicto semiótico en la significación y representación del valor de la integral definida de una función *f* en el intervalo $[a, b]$: el símbolo dx no tiene ningún referente previo. Se podría esperar representar dicho número como S(*f*, a, b); es un valor que depende de la función *f*, y los parámetros a y b, extremos de integración.

En este sistema de prácticas, la integral se define como número, obtenido como resultado de la aplicación de la regla cuya justificación o razón de ser refiere al sistema de prácticas discursivas, operativas y normativas previamente incluidas en la sección 5.1 del texto.

6. Discusión y conexiones

En este apartado sintetizamos los aportes alcanzados con el análisis ontosemiótico de los significados de la integral realizado en las secciones 4 y 5 y los relacionamos con los insights propuestos por otros autores aplicando diversas herramientas teóricas. El análisis del significado intuitivo (sección 4) revela que es posible un primer encuentro con la integral seleccionando una situación-problema introductoria, resoluble con una secuencia de prácticas que involucran objetos y procedimientos fundamentalmente aritméticos. Es inevitable asomarse, no obstante, al proceso infinito de obtener el límite de la suma de una sucesión de productos de cantidades infinitesimales.

Sin embargo, la progresión en la eficiencia del trabajo matemático por parte de los futuros profesionales universitarios, requiere dominar la herramienta algebraica para expresar la generalidad de los conceptos y procedimientos matemáticos y operar sintácticamente con dicha generalidad. El análisis ontosemiótico del significado formal-algebraico de la integral, establecido en la definición como límite de sumas de Riemann (sección 5), se revela también como útil para tomar conciencia de los conocimientos, competencias y actos de comprensión implicados.

La metodología de análisis de un texto matemático que hemos ejemplificado en los apartados 4 y 5 aplicando herramientas teóricas del EOS aporta un nivel microscópico de análisis que permite identificar algunos hechos epistémicos y semiótico-cognitivos de interés didáctico, así como algunos *estratos epistémicos*, esto es, conocimientos institucionales que han debido ser estudiados previamente, que pasan desapercibidos usualmente en los procesos de enseñanza. En ambos casos hemos podido identificar potenciales conflictos semióticos relacionados particularmente con los procesos de generalización que se realizan, con frecuencia de manera implícita, en el proceso de definición de la integral.

Reconocer que un primer encuentro con la integral definida se puede implementar apoyándose en medios de expresión no necesariamente algebraicos es un hecho epistémico de interés educativo. No obstante, nuestro análisis revela que incluso en esta aproximación intuitiva se pueden deslizar prácticas discursivas que implican un cuestionamiento semiótico por parte del lector. Por ejemplo, en la práctica P5.2 (CE5, Sección 4), Starbird introduce de manera abrupta una expresión algebraica general de la suma de incrementos del espacio recorrido entre un intervalo de tiempo cualquiera $[a, b]$ que contrasta con la presentación previa hecha con lenguaje natural y valores numéricos particulares. El lector no familiarizado con esta escritura para expresar la generalidad del proceso de resolución seguido tendrá que cuestionarse el significado de cada término de la expresión.

En el caso del estudio de la integral que propone Stewart (2016), Sección 5, también encontramos un problema semiótico similar. Por ejemplo, la solución del problema de cálculo del área bajo una curva es un número que se expresa como

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x] \\ &= \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x] \end{aligned}$$

y la solución del problema de cálculo de la distancia recorrida es también un número que se expresa como

$$d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Además, el lector debe aceptar la existencia e igualdad de tales límites.

En la definición general de la integral (Figura 5) dicho número se expresa con una notación compleja en el que el lector debe entender que el símbolo dx no tiene significado por sí mismo y que la expresión, $\int_a^b f(x)dx,$ debe ser vista como un único símbolo para representar "un número que no depende de x".

Mientras aprenden la integral definida, los estudiantes se encuentran con sumas de Riemann, límites, derivadas, área y muchos otros conceptos. Para comprender bien la integral definida, los alumnos deben ser capaces de establecer conexiones entre todos estos conceptos. La investigación sobre las integrales definidas descubrió que el conocimiento de los estudiantes se limitaba a un conocimiento de tipo procedimental, pero tenían dificultades para establecer conexiones entre las diferentes representaciones de la integral definida (Serhan, 2015).

