

Conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre proporcionalidad

Prospective mathematics teachers' knowledge of proportionality

Mauro Rivas¹, Yazmary Rondón¹ y Luz Triviño²

¹Universidad de Los Andes, ²E.B. Gabriel Picón González, Mérida

Resumen

En este trabajo informamos sobre algunos de los resultados de un proceso de diagnóstico, en el contexto del desarrollo de un proyecto de investigación, dirigido a mejorar la formación didáctico-matemática de futuros profesores de matemática, en torno al conocimiento de la proporcionalidad. El diagnóstico se realiza inscrito en una investigación-acción que comprende la aplicación de un instrumento en el cual evaluamos algunos aspectos relativos al conocimiento sobre proporcionalidad, a una muestra de futuros profesores de matemática que se encuentran en el último periodo de su formación inicial. Los resultados indican que el conocimiento exhibido por los futuros profesores, al resolver situaciones relativas a la proporcionalidad (definición, ejemplificación, tabulación, y representación), es poco apropiado.

Palabras clave: Aprendizaje de la proporcionalidad, formación de profesores, razonamiento proporcional, análisis didáctico.

Abstract

In this paper we report some results of a diagnostic process, in the context of developing a research project, aimed at improving the didactic-mathematical training of preservice mathematics teachers, based on the knowledge of proportionality. The diagnosis is carried out in an action research framework that includes the application of an instrument in which we evaluate some aspects related to knowledge about proportionality, to a sample of prospective mathematics teachers who are in the last period of their undergraduate training. The results indicate that the performance of prospective teachers, when solving situations related to proportionality (definition, modeling, tabulation, and representation), is inappropriate.

Key words: Proportionality learning, teacher training, proportional reasoning, didactic analysis.

1. Introducción

El estudio en torno al problema de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad representa un amplio espacio de producción científico-académico, en el ámbito de la educación matemática (Small, 2015; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010). Particularmente, en lo relativo a la formación inicial de profesores, el interés sobre tal estudio cada vez es mayor (Ben-Chaim, Keret y Ilany, 2012; Livy y Herbert, 2013). Al respecto, diversas investigaciones señalan que los futuros profesores muestran deficiencias en el conocimiento de la proporcionalidad y en el conocimiento necesario para su enseñanza (Livy y Herbert, 2013; Monteiro, 2003).

Con el fin de abordar este problema se ha iniciado el desarrollo de un proyecto de investigación que tiene lugar con la puesta en juego de una serie de actividades de formación de futuros profesores de matemática, en torno a la proporcionalidad y al

Rivas, M., Rondón, Y. y Triviño, L. (2017). Conocimiento de futuros profesores de matemática sobre proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

conocimiento matemático necesario para su enseñanza. Los objetivos de la investigación son los siguientes:

OI1: Valorar el conocimiento sobre proporcionalidad exhibido por una muestra de futuros profesores al resolver situaciones problema, propuestas en una prueba diagnóstica.

OI2: Describir los tipos de explicación empleados por una muestra de futuros profesores para definir magnitudes proporcionales.

OI3: Identificar posibles deficiencias sobre el conocimiento en torno a la proporcionalidad exhibidas por futuros profesores de matemática.

OI4: Identificar posibles conflictos potenciales en el proceso de adquisición del conocimiento de la proporcionalidad por futuros profesores de matemática.

El proyecto de investigación en desarrollo comprende los siguientes momentos: (a) aplicación de una prueba diagnóstica sobre proporcionalidad, (b) valoración de los resultados del diagnóstico, (c) implementación de material instruccional sobre proporcionalidad, con actividades a ser realizadas por los futuros profesores (d) seguimiento de la realización de las actividades propuestas en el material instruccional, y (e) aplicación de una pauta para valorar los resultados del proceso de instrucción desarrollado.

En este documento informamos sobre resultados parciales de los dos primeros momentos de este proyecto, a saber, lo relativo al proceso de diagnóstico y la valoración de los resultados del mismo. Por medio de tal valoración hemos identificado algunas deficiencias exhibidas por futuros profesores de matemática y los posibles conflictos potenciales que se pueden presentar en el proceso de adquisición de la noción de proporcionalidad.

