Análisis Ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función

Onto-semiotic analysis of Chilean textbooks: the case of the function concept

Yocelyn Parra Urrea[1] y Luis Pino-Fan[2]

[1]Universidad San Sebastián, [2]Universidad de Los Lagos

Resumen

En esta investigación identificamos los significados pretendidos por los textos escolares chilenos sobre la noción de función comparándolo con el significado holístico de referencia. La revisión de los libros de texto se hace debido a la importancia que estos adquieren para los profesores en la implementación de sus clases. Para llevar a cabo este estudio reconstruimos el significado holístico de referencia mediante una revisión de tipo histórico-epistemológico y determinamos los significados pretendidos por los textos escolares sobre la noción de función. El análisis se sustentó en las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Este estudio permitirá tomar conciencia de la representatividad de los significados pretendidos por los libros de texto respecto del significado holístico de referencia del objeto matemático función.

Palabras clave: función, libros de texto, enfoque ontosemiótico

Abstract

In this research we identify the meanings intended by some Chilean school textbookss on the function concept with regards to the reference holistic meaning. The analysis of textbooks is carried out due to the importance they acquire for teachers in the implementation of their teaching. We reconstruct the reference holistic meaning through a historical-epistemological review and determine the meanings intended by school textbooks on the function concept. The analysis was based on the onto-semiotic approach of mathematical knowledge and instruction theoretical tools. This study will make possible to become aware of the representativeness of the meanings intended by textbooks regarding the reference holistic meaning of the mathematical object function.

Keywords: function, textbooks, onto-semiotic approach.

1. Introducción

La noción de función, ha sido objeto de especial atención en distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva. Artigue (1995) establece que una de las principales dificultades cognitivas presentes en los estudiantes se debe a los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impide al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro. Así mismo, Kaldrimidou y Ikonomou, (1998) y Gagatsis y Shiakalli, (2004) explicitan que cada una de las distintas representaciones de la función determina un aspecto diferente de la noción matemática y todas estas juntas contribuyen a una representación holística de la misma, ninguna de ellas por separado puede describir la noción global de la función.

Otro tipo de cuestiones son las relacionadas a los procesos instruccionales. Ruiz (1998) explicita que los procesos de enseñanza no promueven el estudio y análisis de la

Parra-Urrea, Y. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis Ontosemiótico de los libros de texto chilenos: el caso de la noción de función. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la noción de función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Además, la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Esta concepción limitada de la función, influencia el pensamiento y comprensión de los estudiantes.

En Chile el trabajo con funciones es tratado desde un punto de vista estrictamente formal, generando una serie de obstáculos en la aprehensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena, 2001). La presencia y estatus del objeto función dentro del currículo chileno conduce la atención hacia el análisis de programas de estudio y libros de texto. Cooney (1985) reveló en su estudio que los libros de texto son la influencia primaria para las concepciones curriculares de los profesores, así como para su estilo de instrucción matemática. En este mismo sentido, Martínez Bonafé (2008) y González y Sierra (2004) señalan que el libro de texto es un recurso material utilizado habitualmente para organizar el trabajo en el aula, en el que se apoyan los estudiantes y profesores como guía en los procesos de enseñanza aprendizaje. El análisis de los libros de texto supone hacer hincapié en la estructura profunda de los mismos. Esta está compuesta por la organización textual, trama conceptual y orientaciones para la construcción de significados (Rinaudo y Galvalisi, 2002 citado en López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015).

Este estudio es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo fue "*Evaluar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia de dicha noción"* (Parra y Pino, 2016). Así, el propósito de esta comunicación es evidenciar cómo el uso de la metodología para el análisis de textos y programas de estudios propuesta por Pino, Godino, Castro y Font (2013), permite identificar los significados pretendidos por los libros de texto chilenos sobre la noción de función. Para la consecución de nuestro objetivo, este estudio se estructuró en tres fases. En la primera de ellas hemos determinado el significado holístico de referencia de la noción de función a partir del estudio histórico-epistemológico. Posteriormente hemos determinado el significado pretendido por los libros de texto propuestos por el Ministerio de Educación chileno sobre la noción de función. Y finalmente hemos contrastado los significados institucionales pretendidos por los libros de texto respecto del significado holístico de referencia.

2. Marco Teórico

El marco teórico que utilizamos en esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). Dicho marco teórico nos permitió, a través de sus herramientas teóricas, realizar un análisis detallado de los significados de la noción de función pretendidos por los libros de texto propuestos por el Ministerio de Educación chileno.

