# Comprensión de conceptos fundamentales de geometría proyectiva a través de visualización de construcciones con Geogebra 3D

## Understanding projective geometry fundamental concepts through Geogebra 3D constructions visualization

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez y Lucinda Serna Herrera

Universidad Autónoma del Estado de Morelos (México)

### Resumen

Se presenta una experiencia con un grupo de estudiantes universitarios que resuelven un conjunto de secuencias didácticas diseñadas por los autores para guiar el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la Geometría Proyectiva, tomando como base a los elementos teóricos principales del Enfoque Ontosemiótico, como la visualización espacial y el razonamiento diagramático, y mediante el empleo del software Geogebra 3D. Se trata de un estudio de caso cualitativo y de tipo exploratorio en el que se describe la configuración de objetos visuales y procesos involucrados en las prácticas de resolución de las tareas propuestas. La secuencia didáctica, que emplea las representaciones gráficas con Geogebra 3D, permitió a los alumnos la visualización y comprensión de las construcciones que involucran transformaciones proyectivas y el manejo de puntos absolutos.

**Palabras clave**: Visualización, Geogebra 3D, transformaciones proyectivas, puntos absolutos.

### Abstract

We present an experience with university students when solving some didactic sequences designed to facilitate the learning of Projective geometry fundamental concepts. Some theoretical principles from the Onto-semiotic Approach, such as spatial visualization and diagrammatic reasoning, as well as the Geogebra 3D software are taken as foundations. This is a qualitative exploratory case study, where we describe the visual objects configurations, as well as the processes involved in the practices of solving the problems proposed The didactic sequence, which employs the graphic representations of Geogebra 3D, allowed the visualizations and understanding of the constructions involved in projective transformations, as well as tackling the problem of representing absolute points.

**Keywords**: Visualization, Geogebra 3D, projective transformations, absolute points

## 1. Introducción

La geometría proyectiva tiene sus orígenes en la pintura de la época del Renacimiento cuando los artistas (Durero, da Vinci, entre otros) plasmaron sobre un lienzo las figuras tridimensionales. Cabe destacar que los teoremas deducidos por los renacentistas han perdurado y en la actualidad forman parte del cuerpo de la geometría euclidiana. Por otra parte, a través del planteamiento común de la visión binocular (Gordejuela, 2009) dichos conocimientos también llegaron a formar parte de la base de la fotogrametría a mediados del siglo XIX y de la visión por computadora en la segunda mitad del siglo XX.

En el contexto escolar, la tecnología desarrollada a partir de la visión por computadora y la robótica representa un campo muy atractivo para los estudiantes, los cuales escogen las Ciencias de Computación o Inteligencia Artificial para su formación.

Sbitneva, L., Moreno Martínez, N. y Serna Herrera, L. (2017). Comprensión de conceptos fundamentales de geometría proyectiva a través de visualización de construcciones con Geogebra 3D. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

La base teórica de los métodos que usan en la visión 3D por computadora para detectar si las imágenes dos dimensionales representan el mismo objeto espacial se fundamenta en la Geometría Proyectiva.

Para facilitar el aprendizaje significativo de los conceptos y modelos de geometría proyectiva nosotros proponemos una secuencia de construcciones geométricas con el uso de Geogebra 3D que permitan representar y visualizar tales ideas abstractas de geometría proyectiva como puntos y líneas en el infinito y las transformaciones. Respecto al tema de definiciones e interpretaciones de objetos no ostensivos de geometría proyectiva tenemos muy escasos registros semióticos utilizando las coordenadas. En cambio, se elaboran visualizaciones de algunos modelos, o se dan explicaciones por medio de metáforas. Los modelos del plano proyectivo tradicionales, aunque muy diferentes entre sí, son equivalentes por el isomorfismo, que permite desarrollar las pruebas de los teoremas como en la geometría afín. Más aún, las visualizaciones más profundas, basadas en construcciones mentales originales, permiten establecer que el plano proyectivo contiene la figura conocida como la banda de Mobius, lo que a su vez demuestra que el plano proyectivo no es orientable (en contraste con la orientabilidad de espacios proyectivos de dimensiones impares).

