

# Significado personal de la simulación de un experimento aleatorio en futuros profesores de Educación Primaria

## Personal meaning of simulating a random experiment for prospective Primary Education teachers

Rafael Parraguez, Carmen Batanero y María M. Gea

Universidad de Granada

### Resumen

Los profesores de Educación Primaria deben enseñar la probabilidad bajo diferentes enfoques, en particular el frecuentista, basado en experimentos donde se recogen y analizan datos y se puede apoyar en el uso de la simulación. En este trabajo analizamos las respuestas de 60 futuros profesores de Educación Primaria de España a la pregunta ¿Qué es para ti la simulación de un experimento aleatorio? para analizar el significado personal que asignan a la simulación. Los resultados muestran que pocos futuros profesores comprenden el hecho de que en la simulación se sustituye un experimento por otro, mientras la mayoría confunde experimentación y simulación.

**Palabras clave:** Probabilidad, significado frecuentista, simulación, experimento aleatorio, futuros profesores.

### Abstract

Primary school teachers should teach probability with different approaches, in particular with the frequentist view, which can be supported in the use of simulators and is based on experiments, where data are collected and analysed. To evaluate the personal meaning assigned to the theme, in this paper we analyse the responses given by 60 prospective Primary Education teachers in Spain to the question: What is for you the simulation of a random experiment? The results show that few prospective teachers understand that in the simulation an experiment is replaced by another, while most of them confuse the experiment and the simulation.

**Keywords:** Probability, frequentist meaning, simulation, random experiment, prospective teachers.

## 1. Introducción

En las actuales directrices curriculares españolas de Educación Primaria, establecidas por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD, 2014), observamos un contenido menos detallado sobre la probabilidad que en el anterior currículo del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2006). Sin embargo, este contenido se amplía mucho más en los criterios de evaluación, donde se observa una tendencia preferente al significado frecuentista, basado en la experimentación y análisis de datos. Para seguir esta propuesta, los profesores pueden realizar en clase diferentes simulaciones, así como experimentos con material manipulativo (datos, monedas o extracción de bolas en urnas). Las simulaciones también se pueden llevar a cabo utilizando la hoja Excel y algunos applets disponibles en Internet (Batanero, 1998), y es importante que los futuros profesores comprendan el alcance y limitaciones de la simulación. Será, entonces, necesario proporcionar una formación adecuada a los futuros profesores, teniendo en cuenta las características específicas del significado frecuentista de la probabilidad y sus aspectos didácticos.

---

Parraguez, R., Batanero, C. y Gea, M. M. (2017). Significado personal de la simulación de un experimento aleatorio en futuros profesores de educación primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html)

Motivados por esta problemática, en este trabajo analizamos las respuestas de futuros profesores de Educación Primaria en España a una pregunta en que se les pide definir la simulación a una muestra de 60 participantes, de los cuales, 20 trabajaron individualmente y el resto en parejas. Dicha pregunta se ha incluido en una actividad que se ha tomado de un trabajo previo de Rivas y Godino (2015), completando su análisis ya que no consideraron esta pregunta sobre simulación.

## **2. Fundamentos**

### **2.1. Simulación**

La idea de simulación consiste en sustituir un experimento aleatorio por otro isomorfo y más sencillo de realizar, de modo que los resultados del segundo experimento puedan utilizarse para sacar conclusiones del primero (Batanero, 2003). En la ciencia es un método usado para estudiar las relaciones matemáticas y lógicas que describen el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real, como por ejemplo, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos, a través de largos periodos de tiempo.

La simulación tiene, según Fernandes, Batanero, Contreras y Díaz (2009), un papel muy importante en la enseñanza, pues sirve como puente entre la realidad que se quiere estudiar y el modelo matemático (la probabilidad) que se utiliza para su estudio. Por ejemplo, si queremos estudiar el sexo en una muestra de 100 recién nacidos, desde el punto de vista práctico es difícil de conseguir, pero se puede simular la situación anterior lanzando 100 monedas donde, por ejemplo, la cara represente nacer niña y la cruz nacer niño. Repitiendo muchas veces el lanzamiento se puede estudiar la distribución del número de niños y niñas en cada 100 nacimientos. Igualmente, se puede simular la situación en un ordenador usando números aleatorios (0 o 1) o bien algún applets en Internet que simule directamente el experimento.

