

Matemática aplicada às ciências sociais: tarefas de probabilidades com tecnologia

Mathematics Applied to Social Sciences: Probability Tasks with Technology

Sónia Raposo¹, Maria M. Nascimento², Cecília Costa² y María Gea³

¹Agrupamento de Escolas Morgado de Mateus (Portugal), ²Universidade de Trás os Montes e Alto Douro, ³Universidad de Granada (Espanha)

Resumo

Este trabalho descreve as tarefas com tecnologia inseridas numa investigação doutoral. Probabilidades, probabilidades condicionadas, o teorema da probabilidade total e a fórmula de Bayes são os conteúdos do tópico de Probabilidades, incluídas Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS do 11.º ano, 16 anos), que foram selecionados nessa investigação. Esta investigação tem como marco teórico o enfoque ontosemiótico e, neste trabalho, apresentam-se as tarefas usando as apliquetas (applets) proporcionem aos alunos uma experiência diferente nas aulas deste tópico. Neste trabalho, apresentamos a planificação de uma intervenção didática recorrendo a tarefas delineadas com base os conflitos semióticos detetados em alunos portugueses da MACS e da Matemática (12.º ano).

Palavras chave: Matemática Aplicada às Ciências Sociais, probabilidades, tarefas, tecnologia, apliquetas.

Abstract

This paper describes the tasks with technology inserted in a broader doctoral research. Probability, conditional probability, the theorem of total probability and the Bayes' formula are the contents of the probability topic, included in Applied Mathematics to Social Sciences (MACS, 11th grade, age 16), who were selected in this research. The theoretical framework used was the onto semiotic approach and, in this work, the tasks using the applets are presented in order to provide students a different experience in class on the probability topic. We present the didactic intervention planning using the outlined tasks based on the semiotic conflicts detected in Portuguese students of MACS and Mathematics (12th grade, age 17).

Keywords: Applied Mathematics to Social Sciences, probability, tasks, technology, applets.

1. Introdução

O trabalho aqui apresentado enquadra-se num estudo mais amplo inserido na investigação no âmbito do Doutoramento de Didática das Ciências e Tecnologia, da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Na investigação dessa tese doutoral pretendem investigar-se as dificuldades dos alunos no tópico das probabilidades em Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e perceber se o uso das apliquetas (applets) nas práticas letivas contribuirá ou não para a superação das dificuldades dos alunos neste tópico. Neste trabalho, apresentamos a planificação de uma intervenção didática recorrendo a tarefas delineadas com base os conflitos semióticos detetados.

1.1. Tópicos de Probabilidades

No tópico das probabilidades de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e no 11.º ano estudam-se: probabilidades, probabilidades condicionadas, o teorema da probabilidade total e a fórmula de Bayes são os conteúdos do tópico de Probabilidades. O ensino destes conceitos apenas ocorre no ensino secundário. No entanto, vários estudos (e.g. Tarr e Lannin, 2005) referem que seria mais adequado começar a ensiná-los mais cedo. Também em Portugal, os resultados referidos por Correia e Fernandes (2013) sobre intuições em probabilidades condicionadas em alunos do 9.º ano de escolaridade, se revelam encorajadores quanto à possibilidade de introduzir o estudo deste conceito no 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico (14-15 anos). Segundo Batanero, Fernandes e Contreras (2013) é fundamental a compreensão e aplicação do conceito de probabilidade condicionada na vida diária e nas aplicações de estatística. O conceito de probabilidade condicionada é de grande relevância, estando na base do desenvolvimento de outros conteúdos, como por exemplo, probabilidade conjunta e independência (Borovcnik, 2012). Fernandes, Nascimento, Cunha e Contreras, (2011) verificou que os alunos com experiência de ensino de probabilidades não se distinguiram dos alunos sem experiência de ensino de probabilidades relativamente aos erros cometidos em situações probabilísticas contraintuitivas. Em relação à probabilidade conjunta, um dos erros mais comuns é o erro da falácia da conjunção (Tversky e Kahneman, 1983). Noutros trabalhos, os conceitos de probabilidade condicionada e probabilidade conjunta encontram-se entre aqueles que mais ideias erradas provocam nos alunos (e.g. Tarr e Lannin, 2005). Os alunos não distinguem claramente os significados das probabilidade condicionada e probabilidade conjunta (Pollatsek, Well, Konold e Hardiman, 1997). Estas dificuldades também foram observadas noutros estudos (e.g. Estrada e Díaz, 2006). Polaki (2005) identificou o estabelecimento do espaço amostral de experiências compostas como sendo outra dificuldade evidenciada pelos alunos. Outra dificuldade é a da falácia da condicionada transposta (Falk, 1986, *apud* Silva, Nascimento, 2010). Estas dificuldades foram ainda referidas no âmbito de alunos do ensino superior em Díaz (2007, p.354 e p.354 e p.374) e em nos alunos do ensino secundário em Fernandes et al. (2011). Também em estudos mais recentes de Díaz, Contreras, Batanero e Roa (2012) foi identificado outro erro, designado por falácia da inversão do eixo temporal.