2. Marco teórico

Estudios realizados sobre el conocimiento de la proporcionalidad exhibido por futuros profesores han permitido, por medio de la realización de análisis didácticos (epistémico/cognitivos), basados en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), identificar objetos y significados puestos en juego en la resolución de problemas de proporcionalidad.

Tomando en cuenta las aportaciones provenientes de la literatura especializada y los hallazgos obtenidos por medio de los análisis realizados, se ha logrado identificar elementos caracterizadores de la noción de proporcionalidad: aspectos estructurales, sentido de covariación entre magnitudes, sentido de razón como relación multiplicativa que se aplica para generar una nueva unidad, relaciones de equivalencia o no-equivalencia, razonamientos cualitativos y cuantitativos, relaciones escalares y funcionales, relaciones aritmético-algebraicas y aspectos contextuales. Estos elementos han sido descritos en Rondón, Rivas y Triviño (2014).

La identificación de los elementos referidos permite una aproximación a la complejidad epistémico/cognitiva implicada en la construcción de la noción de proporcionalidad. Como contrapartida a esa complejidad, la práctica de la enseñanza y aprendizaje de esa noción se realiza reduciendo los procedimientos de resolución de problemas al uso de reglas que se aprenden-aplican de manera automática y de memoria, sin que medie la manifestación del razonamiento proporcional pretendido (Kenney, Lindquist y Heffernan, 2002; Lamon, 2007; Lesh, Post y Behr, 1988). Al considerar que esta

práctica se mantiene y fomenta en la formación inicial de profesores de matemática, el problema adquiere dimensiones preocupantes (Ben-Chaim, Keret y Ilany, 2012; Monteiro, 2003).

3. Marco metodológico

El desarrollo del proyecto propuesto sigue una metodología de investigación de corte cualitativa y consiste en llevar a efecto un primer ciclo de una investigación-acción, de acuerdo con la propuesta de Cohen, Manion y Morrison (2011). En la Figura 1, se presenta una articulación de los diferentes procedimientos que serán ejecutados, de acuerdo con la propuesta de los autores referidos.

