

Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo

Contribution of the Onto-Semiotic Approach to research on didactics of calculus

Luis R. Pino-Fan

Universidad de Los Lagos

Resumen

En el campo de la Didáctica de la Matemática, las nociones claves del cálculo (función, derivada, integrales,...) han sido objeto de investigación constante debido a su complejidad natural, la cual dificulta los procesos de enseñanza y aprendizaje de dichas nociones. El objetivo de este trabajo es sintetizar cómo las herramientas “teórico-metodológicas” del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, han sido usadas en las investigaciones realizadas por la comunidad de investigadores que desarrolla y aplica el EOS, sobre problemas de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, contribuyendo así en el avance de la actual agenda de investigación sobre Didáctica del Cálculo.

Palabras clave: Cálculo, Enfoque Ontosemiótico, Significados de objetos matemáticos

Abstract

In the field of Mathematics Education, the key notions of calculus (function, derivative, integrals,...) have been the object of constant research due to their natural complexity, which hinders the teaching and learning processes of these notions. The aim of this work is to illustrate how the “theoretical-methodological” tools of the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction have been used in several investigations carried out by the community of researchers who develop and apply the OSA, on teaching and learning problems in Calculus, thereby contributing to the progress of the current research agenda on Didactics of Calculus.

Keywords: Calculus, Onto-Semiotic Approach, meanings of mathematical objects

1. Introducción

La enseñanza de las nociones del Cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas, tanto para los alumnos como para los profesores (Hitt, 2003), de cara a la comprensión de sus ideas fundamentales. Objetos matemáticos tales como la función, derivada o integral son fundamentales para el estudio de esta rama de las matemáticas, pero frecuentemente el tratamiento que se les da en las instituciones educativas, se enfoca al manejo y la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que provoca en los estudiantes dificultades para la comprensión de dichas nociones (Parra, 2015; Gordillo, 2015). Artigue (1995), por ejemplo, señala que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de, por ejemplo, derivadas, se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de este campo de las matemáticas.

Las características de la comprensión de las nociones claves del Cálculo, de los estudiantes de Enseñanza Media y primeros cursos de Universidad, es un tema que ha sido ampliamente investigado por diversos autores, desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva –concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores, etc.– e instruccionales –estrategias y alternativas para la enseñanza de dichas nociones, etc.– (Asiala, Cottrill, Dubinsky y

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Artigue, Batanero y Kent, 2007; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011; Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed, 2012; Kouropatov y Dreyfus, 2014). Si bien es cierto que las múltiples dificultades a las que se enfrentan los alumnos se deben, en cierto modo, a la naturaleza compleja de dichas nociones, también es cierto que esta problemática, en gran parte, se debe a cómo el profesor gestiona los conocimientos sobre los objetos matemáticos del Cálculo. Sin embargo, como bien señalan Ramos (2005) –para el caso de la noción de función–, Pino-Fan (2014) –para el caso de la noción derivada– y Crisóstomo (2012) –para el caso de la noción integral–, existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores con relación al tratamiento que hacen de estas nociones.

Así, dichos aspectos cognitivos, instruccionales y del conocimiento del profesor, conforman, a grandes rasgos, la agenda de investigación vigente sobre Didáctica del Cálculo, de la cual el Grupo de Investigación del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, también ha sido partícipe mediante la generación, refinamiento y aplicación de “herramientas analíticas”, que han permitido desarrollar investigaciones pormenorizadas (con aportes relevantes), en cada uno de los aspectos antes mencionados.

El objetivo de este trabajo es, precisamente, ejemplificar el uso de las herramientas teórico-metodológicas del EOS en las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo, desarrolladas por la comunidad de investigadores que desarrollan y aplican el EOS. Como resultado de este breve recorrido, se señalan algunas líneas de investigación abiertas, las cuales podrían resultar en una “agenda de investigación” para las personas interesadas en el campo.

2. Investigaciones sobre Didáctica del Cálculo al seno de la comunidad EOS

Antes de comenzar con lo que se promete en este segundo apartado, debo hacer un pequeño “paréntesis” para presentar, de manera muy breve y general, algunas de las herramientas teóricas del EOS que mencionamos en este trabajo, con el fin de hacerlo más comprensible.

De acuerdo con la página web del Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>), el EOS es un sistema teórico inclusivo (Presmeg, 2014) que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Fue iniciado por el grupo de investigación “Teoría de la Educación Matemática” de la Universidad de Granada a principios de los años 90 (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998), siendo en la actualidad desarrollado y aplicado por otros grupos de investigación a nivel internacional.