En este sentido, la simulación (con monedas reales o en el ordenador) es un puente entre la realidad (los nacimientos reales que no podemos estudiar directamente) y el modelo matemático (en este caso, sería la distribución binomial). El modelo matemático es muy complejo para el futuro profesor; pero mediante la simulación podemos obtener algunas conclusiones sobre la situación real (Borovnick, 2014).

### **2.2. Marco Teórico**

En nuestro trabajo utilizamos elementos del Enfoque Onto-semiótico sobre el Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002; 2003; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007); en concreto, nos interesamos por los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos. Dicho enfoque asume que el conocimiento matemático surge de las prácticas realizadas por personas o en instituciones para resolver problemas de matemáticas (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). Puesto que, en el caso de la probabilidad, tanto los problemas como las prácticas asociadas a sus distintos enfoques son diferentes, nos permite considerarlos como significados parciales del objeto matemático probabilidad (Batanero y Díaz, 2007).

Nuestro objeto de estudio es el conocimiento personal sobre la simulación de un experimento aleatorio en un grupo de futuros profesores, que no se puede observar

directamente, por lo que analizamos su *significado personal*, en el que se distinguen los siguientes tipos:

- *Significado global*: es el sistema de prácticas que un sujeto puede realizar, respecto a un determinado objeto matemático.
- *Significado declarado*: es el sistema de prácticas que un sujeto pone de manifiesto en una evaluación. En nuestro caso, se deduce de las definiciones de la simulación que los futuros profesores realizan.
- *Significado logrado*: es el sistema de prácticas que el sujeto pone de manifiesto y se consideran correctas por la institución. En nuestro caso, los futuros profesores deberían ser capaces de identificar las características de la simulación de un experimento aleatorio, descritas en Batanero (2003). En concreto, nos interesamos por los significados declarados y logrados de los participantes en la tarea propuesta.

El análisis del conocimiento sobre la simulación de los futuros profesores formaría parte del estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor (CDM) (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino y Font, 2013), modelo que integra, organiza y extiende los de Shulman (1986, 1987) y Ball y cols. (Ball y Bass, 2009; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008). El conocimiento sobre la simulación sería parte del conocimiento ampliado de un futuro profesor, pues va más allá de lo que se ha de explicar, al mismo tiempo que sería parte del conocimiento especializado, pues se debe usar la simulación en la enseñanza.

### 3. Antecedentes

Las investigaciones previas sobre experiencias de simulación de un experimento aleatorio de profesores de Educación Primaria, en formación y en ejercicio, advierten la presencia de sesgos probabilísticos que puede deberse a que la probabilidad se ha incluido recientemente en el currículo escolar, por lo que hasta ahora no se consideraba necesario formar a los profesores en este tema. A continuación, describimos los resultados más destacados de las investigaciones consultadas sobre esta temática.

Dugdale (2001) estudió el conocimiento didáctico de un grupo de 16 profesores de Educación Primaria en formación en Estados Unidos sobre la simulación. Los resultados mostraron las ventajas de enseñar a los profesores a simular un juego conocido con probabilidades alteradas, pues promueve el debate y la comprensión de la probabilidad, contrastando las frecuencias relativas generadas en la simulación por ordenador con las probabilidades teóricas y razonando sobre los resultados.

Batanero, Cañizares y Godino (2005) estudiaron la influencia de actividades de simulación sobre el conocimiento común de la probabilidad en 132 futuros profesores españoles de Educación Primaria. En las respuestas al cuestionario propuesto, los autores observaron la heurística de la representatividad, cuando los participantes mostraban una confianza indebida en su percepción sobre la frecuencia relativa (Batanero, 2001); el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), consistente en suponer todos los sucesos aleatorios como equiprobables; y el enfoque en el resultado, al interpretar cada una de las repeticiones de un experimento como si estuviesen aisladas (23% de futuros profesores). Estos sesgos disminuyen bastante después de realizar actividades de simulación, en que los futuros profesores interaccionan directamente con el problema, principalmente haciendo uso de la tecnología.

