

Análisis ontosemiótico del estudio de la ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 mediante recursos tecnológicos

Onto-semiotic analysis of learning vector equation of the straight line in \mathbb{R}^3 through technological tools

Adriana Schilardi, Liliana Repetto, Sandra Segura y Oscar León

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza

Resumen

En este trabajo se describe el análisis a priori de actividades diseñadas para favorecer el aprendizaje de la ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 mediante el uso de recursos tecnológicos en el primer año de las carreras de ingeniería. Se aplican algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico, en particular los tipos de entidades primarias (situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos) como guía para formular cuestiones relacionadas con la faceta epistémica del proceso de instruccional planificado. Así mismo, se incluyen algunas reflexiones sobre las facetas cognitiva – afectiva e instruccional. Este análisis tiene por finalidad prever posibles conflictos de aprendizaje y formas de abordarlos.

Palabras clave: enseñanza, ecuación de la recta, recursos tecnológicos, análisis ontosemiótico

Abstract

This paper describes the a priori analysis of activities designed to favour the learning of the vector equation of the \mathbb{R}^3 line through the use of technological resources in the first year of engineering careers. Some tools of the Onto-semiotic Approach, in particular the types of primary entities (situations, languages, concepts, procedures, propositions and arguments) are applied, as a guide to formulate questions related to the epistemic facet of the planned instructional process. Some reflections on the cognitive - affective and instructional facets are also included. This analysis is intended to anticipate possible learning conflicts and suggest ways of addressing them.

Keywords: teaching, straight line equation, technological resources, onto-semiotic analysis

1. Introducción

Uno de los temas que mayor dificultad encuentran los alumnos de álgebra y geometría en los primeros cursos universitarios es la comprensión de situaciones de la geometría espacial. Les resulta muy dificultoso interpretar geoméricamente operaciones entre vectores y cualquier concepto derivado de esto cuando se presenta en el espacio (\mathbb{R}^3). Esta inquietud da lugar a proponer otro tipo de actividades no convencionales para favorecer la interpretación espacial de los objetos tratados basados en los estilos de aprendizaje preponderantes de nuestros alumnos (Felder y Silverman, 2002). A partir de esta idea se elabora una propuesta didáctica con el fin de favorecer el aprendizaje de los conceptos geométricos involucrados a través objetos virtuales de aprendizaje como: foros, cuestionarios, videos, simulaciones y otras herramientas que involucran cambios de registros semióticos.

2. Marco teórico y cuestiones de investigación

Usaremos como marco teórico para analizar la propuesta didáctica el enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). Uno de los supuestos teóricos de este enfoque está relacionado con el hecho que, los fenómenos didácticos, tienen una doble dimensión institucional-personal. Tomando como primitiva la noción de situación-problema, se introducen las nociones de: sistema de prácticas matemáticas, objetos emergentes de los sistemas de prácticas y significado de un objeto matemático conceptual (Godino y Batanero, 1994). Los significados son entendidos en términos de los sistemas de prácticas que un sujeto (persona o institución) pone en juego, en las cuales el objeto desempeña un papel relevante. Este sistema de nociones se conoce como “Teoría de los significados sistémicos” (TSS). Estas investigaciones centran su atención en las actividades matemáticas de las personas, que no sólo implican resolver problemas, sino también comunicar la matemática. Se pone énfasis tanto en el papel del conocimiento institucional matemático como también en el sujeto individual como centro del proceso educativo.

Los objetos matemáticos emergen de prácticas socialmente compartidas en una institución las cuales se conciben como la actuación, manifestación o expresión (verbal, gráfica o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.

El EOS propone como herramientas para el análisis de la actividad matemática las siguientes entidades primarias (Godino, Batanero y Font, 2007)

- tipos de problemas o situaciones, que son el origen o razón de ser de la actividad. Son las tareas que inducen a la actividad matemática. Pueden ser problemas abiertos o no; aplicaciones intra o extra-matemáticas o ejercicios, entre otros.
- lenguajes, que corresponden a los símbolos, notación, gráficos y otros. En un texto se presenta en forma escrita o gráfica. También pueden usarse otros tipos de registros, como por ejemplo el oral o gestual.
- procedimientos, son acciones del sujeto ante las tareas matemáticas. Suelen ser operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo.
- conceptos que suelen darse como definiciones o descripciones (función, recta, vector), proposiciones, propiedades o atributos de los objetos mencionados que suelen darse como enunciado.
- argumentaciones, que se utilizan para validar y explicar las proposiciones ya sean deductiva o de otro tipo.
- propiedades o atributos, que se describen usualmente como enunciados o proposiciones.