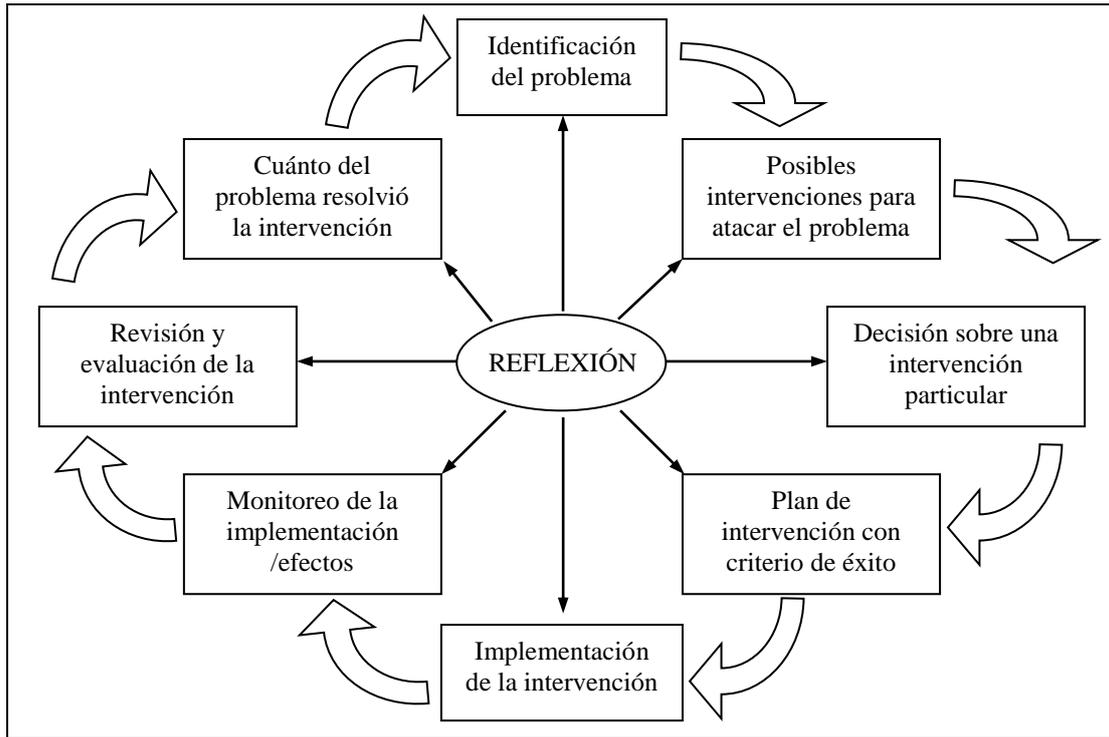


Figura 1. Proceso de investigación-acción (Adaptado de Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 355).

La investigación se encuentra en su fase inicial: *identificación del problema*, la cual comprende la realización de un diagnóstico y la valoración de los resultados de ese diagnóstico a la luz de las aportaciones de los análisis didácticos realizados en investigaciones previas y de la literatura especializada sobre el desarrollo de la noción de proporcionalidad. El presente reporte informa sobre resultados parciales de la realización de esa fase inicial.

Sujetos participantes: Los participantes son 13 futuros profesores inscritos-asistentes en una sección del octavo semestre (último) de la carrera de Educación Matemática. La elección de los participantes se hizo de manera incidental, no aleatoria, con un muestreo *a propósito*, puesto que tal elección se realiza sobre la base del criterio: estudiante inscrito en la asignatura, asistente a la aplicación del instrumento (León y Montero, 2003).

Instrumento y datos: El instrumento de recogida de datos consiste en una prueba de desarrollo, generalmente utilizada por los formadores para diagnosticar conocimientos en torno a la noción de proporcionalidad. La prueba está constituida por cuatro ítems los cuales tratan sobre: (a) resolución de un problema de valor faltante proporcional, (b) uso

de tablas y representaciones gráficas en torno a la proporcionalidad, (c) situaciones problema proporcionales y no proporcionales, y (d) conocimiento didáctico inicial en torno a la proporcionalidad: definición, ejemplificación y representación tabular y gráfica de magnitudes proporcionales. Esta prueba ha sido validada por medio de análisis epistémicos/cognitivos, basados en el EOS, y su uso en otras investigaciones (Rivas, 2013), con fines similares a los perseguidos en el desarrollo de la presente investigación.

Los datos se han obtenido por medio de la aplicación del instrumento referido, consisten en las repuestas dadas por los participantes a los ítems de la prueba. Por razones de espacio, en este reporte solo se incluyen los resultados correspondientes a la aplicación del ítem 4 del instrumento.

Técnicas de análisis de datos: Las técnicas de análisis que se han utilizado son de dos tipos: (a) uso de herramientas de estadística elemental; como el análisis de frecuencias, porcentajes y medidas de tendencia central, y (b) análisis cualitativo de las respuestas dadas por los sujetos a los ítems de la prueba, a la luz de las aportaciones de los análisis epistémicos/cognitivos expertos y de las contribuciones de la literatura especializada consultada.

A continuación se presentan algunos de los aspectos que se utilizan como criterio para las valoraciones de las respuestas del ítem 4 del instrumento. Los mismos son el producto de los elementos reconocidos-expuestos en el marco teórico, así como de los análisis epistémico/cognitivos realizados en trabajos previos.

En el ítem 4 del instrumento se solicita: (a) definir magnitudes proporcionales, (b) dar un ejemplo de magnitudes proporcionales, (c) construir una tabla, y (d) representarla gráficamente. Para el análisis de este ítem se realiza la valoración de cada una de estas acciones.

Para el análisis/valoración de la definición de magnitudes proporcionales se ha establecido categorías referidas a algunos tipos de explicaciones que pueden manifestarse, clasificadas como parciales o completas, en torno a la noción de proporcionalidad.