Dentro del EOS, la noción de *sistema de prácticas* es fundamental desde un punto de vista epistemológico y didáctico. Godino y Batanero (1994) entienden por sistema de prácticas a *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas"* (p. 334). Estas prácticas pueden ser desarrolladas por una persona o compartidas por una institución. Según Font, Godino y Gallardo (2013), "*las* *prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los libros de texto son leídos y producidos, y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas"* (p. 104).

En el EOS se considera a los *objetos matemáticos* como entidades intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). Para analizar y determinar los significados pretendidos por los libros de texto hemos utilizado la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007, p.7): *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos); *Situaciones-Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios); *Conceptos/Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada); *Proposiciones/Propiedades* (enunciados sobre conceptos); *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo); *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo). Estos seis tipos de objetos matemáticos, conforman lo que denominaremos configuración ontosemiótica, la cual puede ser de carácter cognitiva (configuración cognitiva) si se tratan de los objetos matemáticos primarios que moviliza un sujeto como parte de su práctica matemática desarrollada a propósito de la solución de un problema, o de tipo epistémica (configuración epistémica) si se trata de los objetos matemáticos institucionales. En este trabajo utilizamos la noción de configuración epistémica, puesto que estamos interesados en determinar los significados pretendidos por los libros de texto chilenos, sobre la noción de función (Pino-Fan, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

3. Metodología

Esta investigación es de tipo cualitativo (Rodríguez y Valldeoriola, 2009) puesto que estamos interesados en caracterizar las *configuraciones ontosemióticas* asociadas a las prácticas matemáticas sobre funciones propuestas en el libro de texto de primer año medio del sistema de enseñanza Chileno. Para lograr los objetivos de esta investigación propusimos las siguientes tres fases: 1) *Determinación del significado holístico de referencia de la noción de función*. A partir de un estudio histórico-epistemológico, se identificaron seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia, a saber: la función como correspondencia; como relación entre variables; como expresión gráfica; como expresión analítica; como correspondencia arbitraria; y desde la teoría de conjuntos (Parra y Pino, 2016); 2) *La determinación del significado pretendido por el libro de texto chileno*, para lo cual adoptamos la metodología propuesta por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), la cual establece cuatro criterios para la caracterización de los significados: representatividad de los campos de problemas propuestos; tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas; representatividad de los elementos regulativos y argumentativos; y *representatividad de los significados pretendidos por el libro de texto respecto del significado global de referencia.* Este último criterio se corresponde con la tercera fase de nuestro estudio.

4. Análisis Ontosemiótico del libro de texto de Primero Medio propuesto por el Ministerio de Educación de Chile

El análisis ontosemiótico de los libros de texto propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, se realizó como parte de una investigación más amplia (Parra y Pino 2016). En esta comunicación, debido a la extensión permitida, solo se presentará el análisis detallado del texto escolar de primer año medio.

4.1. Análisis epistémico del libro de texto de primer año medio

El libro de texto sugerido por el MINEDUC para primer año Medio (Elgueta, Muñoz y Santis, 2014), presenta el estudio de las funciones en la Unidad 2 titulada "Álgebra y Funciones". A continuación realizamos el análisis de la tercera parte de la Unidad 2 en la que se contempla la noción de función y se presenta por primera vez la noción de función lineal y función afín, además de la composición de funciones.

4.1.1. Configuración epistémica

El primer elemento de la configuración epistémica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos cuatro tipos de problemas: 1) problemas para reforzar conocimientos previos; 2) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 3) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 4) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos 'adquiridos'. Los *elementos lingüísticos* identificados en las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones/problema, son de tipo verbal, tabular, simbólico, gráfico e icónico. Desde el inicio de la última sección de la Unidad 2, se refuerzan los *conceptos/definiciones* de función, dominio, recorrido, variable dependiente, variable independiente. Posteriormente se introducen definiciones como preimagen, imagen, función lineal, función afín, composición de funciones, entre otros. Por ejemplo, la noción de función es presentada mediante la siguiente definición,

> Una función definida de A en B es una relación tal que a todo elemento x (preimagen) de A le corresponde un único elemento de y (imagen) de B. Se denota $y = f(x)$. En general, a la variable x se le llama independiente y a la variable y, dependiente. El dominio (Dom) de una función es el conjunto formado por las preimágenes o valores de la variable independiente. El recorrido (Rec) de una función es el conjunto formado por las imágenes o valores de la variable dependiente. (Elgueta, et al., 2014, p. 126)

