

La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas

Problem posing as a means to foster the articulation of mathematics teacher's competences and knowledge

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú - IREM

Resumen

Si bien la importancia de la creación de problemas y de su inclusión en los procesos de aprendizaje ha sido destacada desde antaño, recién en la última década se le está prestando atención como campo de investigación y se están resaltando las grandes potencialidades de su inclusión en los procesos de aprendizaje en los diversos niveles educativos. Por esta razón, resulta particularmente importante vincular de manera explícita la creación de problemas – por variación y por elaboración – con los aportes del Enfoque Ontosemiótico (EOS) relacionados a los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. En esta ponencia se muestran experiencias de desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica mediante la creación de problemas y se explicitan las potencialidades de las estrategias ERPP (Episodio, Reflexión didáctica, Problema pre, Problema Pos) y SPRP (Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema pre o pos) de creación de problemas para fortalecer la articulación entre competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. Se plantean, además, interrogantes encaminadas a desarrollar investigaciones y a formular intervenciones formativas vinculando estrechamente la creación de problemas al modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor (CCDM), basado en constructos del EOS.

Palabras clave: creación de problemas, configuraciones ontosemióticas, formación de profesores, prácticas matemáticas, conocimientos y competencias del profesor.

Abstract

Although the importance of problem posing and its inclusion in learning processes have been stressed since long ago, only in the last decade attention has been given to it as a research field, and the great potentialities of its inclusion in the learning processes of the different educational levels are being emphasized. For this reason, it is particularly important to explicitly link problem posing – by variation and elaboration – to contributions of the Onto-semiotic Approach (OSA) in relation to mathematics teachers' knowledge and competences. In this conference, we show experiences where the competence of analysis and didactic intervention are developed through problem posing. We explicitly state the potentialities of the problem posing EDPP (Episode, Didactic Reflection, Pre-problem, Post-problem) and SPDP (Situation, Problem, Didactic Reflection, Pre or Post-problem) strategies to strengthen the articulation between mathematics teachers' knowledge and competences; and we pose questions aimed at developing investigations and drawing up training interventions, closely linking problem posing to the teachers' model of didactic mathematical knowledge and competences (DMKC), based on OSA constructs.

Keywords: problem posing, onto-semiotic configurations, teacher training, mathematical practices, teachers' knowledge and competences.

1. Introducción

Es clara la importancia de resolver problemas como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. ¿Y la de crear problemas? Por

supuesto que también. La importancia de la creación de problemas ha sido expresada por científicos, matemáticos y un buen número de investigadores en educación matemática. En las últimas décadas contamos con numerosas y muy importantes publicaciones tratando diversos aspectos de la creación de problemas, vinculados con la formación matemática de los estudiantes en todos los niveles educativos y con la formación de profesores. Destacamos la afirmación de Ellerton (2013): “For too long, successful problem solving has been lauded as the goal; the time has come for problem posing to be given a prominent but natural place in mathematics curricula and classrooms”¹ (pp. 100-101).

Y la de Abu-Elwan (1999):

While teacher educators generally recognize that prospective teachers require guidance in mastering the ability to confront and solve problems, what is often overlooked is the critical fact that, as teachers, they must be able to go beyond the role as problem solvers. That is, in order to promote a classroom situation where creative problem solving is the central focus, the practitioner must become skilful in discovering and correctly posing problems that need solutions.² (p. 101).

Científicos como Einstein e Infeld, reconocidos no solo por sus aportes notables en los campos que trabajaron sino por sus reflexiones sobre la actividad científica, hicieron notar la importancia de la creación de problemas (Einstein e Infeld, 1938, p.92); asimismo, matemáticos destacados se refirieron a este tema, en particular Halmos (1980) que – destacando que los problemas son el corazón de las matemáticas – exhorta a los profesores a formar estudiantes que sean mejores solucionadores y mejores creadores de problemas que nosotros (p. 524).

Actualmente hay numerosas investigaciones en torno a la creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos y varias de ellas hacen mención explícita a la vinculación de esta tarea con las competencias docentes (Crespo, 2003; Tichá y Hošpesová, 2013; Silver, 2013; Malaspina, Mallart y Font, 2015).

La creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, ni debe considerarse que los problemas a trabajar en clases son únicamente los que figuran en los libros o en internet. Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor conoce la realidad específica en su aula, el entorno sociocultural y las motivaciones de sus alumnos y es un desafío a sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, tanto crear secuencias de actividades y problemas adecuados para esa realidad, como estimular a sus alumnos no solo a aprender resolviendo problemas, sino a “ir más allá”: a aprender creando sus propios problemas (Malaspina y Vallejo, 2014).

¹ “Durante demasiado tiempo, la resolución exitosa de problemas ha sido exaltada como la meta; ha llegado el momento en que a la creación de problemas se le dé un lugar prominente pero natural en los planes de estudio y las aulas de matemáticas”.

² “Mientras que los formadores de profesores generalmente reconocen que los futuros profesores requieren orientación en el dominio de la capacidad para enfrentar y resolver problemas, lo que a menudo se pasa por alto es el hecho fundamental que, como profesores, deben ser capaces de ir más allá del papel de solucionadores de problemas. Es decir, para promover una situación de clase, cuyo foco central sea la solución creativa de problemas, el orientador debe ser diestro en descubrir y en crear apropiadamente problemas que requieran soluciones.”

Estimular la creatividad de los educandos es parte esencial de la tarea docente y la matemática es un campo fértil para ello, aunque, como hacía notar Silver (1997) es irónico que para la mayoría de estudiantes en el mundo, la matemática es considerada entre el conjunto de cursos menos vinculados con la creatividad. Consideramos que si bien es cierto que la creatividad se manifiesta “reactivamente” en los alumnos cuando ellos resuelven ingeniosamente problemas no rutinarios que les proponemos, estamos dejando de lado la creatividad “proactiva” si no los estimulamos a que ellos avancen en sus aprendizajes creando sus propios problemas de matemáticas (Malaspina, 2013). Bonotto y Dal Santo (2015) en la educación básica y Matzko y Thomas (2015) en la educación superior nos muestran valiosos trabajos de niños y jóvenes que evidencian la estrecha relación entre creatividad, creación de problemas y resolución de problemas. En el Perú, en las tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas de Cárdenas (2015), de Martínez (2015) y de Torres (2016) se presentan también interesantes problemas creados por niños de sexto grado de primaria, sobre operaciones con números decimales en la primera; por profesores de primaria, sobre operaciones con números naturales en la segunda; y por profesores de secundaria, sobre funciones cuadráticas en la tercera.

La realidad es rica en situaciones que permiten crear problemas, lo cual conlleva el identificarlos y el saber plantearse preguntas, que son capacidades fundamentales a desarrollar en nuestros alumnos. Crear problemas de matemáticas a partir de situaciones reales, contribuirá a tener una mirada más analítica de la realidad, que será útil no solo en el campo de las matemáticas.

Siendo tan importante que nuestros alumnos aprendan matemáticas no solo resolviendo sino también creando problemas, es esencial que los docentes desarrollemos la capacidad de crear problemas de matemáticas, para poder orientar adecuadamente el desarrollo de tal capacidad en nuestros alumnos. Las experiencias didácticas desarrolladas con profesores en formación y en servicio por Malaspina, Mallart, y Font (2015); Malaspina, Rubio, y Torres (2016); y Torres (2016), son el inicio de investigaciones sobre creación de problemas usando constructos del EOS, que nos muestran la estrecha vinculación entre la competencia de análisis didáctico y la capacidad de crear problemas que faciliten aprendizajes. En este artículo buscamos dar unidad a tales investigaciones, en el marco del modelo “conocimientos y competencias didáctico-matemáticas para el profesor de matemática” (CCDM) expuesto en Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (en prensa)

Mostramos estrategias de creación de problemas que contribuyen al desarrollo de las competencias de análisis didáctico de los profesores, que se requieren tanto al crear problemas con el objetivo de facilitar la comprensión y solución de un problema propuesto en el contexto de un episodio en una clase, como al crear problemas a partir de una situación dada.

2. Marco teórico y metodología

Como marco teórico, en una primera parte resumiremos el enfoque de creación de problemas desarrollado por Malaspina (2013, 2015), usado en diversas experiencias didácticas en el Perú, en Ecuador y España, publicadas en revistas o expuestas en foros internacionales (Mallart, Font y Malaspina, 2016; Malaspina, Font y Mallart 2015; Malaspina, Rubio y Torres, 2016); o usadas en tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú (Cárdenas, 2015; Martínez 2015; Torres, 2016). En una segunda parte resumiremos los constructos del EOS

vinculados con la creación de problemas en la formación de profesores, en el marco del modelo CCDM.