Una explicación se considera parcial si se refiere a aspectos particulares, no caracterizadores, de la noción de proporcionalidad, como los siguientes:

1. uso de reglas intuitivas de comparación del tipo “más en A, más en B” (Stavy, Babai, Tsamir, Tirosh, Lin y Mcrobbie, 2006),
2. relación numérica no constante entre magnitudes (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007)
3. interpretaciones a partir de representaciones en tablas o gráficos, intuitivo y circular (Koellner-Clark y Lesh, 2003; Lamon, 2007; Ruiz y Valdemoros, 2006).

Una explicación se considera completa si se hace un uso apropiado de la noción de proporcionalidad, como por ejemplo los siguientes: (1) relación constante entre razones, (2) covariación constante entre valores de magnitudes, (3) magnitudes cuyos valores (x , y) covarían de acuerdo con una relación del tipo $y = kx$, y ; cualquiera de las cuales la caracteriza y da sentido a los aspectos parciales referidos. Una descripción de las categorías referidas se presenta en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Categorías de algunos tipos de explicación en torno a magnitudes proporcionales expresadas por futuros profesores

Explicación	Categorías	Descripción
Parcial	Uso de regla intuitiva-cualitativa o de covariación	Uso de argumentaciones basadas en reglas del tipo: “más en A, más en B” o covariaciones cualitativas / cuantitativas entre las magnitudes consideradas.
	Relación numérica no constante	Sustentada en algún tipo de relación numérica (adición, multiplicación, división) deducida por los estudiantes a partir de algunas regularidades observadas en las sucesiones de pares de números proporcionales observadas en tablas o en gráficos.
	Uso de una representación (tabla o gráfico)	Refiere a que la representación gráfica de una relación entre magnitudes proporcionales viene dada por una línea recta o de un conjunto de puntos linealmente orientados.
	Intuitivo	Refiere a descripciones muy generales satisfechas por las magnitudes proporcionales (relación, dependencia, semejanza, ...) indicadas por la lógica.
	Circular	Explicar las magnitudes proporcionales utilizando el término "proporción" o "proporcionalidad".
Completa	Relación constante entre razones	Las magnitudes a y b son proporcionales si al variar a el doble, el triple, ... b también varía el doble, el triple, ...

Para el análisis/valoración de la representación gráfica de magnitudes proporcionales, el énfasis se pondrá en las características de la representación gráfica de una relación proporcional. Las características tomadas en cuenta para la representación gráfica de una relación de proporcionalidad se presentan en el Cuadro 2. Asimismo, en el Cuadro 2, se presenta el criterio que se aplica para decidir si el origen de coordenadas ha sido tomado en cuenta por los sujetos, como punto que pertenece (no pertenece) a la relación.

Cuadro 2. Características de la representación gráfica de una relación de proporcionalidad y criterio para decidir si el origen pertenece (no pertenece) a la relación

Características
(a) La orientación lineal de los puntos de la relación proporcional
(b) El origen del sistema de coordenadas cartesianas como punto que pertenece a la relación
(c) Uso adecuado de una escala.
Criterio
Si al trazar una línea recta continua, por los puntos representados, ésta pasa (no pasa) por el origen entonces se considerará que la disposición lineal de los puntos hace que el origen pertenezca (no pertenezca) a la relación representada.

Se asume como elemental que, si la línea recta continua trazada pasa por el origen, es porque se considera que tal condición debe ser satisfecha por la relación que se está representando.

4. Resultados

En función de las categorías descritas en el Cuadro 1, se presenta en la Tabla 1 la valoración de la definición de magnitudes proporcionales, donde se asume la definición como alguno de los tipos de explicación descritos en ese cuadro.

En tal sentido, se observa en la Tabla 1 que ninguno de los sujetos da una definición satisfactoria (completa) de magnitudes proporcionales.