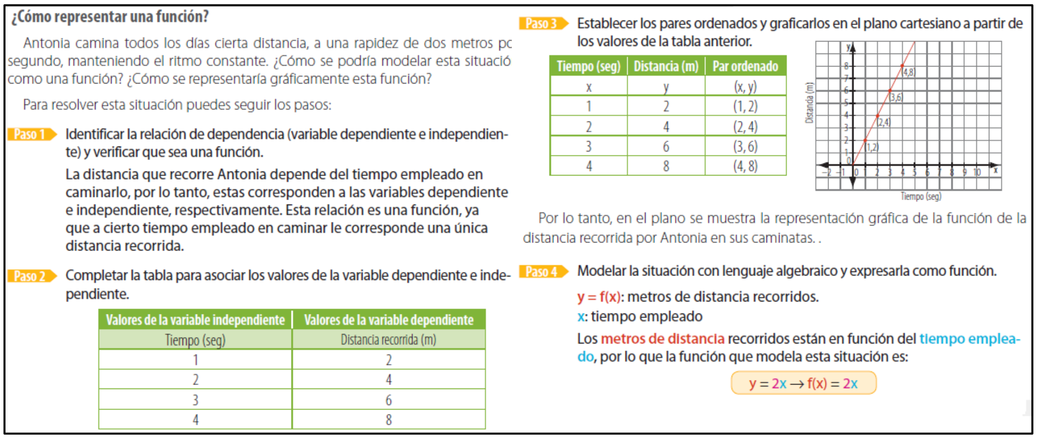
Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito anteriormente), que permite ejemplificar conocimientos previos de la noción de función tales como su definición y algunas de sus representaciones (Figura 1).Este tipo de ejemplos también hacen referencia a *procedimientos* que tienen que ver con las operaciones que los estudiantes deben realizar para modelar una situación, a través de una función, establecer variables dependientes e independientes y asociarlas a partir de tablas, y representar gráficamente las situaciones planteadas.

Por otra parte, algunos de los *conceptos/definiciones* introducidas en este nivel educativo, son los de *función lineal*, *función afín y composición de funciones*. Elgueta, et al., (2014) introducen estos objetos matemáticos, mediante las siguientes definiciones:

> Una función lineal se escribe de la forma $y = f(x) = mx$, siendo las variables x e y directamente proporcionales, con constante de proporcionalidad m. Al graficarla en el plano y unir los puntos, se obtiene una recta que pasa por el origen $(0,0)$ y la constante de proporcionalidad recibe el nombre de pendiente. (p. 135)

Una función de la forma $f(x) = mx + n$ $(m, n \neq 0)$ recibe el nombre de función afín. (p.140)

"*Sean* f *y* g *dos funciones, tal que,* $f: A \longrightarrow B$ *y* $g: B \longrightarrow C$*, entonces la función compuesta* $gof: A \longrightarrow C$ *se define como:* $(gof)(x) = g\big(f(x)\big)$*. También se puede leer "g compuesta con* f". (p. 146)



¿Cómo representar una función?

Antonia camina todos los días cierta distancia, a una rapidez de dos metros pc segundo, manteniendo el ritmo constante. ¿Cómo se podría modelar esta situació como una función? ¿Cómo se representaría gráficamente esta función?

Para resolver esta situación puedes seguir los pasos:

Paso 1 Identificar la relación de dependencia (variable dependiente e independiente) y verificar que sea una función.

La distancia que recorre Antonia depende del tiempo empleado en caminarlo, por lo tanto, estas corresponden a las variables dependiente e independiente, respectivamente. Esta relación es una función, ya que a cierto tiempo empleado en caminar le corresponde una única distancia recorrida.

Paso 2 Completar la tabla para asociar los valores de la variable dependiente e independiente.

Valores de la variable independiente	Valores de la variable dependiente
Tiempo (seg)	Distancia recorrida (m)
1	2
2	4
3	6
4	8

Paso 3 Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano a partir de los valores de la tabla anterior.

Tiempo (seg)	Distancia (m)	Par ordenado
x	y	(x, y)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
4	8	(4, 8)

Por lo tanto, en el plano se muestra la representación gráfica de la función de la distancia recorrida por Antonia en sus caminatas. .