Teniendo en cuenta esta tipología de objetos, en la Tabla 1, se incluye el conjunto de cuestiones que usaremos en la sección 4 para realizar el análisis de la situación didáctica relacionada con el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

Tabla 1. Clasificación de cuestiones de investigación según las entidades primarias implicadas

Situaciones	S1) ¿Qué tipo de situaciones-problemas específicas permite plantear el recurso? S2) ¿Sobre qué tipo de situaciones previas se apoyan las nuevas situaciones? S3) ¿Qué variables de tarea permiten generalizar la actividad matemática y en qué dirección?
Lenguaje	L1) ¿Se introduce un lenguaje específico en la descripción y uso del recurso? L2) ¿Qué nuevos términos, expresiones, símbolos y gráficos se introducen? L3) ¿Se utiliza más de un registro semiótico, traducciones y tratamientos entre los mismos? L4) ¿Qué conocimientos lingüísticos previos requiere el uso del recurso? L5) ¿Es útil en la progresión del aprendizaje matemático el lenguaje específico introducido?
Procedimientos	Proc1) ¿Qué procedimientos específicos se requieren para la solución de las tareas? Proc2) ¿procedimientos previos es necesario dominar para aplicar los nuevos procedimientos? Proc3) ¿Es posible generalizar procedimientos y en qué dirección?
Conceptos	C1) ¿Qué conceptos específicos se espera que emerjan de las prácticas matemáticas implementadas? C2) ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita y se suponen conocidos? C3) ¿En qué dirección se pueden generalizar los conceptos emergentes?
Propiedades	Prop1) ¿Qué propiedades se emergerán de las prácticas matemáticas implementadas? Prop2) ¿Qué propiedades previas se usarán de manera explícita o implícita y se suponen conocidas? Prop3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las propiedades emergentes?
Argumentos	A1) ¿Qué tipo de justificaciones de las técnicas y propiedades proporciona el recurso? A2) ¿Las argumentaciones específicas propiciadas por el recurso se apoyan en otras previas? A3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las argumentaciones propiciadas por el recurso?

3. Descripción de la experiencia

Para diseñar e implementar esta propuesta didáctica, basada en e-learning, se conformó un grupo integrado por docentes con formación académica en distintas áreas: informática, física, electrónica, matemática y didáctica.

La secuencia consiste en un entorno virtual de trabajo implementado en una red usando la herramienta LAMS (Learning Activities Management System) (Fundación LAMS, 2016). Esto corresponde a un sistema de Diseño de Aprendizaje en una plataforma para la elaboración, gestión y ejecución de las actividades colaborativas de aprendizaje en línea (online). Esta red ofrece a los profesores un entorno de edición visual intuitiva

para la creación de secuencias de actividades de aprendizaje. Estas actividades pueden incluir una serie de tareas individuales, pequeños grupos de trabajo y actividades de diversas clases basadas en el contenido y la colaboración. Otra de las herramientas utilizadas es Geogebra® (Geogebra, 2016), la cual presenta características adecuadas para implementar la experiencia (Assum, et al. 2014).

La experimentación se realizará con un curso de primer año de la Carrera de Ingeniería Civil, dentro de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica. El tema rectas en el espacio, está contenido en la unidad 4 de la asignatura (Vectores en R^2 y R^3). En vez de dar el tema de forma presencial, se convocará a los alumnos a transitar la secuencia usando la herramienta LAMS. Se desarrollará una clase extra para explicarles cómo se usa la plataforma y se habilitará un correo electrónico en donde los alumnos se comuniquen con los docentes para hacer preguntas relacionadas con la plataforma o con el tema en cuestión. Las tareas realizadas por los alumnos serán revisadas periódicamente por los docentes involucrados en el proyecto. Todas las tareas se harán en horario extra-clase en los tiempos que los alumnos dispongan, aunque se les dará una fecha de finalización, para poder continuar con los temas posteriores.

A continuación se muestran algunas de las secuencias de actividades contenidas en el diseño elaborado (Tablas 2, 3 y 4).