Contreras (2011) analizó una experiencia de formación en una muestra constituida por 79 profesores en formación y 87 en ejercicio, de España, México y Portugal. Aplicó una situación didáctica basada en un juego paradójico, pero sencillo, combinando la simulación de la situación con material manipulativo, la recogida de datos, discusión de los participantes sobre las diferentes estrategias utilizadas y finalmente, la demostración matemática de la estrategia considerada correcta por los participantes. Los resultados de este estudio mostraron la existencia de sesgos iniciales, como la equiprobabilidad en aproximadamente el 67% de los participantes. Sin embargo, cerca del 50% de los que lo mostraron reconocen y superan dichos sesgos tras la instrucción impartida.

#### 4. Método

Nuestro trabajo trata de completar investigaciones previas en cuanto al significado personal que un grupo de futuros profesores de Educación Primaria en España poseen sobre la simulación. El estudio se aplicó en la asignatura *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria*, del segundo año del grado de maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada, y cuya muestra estuvo compuesta por 60 futuros profesores, de los cuales 20 realizaron la actividad en forma individual y 40 en parejas.

La actividad fue parte de la práctica sobre probabilidad, en la que los futuros profesores realizaron en clase diferentes simulaciones, así como experimentos con material manipulativo como dados, monedas o extracción de bolas en urnas. Las simulaciones también se habían realizado utilizando la hoja Excel y algunos applets disponibles en Internet. En concreto, se habían simulado el nacimiento de niños y niñas, el muestreo por el método de captura-recaptura y la extracción de bolas en urnas. Intuitivamente, se les había expuesto la diferencia entre experimentación y simulación.

Tabla 1. Objetos matemáticos implícitos en la idea de simulación.

Objetos matemáticos involucrados	
Lenguaje	Términos: simular, experimento, aleatorio.
Conceptos	Aleatoriedad, experimento aleatorio, probabilidad, suceso, espacio muestral, isomorfismo, resultado, repetición del experimento, frecuencia relativa, estimación frecuencial.
Propiedades	Equivalencia de experimentos, convergencia.
Procedimientos	Sustitución de un experimento por otro, puesta en correspondencia de sucesos en los dos experimentos, experimentación, recogida y análisis de datos, obtención de conclusiones.
Argumentos	Reflexión sobre las proposiciones que llevan a la obtención de conclusiones sobre un experimento aleatorio a partir de la simulación.

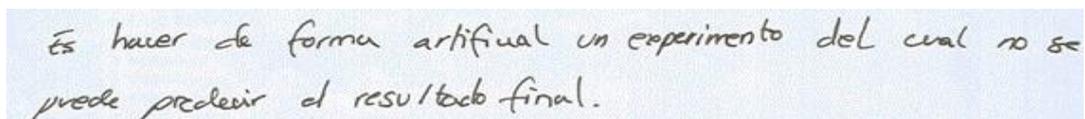
La tarea fue tomada de la investigación de Rivas y Godino (2015) y describe una secuencia de enseñanza de la probabilidad, donde una maestra propone a sus alumnos jugar en parejas lanzando dos dados y sumando los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, o 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. Atendiendo a esos resultados, los participantes comparan la probabilidad teórica obtenida con la frecuencia relativa de un juego empírico propuesto también en dicha actividad y se finaliza respondiendo a la pregunta que analizamos en este trabajo: ¿Qué significa para ti “simular un experimento aleatorio”? Para responderla, esperamos que indiquen algunas características de la simulación, aunque también podrían no diferenciar entre simulación y experimentación. Presentamos la Tabla 1 donde se indican los objetos matemáticos implícitos en la idea de simulación.

## 5. Resultados y discusión

A la pregunta ¿Qué significa para ti “simular un experimento aleatorio”?, encontramos diferentes respuestas, que hemos categorizados como mostramos a continuación.