2.1. Creación de problemas

Un importante punto de partida es explicitar cuatro elementos fundamentales de los problemas: *Información*, *Requerimiento*, *Contexto* y *Entorno matemático*

- La *información*: datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.
- El *requerimiento*: lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.
- El *contexto*: puede ser *intra matemático* o *extra matemático*.
- El *entorno matemático*: el marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema (por ejemplo: funciones lineales; teoría de números; geometría analítica; cálculo diferencial; etc.)

A continuación resumimos lo que entendemos por creación de problemas, y luego ampliaremos esta definición usando los cuatro elementos que acabamos de dar.

La creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema,

- Por *variación* de un problema dado; o
- Por *elaboración*,
 - Libre, a partir de una situación dada o configurada
 - Por un pedido específico (con énfasis matemático o didáctico)

Es decir, *variación* de un problema dado es un proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema dado.

Ejemplos muy interesantes de éstos son los que resultan al modificar el requerimiento y plantear generalizaciones a partir de un problema dado. Puede conllevar el cambio de contexto, de extra a intra matemático.

Por otra parte, *elaboración* de un problema es un proceso según el cual se construye un nuevo problema, ya sea en forma libre, a partir de una situación (dada o configurada por el autor), o por un pedido específico, que puede tener énfasis matemático o didáctico. En el primer caso, el contexto del problema se origina en la situación y no necesariamente es extra matemático; la información es obtenida por selección o modificación de la información que se percibe en la situación; el requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, implícitas en el enunciado; y el entorno matemático puede ser especificado por el autor o determinarse por las diversas formas de resolver el problema. En el segundo caso, los elementos del problema se determinan según el pedido de elaboración y el énfasis que éste deba tener. Cuando el énfasis es didáctico, suele buscarse un contexto extra matemático; por ejemplo, cuando se solicita elaborar un problema que ayude a entender la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición. Cuando el énfasis es matemático, el contexto suele ser intra matemático; por ejemplo, cuando se solicitó crear problemas relacionando las

funciones afines con las cuadráticas; aunque también se propusieron problemas de contexto extra matemático (Malaspina, 2015)

Para estimular en los profesores la capacidad de crear problemas de matemáticas por variación, inicialmente propusimos la estrategia Episodio, Problema pre, Problema pos, resumida como estrategia EPP. Con ella desarrollamos muchos talleres con profesores en formación y en servicio, presentamos comunicaciones en PME 38 (Malaspina, Mallart y Font, 2014) y en CERME 9 (Malaspina, Mallart y Font, 2015) y se elaboró una tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas (Martínez, 2015).

La estrategia consiste en: (1) Presentar a los participantes en un taller un episodio de la clase de un profesor, que contiene un problema y los comentarios hechos por algunos de sus alumnos al resolver o tratar de resolver tal problema; (2) pedir que los participantes del taller resuelvan el problema del episodio y creen un problema que contribuya a facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio. A problemas con esa característica se les denomina *Problema pre*. (3) Reunir a los participantes en grupos de dos o tres para comparar y reflexionar juntos sobre sus problemas propuestos y finalmente hacer la propuesta del Problema pre del grupo. (4) Orientar una puesta en común de los problemas pre creados en algunos grupos, estimulando reflexiones, críticas y posibles mejoras. (5) Regresar al trabajo individual para crear y resolver (o tratar de resolver) un problema inspirado en el problema del episodio, pero más retador que este; es decir, un problema cuya solución requiera mayor demanda cognitiva o mayor creatividad que el problema del episodio. A problemas con esta característica se les denomina *Problema pos*. (6) y (7) Desarrollar actividades similares a las descritas en las fases (3) y (4), esta vez con los problemas pos creados.

2.2. Enfoque ontosemiótico (EOS)

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico, llamado Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor, o modelo CDM (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2016). En tal modelo se destaca la interconexión entre la noción de conocimiento y de competencia del profesor. Por otra parte, dentro del EOS también se han desarrollado investigaciones importantes sobre las competencias del profesor (Font, 2011; Rubio, 2012; Giménez, Font y Vanegas, 2013; Seckel, 2016; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016) que han hecho ver la necesidad de tener un modelo sobre el conocimiento del profesor, a fin de evaluar y desarrollar sus competencias. Estos enfoques han conducido a la creación de un modelo que articula las nociones de competencia de análisis didáctico y conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas: el modelo Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas, conocido como modelo CCDM (Godino, Batanero, Font, y Giacomone, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, en prensa).