1.2. Quadro teórico

O quadro teórico adotado na investigação doutoral e neste trabalho é o do enfoque Onto Semiótico (EOS) e este quadro teórico integra diversas aproximações e modelos usados na investigação em Ensino da Matemática, partindo de pressupostos antropológicos e semióticos sobre esse ensino e de princípios didáticos de tipo construtivista e interacionista para o estudo dos processos de ensino e aprendizagem (e.g. Godino, Batanero e Font, 2008). De forma resumida, usa-se o conceito de conflito semiótico para categorizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos – conflitos semióticos detetados fruto das suas aprendizagens anteriores –, a trajetória didática – intervenção didática – usando apliquetas – objeto mediador – no sentido de as ultrapassar (Godino et al., 2008). Por este motivo é necessário resumir a importância das tecnologias.

1.3. Uso da tecnologia

Foi reconhecido o potencial das tecnologias como suporte à aprendizagem, para construção do conhecimento e desenvolvimento da autonomia das capacidades e competências da aprendizagem (García-Valcarcel e Tejedor Tejedor, 2011). Hoje em dia deparamo-nos com uma realidade social, na qual, devido ao progresso tecnológico, o mundo está interligado e tudo pode ser localizado, exibido, trocado, transferido, recebido, comprado ou vendido sem depender do local onde se está, daí a necessidade das escolas se adaptarem às novas exigências da sociedade de informação (De Pablos, 2010). Quando nos referimos às tecnologias da informação e comunicação, incluímos todos os tipos de tecnologias existentes, em todas as suas formas, tais como apresentações multimédia, imagens, sons, programas informáticos específicos de cada área curricular (Tello, e Aguaded, 2009) e ainda à utilização da internet. A tecnologia mudou a forma como os estatísticos trabalham e deve mudar o quê e como ensinar (Aliaga e Gunderson, 2006). Assim, o uso da tecnologia no ensino da estatística tem vindo a aumentar em todos os níveis de ensino (Hassad, 2012) e pode ser dividido em duas partes: a tecnologia para perceber os conceitos de probabilidades e estatística e a tecnologia para fazer estatística (Baglin, 2013). Por exemplo, a tecnologia tem reduzido o tempo de cálculo, permitindo trabalhar na sala de aula com aplicações reais e na realização de projetos e investigações estatísticas (Fernandes, Batanero, Contreras e Diaz, 2010). O objetivo principal ao usar a tecnologia é o de desenvolver a literacia estatística, o raciocínio e o pensamento (Ben-Zvi e Garfield, 2005). O uso da internet no ensino é atrativo, principalmente, devido à interatividade que esta proporciona. A utilização de apliquetas devido ao seu carácter dinâmico e interativo mudou a perspetiva e a forma como alguns conteúdos matemáticos, por exemplo as probabilidades, podem ser aprendidos (Ferrara, Pratt e Robutti, 2006). As apliquetas (ou applets) são aplicações computacionais simples concebidas para uso na internet. No entanto, são plataformas independentes que, por vezes, podem ser usadas sem ser online. As apliquetas facilitam a visualização e a simulação de conceitos específicos e estão entre as mais poderosas e sofisticadas formas de obter interatividade no ensino das probabilidades (Healy, Berger, Romen, Aberson e Saw, 2013). Ensinar com apliquetas tem benefícios cognitivos (Healy et. al, 2013). Uma das motivações principais para que se usem apliquetas é a da visualização de conceitos estatísticos, tornando a sua compreensão mais fácil. Além disso, as apliquetas permitem aos alunos ver aplicações, para além da teoria, o que melhora o seu conhecimento (e.g. Malloy, 2001). Biehler (2003) também refere que o uso das apliquetas em probabilidades permite experimentar fenómenos aleatórios num curto espaço de tempo variando as condições e observando os resultados. Hoje em dia, usando os computadores, podemos criar novas representações mais adequadas para transmitir ideias complexas do que com o tradicional papel e lápis (Lipson, Kokonis e Francis, 2003). Estas representações (e.g. apliquetas) ao serem dinâmicas em vez de estáticas e interativas em vez de inertes apresentam um potencial motivador (Chance, Ben-Zvi, Grafield e Medina, 2007). O tipo de tarefas apresentadas, pelo professor, aos alunos irá influenciar o seu desempenho, logo, o professor tem um papel fundamental na planificação das atividades, bem como durante a resolução das mesmas, mantendo a sua motivação para o tema em estudo. Mais (Ponte, 2005): “É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno.”. Deste modo, usando as tecnologias, por um lado alargou-se o espectro de escolha das tarefas a propor aos alunos, por outro também foi possível contemplar as dificuldades identificadas – conflitos semióticos – para estruturar uma intervenção didática para a MACS.