*R1. Reproducir artificialmente un experimento aleatorio.* Estos alumnos han captado la esencia de la simulación, que es sustituir un experimento por otro equivalente, aunque, debido a la falta de competencia de comunicación y argumentación de los participantes, en general, lo describen en forma bastante imprecisa. Un ejemplo de esta categoría de respuesta se muestra en la Figura 1, donde el futuro profesor hace alusión a llevar a cabo el experimento aleatorio de forma artificial, es decir, utilizar algún material o la tecnología.

Aunque no indica explícitamente que el experimento simulado sea diferente al original, con el adjetivo “artificial” implícitamente lo hace, pues indica que se ha manipulado el experimento al no poder predecir el resultado final del experimento original. Sin embargo, no hace referencia explícita a la equivalencia de experimentos o a la convergencia.

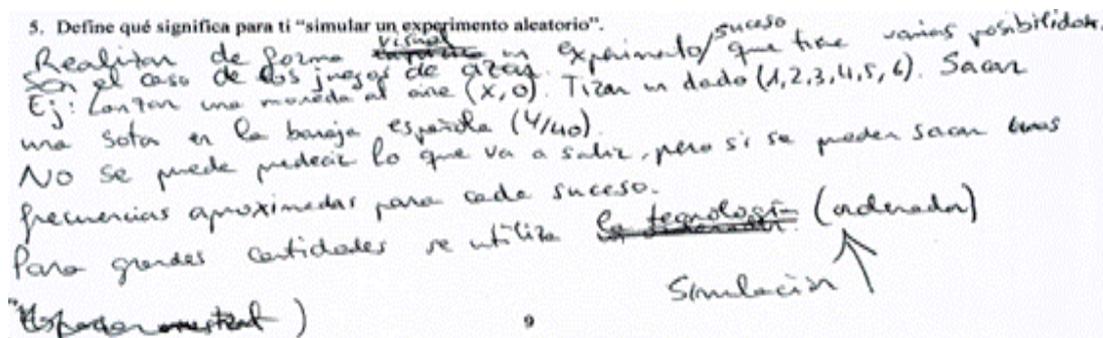


Es hacer de forma artificial un experimento del cual no se puede predecir el resultado final.

Figura 1. Simular es reproducir artificialmente un experimento aleatorio.

*R2. Visualizar un experimento aleatorio.* En este caso, el futuro profesor considera que simular un experimento aleatorio es visualizarlo, utilizando para ello un material concreto (monedas, cartas, dados, etc.), o bien, la tecnología (ordenador). Aunque no indica claramente que se cambia un experimento por otro, el hecho de usar el material o la tecnología implícitamente alude a esta sustitución.

Un ejemplo de esta categoría se observa en la Figura 2, en la que se considera que simular un experimento aleatorio es realizarlo de forma visual, apoyado en el material manipulativo si el número de repeticiones es pequeño, o en la tecnología, para un número grande. Al existir varias posibilidades, este experimento se puede realizar de forma concreta utilizando monedas, lanzando dados, o bien, sacando una carta de una baraja española; y aunque sus resultados no son predecibles, sí se pueden obtener frecuencias aproximadas para cada suceso, por tanto, alude a la convergencia.



5. Define qué significa para ti “simular un experimento aleatorio”.  
 Realizar de forma <sup>visual</sup> un experimento/suceso que tiene varias posibilidades.  
 En el caso de los juegos de azar.  
 Ej: Lanzar una moneda al aire (x, o). Tirar un dado (1, 2, 3, 4, 5, 6). Sacar una carta en la baraja española (4/40).  
 No se puede predecir lo que va a salir, pero sí se pueden sacar unas frecuencias aproximadas para cada suceso.  
 Para grandes cantidades se utiliza ~~la tecnología~~ (ordenador) <sup>tecnología</sup> (ordenador).  
 (Experimento)

Figura 2. Simular es visualizar un experimento aleatorio.

*R3. Estimación de las probabilidades en un experimento aleatorio.* En este caso, el participante considera que simular un experimento aleatorio es reproducirlo para estimar las probabilidades de algunos sucesos de dicho experimento. En esta respuesta ya no

hay alusión al cambio de un experimento por otro, por tanto, hay una confusión entre experimentación y simulación. El futuro profesor asume que siempre que se aplica el enfoque frecuencial de la probabilidad hay una simulación.