Otro problema de gran importancia que nos interesa es cómo evaluar los niveles de abstracción logrados por los alumnos en esta fase de exploración empírica. El aparato del álgebra lineal propicia registros semióticos adecuados y permite las generalizaciones de la geometría proyectiva plana a las dimensiones superiores, donde la visualización espacial no es posible para nuestra mente directamente. Es difícil detectar si el alumno logra construir su conocimiento propio o solo lo imita cuando se trata de explicaciones verbales (algunos memorizan las descripciones).

Para lograr los grados de comprensión necesarios para construcciones mentales abstractas es indispensable desarrollar la visualización y uso de representaciones diagramáticas correspondientes al caso de dos dimensiones en el espacio proyectivo, lo que se modela con la geometría usual 3dimensional utilizando Geogebra. Existen escasas investigaciones en relación con la comprensión de conceptos de la geometría proyectiva donde el empleo de un software dinámico podría resultar crucial para favorecer la visualización y la realización de otros procesos cognitivos.

El problema que se aborda en el presente trabajo consiste en cómo ayudar a los estudiantes a visualizar los conceptos fundamentales de la geometría proyectiva con base en las relaciones lógicas entre los objetos abstractos no determinados (no ostensivos) para poder entender el lenguaje profesional que manejan investigadores-matemáticos en sus publicaciones.

Los objetivos principales han sido, entre otros, elaborar las secuencias de ejercicios y tareas para facilitar los procesos de materialización-idealización con el fin de lograr apropiación de los conceptos y alcanzar altos niveles de abstracción necesarios para trabajar con las configuraciones de la geometría proyectiva a nivel institucional.

## 2. Marco teórico y metodología

### 2.1. Marco teórico

Nos apoyamos en el modelo visual del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012) para analizar la actividad matemática realizada en un conjunto de secuencias didácticas diseñadas, con el uso de Geogebra 3D, en las que se encuentran implicados los conceptos de geometría proyectiva como *punto en el infinitito y puntos homólogos* bajo transformaciones proyectivas.

Desde la perspectiva del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), la resolución de un problema matemático implica la realización de una práctica que involucre a un conjunto de objetos matemáticos primarios: conceptos, lenguaje, propiedades, procedimientos y argumentos. Las relaciones entre dichos objetos, establecidas por el sujeto que resuelve el problema, son modeladas en el EOS mediante la llamada configuración de objetos matemáticos primarios. Según el EOS, tanto los objetos primarios como las configuraciones pueden ser interpretados desde cinco perspectivas duales *personal/institucional*, *ostensivo/no ostensivo* y *expresión/contenido*, *unitario/sistémico* e *intensivo/extensivo*.

En el EOS se asigna al lenguaje el papel central así como a los procesos de comunicación e interpretación (la actividad discursiva matemática).

Nuestra propuesta de evaluación está basada en la noción de configuración de objetos matemáticos y la perspectiva personal/institucional.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

Sección 3: Una perspectiva ontosemiótica de la visualización de plano proyectivo. Aquí se presentan también los elementos pertinentes del marco teórico empleados en este trabajo. Proponemos las construcciones realizados con Geogebra 3D para visualizar los conceptos fundamentales de geometría proyectiva: puntos, rectas y sus relaciones de incidencia. Sección 4: Visualización de transformaciones proyectivas con Geogebra 3D. Analizamos las propiedades de puntos homólogos bajo transformaciones proyectivas realizados con Geogebra 3D para identificar algunos tipos específicos de transformaciones proyectivas. Sección 5: Visualización de “óvalos“ sobre el hiperplano. Se requiere visualización de conjuntos abiertos (convexos) que juegan el papel de vecindades de los puntos proyectivos. Sección 6: Implicaciones para la enseñanza.

## 2.2. Metodología

Se realiza un estudio de tres casos de tipo exploratorio en el que se analizan las producciones de los estudiantes.