2. Uma intervenção didática

A planificação da intervenção didática estruturada é agora apresentada.

2.1. Conflitos semióticos

Os conflitos semióticos na aprendizagem dos conceitos de probabilidade do tópico de Probabilidades, já foram discutidos na literatura e, de forma resumida, na introdução deste trabalho. Com base nesses estudos, e na etapa anterior do trabalho que aqui se apresenta, foi elaborado um questionário para os detetar ao nível da MACS do 11.º ano e da Matemática do 12.º ano. O questionário foi realizado a 66 alunos dessas disciplinas, com idades compreendidas entre 17 e 20 anos, de três escolas do interior norte de Portugal, após a leção do tema de probabilidades, no ano letivo 2013/2014, numa aula de 50 minutos. O questionário é composto por 11 questões de escolha múltipla, com alíneas e os alunos teriam que escolher a resposta correta entre quatro hipóteses apresentadas, tendo-lhes sido solicitado uma justificação escrita (Raposo, 2015). Da análise dos resultados obtidos (Raposo, 2015; Raposo, Nascimento e Costa, 2016), constata-se que alguns dos conflitos semióticos encontrados foram os descritos na revisão de literatura efetuada e são: (C1) não identificar que se trata de uma experiência aleatória sem reposição; (C2) considerar probabilidades conjuntas como sendo probabilidades condicionadas; (C3) considerar a probabilidade condicionada como sendo a probabilidade condicionada transposta; (C4) não identificar que o acontecimento condicionante pode ocorrer depois do condicionado. Detetadas as dificuldades elaborou-se uma planificação para uma intervenção didática nesse tópico.

2.2. Planificação da intervenção

Na Tabela 1 apresenta-se uma possível calendarização para os subtemas do tópico de probabilidades de MACS. Devido à necessidade da realização do pré-teste e do pós-teste, como pode verificar-se as apliquetas só serão usadas a partir da 3.ª aula. O pré-teste e o pós-teste terão o mesmo enunciado que o teste aplicado para a deteção dos conflitos semióticos no ano letivo 2013/2014 e serão realizados individualmente.

Tabela 1. Calendarização dos subtemas

Aula	Conteúdos
1. ^a	Pré-teste Experiências deterministas e aleatórias Espaço de resultados. Acontecimentos
2. ^a e 3. ^a	Operações com acontecimentos Definição clássica de probabilidades ou de Laplace e Resolução de problemas usando a regra de Laplace em experiências compostas Apliquetas de probabilidades
4. ^a	Probabilidade condicionada
5. ^a	Apliquetas de probabilidades condicionadas
6. ^a	Questão-aula: trabalho com papel e lápis com base numa apliqueta
7. ^a	Acontecimentos independentes
8. ^a e 9. ^a	Teorema da probabilidade total Apliquetas de probabilidades: teorema da probabilidade total e Regra de Bayes Apliquetas de probabilidades: regra de Bayes
10. ^a	Resolução de problemas
11. ^a	Pós-teste e entrevista

2.3. Descrição das aulas e tarefas

2.3.1 1.^a aula

Na primeira parte: pré-teste. Em seguida, e para contextualizar o tema, apresentação digital (e.g. PowerPoint) para explicar a diferença entre experiências aleatórias e deterministas e relembrar a classificação de acontecimentos e as operações entre acontecimentos. Realizar pequenas atividades (exemplo na Figura 1), sobre experiências deterministas e aleatórias e sobre operações com acontecimentos.