Dicho modelo contempla seis facetas, o dimensiones, implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos de las matemáticas (Godino, 2009): *epistémica* (distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza aprendizaje, de los componentes del significado institucional implementado –problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos–); *cognitiva* (desarrollo de los significados personales –aprendizajes–); *afectiva* (distribución temporal de los estados afectivos –actitudes, emociones, afectos, motivaciones– de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido); *interaccional* (secuencia de

interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados); *mediacional* (distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos); y *ecológica* (sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, que soportan y condicionan el proceso de estudio).

Además, de acuerdo con la dimensión y el momento del proceso de enseñanza y aprendizaje que se quiere indagar, el EOS cuenta con niveles de análisis que permiten obtener la información requerida para la toma de decisiones instruccionales (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Prácticas matemáticas*. “Toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334).
- *Configuración de objetos y procesos*. Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje
- *Normas y metanormas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
- *Idoneidad didáctica*. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

Otros trabajos que permiten profundizar en los supuestos teóricos y metodológicos del EOS, están accesibles en la propia WEB del EOS proporcionada arriba, así como en las páginas personales: <http://webs.ono.com/vicencfont/>, <http://www.ugr.es/~batanero/>, y <http://www.lrpino-fan.com>.

En los siguientes sub-apartados se presentan las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo desarrolladas bajo este enfoque teórico. Para ello, dichas investigaciones se han agrupado por temáticas: 1) estudios sobre el significado holístico de los objetos matemáticos; 2) estudios sobre los significados pretendidos por el currículo/textos; 3) estudios sobre los significados personales.

2.1. Estudios sobre el significado holístico de los objetos del Cálculo

Cuando se pretende en una investigación, entre otras cosas, evaluar la comprensión o los conocimientos que tienen ciertos sujetos (profesores o estudiantes) sobre un determinado objeto matemático, una pregunta que surge de manera natural es *¿qué es o qué significado(s) tiene realmente dicho objeto matemático?* Existen al menos dos formas de aproximarnos a la respuesta de esta interrogante. La primera es realizando un estudio de los significados pretendidos por el currículo de matemática y los libros de texto sobre la noción particular. La segunda es estudiando la naturaleza histórico-epistemológica que esta pregunta tiene. Si se elige responder a la pregunta sólo desde el primer enfoque, se corre el riesgo de reconstruir el significado global de forma incompleta, ya que los currículos de matemáticas son establecidos por las agencias de política educativa, los libros de texto son escritos con parámetros editoriales que raramente consideran los resultados de las investigaciones, etc. Además, a lo anterior se

suma que los significados de los objetos matemáticos dependen de los objetivos de cada institución educativa. En este sentido, Biehler (2005) establece que los significados de ciertas nociones matemáticas difieren en gran medida de acuerdo a las diferentes funciones sociales de las instituciones educativas, y respecto de las hipótesis sobre aquello que los estudiantes fueron capaces, y están dispuestos, a aprender en condiciones sociales y escolares dadas.

Desde mi punto de vista no hay una mejor manera de conocer qué es o qué significa realmente un objeto matemático que mirando en la historia cómo surge, cómo evoluciona, cómo se formaliza y cómo se generaliza una determinada noción matemática. Obviamente no se trata meramente de ‘relatar’ o mirar la historia del objeto matemático desde un punto de vista simplista, sino que se trata de analizar y caracterizar las grandes problemáticas, y las prácticas matemáticas desarrolladas para resolverlas, que dieron paso al surgimiento y evolución del objeto matemático en cuestión.

Para poder realizar dichas caracterizaciones, el EOS cuenta con una “herramienta analítica” denominada *configuración ontosemiótica* (Godino, Batanero y Font, 2007; Pino-Fan, Godino y Font, 2015). Esta *configuración ontosemiótica*, en el EOS, puede utilizarse desde dos perspectivas, una personal (en cuyo caso se denomina configuración ontosemiótica cognitiva) y otra institucional (la cual se conoce como configuración ontosemiótica epistémica). En esta sección 2.1 se hará referencia a la configuración epistémica, que es la que ayuda a realizar los análisis antes comentados desde el punto de vista histórico.

¿En qué consiste la “herramienta”? Consiste en identificar y caracterizar los objetos matemáticos primarios (Situaciones-Problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados (atendiendo a la relatividad del contexto en el que éstos objetos matemáticos primarios son usados), a partir de las prácticas matemáticas que se han desarrollado en la historia y las cuales han permitido el surgimiento, evolución, formalización y generalización de las nociones clave del Cálculo (Figura 1).