Los hallazgos que se presentan en este trabajo fueron un resultado del trabajo docente en la búsqueda de cómo ayudar a lograr mejores grados de comprensión a un grupo de tres estudiantes universitarios de la carrera de matemáticas que desarrollaban su trabajo de tesis. Un estudiante, con el tema de tesis relacionado con las aplicaciones a la Visión3D artificial, otro estudiante trabaja con el tema de “Espacios proyectivos desarguesianos”, y el tercer estudiante era un estudiante de Maestría que necesitaba estudiar Variedades Diferenciables: considerando espacios proyectivos solamente como un ejemplo de la variedad diferenciable abstracta que no forma parte de algún espacio ambiente.

Las secuencias didácticas que se plantearon a los estudiantes se llevaron a cabo en sesiones presenciales de tutoría individual semanal. El docente investigador proponía tareas a los estudiantes para realizar construcciones con lápiz y papel o con Geogebra 3D. Las producciones de los estudiantes fueron analizadas tomando en cuenta la perspectiva ontosemiótica de las configuraciones cognitivas de los objetos visuales involucrados.

Para la evaluación (detección del proceso de apropiación adecuado) del grado de comprensión se solicitaba a los alumnos realizar, en presencia del docente, algunas construcciones con lápiz y papel (a pesar de lo que habían realizado con Geogebra). Puesto que se equivocan con los movimientos de mano, por ejemplo, en la construcción de las imágenes de los puntos bajo algunas transformaciones y aunque pueden repetir y describir sin errores los dos principios de construcción, al cambiar la variedad de combinaciones posibles de los ejes o puntos fijos bajo una transformación, entre los propios y absolutos, se equivocan, mostrando que no se logró la apropiación adecuada.

## 3. Una perspectiva ontosemiótica de la visualización de plano proyectivo

### 3.1. Reflexiones sobre los antecedentes matemáticos y los fundamentos del EOS

Se hace referencia a Geometría Proyectiva como un área de matemáticas donde se consideran las nociones no definidas llamadas *puntos* y *rectas* así como la noción no definida de *incidencia*.

Entonces la Geometría Proyectiva describe la totalidad de los hechos que se puede expresar solamente por medio de estas relaciones de incidencia entre los puntos y rectas.

El problema que se presenta para los estudiantes es apropiarse de un lenguaje específico empleado por los investigadores en sus artículos de investigación del área de geometría proyectiva, como por ejemplo: “Mandar un punto al infinito”, “Añadir el punto ideal (absoluto)” “Quitar una recta proyectiva”.

Pero para lograr esto, primero hay que aclarar los significados correspondientes desarrollando la intuición geométrica, así como la visualización de objetos abstractos y sus relaciones. Esto supone una tarea difícil para el docente, la cual se facilitó, en nuestro caso, empleando varios principios teóricos desarrollados dentro del EOS, una teoría que nos proporciona un punto de vista generalizado sobre los objetos matemáticos y sus relaciones en términos de prácticas institucionales y personales.

De acuerdo con el EOS, en el problema que enfrentamos, interviene un conjunto de objetos matemáticos no ostensivos que los estudiantes deben comprender; los autores de la teoría proponen, además, dos dualidades ostensivo/no-ostensivo y personal/institucional que consideramos útiles para nuestro estudio.

Las representaciones institucionales para un plano proyectivo varían entre $\boldsymbol{PR^2}$ y $P(R^3)$, o, a veces simplemente $\boldsymbol{P^2}$, y uno puede pensar que reflejan un “aspecto relacional de la representación y significación” (Font, Godino y D’Amore, 2007, p.3).

Sin embargo, analizando con más detalle la relación entre objetos y función semiótica encontramos que para los autores del EOS “las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser…de tipo representacional, instrumental,…y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos)” (Font, et al., 2007, p.6).

Consideramos que se debe iniciar trabajo con un proceso de negociación de significado de los símbolos $PR^2$ (o $P(R^3)$, que son representaciones estructurales, desarrollando los ejes de dualidad (o perspectivas) ostensivo/no ostensivo y expresión/contenido.