Nuestro análisis ayuda a revelar la compleja trama de objetos que intervienen en las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas que son consustanciales con la actividad matemática. En dichas prácticas no solo intervienen objetos conceptuales y procedimentales, sino también problemas, que contextualizan y dan sentido a toda la actividad matemática; representaciones de diversa índole (simbólicas, gráficas, diagramáticas, lenguaje natural, etc.); proposiciones que relacionan los conceptos y sintetizan los resultados que dan respuesta a los problemas; argumentos justificativos de los procedimientos y proposiciones, o bien descriptivos y explicativos. Una atención especial requieren también los procesos matemáticos, interpretados en términos de secuencias de prácticas orientadas a alcanzar los objetivos pretendidos por la actividad matemática. Así, en el proceso general de resolución de problemas se distinguen procesos más específicos, como representación, interpretación-significación, definición, algoritmización, enunciación, argumentación, generalización, particularización, etc. En las prácticas analizadas en las secciones 4 y 5, observamos que no todos estos procesos tienen la misma presencia y que la complejidad de éstos también es un factor explicativo de las diversas dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

El análisis ontosemiótico aquí ejemplificado puede complementar los análisis realizados por otros autores usando herramientas teóricas diferentes. El modelo de estructura de la integral definida elaborado por Sealey (2014) es sin duda útil y relevante para comprender las dificultades de comprensión de los estudiantes. Consideramos que el análisis realizado en las secciones 4 y 5 complementa el modelo de Sealey en dos direcciones. Por una parte, además de la capa de Orienting, relacionada con la comprensión de las magnitudes que intervienen y de las relaciones con los contextos de los problemas, hay una trama de conocimientos matemáticos previos, - lingüísticos, conceptuales, procedimentales y argumentativos - que se deben tener en cuenta en el proceso de instrucción. Además, la comprensión de cada una de las capas que describe Sealey también pone en juego procesos y objetos que el análisis ontosemiótico revela, los cuales pueden ser fuente de potenciales conflictos semióticos.

Con relación a las investigaciones que usan las nociones de concept definition and concept image (Rasslan y Tall, 2002; Grundmeier, Hansen, & Sousa, 2006; Serhan, 2015) consideramos que las herramientas ontosemióticas que hemos presentado son compatibles con estas nociones, aunque podrían ampliar y profundizar en el análisis de las concepciones, limitaciones y sesgos del aprendizaje de la integral. El concept image es interpretado en el EOS como el significado personal del sujeto sobre un concepto, lo que implica adoptar una perspectiva sistémica y pragmática sobre el conocimiento matemático. Este significado viene descrito por la configuración ontosemiótica cognitiva (o personal), la cual involucra un tipo de problema, el sistema de prácticas para su solución y la trama de objetos y procesos implicados en dichas prácticas. La definición del concepto es uno de los objetos de la configuración, tal definición es una norma que regula las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver el tipo de problemas correspondiente. El análisis de la actividad y del conocimiento matemático se hace tanto desde la perspectiva personal o cognitiva como institucional o epistémica; en consecuencia, se debería hablar también del “concept image” institucional, o sea, del significado institucional de la integral, entendido así mismo como configuración ontosemiótica. Por otra parte, para la integral y cualquier concepto matemático es posible encontrar, no una única definición sino que existen diversas definiciones, cada una ligada a determinados contextos o tipos de problemas cuya resolución pone en juego sistemas de prácticas diferentes, y, por tanto, diferentes significados (sentidos).

La distinción entre conocimiento conceptual y procedimental, introducida en educación matemática en el trabajo de Hiebert y Lefevre (1986), ha sido usada por Serhan (2015), entre otros autores, para el caso del conocimiento de los estudiantes sobre la integral. Consideramos que la noción de significado pragmático que propone el EOS para un concepto, entendido de manera sistémica como una configuración ontosemiótica, desarrolla la noción de conocimiento conceptual y procedimental. Esto es así porque la configuración ontosemiótica muestra los elementos que intervienen en los componentes conceptuales y procedimentales, así como las relaciones que deben existir entre los mismos. El análisis ontosemiótico que hemos hecho en las secciones 4 y 5 muestra, con dos ejemplos concretos, las piezas de información sobre la integral que deben ser interconectas para poder afirmar que un sujeto tiene conocimiento conceptual y procedimental sobre los dos significados que hemos seleccionado. Es importante explicitar el componente argumentos, así como los procesos de interpretación, significación, representación, generalización, etc., que se ponen en juego en cada caso, los cuales quedan implícitos o poco desarrollados en el modelo de Hiebert y Lefevre.