Tabla 2. Simulación en Geogebra® del producto de un vector por un escalar

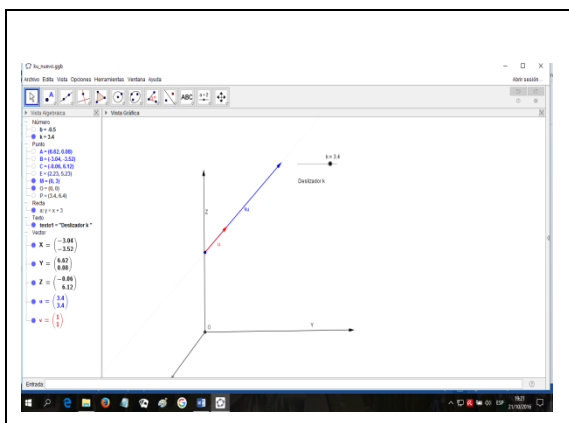
	<p>Se comienza con una simulación para que el alumno experimente, a través de un deslizador, lo que sucede cuando a un vector se lo multiplica por un escalar. A continuación el alumno deberá contestar algunas cuestiones relacionadas con esta situación. Por ejemplo:</p> <p>¿Qué sucede si el escalar es negativo?</p> <p>¿Qué sucede si el escalar es mayor o menor que 1?</p>
--	--

Tabla 3. Captura de video que muestra la construcción de una recta en el espacio

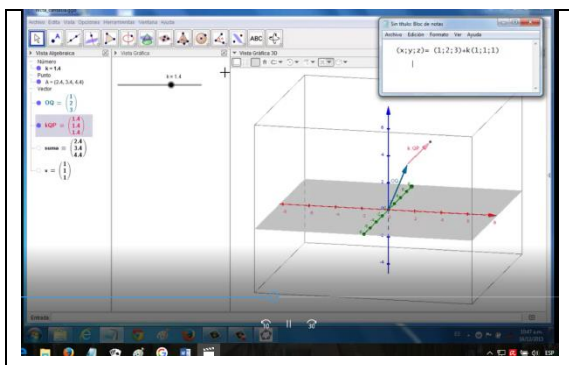
	<p>Luego se le proporciona un video donde se muestra cómo se construye una recta en R^3, a partir de la suma de vectores. Este recurso permite utilizar la posibilidad que tiene Geogebra de ver la posición relativa de la recta rotando la imagen obtenida. A continuación deberá responder un test relacionado con los conceptos tratados.</p>
---	--

Tabla 4. Captura de video de ejercicio resuelto por dos alumnas

<p>CLARA</p> <p>Halla una ecuación de la recta de \mathbb{R}^3, que pasa por dos puntos conocidos $P_1(-1, 2, 3)$ y $Q_2(2, 2, 3)$.</p> <p>$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(2, 2, 3)$</p> <p>LUISA</p> <p>Halla una ecuación de la recta de \mathbb{R}^3, que pasa por dos puntos conocidos $P_1(-1, 2, 3)$ y $Q_2(2, 2, 3)$.</p> <p>$\vec{PQ} = (2, 2, 3) - (1, -1, 2)$ $\vec{PQ} = (1, 3, 1)$ $(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 3, 1)$</p> <p>¿Con quién estás de acuerdo? ¿con Clara, con Luisa o ninguna de las dos? ¿por qué?</p>	<p>Posteriormente, se muestra un video donde dos supuestas alumnas, Clara y Luisa resuelven un ejercicio. Clara lo resuelve bien y Luisa, mal. Al final, se interroga a los estudiantes para conocer con cuál de las alumnas están de acuerdo.</p>
---	--

A continuación se realiza a un análisis a priori de las actividades teniendo en cuenta principalmente la dimensión epistémica (conocimientos institucionales); también se incluyen algunas reflexiones sobre la dimensión cognitiva-afectiva (conocimientos personales y aspectos afectivos) e instruccional (funciones docentes y discentes; patrones de interacción) (Godino, Contreras y Font, 2006).

4. Análisis a priori de las actividades

4.1. Dimensión epistémica

En esta dimensión se analizarán los objetos primarios que intervienen y las funciones semióticas necesarias para la realización de la actividad planteada para incorporar el concepto de ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 . El análisis está basado en las tareas que realiza el docente relacionadas con el saber matemático descrito en las tablas 1, 2, 3 y 4.

Desde el punto de vista planteado por el marco teórico elegido se analiza la propuesta didáctica respondiendo a las preguntas presentadas en la Tabla 1.

4.1.1 Tipos de situaciones-problemas

S1) Las situaciones problemas que permite plantear el recurso son:

- Dadas las coordenadas de un punto P y las componentes de un vector u, elegir de cuatro opciones la ecuación vectorial de la recta que contiene a P y tiene la dirección de u.
- Dada la ecuación vectorial de una recta, el alumno debe seleccionar la opción correcta entre cuatro puntos (dados por sus coordenadas), uno que pertenezca a la recta.
- Dada la ecuación vectorial de una recta, elegir un punto que no pertenezca a la recta entre cuatro puntos (nombrados por sus coordenadas).
- Conocidas las componentes de un vector u, elegir entre cuatro opciones de ecuaciones de una recta, aquella que pasa por el origen de coordenadas y tiene la dirección de u.