Primero se aclara que la expresión $PR^2$ “codifica” el proceso de “proyectivización” del plano geométrico usual (considerado sin estructura métrica ni perpendicularidad, lo que se nombra como un plano afín) del espacio tridimensional, el cual consiste en la complementación de este plano con los puntos “ideales” (absolutos). Por otro lado, la visualización que apoya la formación del conocimiento personal, y ayuda en el desarrollo del eje personal/institucional, consiste en la consideración del plano proyectivo como el conjunto de todas las rectas del espacio tridimensional que pasan por un punto arbitrario (que puede ser considerado como el origen de un sistema de referencia afín). Esta situación geométrica, la que, se supone, es fácil de visualizar, se representa simbólicamente $P(R^3)$ y tiene el mismo significado como el plano proyectivo simbolizado por $PR^2$ (ver Figura 1).

Por otra parte, en el EOS, el significado es entendido de dos formas, mediante la noción de *función semiótica* o como *sistema de prácticas*: *operativas y discursivas*. Entonces, proponemos las prácticas operativas y discursivas ligadas al problema de fortalecer la relación entre los modelos empleados para el plano proyectivo para lograr la visualización apoyada en las prácticas computacionales del conocimiento previo.

Para establecer una relación con los conocimientos previos (sólidos) de geometría espacial (experiencia computacional en la geometría analítica) solicitamos a los estudiantes realizar las actividades que involucran tanto cálculos analíticos como su interpretación geométrica en el nuevo contexto de geometría proyectiva: por ejemplo, se propone una tarea: transformar la ecuación lineal con dos coordenadas “no homogéneas” (que representa a una recta plana) a la ecuación lineal $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3\, x_3 = 0$ (donde $u_1$ ó $u_2$ ó $u_3$ no es igual a cero) del plano en coordenadas homogéneas en 3D.

Entonces, el cálculo de las coordenadas del conjunto de intersección de dos rectas proyectivas propias sobre hiperplano (representadas inicialmente por sus ecuaciones en coordenadas no homogéneas) se reduce al cálculo tradicional de conjunto de los puntos comunes $(x_1 : x_2 : x_3)$ de la intersección de dos planos correspondientes en coordenadas no homogéneas. El resultado, expresado en la forma de tres determinantes, nos da las ternas proporcionales de los valores reales: la interpretación geométrica es equivalente a decir que esta terna $(x_1 : x_2 : x_3)$ representa una recta 3D que se identifica con el punto proyectivo, cuya imagen en el plano afín (hiperplano) se obtiene fijando la tercera coordenada igual a 1 (como es de costumbre para facilitar la relación visual con las posiciones habituales de los planos en cursos de Cálculo). Cabe señalar, que la terna $(x_1 : x_2 : x_3)$ es una representación relacional.

Con este ejercicio, la abstracción se concretiza (o se aglutina) con los resultados de cálculo y el concepto de dualidad se convierte en algo natural (si recordamos cómo se obtiene la ecuación lineal de un plano por el origen a partir de la ecuación vectorial, considerando las ternas de coordenadas de vectores como puntos proyectivos en nuestro nuevo contexto).

Estas definiciones y denotaciones, aunque están expresados formalmente, presentan dificultades de visualización (para los estudiantes).

Son necesarias unas prácticas para que estos conceptos y símbolos sean asimilados, aceptados dentro del sistema de conocimientos previos del sujeto.

Podemos afirmar, que con estas prácticas se logra avanzar en el desarrollo *personal/institucional*, de tal modo que el estudiante sea capaz de codificar las situaciones con los diagramas de nivel avanzado (empleando el simbolismo de los espacios vectoriales y sus hiperplanos paralelos modernos) logrando sinergias entre aparato computacional, visualización espacial y lenguaje moderno.

Consideremos la demostración de un Teorema, donde se menciona simplemente: "then R considered as a subset of $\boldsymbol{P^2}$, leaves out at least one line in $\boldsymbol{P^2}$". Ahora el alumno lo entiende como "convertir $\boldsymbol{P^2}$" en un plano afín H (considerándolo como hiperplano en 3D en un plano proyectivo). O bien, de otro modo, "Quitar una recta proyectiva" (significado: fijar algún plano por el origen asignándole el significado de la recta absoluta (todos los puntos ideales de las rectas en un hiperplano resultante que es paralelo al plano seleccionado,

El último procedimiento es más difícil porque es un proceso contrario al proceso de complementación de un hiperplano con puntos ideales. Lo expuesto arriba se puede sintetizar en una secuencia didáctica.