Lo anterior implica no sólo narrar la evolución histórica (cronológica) de un objeto matemático, sino estudiar dicha evolución con mucho detenimiento, localizando las grandes problemáticas, y prácticas desarrolladas para la solución de dichas problemáticas, que pueden verse como esos “puntos de inflexión” que permiten el surgimiento, evolución, formalización, etc., de los objetos matemáticos del Cálculo. Esas problemáticas con sus respectivas prácticas, por supuesto, llevan asociada una configuración epistémica, la cual a su vez nos ayuda a determinar un significado parcial (asociado a dicha configuración) del objeto matemático en cuestión (Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

La noción de *configuración ontosemiótica epistémica* ha sido utilizada en diversas investigaciones con el propósito de caracterizar el “significado holístico de referencia” (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) de las nociones del cálculo. Por ejemplo, para el caso de la *derivada*, en Pino-Fan, et al. (2011) se presenta un estudio histórico-epistemológico el cual concluye con la identificación de nueve configuraciones epistémicas, cada una de las cuales lleva asociado un significado parcial para dicha noción (Ibíd., p. 71): 1) la tangente en la matemática griega; 2) sobre la variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas del límite para el cálculo de máximos y

mínimos; 6) métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) la derivada como límite.

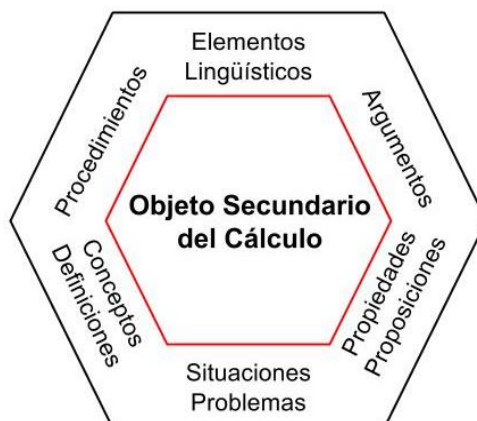


Figura 1. Herramienta analítica para los estudios histórico-epistemológicos

Para el caso de la *función*, en Parra (2015) se lleva a cabo un estudio que permite identificar seis significados parciales que conforman el significado holístico de referencia de esta noción: 1) la función como correspondencia; 2) la función como relación entre magnitudes variables; 3) la función como representación gráfica; 4) la función como expresión analítica; 5) la función como correspondencia arbitraria; y 6) la función a partir de la teoría de conjuntos (ver también la tesis de Ramos, 2005).

Para el caso de la *integral* (definida e indefinida) se han realizado tres investigaciones sobre el tema. Ordóñez (2011) analiza las configuraciones epistemológicas de la integral a lo largo de la historia distinguiendo nueve significados institucionales diferentes: cultura griega, Edad Media, uso explícito de procesos infinitos, generalización de los métodos infinitesimales, inversa de la derivada, suma de elementos infinitesimales, límite de una suma, extendida a funciones discontinuas e integral definida generalizada.

Crisóstomo (2012) identifica cinco significados parciales para la integral definida: 1) intuitiva, nociones previas a la sistematización del cálculo; 2) primitiva, la integración como primitiva de la diferenciación; 3) integración aproximada; 4) analítica, fundamentación del cálculo como límite de sumas; y 5) generalizada, generalización de la integración para las funciones medibles. Si bien, uno de los significados parciales identificados por Crisóstomo (2012) es referente a la integral indefinida (la integral como primitiva), los significados de ésta (antiderivada), es abordado de forma muy “general”, lo cual hizo necesario un estudio para profundizar en ellos.

De esta manera, el estudio de Gordillo y Pino-Fan (2016), realiza una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada, a partir del cual se identificaron cuatro significados parciales para dicha noción: 1) tangentes-cuadraturas; 2) fluxiones-fluentes; 3) sumatorias-diferencias, y 4) funciones elementales.

En Medrano y Pino-Fan (2016) se identificaron siete significados parciales para la noción de límite finito: 1) la noción de aproximación de Eudoxo y Arquímedes; 2) la concepción de los indivisibles; 3) la noción intuitiva de límite en los desarrollos de Newton; 4) la idea de los infinitesimales en los desarrollos de Leibniz; 5) las concepciones pre-formales del límite; 6) la concepción formal de la noción de límite; y 7) generalizaciones de la noción de límite.

En resumen, los estudios que acabamos de comentar, elaboran propuestas de reconstrucción del significado holístico de referencia para las nociones de función, límite finito, derivada, integral definida e integral indefinida. En la mayoría de los casos, las caracterizaciones de las configuraciones epistémicas han permitido obtener criterios para el diseño de instrumentos de evaluación de conocimientos-comprensión que tienen los sujetos sobre dichas nociones. No obstante, al seno del grupo de investigación del EOS, hasta ahora son pocos los estudios que tratan de adaptar y aprovechar la riqueza de los significados parciales ya identificados, para el diseño de experiencias de aula que permitan potenciar la comprensión de estas nociones.