Paso 4 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

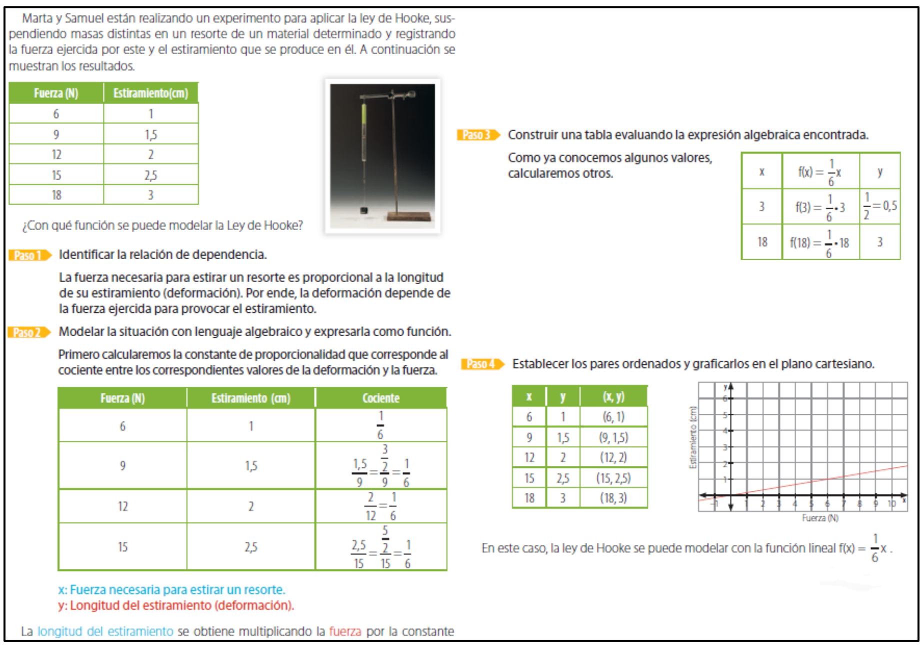
y = f(x): metros de distancia recorridos.
x: tiempo empleado

Los metros de distancia recorridos están en función del tiempo empleado, por lo que la función que modela esta situación es:

$y = 2x \rightarrow f(x) = 2x$

Figura 1. Ejemplo de problema tipo 1 (Elgueta, et al., 2014, p. 127)

Un problema (del tipo 2 descrito anteriormente), que permite ejemplificar la definición introducida de la noción de función lineal, se describe en la Figura 2.



Marta y Samuel están realizando un experimento para aplicar la ley de Hooke, suspendiendo masas distintas en un resorte de un material determinado y registrando la fuerza ejercida por este y el estiramiento que se produce en él. A continuación se muestran los resultados.

Fuerza (N)	Estiramiento(cm)
6	1
9	1,5
12	2
15	2,5
18	3

¿Con qué función se puede modelar la Ley de Hooke?

Paso 1 Identificar la relación de dependencia.

La fuerza necesaria para estirar un resorte es proporcional a la longitud de su estiramiento (deformación). Por ende, la deformación depende de la fuerza ejercida para provocar el estiramiento.

Paso 2 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

Primero calcularemos la constante de proporcionalidad que corresponde al cociente entre los correspondientes valores de la deformación y la fuerza.

Fuerza (N)	Estiramiento (cm)	Cociente
6	1	$\frac{1}{6}$
9	1,5	$\frac{1,5}{9} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{1}{6}$
12	2	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
15	2,5	$\frac{2,5}{15} = \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6}$

x: Fuerza necesaria para estirar un resorte.
y: Longitud del estiramiento (deformación).

La longitud del estiramiento se obtiene multiplicando la fuerza por la constante

Paso 3 Construir una tabla evaluando la expresión algebraica encontrada.

Como ya conocemos algunos valores, calcularemos otros.

x	$f(x) = \frac{1}{6}x$	y
3	$f(3) = \frac{1}{6} \cdot 3$	$\frac{1}{2} = 0,5$
18	$f(18) = \frac{1}{6} \cdot 18$	3

Paso 4 Establecer los pares ordenados y graficarlos en el plano cartesiano.

x	y	(x, y)
6	1	(6, 1)
9	1,5	(9, 1,5)
12	2	(12, 2)
15	2,5	(15, 2,5)
18	3	(18, 3)

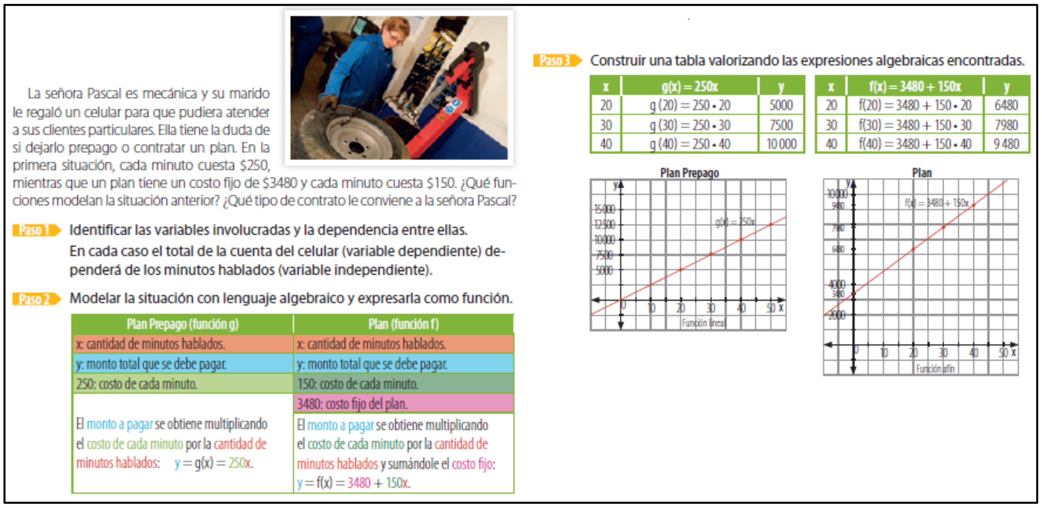
En este caso, la ley de Hooke se puede modelar con la función lineal $f(x) = \frac{1}{6}x$.