Indica para cada situação se se trata de uma experiência aleatória ou determinista

	Experiência aleatória	Experiência determinista
Destravar o carro numa rua com uma grande inclinação.		
Abrir um livro ao acaso e anotar o número da página da esquerda.		
Saber a velocidade de um carro, sabido o espaço percorrido e o tempo da viagem.		
Mergulhar um cubo de gelo em água a ferver.		
Medir o perímetro de um quadrado de lado 5 cm.		
Sortear uma viagem ao Brasil numa turma do 12. ^o ano com 25 alunos.		
Misturar as cores azul e amarelo e obter a cor verde.		
De um saco com 10 fichas numeradas de 1 a 10 tirar uma ficha e anotar o seu número.		
De um saco com 10 fichas vermelhas tirar uma ficha e anotar a sua cor.		

Figura 1. Exemplo de um dos problemas a resolver sem apliquetas

2.3.2 2.^a aula

Realização de uma atividade (exemplo na Figura 2) definindo, em cada exercício, os acontecimentos necessários e recorrendo às operações com acontecimentos para aplicar a lei de Laplace em experiências simples. De referir que estes conteúdos são revisões, pois já terão sido abordados no 9.^o ano.

6. Numas terras encontram-se 200 pessoas a fazer um tratamento. Um inquérito a que responderam teve os seguintes resultados:

	Homem	Mulher
Tem peso a mais	60	110
Não tem peso a mais	20	10

Encontrou-se ao acaso uma das 200 pessoas.

Determina a probabilidade de:

- Ser homem;
- Não ser homem.
- Ser mulher e não ter peso a mais.
- Ser mulher ou ter peso a mais.

Apresenta o resultado sob a forma de dízima. No caso de procederes a arredondamentos, conserva 2 casas decimais.

Figura 2. Exemplo de um dos problemas a resolver sem apliquetas

2.3.3 3.^a aula

A partir desta aula, os conteúdos a lecionar serão desconhecidos dos alunos e poderão originar os conflitos semióticos detetados. A atividade proposta para esta aula terá em

atenção a necessidade de os alunos saberem operar com acontecimentos, analisar diagramas de Venn e compreenderem a diferença entre uma experiência com reposição e sem reposição (C1). Nesta atividade os alunos trabalharão com os três tipos de suportes gráficos utilizados em experiências compostas: diagramas de Venn, tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore. Na Figura 3 apresenta-se um extrato com dois exemplos sem e com uso das apliquetas a usar e disponíveis em:

<https://tube.geogebra.org/student/b611591#material/3753>

<https://www.geogebra.org/m/RTzUe4MV#material/iwBzbUI4>

6. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira antes de retirar a segunda e anotar a cor das bolas saídas.

a) Observa as bolas que tens à tua frente e completa as frases.

O espaço de resultados é constituído por _____ bolas, _____ de cor _____ e _____ de cor _____.

Sejam A e B os acontecimentos:

A₁: "A primeira bola saída tem cor _____" P(A₁) = _____

B₁: "A primeira bola saída tem cor _____" P(B₁) = _____

A₂: "A segunda bola saída tem cor _____" P(A₂) = _____

B₂: "A segunda bola saída tem cor _____" P(B₂) = _____

b) Completa o diagrama de árvore:

1.ª bola 2.ª bola

c) Determina P(A₁)
d) Determina P(A₁ ∩ A₂)
e) Determina P(A₂)
f) Determina P(B₂)

1. Observa o diagrama de Venn seguinte e calcula as probabilidades solicitadas. Confere as tuas respostas em <https://tube.geogebra.org/student/b1194345#material/1194345>

enter your answers in green boxes

P(hockey|tennis)

P(not hockey|tennis)

P(hockey|not tennis)

P(not hockey|not tennis)