Un ejemplo se muestra en la Figura 3, donde el participante considera que simular un experimento aleatorio es simplemente llevarlo a cabo. Otro error en su respuesta es que indica que simular permite estimar la probabilidad a partir de pocos datos, es decir, no comprende la convergencia, mostrando el sesgo de representatividad. Añade otras características no relevantes de la simulación como la alternancia de resultados (rachas) o su diferencia con un experimento determinista.

Para mí, simular un experimento aleatorio, es ~~estimar~~ estimar con pocos datos un caso y los sucesos posibles así como probables y no probables que ~~se~~ pueden ocurrir en tal experimento. Al ser aleatorio, hay más probabilidad de cambio y que no sea un experimento cerrado o estático.

Figura 3. Simular es estimar probabilidades en un experimento aleatorio.

*R4. Repetición de un experimento aleatorio.* Para la mayoría de futuros profesores, simular un experimento aleatorio consiste en repetir una gran cantidad de veces dicho experimento. La finalidad sería recoger datos para estimar la probabilidad de uno o varios sucesos a partir de la frecuencia relativa y la estimación sería tanto mejor cuanto mayor sea el número de repeticiones. En esta respuesta no aparece la principal característica de la simulación que es sustituir un experimento por otro, pero al menos se observa una buena comprensión de la aproximación frecuencial a la probabilidad.

Un ejemplo de esta respuesta se presenta la Figura 4, en la que se indica con claridad que simular un experimento aleatorio es realizar dicho experimento un número determinado de veces. También se alude a la necesidad de recoger, de manera ordenada, los datos para estimar su probabilidad. El futuro profesor llama a la frecuencia “probabilidad empírica del experimento”, lo cual es incorrecto, pues confunde frecuencia y probabilidad. No obstante, sí es consciente de que cuantas más veces se realice dicho experimento, mayor será el parecido entre las probabilidades teóricas y las frecuencias empíricas, es decir, aprecia la convergencia.

Simular un experimento aleatorio es realizar el experimento un número determinado de veces recogiendo los datos de manera ordenada para obtener las probabilidades empíricas de cada uno de los resultados del experimento. Cuanto mayor sea el número, mayor será el parecido entre probabilidad empírica y teórica.

Figura 4. Identificación de simulación y enfoque frecuencial

*R5. Confusión de simulación y experimento aleatorio.* En este caso, el futuro profesor considera que simular un experimento aleatorio es, solamente, llevarlo a cabo. Un ejemplo se observa en la Figura 5, en la que el futuro profesor presenta varios ejemplos de experimentos aleatorios para reforzar su definición, y en la que no aparece la sustitución de un experimento por otro.

Es un experimento que principalmente depende del azar.  
 Ejemplos de simular experimentos aleatorios son: lanzar dos  
 dados, con los resultados previamente asignados a dos jugadores  
 y ver quién de los dos ha ganado; lanzar una moneda y ver  
 cuántas veces sale cara o cruz; lanzar una ruleta que  
 está dividida en dos colores y ver el papel que sale; tirar  
 chinchetas y observar cuántas caen con la punta hacia arriba  
 o hacia abajo.

Figura 5. Respuesta que muestra confusión entre simulación y experimento aleatorio.

*R6. Realizar pruebas.* En este caso, el futuro profesor considera que simular un experimento aleatorio es realizar pruebas o ensayos para que, de esta forma, se pueda calcular la probabilidad teórica o la estimación empírica. Las respuestas muestran un conocimiento sobre simulación más limitado que en la categoría R4 “repetición de un experimento aleatorio.”

Un ejemplo de esta categoría de respuesta lo podemos observar en la Figura 6, en la que un futuro profesor considera que simular un experimento aleatorio es realizar pruebas para poder demostrar algo, pero sin llegar a que sea exacto.

Realizar pruebas para poder demostrar luego algo, pero sin llegar a que sea exacto.

Figura 6. Respuesta relacionada con realizar pruebas de un experimento aleatorio.

*R7. No contesta la pregunta.* Sólo un futuro profesor no responde a esta pregunta, aludiendo que no la comprende.