7. Reflexiones finales

El análisis ontosemiótico aplicado a dos significados de la integral ha permitido revelar la compleja trama de objetos y procesos implicados en la actividad matemática, conocimiento que consideramos útil para la gestión de la enseñanza y aprendizaje de la integral. Hemos mostrado que la aproximación ontosemiótica al conocimiento matemático permite conectar dos perspectivas complementarias sobre las matemáticas: como actividad de las personas orientada a la solución de problemas y como sistema de objetos y procesos que regulan y emergen de dicha actividad. Además tiene en cuenta, entre otras, la dualidad personal (cognitiva) e institucional (epistémica) del conocimiento matemático, que es fundamental para el estudio de los fenómenos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Según Serhan (2015), es importante que los instructores revisen la forma en que se presenta y enseña la integral definida en clase. Es necesario hacer más hincapié en las múltiples representaciones, sus conexiones y cómo los estudiantes pueden utilizar la suma de Riemann para mejorar su comprensión estructural de la integral definida. Aunque se trata de un análisis laborioso que requiere un cierto dominio de las herramientas teóricas consideramos que los investigadores y formadores de profesores deberían capacitarse para realizar análisis similares de los contenidos de enseñanza, al menos los conceptos y procedimientos esenciales de cada tema. Para cada significado parcial del objeto, y la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan, es necesario identificar la trama de objetos y procesos implicados, con el fin de poder planificar la enseñanza, gestionar las interacciones en el aula, comprender las dificultades y evaluar los niveles de aprendizaje de los estudiantes. La identificación de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia docente que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

Sería necesario continuar este trabajo con otros significados de la integral, en particular con el Teorema Fundamental del Cálculo, el cual lleva a entender la integral como diferencia incremental de la función acumulativa. También es necesario ampliar el estudio en tres direcciones: profundizar en la articulación del análisis ontosemiótico con las aportaciones de otros marcos teóricos, aplicar las herramientas del EOS al estudio de los significados personales de los estudiantes sobre la integral y analizar el impacto del uso de la tecnología en las prácticas matemáticas para resolución de problemas de cálculo integral.

Referencias

Attorps, I., Björk, K., Radic, M. & Tossavainen, T. (2013). Varied ways to teach the definite integral concept. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *8*(2-3), 81-99.

Borji, V. & Font, V. (2019). Exploring students' understanding of integration by parts: a combined use of APOS and OSA. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(7), em1721. https://doi.org/10.29333/ejmste/106166.

Bressoud, D., Ghedams, I., Martinez-Luances, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of Calculus.* Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Contreras, A., & Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime, 9*(1), 65-84.

Contreras, A., Ordóñez, L. & Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). New York: Kluwer A. P.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* [Semiosis and human thought. Semiotic registers and intellectual learning]. Peter Lang.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 33-52. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39* (1), 37- 42

Greefrath, G, Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V. & Weigand, H. G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral subject matter-related didactical perspectives of concept formation. *Journal Mathematik Didaktik, Suppl 1*, 99-129. DOI 10.1007/s13138-016-0100-x

Grundmeier, T. A., Hansen, J., & Sousa, E. (2006). An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. *PRIMUS, 16*(2), 178-191.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 195–222.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 122–141.

Jones, S, R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behaviour, 38*, 9–28.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*, 641–651.

Kouropatov, A. & Dreyfus, T (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46*, 533–548.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. En F. Marton and A. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-40). Lawrence Erlbaum Associates, INC Publishers.

Mateus, E. (2016). Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes. *Bolema, 30*(55), 559-585. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a13.

Ordoñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics. 14*, 1-18.

Rasslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In: A. D. Cockburn & E. Nardi (eds.) *Proceedings of the 26th Conference PME*, Norwich, 4, 89-96.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 230– 245.

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science*, 1(1), 84-88.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press

Starbird, M. (2006). *Change and motion: Calculus made clear*, 2nd Edition. Chantilly, Virginia. The Teaching Company.

Stewart, J. (2016). *Calculus. Early transcendentals*. Boston: Cengage Learning.

Tall, D. O. (2004). Building theories: the three worlds of mathematics. *For the learning of mathematics, 24* (1), 29-32.

Tall, D., O. & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America. Available at http://pat-thompson.net/PDFversions/2008MAA Accum.pdf.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. The MacMillan Company.