Tabla 1. Tipos de explicaciones dadas por los sujetos al tratar de definir magnitudes proporcionales (N = 13)

Tipo de explicación	Categorías	Frecuencias	
		Nº	%
Parcial	Uso de regla intuitiva-cualitativa o de covariación	2	15,4
	Intuitivo	5	38,5
	Circular	3	23,1
Completa	Relación constante entre razones	0	0,0
No define		3	23,1
Total		13	100,0

Asimismo, se observa que la categoría “Intuitivo” presenta el mayor número de explicaciones dadas. En este orden de ideas, cinco sujetos (38,5%), al tratar de definir magnitudes proporcionales, presentan descripciones muy generales (relación, dependencia, semejanza, ..., indicadas por la lógica), las cuales son satisfechas por este tipo de magnitudes. Próximos a este tipo de descripciones, tres sujetos (23,1%) muestran una explicación circular, es decir, tratan de definir magnitudes proporcionales haciendo uso de los términos "proporción" o "proporcionalidad". Sólo dos sujetos (15,4%) hacen uso de una regla intuitiva-cualitativa de covariación del tipo “más en A, más en B” para definir magnitudes proporcionales. Mientras tres sujetos (23,1%) no muestran ningún tipo de explicación.

En lo relativo a las ejemplificaciones dadas por los sujetos, se muestra en la Tabla 2 que sólo 5 sujetos (38,5%) muestran ejemplos correctos de magnitudes proporcionales. Estos ejemplos se refieren a equivalencias entre magnitudes de longitud (cm, m, km) o la presentación de una tabla de magnitudes proporcionales.

Asimismo, se muestra en la Tabla 2 las frecuencias de las categorías con que han sido valoradas las ejemplificaciones dadas por los sujetos. Respecto a la categoría ejemplifica incorrectamente (tres sujetos, 23,0%), se debe decir que lo incorrecto se refiere a ejemplificar utilizando magnitudes no proporcionales: “miembros de la familia y consumo de alimentos”, “talla y edad”, “peso y edad”. Mientras, cinco sujetos (38,5%) no proveen de ningún tipo de justificación.

Tabla 2. Valoración de las ejemplificaciones dadas por los futuros profesores (N = 13)

Categorías	Frecuencias	
	Nº	%
Ejemplifica correctamente	5	38,5
Ejemplifica incorrectamente	3	23,0
No ejemplifica	5	38,5
Total	13	100,0

En relación con la elaboración de una tabla de magnitudes proporcionales, en la Tabla 3 se muestran las valoraciones de las respuestas de los participantes. Se observa que una

mayoría simple de participantes (7; 53,8%) elabora una tabla de magnitudes proporcionales de manera correcta. Todas las tablas presentadas se reducen a dos tipos: (a) uso de relaciones de longitud (cm, m, km), y (b) múltiplos de un número (2, 5, 8 y 100). Casi el mismo número de participantes (6; 46,2%) no elabora una tabla de magnitudes proporcionales o la elabora de manera incorrecta. Las elaboraciones incorrectas están caracterizadas por referir a situaciones cuyas magnitudes no son proporcionales (talla/edad, peso/altura).

Tabla 3. Valoración de la elaboración de tablas de magnitudes proporcionales realizadas por los futuros profesores (N = 13)

Categorías	Frecuencias	
	Nº	%
Elabora tabla correctamente	7	53,8
Elabora tabla incorrectamente	2	15,4
No elabora tabla	4	30,8
Total	13	100,0

Para la valoración de la representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales, se ha tomado las características referidas en el Cuadro 2. En tal sentido, se considera que la representación gráfica es correcta si cumple con tales características. En la Tabla 4 se muestran las valoraciones correspondientes.

Tabla 4. Valoración de representación gráfica de magnitudes proporcionales realizadas por los futuros profesores (N = 13)

Categorías	Frecuencias	
	Nº	%
Elabora representación gráfica correctamente	1	7,7
Elabora representación gráfica incorrectamente	7	53,8
No elabora representación gráfica	5	38,5
Total	13	100,0

Se observa en la Tabla 4 que sólo un sujeto (7,7%) elabora una representación gráfica de magnitudes proporcionales de manera correcta. Se debe reconocer que siete de los sujetos (53,8%) que elaboran una representación gráfica incorrecta, cinco de ellos (38,5%), han utilizado en su representación magnitudes proporcionales (relaciones de longitud, múltiplos de un número). Su representación es incorrecta porque no se asume que el origen de coordenadas necesariamente pertenece a la representación realizada y no hacen uso adecuado de una escala. Los otros dos sujetos (15,4%) de estos siete, hacen uso de magnitudes no proporcionales en sus representaciones. Es notorio que cinco sujetos (38,5%) no elaboren ninguna representación gráfica.