P(tennis|hockey)

P(not tennis|hockey)

P(tennis|not hockey)

P(not tennis|not hockey)

Figura 3. Exemplo de dois dos problemas a resolver sem apliquetas (à esquerda) e com apliquetas (à direita)

2.3.4 4.ª e 5.ª aulas

Lecionar o tema probabilidade condicionada, usando uma apresentação digital. Na elaboração deste documento e da atividade a desenvolver na 4.ª aula (exemplo na Figura 4, à esquerda). Já na aula seguinte, a 5.ª aula, serão tidos em atenção os conflitos semióticos que surgem quando os alunos não identificam que se trata de uma experiência aleatória sem reposição (C1); consideraram as probabilidades conjuntas como sendo probabilidades condicionadas (C2); consideraram a probabilidade condicionada como sendo a probabilidade condicionada transposta (C3). As apliquetas a utilizar estão disponíveis em:

<https://www.geogebra.org/m/RTzUe4MV#material/iwBzbUI4>, em

<https://www.geogebra.org/m/MNKMzw9E>, em

<https://www.geogebra.org/m/EEwVfExN> e em <https://www.geogebra.org/m/HMd4zuur>

2.3.5 6.ª aula

Realizar-se-á uma questão-aula. Esta questão-aula, com papel e lápis, e com base numa apliqueta visa avaliar se os conflitos dos alunos foram superados e rever as apliquetas e outros problemas. Um exemplo de questão-aula pode ser o apresentado na Figura 5 e as apliquetas que lhe serviram de base estão disponíveis em

<https://tube.geogebra.org/student/m1002687> e em

<https://www.geogebra.org/m/EEwVfExN>

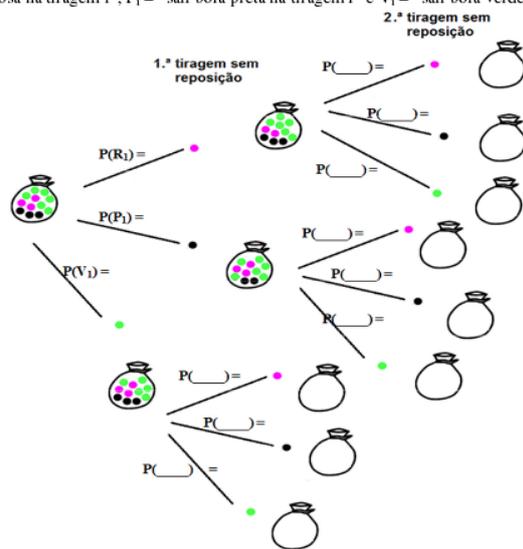
2. Revê o diagrama de árvore e os cálculos das probabilidades que fizeste na última aula consultando o site <https://tube.geogebra.org/student/b611591#material/83838>.
 2.1. Recordando que sendo A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória tais que $P(B) > 0$, chama-se probabilidade condicionada de A, dado B, ou probabilidade de ocorrer A sabendo que B ocorreu e que se representa por $P(A|B)$ e que se calcula como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Além disso, sendo A, B e C três acontecimentos associados a uma experiência aleatória tais $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e $P(C) > 0$ chama-se probabilidade condicionada de C, dado A e B, ou probabilidade de ocorrer C sabendo que A e B ocorreram e que se representa por $P[C|(A \cap B)]$ e que se calcula como:

$$P[C|(A \cap B)] = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$

Seguindo o que fizeste e apoiando-te no site referido, completa corretamente todos os elementos do diagrama de árvore seguinte, bem como os cálculos de probabilidade pedidos e definindo: R_1 = "sair bola rosa na tiragem i", P_1 = "sair bola preta na tiragem i" e V_1 = "sair bola verde na tiragem i":



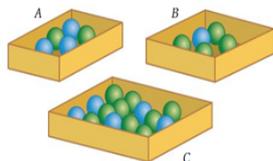
- a) Calcula $P(R_2 \cap R_1)$
- b) Calcula $P(R_2 \cap P_1)$
- c) Calcula $P(R_2 \cap V_1)$
- d) Constrói a árvore e calcula $P[V_3 | (R_1 \cap R_2)]$
- e) Constrói a árvore e calcula $P[V_3 | (P_1 \cap R_2)]$
- f) Constrói a árvore e calcula $P[V_3 | (V_1 \cap R_2)]$

Figura 5. Extrato de uma das possíveis questões-aula

2.3.6 7.ª e 8.ª aulas

Lecionar o tema acontecimentos independentes, recorrendo a uma apresentação digital e realizar uma atividade sem apliqueta (Figura 6, esquerda). Lecionar o teorema da probabilidade total recorrendo a uma apresentação digital e à sua aplicação a exemplos (Figura 6, direita).