En el modelo CCDM se considera que las dos competencias básicas del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica; esta última tiene como núcleo fundamental diseñar, aplicar y valorar las secuencias de aprendizaje tanto propias como las de otros, por medio de técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y planteamiento de propuestas de mejora (Font, 2011; Breda, Pino-Fan y Font, en prensa)

En Rubio (2012) se muestra que si los profesores no son competentes en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos, no podrán serlo en la evaluación de

competencias matemáticas. Así, los resultados de la tesis de Rubio nos señalan una subcompetencia de la competencia de análisis didáctico que deben desarrollar los profesores de matemáticas para desarrollar y evaluar competencias en sus alumnos: la subcompetencia de análisis de la actividad matemática, entendida como el análisis de las prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en ellas. En el modelo CCDM se asume que las herramientas teóricas del EOS permiten dicho análisis en términos de prácticas, configuración de objetos y procesos matemáticos. Por ello se recomienda que el profesor conozca y comprenda la idea de configuración de objetos y procesos activados en una determinada práctica matemática y sea capaz de usarlos de manera competente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Pino-Fan, Godino y Font, 2016).

En relación con la creación de problemas con fines didácticos es particularmente importante que el profesor identifique los objetos matemáticos en la solución de un problema y establezca interrelaciones entre ellos; es decir, entre la situación-problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Así, se tendrán redes de objetos que intervienen y emergen, que se denominan configuraciones epistémicas (CE) cuando son consideradas desde una perspectiva institucional y configuraciones cognitivas (CC) cuando son consideradas desde una perspectiva personal (Godino, Batanero y Font, 2007). El análisis de estas configuraciones permite tener información acerca de la “anatomía de la solución de un problema”.

Usamos estas herramientas del EOS para identificar los objetos que intervienen en la creación de problemas, como producto de la actividad matemática. Inducimos su uso por los profesores en las experiencias didácticas de creación de problemas con fines didácticos, mediante las estrategias ERPP y SPRP y las usamos para los análisis de los resultados. Más aún, en las CC y CE explicitamos en la situación problema, los cuatro elementos básicos del problema, señalados en Malaspina (2015) y ya expuestos anteriormente. En particular, se precisan los conceptos dentro del marco general que se da al explicitar el entorno matemático.

3. Estrategias para fortalecer competencias didácticas del profesor

Con el propósito de fortalecer la competencia de análisis e intervención didáctica de los profesores, la estrategia EPP, descrita para crear problemas por variación, se transforma en la estrategia ERPP (Episodio, Reflexión didáctica, Problema Pre, Problema Pos). La reflexión didáctica ocurre en varios momentos, haciendo uso de las configuraciones de objetos primarios, a nivel individual y grupal. Veamos las fases: (1) Presentar a los participantes en un taller un episodio de la clase de un profesor, que contiene un problema y los comentarios hechos por algunos de sus alumnos al resolver o intentar resolver tal problema; (2) Pedir que los participantes del taller resuelvan el problema del episodio y elaboren su correspondiente configuración cognitiva. (3) Elaborar con los participantes una solución experta y una configuración epistémica correspondiente. (4) Pedir que los participantes hagan comparaciones entre las configuraciones cognitivas elaboradas individualmente y la configuración epistémica elaborada conjuntamente. (5) Pedir que, individualmente, creen y resuelvan un problema pre (que contribuya a facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio). (6) Elaborar una configuración cognitiva de la solución del problema creado y compararla con la configuración cognitiva de la solución del problema del episodio. Examinar cuál de las soluciones requiere mayor demanda cognitiva. (7) Reunir a los participantes en grupos de dos o tres para comparar y reflexionar juntos sobre sus problemas propuestos y las

configuraciones cognitivas elaboradas y finalmente hacer la propuesta del Problema pre del grupo, su solución y una fundamentación de que el problema reúne las características de un problema pre, basada en la configuración cognitiva de su solución. (8) Orientar una puesta en común de los problemas pre creados en algunos grupos, estimulando reflexiones, críticas y posibles mejoras, con base en las configuraciones cognitivas elaboradas. (9) Regresar al trabajo individual para crear y resolver (o tratar de resolver) un problema pos inspirado en el problema del episodio; es decir, un problema cuya solución requiera mayor demanda cognitiva que el problema del episodio o mayor creatividad. (10) y (11) Desarrollar actividades similares a las descritas en las fases (7) y (8), esta vez con los problemas pos creados.