- e) A partir de las coordenadas de dos puntos P y Q, encontrar la ecuación vectorial de la recta que contiene a P y Q.

S2) Las nuevas situaciones se apoyan en el conocimiento, por parte del alumno, del manejo de operaciones entre vectores en R^2 y R^3 y sistemas de ecuaciones lineales. Estos conceptos previos son la base necesaria para deducir gráfica y analíticamente la expresión algebraica de la ecuación vectorial de una recta.

S3) A partir de esta actividad se pueden abordar situaciones que involucren posiciones relativas de rectas; ángulos; puntos pertenecientes a rectas; paralelismo y perpendicularidad e intersección entre rectas.

4.1.2. Lenguaje

L1) Se introduce como lenguaje específico expresiones como: “vector posición”; “ecuación vectorial”; parámetro.

Con respecto a los gráficos, se introducen representaciones en R^3 de rectas.

L2) Se utilizan distintos registros semióticos como son: del lenguaje simbólico al gráfico.

Algunas de las actividades de traducción o cambio de registro que se realizan son:

- En el video (Tabla 3), al representar en la gráfica la recta que pasa por los puntos P y Q, que se nombran en el enunciado de la actividad, se observa un cambio o traducción del lenguaje algebraico al lenguaje gráfico. En esta actividad, se debe traducir gráficamente lo que representan las expresiones algebraicas.
- En la simulación (Tabla 2), cuando al alumno utiliza el deslizador para cambiar los valores del parámetro asignándole valores negativos, puede observar que el vector cambia de sentido. Esto permite convertir el registro algebraico o simbólico en registro gráfico dado que está traduciendo en la imagen lo que produce en la expresión algebraica el producto del vector por un número negativo.
- En el video de la (Tabla 3), cuando se suma el vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto Q (vector OQ) con el vector k.QP, se realiza una actividad de tratamiento en el registro gráfico. El alumno observa qué sucede dentro del registro gráfico con la representación de los vectores al sumarlos.

L3) El uso del recurso requiere que los alumnos conozcan los términos: vectores, recta, punto, suma de vectores, producto de vector por escalar, sentido, dirección.

L4) El lenguaje específico introducido es fundamental, dado que el tema abordado requiere de la ubicación espacial de los objetos geométricos tratados. En particular, el lenguaje utilizado para adquirir el concepto de ecuación vectorial de la recta, es imprescindible para abordar el aprendizaje de la ecuación paramétrica y de la ecuación simétrica de la recta en el espacio. También, se puede extender la importancia del lenguaje utilizado en el aprendizaje de concepto de ecuación vectorial y general del plano en R^3

4.1.3. Procedimientos

Proc. 1) Los procedimientos específicos que requiere la solución de la tarea son los algoritmos de producto de un escalar por un vector como producto de las componentes del vector por el escalar.

Proc. 2) Para aplicar los nuevos procedimientos es necesario la manipulación de entornos web.

Proc. 3) Las técnicas utilizadas son de uso general para cualquier entorno web y manejo de herramientas para visualización.

4.1.4. Conceptos

C1) Se supone que el alumno adquiere, a partir de las prácticas matemáticas implementadas, el conocimiento que al multiplicar un vector por un escalar negativo y mayor que 1, este vector cambia de sentido y se extiende. En tanto que si el escalar es positivo y mayor que 1, se extiende manteniendo el mismo sentido. En el caso de que el escalar sea negativo y menor que 1, se comprime y cambia de sentido el vector, y si el escalar es positivo y menor que 1 se comprime manteniendo el sentido. (Tabla 2)

Al fijar un punto sobre la recta se determina un vector anclado en el origen. Al sumar dicho vector con otro paralelo al vector dirección de la recta, se generan infinitos vectores con origen en el origen de coordenadas y extremo en un punto genérico de la recta. (Tabla 3)

Todo punto de una recta verifica la ecuación vectorial. Indirectamente emerge de la tercera actividad propuesta (Tabla 4)

C2) Los conocimientos previos que se usan en forma explícita y que se suponen conocidos son los vinculados con las operaciones entre vectores y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

C3) Los conceptos emergentes están circunscriptos a la interpretación algebraica y geométrica de la ecuación vectorial de la recta en el espacio.

4.1.5. Propiedades

Prop. 1) Las propiedades que se espera que surjan son las referidas a paralelismo y perpendicularidad y ángulo entre rectas.