5. Discusión de los resultados

Los futuros profesores han mostrado un conocimiento poco satisfactorio en cuanto a: (a) enunciar una definición de magnitudes proporcionales (0%), y (b) elaborar una representación gráfica de magnitudes proporcionales cuando los valores de esas magnitudes no le son dados en una tabla (7,7%). Asimismo, su conocimiento es moderado para: (a) ejemplificar magnitudes proporcionales (38,5%), y (b) elaborar una tabla de magnitudes proporcionales (53,8%).

Estas valoraciones de los conocimientos de los futuros profesores, al resolver situaciones relativas a la proporcionalidad, propuestas en un ítem de una prueba diagnóstica, se relacionan con el logro de lo formulado en el objetivo específico OI1.

De acuerdo con los resultados los tipos de explicación empleados por los futuros profesores, al definir magnitudes proporcionales, se encuentran asociados a aspectos parciales de la noción de proporcionalidad, como los siguientes: (a) uso de reglas de índole intuitiva-cualitativas o covariación del tipo “más en A, más en B” (15,4%), (b) con base en la intuición o aspectos generales satisfechos por una relación de proporcionalidad (relación, dependencia, semejanza, covariación,...) (38,5%), y (c) uso de términos “proporción” o “proporcionalidad” en el enunciado de la definición, lo que provee un carácter circular al enunciado que anula el manejo de una definición apropiada (23,1%). En general, los tipos de explicación dados por los futuros profesores parecen corresponder a un aprendizaje con significados limitados y particulares. Esta descripción de los tipos de explicación proporcionados por los futuros profesores, al definir magnitudes proporcionales está en relación con el logro del objetivo específico OI2.

Tal y como se observó en los resultados expuestos, resumidos en las tablas presentadas en la exposición precedente, las principales deficiencias observadas en las respuestas dadas por los futuros profesores a los ítems considerados, están referidas a:

- a) enunciar una definición de magnitudes proporcionales por medio del uso de aspectos caracterizadores de esa relación, como por ejemplo: (i) relación constante entre razones, (ii) covariación constante entre valores de magnitudes, (iii) magnitudes cuyos valores (x, y) covarían de acuerdo con una relación del tipo $y = kx$, donde k es una constante, y
- b) tomar en cuenta aspectos característicos de una representación gráfica de una relación de proporcionalidad, cuya linealidad exige que el origen del sistema de coordenadas elegido pertenezca a la relación representada.

Estas fueron las deficiencias más marcadas en las actuaciones de los futuros profesores. Otros aspectos en los que se evidenció deficiencias, aunque con frecuencias medias, fueron los referidos a mostrar ejemplos de magnitudes proporcionales y elaborar tablas sobre esas magnitudes.

La identificación de las deficiencias antes referidas está en relación con el objetivo específico OI3 de esta investigación.

En lo relativo a la determinación de posibles conflictos potenciales en el proceso de adquisición de la noción de proporcionalidad por futuros profesores, al que refiere el objetivo específico OI4 de esta investigación, los resultados observados conducen a reconocer los siguientes:

- El uso de explicaciones basado en reglas intuitivas de covariación no constante del tipo: “más en A, más en B”, es utilizado por los futuros docentes como aspecto caracterizador de la proporcionalidad. No son conscientes que este aspecto no debería ser considerado suficiente para concluir respecto a la adquisición del conocimiento en torno a la proporcionalidad.
- Del mismo modo, la concepción de la proporcionalidad basada en ese tipo de reglas, conduce a considerar magnitudes que no son proporcionales como proporcionales, las cuales son utilizadas por los futuros profesores para ejemplificar este tipo de magnitudes.

- La correcta ejemplificación de magnitudes proporcionales por medio de tablas pareciera indicar una buena aproximación a la noción de proporcionalidad. No obstante, la actuación de los futuros profesores indica que esa ejemplificación no da garantía de un manejo apropiado de la noción de proporcionalidad, que permita construir una definición pertinente de magnitudes proporcionales.
- Similar al aspecto anterior, la correcta representación gráfica en el plano cartesiano de una tabla de magnitudes proporcionales (puntos orientados linealmente), no da garantía de que el sujeto haga uso de aspectos específicos-caracterizadores de esa representación, como por ejemplo, el hecho de que el origen del sistema de coordenadas pertenece a tal representación.