### 3.2. Secuencia didáctica I

*Ejercicio 1:* En el modelo de hiperplano $PR^2$ hacer visibles los puntos impropios como los vectores-directores en el espacio vectorial paralelo al hiperplano (cada uno de los cuales representa el conjunto de todas rectas en el hiperplano paralelas las cuales tienen la dirección de un vector particular de este espacio) (Ver Figura 1).

*Ejercicio 2:* Reducir el estudio de las propiedades del plano proyectivo al estudio de las propiedades mutuas de rectas y planos correspondientes con los métodos algebraico-geométricos del espacio tridimensional euclidiano usual. Es decir, manejar el segundo modelo $P(R^3)$ para ver los puntos proyectivos como rectas por el origen en el sistema de referencias 3D usual. Para lograr lo solicitado, realizar prácticas las computacionales propuestas arriba.

Evaluación del aprendizaje con actividades de lápiz y papel: trazar varias rectas euclidianas, que representan los puntos proyectivos, que se encuentren sobre las rectas proyectivas, representadas por los planos usuales por el origen (para resaltarlas se utilizan colores distintos para las rectas proyectivas distintas).

*Ejercicio 3.* Para superar las dificultades de interpretación gráfica de puntos al infinito en el plano $\boldsymbol{XOY}$ del modelo con hiperplano, se empleó un material concreto. El material concreto consistía de un abanico sevillano y una barra localizada en el borde superior del abanico que representaba un conjunto de rectas paralelas sobre hiperplano cuando el abanico indicaba el plano 3D para cada una de las rectas, las costillas de los extremos se quedaban fijas en el plano $\boldsymbol{XOY}$. Esto permitió mostrar a la alumna que el punto al infinito es el mismo para todas las rectas paralelas. El empleo del abanico fue debido a que se trata de un objeto tangible de uso cotidiano.

### 3.3. Resultados de la secuencia didáctica I

Observamos que la alumna logró establecer un isomorfismo entre dos rectas proyectivas, consideradas como "geodésicas" en la geometría de Hilbert, propuesto en un artículo que ella se encontraba estudiando en este momento. Y elaboró la Figura 1 y de la tarea 2 le agregó a su presentación de la Tesis.

Después de la realización de los dos primeros ejercicios mediante Geogebra observamos que la estudiante todavía tenía dificultades para visualizar los puntos en el infinito. Sin embargo, esta situación fue superada mediante el empleo del abanico en la última parte de la secuencia didáctica, el cual fue de gran utilidad para la visualización de la recta al infinito. El abanico trajo al contexto de lo concreto las nociones abstractas implicadas en los ejercicios anteriores de la secuencia.

Por otro lado, el modelo de esfera con puntos antípodas identificados, como representación del punto proyectivo, fue rechazado por parte de la estudiante, lo cual consideramos que fue debido a ciertas discordancias entre los modelos geométricos considerados anteriormente en donde no existen consideraciones métricas, mientras que la noción de esfera hace referencia a la noción de equidistancia. De esta manera, para superar esta dificultad, se busca el camino para lograr la apropiación de dicho conocimiento.

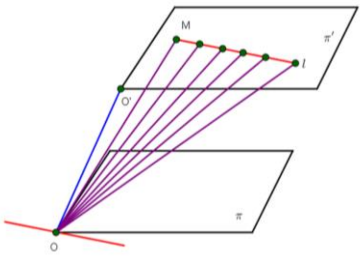


Figura 1. Visualización de los dos modelos del plano proyectivo

En realidad los modelos construidos son isomorfos desde punto de vista del sistema completo de los axiomas y relaciones de la geometría proyectiva.

## 4. Visualización de transformaciones proyectivas con Geogebra 3D

Fue necesario entender la siguiente frase*:* "The projective line L originates from the convex neighborhood by adding a point u and the translation induces a projectivity of L which has u as an only fixed point". Para esto se llevó a cabo la siguiente secuencia didáctica para visualizar las traslaciones.

En la subsección 5 se presenta la explicación de la expresión "convex neighborhood".

### 4.1. Secuencia didáctica II

Ejercicio: Obtener un diagrama gráfico de traslaciones como transformaciones proyectivas sobre el hiperplano.