Prop. 2) Las propiedades previas conocidas que se requieren están relacionadas con las operaciones entre vectores. Por ejemplo:

- dados dos vectores consecutivos, la suma entre ellos es igual a otro vector con origen en el origen del primero de los vectores y extremo en el extremo del segundo de los vectores dados.

- si multiplicamos un escalar por un vector, se obtiene otro vector con igual dirección (paralelo). Si el escalar es positivo, el vector obtenido mantiene el sentido mientras que si el escalar es negativo, el sentido del vector obtenido es contrario al del primer vector.

- las componentes de un vector dado por dos puntos se obtienen como diferencia entre las coordenadas de dichos puntos.

Prop. 3) Se pueden generalizar en la obtención de la ecuación vectorial de una recta paralela o perpendicular a otra y en la determinación del ángulo comprendido entre ellas.

4.1.6. Argumentos

A1) Todas las argumentaciones y justificaciones que presenta el recurso son visuales, coloquiales y algebraicas.

A2) Las argumentaciones que propicia la actividad que se plantea, no están relacionadas con otras argumentaciones previas.

A3) Se espera que el alumno esté en condiciones de argumentar, observando la actividad del ejercicio resuelto por las supuestas alumnas (Tabla 4), la forma correcta de obtener la ecuación de una recta a partir de dos puntos conocidos.

4.2. Dimensión cognitiva-afectiva

Esta dimensión está relacionada con el trabajo que realiza el que aprende para lograr la adquisición del conocimiento (significados personales).

La secuencia planteada de esta manera hace más atractivo el trabajo para los alumnos. Esto está relacionado con la preferencia a aprender practicando y relacionando los contenidos con la realidad. Esta es una de las características de los alumnos sensitivos. También está de acuerdo con la forma en que capturan mejor la información. Este estilo de estudiante lo hace en forma visual, prefiriendo las imágenes, gráficos y diagramas, a diferencia de los clasificados como verbales que prefieren obtener la información en forma escrita, recordando mejor lo que oyen o leen.

4.3. Dimensión instruccional

Esta dimensión tiene relación con el entorno en el que desarrolla la actividad instruccional (funciones docentes y discentes; patrones de interacción).

La actividad puede ser realizada por los alumnos sin necesidad de contar con la presencia del profesor en el momento del trabajo. Debido a la facilidad del manejo del recurso, el estudiante está en condiciones de desarrollarla solo. El docente podrá solucionar cualquier inconveniente que se le presente al estudiante, a través de los foros, mail o chat que provee la plataforma virtual. También, el docente podría, de manera asincrónica hacer vigilancia epistemológica respondiendo en los foros y analizando en LAMS las respuestas de los alumnos

5. Conclusión

El análisis efectuado usando algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico nos permite observar, de manera sistémica una práctica de enseñanza, realizando un análisis de la planificación de una instrucción matemática, generando, de este modo un marco de análisis para una situación de aprendizaje, en este caso, de la recta en R^3 .

Desde el punto de vista pragmático, se puede decir que la adquisición de conocimientos se realiza por medio del manejo de los objetos matemáticos, siendo este recurso, un contexto propicio para ello ya que el alumno construye nociones a partir de

conocimientos previos, interactuando con el problema presentado y la herramienta utilizada. Pero la adquisición de conocimiento no se reduce solamente a resolver problemas sino que además implica la justificación de los procedimientos utilizados según el enfoque didáctico adoptado.

La decisión de hacer el abordaje descrito, estimamos que se justifica en el hecho de que no basta con disponer de herramientas tecnológicas para aprender resolviendo problemas, sino que para que estos recursos sean útiles, el proceso de enseñanza y aprendizaje, debe ser elaborado siguiendo criterios como los que se han presentado en este trabajo, ya que estos criterios nos permitieron identificar conflictos semióticos que podrían producirse.

Referencias

- Assum, D, Guil, D y Malet, O. (2014). El uso de GeoGebra en las aulas del Curso de Ingreso a la Universidad: los porqués de una elección. *Actas del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (Artículo 647)
- Felder, R., y Siverman, L. (2002). Learning and teaching styles in engineering education. *Journal of Engineering Education*, Vol. 78. Disponible en, <http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/LS-1988.pdf>.
- Fundación LAMS (noviembre 2016). Disponible en: https://www.lamsfoundation.org/resources_tutorial.htm
- Geogebra (noviembre de 2016). *Geogebra.org*. Disponible en, <https://www.geogebra.org/manual/es/Tutoriales>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.