Figura 2. Ejemplo de problema tipo 2 (Elgueta, et al., 2014, p. 134)

Otro problema del tipo 2 que permite ejemplificar la definición de la noción de función lineal pero que además conduce a la definición de una función afín es el que se plantea en la Figura 3.

Las *propiedades/proposiciones* identificadas en este nivel escolar son descritas por Elgueta, et al., (2014) de la siguiente manera:

> La composición de funciones lineales cumple con la propiedad de clausura, es decir, si f y g son funciones lineales, se tiene que fog y gof también lo son. Esto no ocurre si f y g son funciones afines. Cabe destacar que la composición de funciones, no cumple con la propiedad conmutativa, es decir, fog ≠ gof para f y g funciones (p. 150).



La señora Pascal es mecánica y su marido le regaló un celular para que pudiera atender a sus clientes particulares. Ella tiene la duda de si dejarlo prepago o contratar un plan. En la primera situación, cada minuto cuesta \$250, mientras que un plan tiene un costo fijo de \$3480 y cada minuto cuesta \$150. ¿Qué funciones modelan la situación anterior? ¿Qué tipo de contrato le conviene a la señora Pascal?

Paso 1 Identificar las variables involucradas y la dependencia entre ellas.
En cada caso el total de la cuenta del celular (variable dependiente) dependerá de los minutos hablados (variable independiente).

Paso 2 Modelar la situación con lenguaje algebraico y expresarla como función.

Plan Prepago (función g)	Plan (función f)
x: cantidad de minutos hablados.	x: cantidad de minutos hablados.
y: monto total que se debe pagar.	y: monto total que se debe pagar.
250: costo de cada minuto.	150: costo de cada minuto.
	3480: costo fijo del plan.
El monto a pagar se obtiene multiplicando el costo de cada minuto por la cantidad de minutos hablados: $y = g(x) = 250x$.	El monto a pagar se obtiene multiplicando el costo de cada minuto por la cantidad de minutos hablados y sumándole el costo fijo: $y = f(x) = 3480 + 150x$.

Paso 3 Construir una tabla valorizando las expresiones algebraicas encontradas.

x	g(x) = 250x	y
20	$g(20) = 250 \cdot 20$	5000
30	$g(30) = 250 \cdot 30$	7500
40	$g(40) = 250 \cdot 40$	10 000

x	f(x) = 3480 + 150x	y
20	$f(20) = 3480 + 150 \cdot 20$	6480
30	$f(30) = 3480 + 150 \cdot 30$	7980
40	$f(40) = 3480 + 150 \cdot 40$	9 480

Figura 3. Ejemplo de problema tipo 2 (Elgueta, et al., 2014, p. 140)

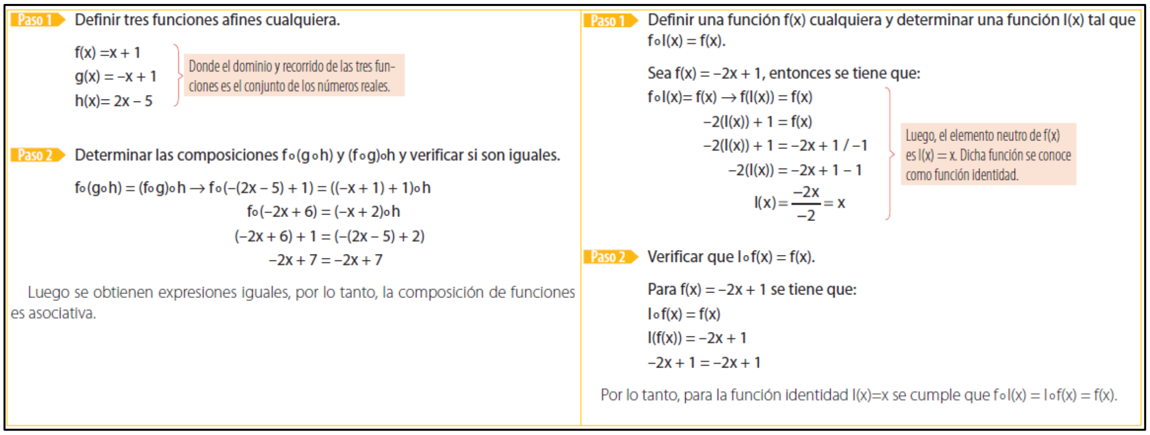
Un problema del tipo 2 que hace referencia a explicaciones demostrativas de ciertas propiedades de la composición de funciones, o bien a *justificaciones/argumentos* se ejemplifica de la siguiente manera:

> Se definen dos funciones afines f(x) = 2x + 3 y g(x) = x + 5, donde el dominio y recorrido de ambas funciones es el conjunto de los números reales. Se determinan las composiciones fog(x) y gof(x). Se obtiene que fog(x) = 2x + 13 y gof(x) = 2x + 8 con ello se justifica tanto la propiedad de clausura en la composición de funciones y además se evidencia que la composición de funciones no cumple con la propiedad conmutativa (Elgueta, et al., 2014, p. 150).

Otro tipo de *propiedades/proposiciones* asociadas a la noción de composición de funciones son definidas por Elgueta, et al., (2014) de la siguiente manera: "*Para las funciones* f, g *y* h, *se cumple lo siguiente: Asociatividad:* $fo(goh) = (fog)oh$; *Elemento neutro:* $I(x) = x$, *tal que* $foI(x) = f(x)$, *donde* $I(x) = x$ *recibe el nombre de función identidad*". (p. 151). Un problema del tipo 2 que hace referencia a explicaciones demostrativas de la propiedad dada, o bien a *justificaciones/argumentos*, se describen en la Figura 4.

4.1.2. Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas

La Tabla 1 resume el tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos (o en las soluciones esperadas, en el caso de los problemas no resueltos).


Paso 1 Definir tres funciones afines cualquiera.

f(x) = x + 1
g(x) = −x + 1
h(x) = 2x − 5

Donde el dominio y recorrido de las tres funciones es el conjunto de los números reales.

Paso 2 Determinar las composiciones $f \circ (g \circ h)$ y $(f \circ g) \circ h$ y verificar si son iguales.

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \rightarrow f \circ (-(2x-5)+1) = ((-x+1)+1) \circ h$
$f \circ (-2x+6) = (-x+2) \circ h$
$(-2x+6)+1 = (-(2x-5)+2)$
$-2x+7 = -2x+7$

Luego se obtienen expresiones iguales, por lo tanto, la composición de funciones es asociativa.

Paso 1 Definir una función f(x) cualquiera y determinar una función I(x) tal que $f \circ I(x) = f(x)$.

Sea $f(x) = -2x + 1$, entonces se tiene que:
$f \circ I(x) = f(x) \rightarrow f(I(x)) = f(x)$
$-2(I(x)) + 1 = f(x)$
$-2(I(x)) + 1 = -2x + 1 \; / -1$
$-2(I(x)) = -2x + 1 - 1$
$I(x) = \frac{-2x}{-2} = x$

Luego, el elemento neutro de f(x) es I(x) = x. Dicha función se conoce como función identidad.

Paso 2 Verificar que $I \circ f(x) = f(x)$.

Para $f(x) = -2x + 1$ se tiene que:
$I \circ f(x) = f(x)$
$I(f(x)) = -2x + 1$
$-2x + 1 = -2x + 1$

Por lo tanto, para la función identidad I(x)=x se cumple que $f \circ I(x) = I \circ f(x) = f(x)$.

Figura 4. Ejemplo de problema tipo 2 (Elgueta, et al., 2014, p. 151)

Tabla 1. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 1° año medio

Representaciones para $f(x)$		Emergentes $f(x)$: Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
Previos $f(x)$	Verbal	•	•	•	•	•
	Gráfica			•		
	Simbólica		•	G•	•	
	Tabular		•	•		
	Icónica					

Como podemos observar en la tabla anterior, en cuanto al tipo de representaciones, encontramos once clases de problemas. La primera, refiere a aquellos problemas para los cuales se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de argumentar y proporcionar una respuesta en registro verbal (e.g., Figura 5).