1) Se considera una transformación proyectiva que deja una recta fija y esta recta es impropia.
2) Se añade la propiedad de tener un punto fijo, y además que este punto fijo sea punto impropio.

Sugerencias: Es indispensable seguir dos principios en las construcciones de puntos homólogas: primero, los puntos $A$ y $A'$, deben pertenecer a la recta que pasa por el centro P, lo mismo para los puntos $\mathrm{B}$ y $\mathrm{B}'$, y el segundo, la consideración sobre las posiciones de rectas $\mathrm{AB}$ y $\mathrm{A'B'}$.

### 4.2 Resultados de la secuencia didáctica II

El estudiante observa que en el caso de que el punto de intersección de $\mathrm{AB}$ y $\mathrm{A'B'}$ es el punto impropio del eje (para visualizarlo, basta dibujar el vector-director fijo del eje en espacio vectorial de “puntos fijos absolutos”), lo que implica que las direcciones de estas rectas $\mathrm{AB}$ y $\mathrm{A'B'}$ son las mismas que la dirección de la recta fija, es decir, son paralelas, en el lenguaje usual del plano afín.

El hecho que el punto fijo es el punto impropio, que no coincide con el punto absoluto del eje fijo, los homólogos $A$ y $A'$, así como $\mathrm{B}$ y $\mathrm{B'}$, se encuentran sobre las rectas que pasan por el centro fijo, lo que significa que estas rectas son paralelas también.

Conclusión: los puntos y sus imágenes forman un paralelogramo, es decir, puntos homólogos representan un vector de traslación.

## 5. Visualización de “óvalos “sobre el plano hiperbólico

En el proceso de  estudio de los espacios proyectivos con la topología correspondiente, un abierto se define por medio de curvas de segundo grado. Nos encontramos con un obstáculo para explicar por qué los textos mencionan “About every point on projective plane we can find a *convex neighborhood*” (Al cual también se refiere al inicio del apartado en la subsección 4).

La visualización en este caso es indispensable porque todas las consideraciones geométricas y construcciones se refieren a las imágenes de mapeos entre abiertos.

Para visualizar los conjuntos abiertos o vecindades de los puntos, llamados también óvalos, sobre un hiperplano, primero visualizamos la vecindad de un punto propio, representado por la recta $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{3D}$ como parte interior del cono con el eje de esta recta.

Entonces en el hiperplano $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{z = 1}$) va a trazarse el circulo cuando el eje $\boldsymbol{L}$ del cono coincide con el eje $\boldsymbol{OZ}$. Luego movemos la recta $\boldsymbol{L}$ (la giramos, como sea) y obtendremos elipses. Cuando la recta $\boldsymbol{L}$ se encuentre en el plano $\boldsymbol{XOY}$ (es decir ocupa una posición paralela al hiperplano $\boldsymbol{H}$, y entonces representará un punto ideal del $\boldsymbol{H}$) se trazará una hipérbola sobre el hiperplano $\boldsymbol{H}$.

Ahora se realiza el proceso de identificación de los puntos del infinito de sus asíntotas para obtener de nuevo un óvalo (porque las ramas se “cierran” o dicho de otro modo se identificarán sus direcciones de asíntotas).

Este proceso lo visualizamos en otra ocasión ampliando la tarea con el uso de materiales manipulativo de “bordado” elaborado por el alumno.

### 5.1 Secuencia didáctica III

Ejercicio 1: “Bordado”

a) Trazar en una cinta de tela (o perforar una cinta de papel) una hipérbola con sus asíntotas.

b) Bordar el trazado con los colores de cada rama diferentes y, además, que sean diferentes colores en las partes superior e inferior.

c) Detectar qué partes de las imágenes serán identificados.

d) Juntar y coser las puntas de estas ramas y sus asíntotas (se debe invertir los extremos de la cinta),

e) Darse cuenta del conjunto convexo ("óvalo" como interior de la hipérbola proyectiva).

f) Reconocer de este modo la presencia de la banda de Moebius sobre un hiperplano).

En el caso cuando $L$ coincida con el eje $OY$, éste óvalo, por cierto, coincide con el círculo (disco) sobre el hiperplano, $y = 1$, para otra carta de coordenadas del plano proyectivo.