4. Têm-se três caixas com bolas azuis e verdes no número que se indica na figura.



Tira-se uma bola ao acaso de cada caixa.
 Qual a probabilidade de serem as três verdes?

5. Num jogo de futebol o árbitro começa por lançar uma moeda para decidir qual o lado do campo que fica para cada equipa.
 Durante cinco semanas o árbitro lançou a moeda e saiu sempre face nacional. Qual a probabilidade de na sexta semana, quando fizer o sexto lançamento, sair face nacional de novo?

1. No departamento de investigação de um laboratório, os 24 colaboradores distribuem-se por habilitações e sexo, de acordo com a tabela ao lado.

Escolhe-se, ao acaso, um dos colaboradores.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Tem curso superior."

B: "É do sexo feminino".

	Tem curso superior (A)	Não tem curso superior (\bar{A})
Sexo feminino (B)	6	2
Sexo masculino (\bar{B})	12	4

Repara que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$= \frac{6}{24} + \frac{12}{24}$$

$$= \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Determina:

$$P(B) = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

Figura 6. Exemplo de problemas a resolver sem apliquetas

2.3.7 9.^a à 11.^a aulas

Lecionar a fórmula de Bayes tendo em atenção o conflito semiótico identificado de os alunos não identificarem que o acontecimento condicionante pode ocorrer depois do condicionado (C4) e as apliquetas utilizadas estão disponíveis em <https://www.geogebra.org/m/EEwVfExN> e um desses exemplos é apresentado na Figura 7. Na 10.^a aula, esperam poder-se realizar-se problemas sem e com apliquetas sobre toda a matéria lecionada sobre probabilidades. Na última aula, 11.^a, será realizado o pós-teste individual.

2. Completa o diagrama de árvore que se segue, colocando as probabilidades em falta. Responde às perguntas e confere as tuas respostas consultando o site <https://tubc.geogebra.org/student/b611591#material/83838>

The screenshot shows an interactive probability problem. On the left, a tree diagram illustrates the selection of two balls from a jar containing 7 balls (4 black, 3 green). The first level shows two branches: '1st Selected Ball' (black or green) and '2nd Selected Ball' (black or green). On the right, the 'Bayes' Theorem' section contains three probability questions: $P(1^{\text{st}} \text{ is black} | 2^{\text{nd}} \text{ is black}) = ?$, $P(1^{\text{st}} \text{ is black} | 2^{\text{nd}} \text{ is green}) = ?$, and $P(1^{\text{st}} \text{ is green} | 2^{\text{nd}} \text{ is black}) = ?$. Each question has 'Hint' and 'Check Answer' buttons.

Figura 7. Exemplo de um dos problemas a resolver com apliquetas

3. Considerações finais

Elaborada uma planificação, acrescenta-se que esta intervenção se idealizou para duplas, pois o uso das apliquetas requer uma sala de computadores, sendo a dupla a maior dimensão possível para trabalhar por computador. Na elaboração de todos os materiais para a aula desta intervenção didática partiu-se do princípio que os alunos apenas tinham como suporte de estudo o material fornecido. Como é habitual, e também se espera, os trabalhos para casa e a realização de problemas poderão fazer-se com recurso aos problemas dos manuais escolares. Com esta proposta espera-se uma motivação extra dos alunos que venha a melhorar o seu desempenho. Usando as apliquetas, o professor possibilita aos alunos uma experiência diferente nas aulas do tópico das probabilidades. Deste modo, também se acredita que os alunos consigam ultrapassar os conflitos semióticos detetados nos estudos preliminares (Raposo, 2015, Raposo et al., 2016). No trabalho doutoral inicialmente referido no início, resta agora implementar a intervenção didática, recolher os dados e analisá-los.