La riqueza matemática subyacente a los significados parciales identificados en las investigaciones que repasamos, es algo que no se debería dejar de lado, ya que como señalan Medrano y Pino-Fan (2016), algo que queda de manifiesto con los resultados de tales investigaciones histórico-epistemológicas es que:

“...la emergencia del cálculo diferencial e integral, no fue un proceso lineal, ni tampoco estuvo circunscrito a lo algorítmico, ni a lo propiamente matemático. En él intervienen también, concepciones filosóficas y otras disciplinas. En su fundamentación y formalización [de las nociones del cálculo], hay distintos caminos pero matemáticamente equivalentes”. (p. 320)

La conclusión de los estudios histórico-epistemológicos hasta ahora desarrollados, tiene un gran valor para la Didáctica de las Matemáticas, en tanto que muestran que hay variedad de caminos alternativos para la enseñanza y aprendizaje de las nociones fundamentales del Cálculo.

Ahora bien, ¿cómo adaptar las configuraciones epistémicas de referencia para el diseño de procesos de instrucción que contemplen su riqueza matemática?, ¿de qué manera utilizar los recursos tecnológicos (y otros) en tales adaptaciones?, ¿de qué forma se pueden conectar las configuraciones epistémicas de un objeto matemático?, ¿cómo relacionarlas (mezclarlas), si es posible, para generar nuevas configuraciones epistémico-didácticas que sirvan como alternativas para la enseñanza de las nociones?, etc., son líneas de investigación que aún siguen abiertas.

2.2. Estudios sobre los significados pretendidos por el currículo y los libros de texto

Regresemos un poco a la pregunta inicial planteada en la sub-sección anterior. Antes de intentar responder a dicha pregunta desde el primer enfoque, otra pregunta que es pertinente hacer es, *¿el o los significados pretendidos por el currículo, sobre un determinado objeto del Cálculo, es representativo del significado de referencia (significado holístico) de dicho objeto?*

Como señalan Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), la representatividad de los significados parciales en el currículo y libros de texto, es un elemento a tener en cuenta para valorar la calidad matemática de la instrucción. Estos autores señalan: “Parece claro que la elección de tareas matemáticas que pongan en juego los objetos y significados matemáticos es crucial para promover aprendizajes significativos” (p. 147). Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia.

“En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global [u holístico] requiere realizar un estudio histórico-

epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos [sistemas de prácticas] de uso donde se pone en juego dicho objeto”. (Godino y Font, 2007, p. 2)

Para estudiar los significados pretendido por el currículo sobre nociones particulares de matemáticas, Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) sugieren considerar, para el análisis, la dupla <Libros de Texto, Programas de Estudio>, puesto que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los maestros, así como para su estilo de enseñanza (Cooney, 1985). Además que las propuestas curriculares de los ministerios de educación siempre vienen acompañadas, al menos en Latinoamérica, de la sugerencia de los libros de texto que, bajo su perspectiva, se apegan a lo que proponen.

La noción de *configuración epistémica* (Figura 1) fue propuesta por primera vez para el análisis de los significados pretendidos por los libros de texto en la investigación de Font y Godino (2006), aunque en esa ocasión se ejemplificó su uso con una noción no del Cálculo. Para el caso de la integral definida, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) realizan un estudio, en el cual, con el uso de la configuración epistémica, analizan algunos libros de texto y pruebas de acceso a la universidad en el contexto español.

Posteriormente, en el marco del EOS se propone una metodología que permite tanto identificar y caracterizar los significados de las nociones matemáticas pretendidos en el currículo, entendiendo al currículo como la dupla antes dicha (<libros de texto, programas de estudio>), como estudiar la representatividad de dichos significados pretendidos, respecto del significado holístico de referencia. La metodología es presentada de la siguiente manera:

“A continuación describimos cinco criterios que proponemos para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados curriculares de la derivada. No obstante cabe señalar que dichos criterios son generales y pueden ser utilizados para el análisis de la idoneidad epistémica de un tópico matemático cualquiera”. (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013, p. 130)

Los cinco criterios que componen la metodología propuesta por los autores anteriores son: *i*) representatividad de los campos de problemas propuestos, *ii*) tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas; *iii*) representatividad de los elementos regulativos y argumentativos; *iv*) conocimientos previos a la introducción de la derivada; y *v*) representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto del significado global de referencia. La metodología se ejemplifica mediante el análisis del significado de la derivada pretendido por el currículo de bachillerato mexicano, y se concluye que, aunque se proponen diversos contextos de uso de la derivada, la evidencia muestra que sólo uno (la derivada como límite) de los nueve significados parciales de la derivada es movilizadado en las prácticas propuestas por el currículo mexicano de dicho nivel educativo (Pino-Fan, et al., 2013).