Ejercicio 2. Metáfora con un paragua.

a) Imaginemos un cono formado por una paragua chino (o japonés) con el centro del disco plano (techo) coincidente con el origen $O$ de las coordenadas.

b) Visualizamos que la punta del mango esté en el hiperplano $H$, marcando el punto proyectivo propio $P$.

c) Cerrar suficientemente bien el paragua, para que sus picos radiales (costillas) marquen la vecindad del punto proyectivo $P$.

d) Continuar el movimiento como está descrito arriba para obtener una elipse.

e) Seguir hasta obtener una hipérbola. Tendremos que abrir un poco más que antes el paragua, para lograr la intersección con $H$.

### 5.2 Resultados de la secuencia didáctica III

Cabe señalar que los estudiantes aquí deben de recordar, cómo se obtienen las cónicas como secciones de un cono: la hipérbola -- cuando el plano es paralelo al eje del cono

Con esta metáfora les fue muy claro, fácil y divertido ver "óvalos" como una expresión semiótica verbal, e interpretar otras expresiones semejantes como siguiente:

"If $P$ is ideal, there exist a hyperbola (a projective hyperbola: that is an ordinary one with the ideal points of its asymptotes added) such that is homeomorphic to the open disc". Es un ejemplo de que "los lenguajes secuenciales (como lenguajes naturales y simbólicos) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre los objetos, mientras que en los diagramas se hace uso de las relaciones espaciales para representar otras relaciones". Por eso la visualización es muy importante en la práctica matemática, especialmente cuando se usan diagramas, lo que refleja metafóricamente las estructuras conceptuales matemáticas (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016). En este mismo trabajo se dan explicaciones respecto a las dificultades que enfrentamos al leer proposiciones como la citada, así como las indicaciones de cómo actuar: "las representaciones simbólicas en lengua natural o en lenguajes formales, aunque consisten en inscripciones visible, no son consideradas como inscripciones visuales, sino como analíticas o secuenciales". Por eso se sugiere entender la abstracción de una manera antropológica, es decir, que la emergencia de objetos generales e inmateriales que constituyen las estructuras matemáticas, tiene lugar en la actividad matemática. Esto tiene importantes consecuencias en educación matemática: el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemático realizados en las prácticas matemáticas.

## 6. Implicaciones para la enseñanza

En el proceso de instrucción individual de los tres alumnos podemos evidenciar los aprendizajes logrados, así como los obstáculos y deficiencias encontradas.

Los alumnos lograron comprender la importancia de los objetos visuales en la práctica matemática, tales como los conceptos visuales implicados (e.g., recta, recta paralela, punto, etc.), las propiedades (e.g., paralelismo, colinealidad, etc.) y las operaciones visuales realizadas (tales como la rotación, traslación, deslizamiento). Además, ha sido posible la visualización de otras propiedades de tipo como los invariantes de las transformaciones proyectivas. Mediante las justificaciones visuales ha sido posible clarificar ciertos aspectos del lenguaje formal que han planteado serias dificultades a los estudiantes, es decir, ha sido posible brindar a los estudiantes una serie de ayudas visuales para la comprensión de los aspectos teóricos que se plantean en geometría proyectiva.
El material gráfico elaborado por los estudiantes podría ser empleado posteriormente como un recurso para otros alumnos interesados en el estudio de los fundamentos geométricos que subyacen a los algoritmos y modelos en la visión artificial 3D.

Nosotros vemos nuestra investigación posterior relacionada con lo expresado en (Godino y Font, 2007): "La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino y Font, 2007, p.5)

**Referencias**

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. [Versión ampliada del artículo: An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27* (2), 2 -7].

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Font. V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 109-130.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T.F., Contreras, A. (2016). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf

Gordejuela, F. E. (2009). La geometría de la representación visual. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *103*(2), 297-304.

Ortega, T., y Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(7).

Perea, M. P., Erazo, S., y Usuga, J. M. G. (2015). Implementación de una estrategia pedagógica para mejorar el aprendizaje del concepto de cónicas en un curso de geometría analítica. *Revista Electrónica de Educación Matemática*, *2*(1).