Finalmente, el desempeño mostrado por los futuros profesores de matemática indica que éste sólo hace uso de elementos parciales relativos a la noción de proporcionalidad, quedando prácticamente sin efecto el uso de elementos caracterizadores de esa noción, como los referidos en el marco teórico de este documento.

6. Conclusiones

El conocimiento exhibido por los futuros profesores, de acuerdo con los resultados antes descritos, se presenta incompleto, caracterizado en buena medida por el conocimiento de aspectos parciales (disposición lineal de los puntos en un gráfico cartesiano, la covariación, el uso de reglas intuitivas-cualitativas de covariación no constante, la elaboración de tablas de magnitudes proporcionales, uso de relaciones numéricas particulares) relativos a la noción de proporcionalidad. El uso de estos aspectos parciales sólo permite aproximaciones limitadas a esa noción. Lo limitada de esas aproximaciones puede percibirse con mayor determinación al considerar los elementos caracterizadores de la noción de proporcionalidad, los cuales han permitido una aproximación a la complejidad epistémico/cognitiva, implicada en la noción de proporcionalidad, referida en el marco teórico de esta investigación.

La valoración del conocimiento sobre la proporcionalidad de futuros profesores, no debería limitarse a cómo resuelven algún tipo de problema o situación, cómo ejemplifican magnitudes proporcionales, cómo las representan, puesto que la sola valoración de estos aspectos provee de una aproximación limitada a lo que es el conocimiento proporcional requerido para la enseñanza y desarrollo de este contenido matemático. Ciertamente, aun cuando se muestre solvencia en este tipo de acciones, con ellas pueden convivir deficiencias sobre el conocimiento de la proporcionalidad como las expuestas anteriormente.

Finalmente, se debe reconocer que lo exhibido en los resultados parciales del diagnóstico en cuestión, aun cuando muestra detalles relativos a la noción de proporcionalidad, sigue siendo limitado en relación con los elementos que deben ser tomados en cuenta en la enseñanza y desarrollo de este contenido. Aspectos relacionados con la resolución de distintos tipos de problema, el uso de escalas, semejanzas de figuras geométricas, entre otros, no han sido tomados en cuenta en este informe, los cuales pueden contribuir con la identificación de otros elementos involucrados en la adquisición de la noción de proporcionalidad.

Reconocimiento: El proyecto en el que se inscribe este reporte de investigación ha sido financiado por el CDCHTA-ULA, bajo el código: H-1448-13-04-A.

Referencias

- Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. 7th ed. London: Routledge.
- Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67-80.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Kenney, P.A. Lindquist, M.M. y Heffernan, C.L. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Koellner-Clark, K. y Lesh, R. (2003) Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics*, 103(2), 92-98.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- León, O., y Montero, I. (2003). *Diseño de Investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Livy, S. y Herbert, S. (2013). Second-year pre-service teachers' responses to proportional reasoning test items. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(11), 17-32.
- Monteiro, C. (2003). Prospective elementary teachers' misunderstanding in solving ratio and proportion problems. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp 317-323). Honolulu, HI: PME.
- Rivas, M.A. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- Rondón, Y., Rivas, M. y Triviño, L. (2014). Conocimiento de la proporcionalidad en la formación inicial de futuros profesores de primaria. En H. Parra Sandoval, A. Noguera y Y. Serres Voisin (Comp.). *Memorias VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 248-256). Santa Ana de Coro, Venezuela: ASOVEMAT. Disponible en, http://www.asovemat.org.ve/docs/Memorias_VIICOVEM.pdf.
- Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Relime*, 9(2), 299-324.
- Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F. y Mcrobbie, C. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education* 4, 417-436.
- Small, M. (2015). *Building proportional reasoning across grades and math strands, K-8*. Columbia University: Teachers College Press.
- Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication ...and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381.