Esta misma metodología fue adaptada en el estudio de Parra (2015) para el análisis de los significados de la noción de función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. Las adaptaciones realizadas por Parra (2015) fueron, principalmente, la consideración de los resultados del estudio histórico-epistemológico de la noción de función, lo que le proporcionó evidencia sobre el tipo de problemas, las representaciones, etc.

Hasta el momento, al seno de la comunidad de investigación que desarrolla y aplica el EOS, no hay otros estudios cuyo foco principal sea el de caracterizar los significados de las nociones clave del cálculo, pretendidos por el currículo de matemáticas de cierto nivel educativo. Por esta razón, el estudio de la representatividad de los significados pretendidos por el currículo (entendido como la dupla mencionada antes) sobre las nociones clave del Cálculo, es una línea de investigación vigente. Otras líneas de investigación abiertas, en esta dirección, se pueden resumir con las preguntas *¿cuál es la diferencia entre el significado, de un objeto del Cálculo, pretendido por el currículo de cierto nivel educativo, respecto del significado pretendido, para esa misma noción matemática, por el currículo de los futuros profesores de matemáticas? ¿Cómo contribuye el significado, de cierto objeto del Cálculo, pretendido por el currículo de los futuros profesores de matemáticas, en la gestión que éstos realizan de los aprendizajes de sus estudiantes? ¿Cómo lograr que los significados pretendidos, para las nociones del Cálculo, por los currículos de estudiantes y futuros profesores sean representativos del significado holístico de referencia?*

2.3. Estudios sobre los significados personales

Uno de los aspectos que ha sido más investigado, aunque no agotado, al seno del EOS, es la determinación (evaluación) de los significados que tiene un sujeto (significados personales de los estudiantes o profesores) sobre las nociones matemáticas del Cálculo (ver por ejemplo, Font, 1999; Ramos, 2005; García, 2008; Grijalva, 2008; Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009; Santi, 2011; Pino-Fan, Godino y Font, 2013a; Pino-Fan, Godino y Font, 2013b; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Soto, 2014; Gordillo, 2015; Branchetti, 2016; etc.). En dichas investigaciones, se ha hecho uso de las dos maneras en que, básicamente, es concebido el significado de un objeto matemático: 1) desde una perspectiva pragmática-antropológica, que atiende a la relatividad del contexto (o sistemas de prácticas matemáticas) en el que los objetos matemáticos son usados, es decir, como emergentes de los sistemas de prácticas (institucionales o personales); 2) en términos de una *función semiótica*. En Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval (2016; 2017), se da evidencia de que estas dos maneras de concebir los significados de los objetos matemáticos, son complementarias.

Así, para el análisis de los significados personales sobre cierta noción del Cálculo, el EOS propone básicamente tres herramientas analíticas. La primera son las *prácticas matemáticas*. En el EOS, la noción de sistema de prácticas juega un papel central para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; Godino y Batanero (1994) la definen como “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 334). Font, Godino y Gallardo (2013) lo señalan de la siguiente manera: “Nuestra propuesta ontológica se deriva de las prácticas matemáticas, siendo éstas el contexto básico en la que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales los objetos matemáticos emergen. Consecuentemente, el objeto adquiere un estatus derivado de las prácticas que le preceden” (p. 104). En términos operativos, este primer nivel de análisis (prácticas matemáticas) es un análisis que podría verse como “más global”, y de lo que se trata es de describir en términos generales las actuaciones de los sujetos –lo que hacen para resolver un problema, sin emitir juicios de valor– (Godino, 2009; Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval, 2017).

La noción de “sistema de prácticas” es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los

conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más “fino” de la actividad matemática, en el EOS se propone una segunda herramienta analítica, la *configuración ontosemiótica cognitiva* (Figura 2), la cual ha sido descrita en casi todos los trabajos sobre el EOS. Pero, ¿cómo se utiliza la “herramienta”? Una vez se haya descrito en términos generales la práctica matemática de un sujeto, y considerando que los objetos matemáticos son intervinientes y emergentes en dichas prácticas, se debe identificar los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) y sus significados (por supuesto, atendiendo al contexto en que son usados), movilizados a propósito de la resolución de cierto problema.