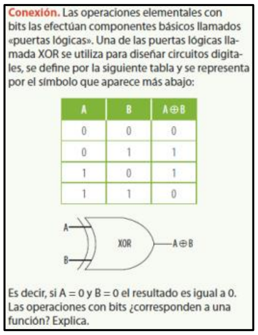


Figura 5. Ejemplo de tarea clase 1: verbal-verbal (Elgueta, et al., 2014, p. 131)

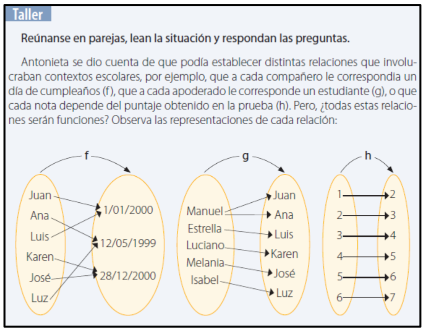


Figura 6. Ejemplo de tarea clase 5: verbal-icónico (Elgueta, et al., 2014, p. 126)

La segunda clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente gráficamente. La tercera clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta simbólica. La cuarta clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación verbal de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de la segunda, tercera y cuarta clase de problemas se representa en la Figura 3. Una quinta clase de problemas refiere a aquellas actividades para las cuales se proporcionan datos verbales de la función, los cuales deberán ser interpretados a través de una representación icónica (e.g., Figura 6). La sexta clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan una representación gráfica de la función, los cuales deberán de examinados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente simbólicamente (Figura 7).

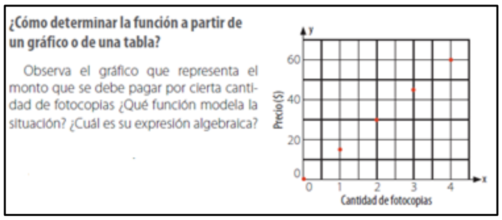


Figura 7. Ejemplo de tarea clase 6: gráfico-simbólico (Elgueta, et al., 2014, p. 128)

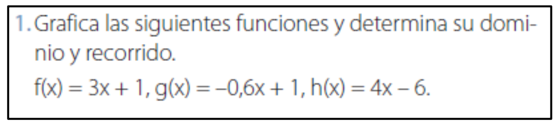

1. Grafica las siguientes funciones y determina su dominio y recorrido.
$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -0{,}6x + 1$, $h(x) = 4x - 6$.

Figura 8. Ejemplo de tarea clase 7: simbólico-grafico (Elgueta, et al., 2014, p. 145)

La séptima clase refiere a aquellos problemas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica**.** La octava clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos simbólicos de la función y se pide una respuesta simbólica, para lo cual el estudiante deberá transitar de lo simbólico a lo gráfico para posteriormente, pasar del registro gráfico al simbólico. Este tránsito de lo simbólico a lo gráfico es representado en la Tabla 1 con la ‘G’ antes del punto (G●). Un ejemplo de esta octava clase de problemas se presenta en la Figura 9.

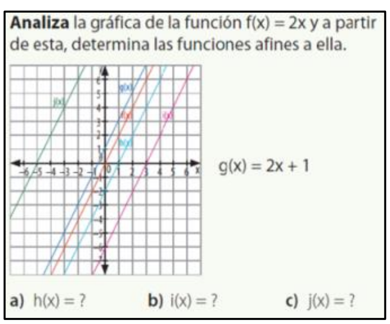
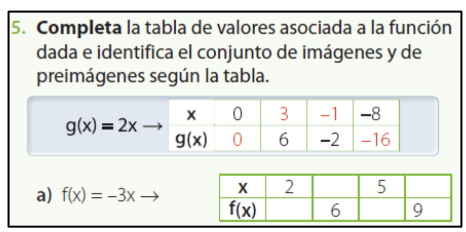


Figura 9. Ejemplo de tarea clase 8: simbólico-simbólico (Elgueta, et al., 2014, p. 143)


5. **Completa** la tabla de valores asociada a la función dada e identifica el conjunto de imágenes y de preimágenes según la tabla.

$g(x) = 2x \rightarrow$

x	0	3	–1	–8
g(x)	0	6	–2	–16

a) $f(x) = -3x \rightarrow$

x	2		5	
f(x)		6		9

Figura 10. Ejemplo de tarea clase 9: simbólico-tabular (Elgueta, et al., 2014, p. 129)

La novena clase de tareas, según el tipo de representación que se activan, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. Un ejemplo de esta novena clase de problemas se presenta en la Figura 10. La décima clase de problemas refiere a aquellas tareas para las que se proporcionan datos tabulares de la función, los cuales deberán de ser interpretados por los estudiantes con la finalidad de proporcionar una respuesta en la que la función se represente gráficamente. La undécima clase refiere a aquellos problemas en los cuales se proporcionan datos tabulares de la función y se pide una respuesta simbólica. Un ejemplo de la décima y undécima clase de problemas se representa en la Figura 11.