Referências

- Aliaga, M., e Gunderson, B. (2006). *Interactive Statistics* (3rd Ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Baglin, J. (2013). Applying a theoretical model for explaining the development of technological skills in statistics education. *Technology Innovations in Statistics Education*, 7(2). Disponível em, <http://escholarship.org/uc/item/8w97p75s>.
- Batanero, C., Fernandes, J. A., e Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62(3), 11-18.
- Ben-Zvi, D., e Garfield, J. B. (2005). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. Em D. Ben-Zvi e J. Garfield (Eds.), *The challenge of*

- developing statistical literacy, reasoning and thinking.* (pp. 3–15). New York: Kluwer.
- Biehler, R. (2003). Interrelated learning and working environments for supporting the use of computer tools in introductory courses. Em L. Weldon, e J. Engel (Eds.), *Proceedings of IASE Conference on Teaching Statistics and the Internet*. Berlin: IASE. Disponível em, <http://iase-web.org/documents/papers/sat2003/Biehler.pdf>
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., e Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal* 1(1). Disponível em, <http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2>
- De Pablos, J. de. (2010). Universidad y sociedad del conocimiento. Las competencias informacionales y digitales. *Revista de Universidad y Sociedad de Conocimiento*, 7(2), 6-16.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tese de Doutoramento, Granada, Espanha: Universidad de Granada.
- Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C., e Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Bolema*, 26(22), 1207-1226.
- Estrada, A., e Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. Em A. Rossman e B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. C., e Contreras, J. M. (2011). Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12.º ano através do ensino. *Actas da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C. (2010). A simulação em probabilidades e estatística: potencialidades e limitações, *Quadrante*, 18, 1 e 2: 161 - 183.
- Ferrara, F., Pratt, D., e Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez e P. Boero (Orgs.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present, and future* (pp. 237 – 273). Roterdão: Sense.
- García-Valcarcel, A., e Tejedor Tejedor, F. J. (2011). Variables TIC vinculadas a la generación de nuevos escenarios de aprendizaje en la enseñanza universitaria. Aportes de las Curvas ROC para el análisis de diferencias. *Educación XXI*, 14(2), 43–78.
- Godino, J. D., Batanero, C., e Font, V., (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*, 10(2), 1-32.
- Hassad, R. A. (2012). Faculty attitude toward technology-assisted instruction for introductory statistics in the context of educational reform. *Proceedings of the International Association of Statistics Education 2012 Roundtable Conference*:

- Technology in Statistics Education: Virtualities and Realities*, July 2012. Cebu City, Philippines. Disponível em:
http://iase-web.org/documents/papers/rt2012/IASE2012_Hassad.pdf
- Healy, M. R., Berger, D. E., Romero, V. L., Aberson, C. L., e Saw, A. (2013). Evaluating java applets for teaching on the Internet. *Java Applets in Education*, pp. 1-4. Disponível em: http://scholarship.claremont.edu/cgu_fac_pub/78/
- Lipson, K., Kokonis, S., e Francis, G., (2003). Investigation of students' experiences with a web-based computer simulation. Paper presented at the *IASE Satellite Conference on Statistics and the Internet*, Berlin, August 11-12.
- Malloy, T. E. (2001). Difference to inference: Teaching logical and statistical reasoning through on-line interactivity. *Behavior Research Methods, Instruments, e Computers*, 33(2), pp. 270 – 273.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., e Hardiman, P. (1997). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Raposo, S. (2015). *Apliquetas no ensino de probabilidades: Estudo de caso com alunos de uma turma de matemática aplicada às ciências sociais*. Seminário Doutoral II, Vila Real: UTAD.
- Raposo, S., Nascimento, M., e Costa, C. (2016). Hello from probabilities. Em Csíkos, C., Rausch, A., e Sztányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 209-210). Szeged, Hungria: PME.
- Silva, H., e Nascimento, M. M. (2010). Estudo sobre a resolução de problemas que envolvem o teorema de Bayes. Em H. Gomes, L. Menezes, e I. Cabrita (Eds.), *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.341-356). (CD-ROM). Lisboa: APM.
- Tarr, J. E., e Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.
- Tello, J., e Aguaded, J. I. (2009). Desarrollo profesional docente ante los nuevos retos de las tecnologías de la información y la comunicación en los centros educativos. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 34, 31-47.
- Tversky, A. e Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.