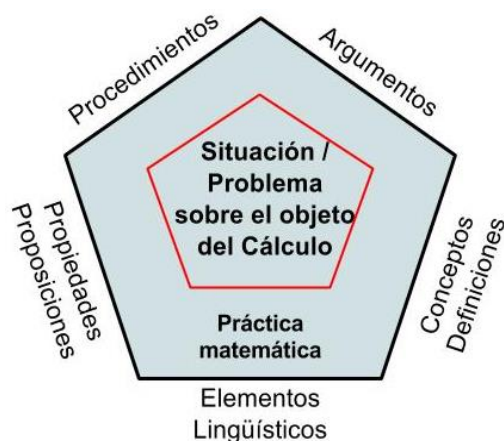


Figura 2. Configuración ontosemiótica parcial

Aquí, merece la pena hacer una pausa para aclarar algo en relación a las configuraciones ontosemióticas (epistémicas y cognitivas) que, aparentemente en el EOS está resuelto, pero que en lo personal he tenido que aclarar en muchas ocasiones por las dudas que ha generado en las personas con las que colaboro (colegas de diversas universidades y estudiantes de postgrado). Yo le llamo, en términos rústicos, el paso del hexágono (*configuraciones ontosemióticas epistémicas*) al pentágono (*configuraciones ontosemióticas cognitivas*). Ambas son una mirada parcial de la noción de configuración ontosemiótica propuesta por el EOS. Y es que la misma “herramienta analítica”, la configuración ontosemiótica, al mirarse desde las perspectivas institucional y personal, puede ser representada por medio de un “hexágono” (Figura 1) o un “pentágono” (Figura 2), respectivamente. Esto es así debido a que cuando se llevan a cabo estudios como los presentados en las secciones 2.1 y 2.2, sobre la identificación y caracterización de los significados (holístico de referencia o pretendidos por el currículo), de los objetos matemáticos, uno de los elementos que es muy relevante y fundamental de caracterizar, son las *tipologías de problemas* (los cuales son de distinta naturaleza de acuerdo al significado parcial de determinado objeto matemático que se esté trabajando). Estas tipologías de problemas (junto con los otros elementos de la configuración a la que pertenecen) quedan como referencia para luego elegir cuáles adaptar, para su enseñanza, dependiendo del significado que se quiera movilizar.

En cambio, en el ámbito escolar, cuando se trata de analizar los significados personales de los sujetos, usualmente a éste se le proponen problemas o tareas, las cual resuelve. Por lo tanto, el sujeto pone en juego, como parte de su práctica matemática, elementos lingüísticos, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, pero difícilmente propone nuevos tipos de problemas que necesiten ser caracterizados (ver Figura 3).

Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios pueden ser considerados desde distintas facetas o dimensiones duales: personal–institucional, unitario–sistémico, expresión–contenido, ostensivo–no ostensivo y ejemplar–tipo. Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso–producto, lo que conlleva a los siguientes procesos: institucionalización–personalización, generalización–particularización, descomposición o análisis–composición o reificación, materialización–idealización, representación–significación.

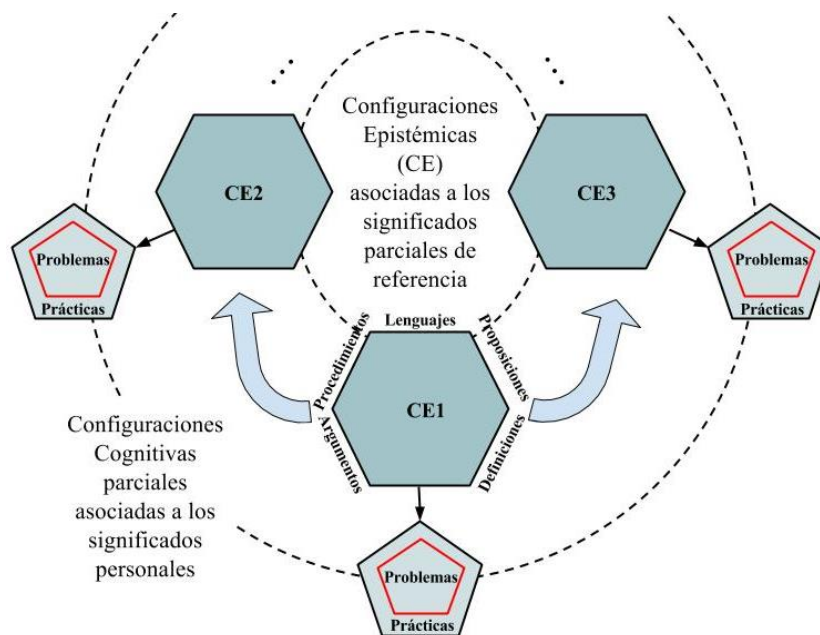


Figura 3. Relación entre las configuraciones epistémicas y cognitivas

La tercera “herramienta” es la *función semiótica*. De acuerdo con Hjelmslev (1943) y Eco (1976), una función semiótica es la correspondencia o relación de dependencia (o función) que es establecida por un sujeto (persona o institución) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), de acuerdo con un criterio o código de correspondencia (reglas, hábitos, convenios...). El contenido (o consecuente) de una función semiótica, y por lo tanto el significado, pueden ser un objeto personal o institucional, unitario o sistémico, ostensivo o no ostensivo (Godino, Batanero y Font, 2007); así mismo, este objeto puede ser un elemento lingüístico, una definición, una proposición, un procedimiento, un argumento o un problema (Godino, Font y Gallardo, 2013). De acuerdo con la semiótica de Peirce (1978) el enfoque onto-semiótico asume que tanto la expresión (antecedente de una función semiótica) como el contenido (consecuente de una función semiótica) puede ser cualquier tipo de entidad.

