Niveles de algebrización en tareas de proporcionalidad

María Burgos y Juan D. Godino
Universidad de Granada

Introducción

El desarrollo del razonamiento algebraico debe ser un objetivo a lograr progresivamente desde la educación primaria. Es necesario que los profesores tengan una visión ampliada del álgebra como proponen diversas investigaciones y experiencias didácticas (Cai y Knuth, 2011; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012) a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática propuesto por Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) puede ayudar a que los profesores conozcan las características del razonamiento algebraico elemental mediante el reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos propios del mismo.

En este trabajo analizamos distintas maneras de resolver un problema de proporcionalidad desde la perspectiva de los distintos niveles de algebrización, y por tanto, distintos significados.

Problema

Se aborda el problema de diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas mediante las cuales se promueva la reflexión sobre las características del razonamiento algebraico propio de educación primaria y su conexión con el de educación secundaria.

Se considera necesario que los profesores promuevan el razonamiento algebraico en sus estudiantes, lo que supone que discriminen la actividad matemática propiamente aritmética de la algebraica, y dentro de la algebraica reconocer distintos niveles de desarrollo del razonamiento algebraico.

Antecedentes

Los antecedentes más próximos de este trabajo son Giacomne, Godino, Wilhelmi y Blanco (2016) en cuanto a la aplicación de la técnica de análisis de prácticas, objetos y proceso en la resolución de tareas matemáticas y Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) en el que se inició el análisis de los significados de la proporcionalidad.

Método

Se analizan las prácticas, objetos y procesos de distintas maneras de resolver un problema de proporcionalidad directa. El fin es desvelar cómo aplicando distintos procedimientos de resolver el problema y soluciones diagramáticas es posible poner en juego distintos niveles de algebrización y, por tanto, distintos significados de la proporcionalidad.

Problema (enunciado inicial):

Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Las consignas dadas a los profesores en formación son:

A) Resolver el problema usando varios métodos.

B) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

C) Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se realiza en cada caso.

D) Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en el nivel de algebrización puesto en juego.

Resultados

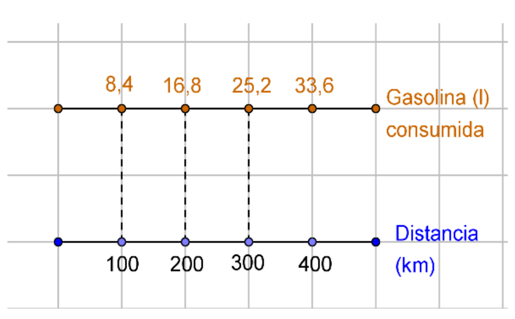
Se detallan los sistemas de prácticas que se ponen en juego en distintas soluciones posibles del problema y seguidamente los conocimientos implicados en cada práctica, según el modelo desarrollado en Giacomone, et al. (2016) y Godino, et al. (2017).

Solución 1. Aritmética, nivel 0 de algebrización

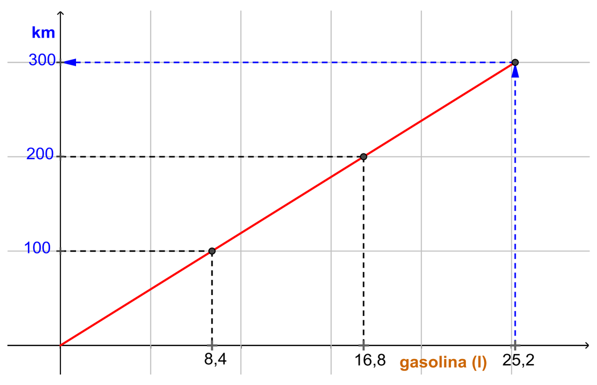
Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina.

Por tanto, con el doble, triple, etc. de volumen de gasolina podrá recorrer el doble , triple, etc. de kilómetros. Dividiendo 25,2 entre 8,4 obtenemos el número de veces que 25,2 contiene a 8,4, esto es: 25,2/8,4=3. Luego puede recorrer 300 km.