Tabla 2. Respuestas de los futuros profesores a la pregunta qué es para ti simular un experimento aleatorio.

Respuesta	Individual	Parejas	Total futuros profesores
R1. Reproducir artificialmente un experimento aleatorio	1	2	5
R2. Visualización de un experimento aleatorio	6	1	8
R3. Estimación de probabilidades en un experimento aleatorio	1	1	3
R4. Repetición de un experimento aleatorio	8	10	28
R5. Confunde simulación y experimento aleatorio	1	5	11
R6. Realización de pruebas.	2	1	4
R7. No responde	1	0	1

Como hemos observado, en las dos primeras categorías de respuesta aparece la idea de sustituir el experimento y en las cuatro últimas los alumnos no son conscientes de dicha sustitución. En la Tabla 2 presentamos los resultados a esta pregunta, donde sólo 13 futuros profesores (siete trabajando individualmente y tres en parejas) comprenden el hecho de que en la simulación se sustituye un experimento por otro, al menos implícitamente, mientras el resto confunde experimentación y simulación.

Los futuros profesores responden a la tarea utilizando principalmente lenguaje verbal y algunos símbolos matemáticos, como se mostró en la Figura 2. Solo un futuro profesor no responde a nuestra pregunta de análisis.

## 6. Conclusiones

En este estudio hemos observado que la gran mayoría de los participantes (78% aproximadamente) confunde experimentación y simulación, por lo que muy pocos (el 22% aproximadamente) comprenden el hecho de que en la simulación se reemplaza un experimento aleatorio por otro similar y más sencillo, con el fin de que los resultados del segundo experimento puedan utilizarse para obtener conclusiones del primero (Batanero, 2003). Además, se aprecian conflictos semióticos en los futuros profesores como confusión de frecuencia y probabilidad o el sesgo de representatividad. Al contrario que en otras tareas planteadas en la misma práctica (Parraguez, 2016), no hubo mucha diferencia de resultados en los alumnos que trabajaron individualmente, frente a los que lo hicieron en parejas.

Coincidimos con Dugdale (2001) y Batanero, Cañizares y Godino (2005) en la ventaja de usar la simulación con los profesores, para superar algunos sesgos de razonamiento probabilístico, como los que se manifiestan en este trabajo.

Por otra parte, es necesario y útil formarles en las características y usos didácticos de la simulación, ya que han de enseñar la probabilidad bajo el enfoque frecuencial en la Educación Primaria, donde la simulación es fundamental para que los alumnos comprendan mejor dicho enfoque. La simulación permitiría también aplicar sistemáticamente actividades como las descritas por Batanero, Godino y Roa (2004), que permiten, a través de situaciones problemáticas paradójicas y la reflexión sobre su contenido, la identificación de dificultades en el aprendizaje de un concepto dado y la mejora de las intuiciones de los participantes.

**Reconocimientos:** Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

## Referencias

- Ball, D. L. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Alemania.
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C. (1998). Recursos para la educación estadística en Internet. *Uno* 15, 13-26
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía*, 35, 37-64.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegem y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). New York, NY: Springer.
- Batanero, C., Cañizares, M. J. y Godino, J.D. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African*

- Regional Conference*. [CD-ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. Disponible en, [www.amstat.org/publications/jse/](http://www.amstat.org/publications/jse/)
- Borovcnik, M. (2014). Modelling and experiments – An interactive approach towards stochasticity. En T. Wassong, D. Frischemeier, P. Fischer, R. Hochmuth, y P. Bender (Eds.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen. Using tools for learning mathematics and statistics* (pp. 267-281). Berlin: Springer.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools*, 17(1/2), 173-182.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, 18(1-2), 161-183.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557-568.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Parraguez, R. (2016). *Relación entre los significados clásico y frecuencial de la probabilidad: un estudio con futuros profesores*. Trabajo de Máster. Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L. Godino, J. D. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1), *REVEMAT*, 8(2), 1-49;
- Rivas, H. y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López-Martín (Eds.), *Didáctica de la*

*Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 339-346). Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Shulman, L. S. (1986). Paradigm and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York, NY: Macmillan.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.