Las investigaciones que realizan análisis cognitivos para determinar los significados personales de los sujetos, siempre intentan refinar el tipo de análisis llevados a cabo. Así, por ejemplo, en Pino-Fan, Godino y Font (2016) se ejemplifica cómo analizar y caracterizar los objetos matemáticos primarios, sus significados y los procesos involucrados, en el desarrollo de prácticas matemáticas sobre derivadas.

Del mismo modo, con la finalidad de realizar análisis cognitivos más finos que permitan organizar el tipo de representaciones utilizadas por los sujetos en sus prácticas

matemáticas, en Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval (2015; 2017), se presenta un estudio de “networking of theories” entre la Teoría de los Registros de Representación Semióticos y el Enfoque Onto-Semiótico, en el cual analizan de manera pormenorizada, la práctica matemática desarrollada por una estudiante para profesor de matemáticas, a propósito de una tarea sobre la derivabilidad de la función valor absoluto. En este estudio se utilizan las tres herramientas del EOS antes descritas y se muestra que las dos maneras de concebir los significados de los objetos matemáticos, dentro del EOS, son complementarias. Como resultado del estudio, los autores proponen una metodología que vincula las concepciones teóricas (y por ende las herramientas analíticas) de ambas perspectivas teóricas, iniciando así, una nueva línea de investigación por explorar. En esta misma dirección, la tesis doctoral de Amaya (2016) presenta un estudio sobre los conocimientos que tienen y que requieren los profesores cuando se enfrentan a problemas que requieren realizar transformaciones de las representaciones de la noción de función (ver también el trabajo de Amaya, Pino-Fan y Medina, 2016).

Otra línea de investigación la abre el trabajo de Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013) en el que, a partir del análisis de la práctica matemática que realiza una estudiante con el apoyo de la tecnología (calculadora graficadora) para resolver una tarea sobre familia de funciones, se hace un “networking” entre el EOS y la Teoría de la Génesis Instrumental. Dicho estudio es un gran esfuerzo teórico realizado con la finalidad de contar con nociones teórico-metodológicas que permitan obtener información rica sobre cómo comprenden o construyen sus conocimientos los estudiantes, cuáles son las prácticas matemáticas alternativas que utilizan para resolver cierta tarea, etc., cuando dichas prácticas contemplan el uso de la tecnología. Aún se deberán realizar varios estudios para aproximarnos a dar respuesta a los aspectos que se acaban de comentar.

Otro estudio que abre interesantes líneas de investigación, es el trabajo de Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2016), el que realiza otro estudio de vinculación de teorías, entre la teoría conocida por sus siglas en inglés como APOS y el EOS. Este estudio muestra complementariedades entre ambas perspectivas teóricas, las cuales dan pautas para la realización de análisis más detallados, atendiendo a la naturaleza de los objetos matemáticos, que permiten entender los procesos de enseñanza y sobre todo de aprendizaje de las nociones matemáticas (concretamente los autores se centran en los ‘esquemas’ de la derivada). Este tipo de estudios permite tener un panorama más amplio de lo que sucede con la comprensión sobre un objeto matemático de, por ejemplo, los estudiantes de una clase, lo cual le da cierto “plus” por sobre los estudios cognitivos de tipo “microscópicos” que son habituales en las investigaciones del grupo EOS (ver por ejemplo, las conclusiones de Pino-Fan, 2014; y los trabajos de Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval, 2017).

3. Consideraciones finales

En este trabajo se ha presentado un pequeño recorrido por las investigaciones que han desarrollado los miembros de la comunidad de investigación del EOS sobre Didáctica del Cálculo. Al mismo tiempo se han presentado, y clarificado algunos aspectos, de las herramientas analíticas del EOS, que frecuentemente son utilizadas para, y que han permitido, el desarrollo de tales investigaciones. Por supuesto, la limitación de espacio en este documento es un factor que nos hizo “resumir” los desarrollos que se vienen dando desde 1994 (año del planteamiento del EOS) respecto del tema de nuestro interés. Así, desde luego, la intención aquí no ha sido el presentar de manera exhaustiva todas

las investigaciones sobre didáctica del Cálculo, ni todas las herramientas teórico-metodológicas del EOS que se podrían utilizar para el desarrollo de nuevas investigaciones. Por ejemplo, trabajos como el de Soto (2014), en el cual se estudia el acoplamiento entre los significados institucionales de referencia, los significados efectivamente implementados por los docentes, los significados evaluados y los que efectivamente logran los estudiantes sobre un objeto matemático (en dicho trabajo se aborda la integral definida), he tenido que dejarlos para un trabajo posterior.