Soluciones diagramáticas 2. Nivel 1 de algebración



1. Diagrama lineal



2. Gráfico cartesiano

Solución 3.Proto-algebraica de nivel 1 (Reducción a la unidad)
Configuración ontosemiótica:

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	Objetos referidos en las prácticas
1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina, de manera que, con el doble, triple, etc. de combustible, podré recorrer el doble, triple, etc., de distancia.	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de aplicación de la proporcionalidad directa	*Conceptos*: multiplicación, secuencia ilimitada, correspondencia funcional, magnitud, cantidad, medida *Proposición* P1: enunciado de la práctica 1) *Argumento*: convención pragmática
2) Por tanto, la relación entre las magnitudes “volumen” de gasolina consumida y “distancia” recorrida es de proporcionalidad directa.	Declarar que la relación establecida entre las magnitudes heterogéneas es de proporcionalidad directa	*Concepto*: proporcionalidad directa *Proposición* P2: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa *Argumento*: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad directa
3) Calculamos los kilómetros que recorre el coche por cada litro de gasolina consumido: 100/8,4 = 11.904761 ≈11.905, son los kilómetros que puede recorrer el coche por litro	Reducción a la unidad	*Concepto*: consumo unitario *Procedimiento:* cálculo del consumo unitario (aproximado) *Argumento*: la relación es de proporcionalidad directa
4) Si por cada litro recorre 11.905 km, con 25,2 litros recorrerá 11.905 × 25.2 ≈300 km	Operar numéricamente con el consumo unitario e interpretar el resultado numérico como solución del problema	*Proposición P3*: La distancia que recorrerá con 25,2 litros es 300 km. *Argumento*: Secuencia de prácticas 1) a 4)

Solución 3: Proto-algebraica de nivel 2 (Regla de tres)

Se supone establecida una correspondencia de proporcionalidad directa entre dos magnitudes: “distancia” recorrida por el coche, y “volumen” de gasolina consumida. Por tanto, la razón de cantidades que se corresponden es constante: $\frac{100\ km}{8,4\ l} = \frac{x}{25,2l}$. Teniendo en cuenta la igualdad del producto en cruz de los términos en una proporción, $x = \frac{100km \times 25,2l}{8,4l} = 300km$. Es decir, el coche recorrerá 300 km con 25,2 litros de gasolina.

Variante 1 del problema inicial: Mi coche y el de mi padre tienen el mismo consumo. El volumen de mi tanque es de 60 l y el de mi padre es de 82 l. Si mi padre puede recorrer 220 km más que yo con su coche antes de volver a repostar, ¿cuál es el consumo de mi coche?

Solución. Nivel de algebrización 3

Se asume una relación de proporcionalidad entre el consumo de combustible y la distancia recorrida. Llamemos *x* a los km que puede recorrer mi coche con 1 l de combustible. Puesto que la capacidad de mi tanque es de 60 l, con todo el depósito podré recorrer 60*x* km. El consumo del coche de mi padre es el mismo que el mío, de modo que, si su tanque tiene una capacidad de 82 l, hasta volver a repostar podrá recorrer 82*x* km. Mi padre puede recorrer 220 km más que yo con su coche, es decir, 82*x*=60*x*+220. Luego, 82*x*-60*x*=220. De aquí, (82-60)*x*=220, es decir, 22*x*=220, y finalmente *x*=220/22=10; 10 son los kilómetros que podemos recorrer con un litro de combustible. Por tanto, el consumo es de 10 l a los 100 km.

Variante 2 del problema (enunciado general) Un coche consume *k* l de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con *x* litros?

Solución. Nivel de algebrización 4

Suponemos una correspondencia de proporcionalidad directa entre las cantidades de las magnitudes. Se tiene entonces la siguiente proporción: $\frac{k}{100} = \frac{x}{y}$ donde *y* representa los kilómetros que se pueden recorrer con *x* litros. Por tanto $y = \frac{100x}{k}$ expresa los kilómetros que puede recorrer un coche que consume *k* litros de gasolina cada 100 km con *x* litros.

Conclusiones

El análisis de prácticas, objetos y procesos con la herramienta configuración ontosemiótica aplicada al problema nos ha permitido identificar diferentes niveles de algebrización de la actividad matemática implicada en la solución de un problema de proporcionalidad. La realización de este tipo de análisis debería ser una competencia del profesor de matemáticas para que pueda reconocer los niveles de complejidad y competencia que se requiere para resolver las tareas matemáticas correspondientes y gestionar los procesos de estudio correspondientes.

REFERENCIAS

- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.
- Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*, XX (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Beltrán – Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López–Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*
- Godino, J.D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi,M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26 (42B).
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.