5. Conclusiones

A partir del análisis realizado hemos constatado que los significados de la noción de función pretendidos por los libros de texto chilenos no son representativos del significado holístico de referencia. Así, el enfoque actual que se da a este objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de *relación entre variables* y en un significado de función que progresivamente se acerca a la definición de *función a partir de la teoría conjuntista* (Parra y Pino, 2016). Esto constituye una evidente dificultad pues los libros de texto se han convertido en el mediador entre las directrices propuestas por los programas de estudio y el trabajo del profesor en el aula, además representan el soporte básico del trabajo de los estudiantes (Villela y Contreras, 2005).

Paso 1 Extraer los pares ordenados representados en la gráfica.

x	y	Par ordenado
0	0	(0, 0)
1	15	(1, 15)
2	30	(2, 30)
3	45	(3, 45)
4	60	(4, 60)

Paso 2 Identificar el patrón que se produce en la tabla.

$15 = 1 \cdot 15$

$30 = 2 \cdot 15$

$45 = 3 \cdot 15$

$60 = 4 \cdot 15$

$y = x \cdot 15 \rightarrow f(x) = 15x$

Por lo tanto, la función que modela el monto a pagar por las fotocopias es $f(x) = 15x$.

Figura 11. Ejemplo tarea clase 10 y 11: tabular-gráfico-simbólico (Elgueta, et al., 2014, p. 128)

Luego del análisis del libro de texto de primer año medio, y los tipos de problemas identificados en la caracterización de las configuraciones ontosemióticas, la noción de función no logra ser movilizada en su acepción gráfica, pues el tipo de tareas más bien aluden a aspectos procedimentales y/o algorítmicos que no fortalecen el significado de *función como representación gráfica*. Del mismo modo, se identificó que el concepto de 'correspondencia' es utilizado por primera vez en este nivel educativo. Sin embargo, no se refuerza el estudio de relaciones funcionales definidas en conjuntos distintos a los numéricos usuales. Es decir, no moviliza la noción de *función como correspondencia arbitraria*. Este hecho provoca que una de las concepciones que los estudiantes posean respecto a la noción de función sea que, la correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades (Vinner, 1992), lo cual implica que una correspondencia arbitraria no sea considerada por los estudiantes como una función. Esto conducirá a rechazar funciones y a admitir objetos no funcionales (Artigue, 1995). Del mismo modo, hemos verificado que a lo largo del currículo chileno se presentan funciones tanto algebraicas como trascendentes; no obstante, no se explicita la diferencia entre estos tipos de funciones impidiendo movilizar la noción de *función como expresión analítica*. Cabe destacar que el libro de texto de primer año medio solo presenta funciones algebraicas.

De acuerdo con Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis (2006) algunas dificultades de los estudiantes en la construcción de nociones matemáticas pueden estar vinculadas a la restricción de representaciones presentadas en los procesos de enseñanza. Las formas habituales de representación de objetos matemáticos, como la función, no son suficientes para que los estudiantes construyan y comprendan el significado holístico. Esto se evidencia en el análisis efectuado, pues los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos escolares, mayoritariamente requieren de la activación de representaciones simbólicas, verbales y en menor medida gráficas. Usualmente se presentan problemáticas desde expresiones simbólicas o verbales de la función para posteriormente dar respuestas bajo representaciones simbólicas o gráficas (Parra y Pino, 2016).

Reconocimiento

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT de iniciación N°11150014.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*(5), 324-336.

Elgueta, J., Muñoz, G., y Santis, M. (2014). *Texto del estudiante. Matemática 1° Medio.* Chile: SM Chile.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, E., y Gagatsis, A. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533-556.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. D. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Gagatsis, A., y Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645-657.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

González, M., y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.

Kaldrimidou, M., y Ikonomou, A. (1998). Factors involved in the learning of mathematics: The case of graphic representations of functions. En H. Stenbring, M. G. Bartolini Bussi y A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 271-288). Reston, VA: NCTM.

López, E., Guerrero, A., Carrillo, J., y Contreras, L. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(8), 73-93.

Love, E., y Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371-409). Dordrecht: Kluwer.

Martínez Bonafé, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *Revista de la Asociación de Sociología de la Educación*, *1*(1), 62-73.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 255-286.

Parra, Y., y Pino-Fan, L. (2016). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. (Artículo en revisión).

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, *34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Rodrigez, D. y Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la investigación*. Barcelona: Eureca Media, SL.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén, España.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.

Villella, J. A. y Contreras, L. C. (2005). La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática. *La Gaceta de la RSME*, *8*(2), 419-433.