En lugar de ello se optó por brindar un panorama de la situación actual de la investigación sobre didáctica del Cálculo, para lo cual se seleccionaron las investigaciones que, desde mi punto de vista, han sido más representativas por el tipo de aportes que han realizado.

Como parte de la discusión, fue posible identificar y dar a conocer algunas líneas abiertas de investigación que podrían reorientar el centro de atención de las investigaciones futuras al seno de nuestra comunidad EOS. Otra línea de acción que se ha venido trabajando fuertemente desde el 2009, y que no ha podido ser tratada aquí por razones de espacio, está relacionada con el tipo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas que requiere el profesorado para la gestión de los aprendizajes de sus estudiantes sobre las nociones del Cálculo (e.g., Amaya, 2016; Branchetti, 2016; Pino-Fan, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, *en prensa*), y aunque hay muchos desarrollos al respecto, aún falta mucho por hacer. Por ejemplo, la relación entre los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, y los aspectos señalados como líneas abiertas de investigación en las secciones 2.1, 2.2, 2.3, es algo que debería ser explorado.

Por último, debo señalar que más investigaciones sobre didáctica del cálculo en donde se ponen en uso las nociones teórico-metodológicas del EOS, pueden encontrarse en el trabajo de Badillo, Trigueros y Font (2015).

Reconocimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación sobre formación de profesores y didáctica del cálculo, FONDECYT N°11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile.

Referencias

- Amaya, T. R. (2016). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia, España. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_TAmaya.pdf
- Amaya, T., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamerica.
- Artigue, M., Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on*

- Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- Badillo, E., Trigueros, M. y Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. En C. Azcárate, M. Camacho-machín, M^a T. González y M. Moreno (Coords.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31-51). La Laguna: Universidad de la Laguna.
- Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.
- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61 - 81). Dordrecht: Kluwer.
- Branchetti, L. (2016). *Teaching real numbers in the high school: an onto-semiotic approach to the investigation and evaluation of the teachers' declared choices*. Doctoral dissertation. Università degli studi di Palermo, Italy. Available from, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/tesis_Branchetti.pdf
- Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (en prensa). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education*.
- Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education*, 16, 324-336.
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R.(2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367 - 384.
- Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio de cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Disponible en, <http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis doctorales/Edson Crisostomo tesis.pdf>
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. y Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to Functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-1267.
- Drijvers, P. Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and ontosemiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49.
- Eco, U. (1976). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.
- Font, V. (1999). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. Disponible en, <http://www.tdx.cat/handle/10803/1315>
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational*

- Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122.
- García, M. (2008). *Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_MGarcia_2008.pdf
- García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(5), 1023-1045.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados semióticos. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265.
- Gordillo, W. (2015). *Análisis de la comprensión sobre la noción antiderivada de estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Los Lagos, Chile. Disponible en, <https://db.tt/JSH44IA8>
- Gordillo, W. y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *BOLEMA*, 30(55), 535-558.
- Grijalva, A. (2008). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función*. Tesis doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-CICATA, México.
- Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México.
- Hjelmslev, L. (1943). *Prolegomena to a theory of language*. Madison WI: University of Wisconsin Press.
- Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 533-548.
- Medrano, I., y Pino-Fan, L. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education*, 5(3), 287-323.
- Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 139-160.

- Ordoñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén.
- Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. Tesis de magíster. Universidad de Los Lagos. Disponible en, https://dl.dropboxusercontent.com/u/3280703/TESIS%20MAG%C3%8DSTER_Y_OCELYN%20PARRA.pdf
- Peirce, C.S. (1978). *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge MA: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 123–150.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2013a). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). *REVEMAT*, 8, Ed. Especial (dez.), 1–47.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2013b). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT*, 8(2), 1 – 49.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*, 29(51), 60–89.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Online first. doi: 10.1007/s10857-016-9349-8
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V. y Duval, R. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Hobart, Australia: PME.
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V. y Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA*, 11(2), 97-124.
- Presmeg, N. (2014). Semiotics in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 538-542). London, UK: Springer.
- Ramos, A. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales: El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Disponible en, <http://hdl.handle.net/10803/1313>
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24, 85 – 98.

- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3), 285-311.
- Soto, E. (2014). *Significados institucionales y personales del concepto de integral definida de funciones de una variable en una Institución Educativa de Nivel Superior*. Tesis doctoral. Tecnológico de Monterrey, México. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Efra%C3%ADn_Soto_Apolinar.pdf