En las experiencias desarrolladas para la creación de problemas por *elaboración* a partir de una situación dada, hemos usado inicialmente la estrategia SPP (Situación, Problema Pre, Problema Pos). En esta, el Problema Pre pone más énfasis en el uso didáctico de la situación dada para formular un problema y el Problema Pos tiene característica similar al Problema Pos de la estrategia EPP, que es la de ser más retador. En este caso, más retador que el Problema Pre creado a partir de la situación dada.

Como en el caso de la estrategia EPP, una forma de mejorar la estrategia SPP es introduciendo la fase de Reflexión didáctica, en este caso mediante configuraciones cognitivas de las soluciones de los problemas creados a partir de la situación dada. Tenemos así la estrategia SPRP, con bondades similares a las ya comentadas para ERPP en relación a contribuir a articular el conocimiento didáctico-matemático y el conocimiento matemático *per se* del profesor. La estrategia SPRP consiste en (1) Presentar a los participantes en un taller una situación motivadora para crear problemas; (2) Pedir que los participantes del taller, en forma individual, creen y resuelvan un problema a partir de la situación dada, que sea apropiado para cierto nivel educativo; (3) Pedir que individualmente elaboren una configuración cognitiva de la solución del problema creado. (4) Reunir a los participantes en grupos de dos o tres para que comparen y reflexionen juntos sobre sus problemas propuestos y las configuraciones cognitivas elaboradas. Con base en estas reflexiones, deben hacer la propuesta del grupo de un problema creado a partir de la situación dada. Nos referimos a tal problema como PG. (5) Pedir a cada grupo que haga la configuración cognitiva de su PG. (6) Orientar una puesta en común de los problemas creados en algunos grupos, estimulando reflexiones, críticas y posibles mejoras, con base en las configuraciones cognitivas elaboradas. (7) Pedir a cada grupo que cree un nuevo problema, relacionado con su PG. (se le llama NPG). Puede ser – por decisión del grupo – un Problema-pre, en el sentido de contribuir a comprender mejor y a resolver correctamente PG; o un Problema-pos, en el sentido de ser más retador que PG, que requiera mayor demanda cognitiva que PG. Cada grupo debe explicitar si creó un Problema-pre o un Problema-pos respecto a su PG (8) Redactar una solución del problema creado y hacer su correspondiente configuración cognitiva. (9) Pedir que cada grupo compare la CC de su PG con la CC del nuevo problema creado y dar fundamentos para confirmar o modificar el calificativo dado de Problema-pre o de Problema-pos. (10) Socialización, similar a (6).

Con la creación de problemas-pos, hemos tenido experiencias particularmente interesantes, pues los participantes de talleres han propuesto requerimientos que conllevan procesos de simbolización y generalización que en algunos casos van más allá de los conocimientos correspondientes al nivel educativo inicialmente considerado; es decir en el marco del conocimiento matemático ampliado del profesor. Así, mientras que la creación de problemas-pre está más ligada al conocimiento didáctico-matemático

del profesor, la creación de problemas-pos está más ligada al conocimiento matemático *per se*. Las estrategias propuestas crean espacios de reflexión que contribuyen a articular las competencias y los conocimientos del profesor.

4. Algunas experiencias didácticas de creación de problemas

Usando la estrategia EPP, al presentar episodios a los profesores, sobre todo de secundaria o superior, encontramos que en la creación de *problemas pre* hay una tendencia a dejarse ganar por el aspecto matemático y formulan problemas inspirados en el problema del episodio, pero que requieren una mayor demanda cognitiva que éste. Comparar las configuraciones epistémicas y cognitivas correspondientes a ambos problemas, elaboradas por el equipo de investigación, hace evidente que el problema pre creado no reúne las características de facilitar la comprensión y solución del problema del episodio. Un esquema que usamos para las comparaciones fue el que mostramos en la Figura 1.

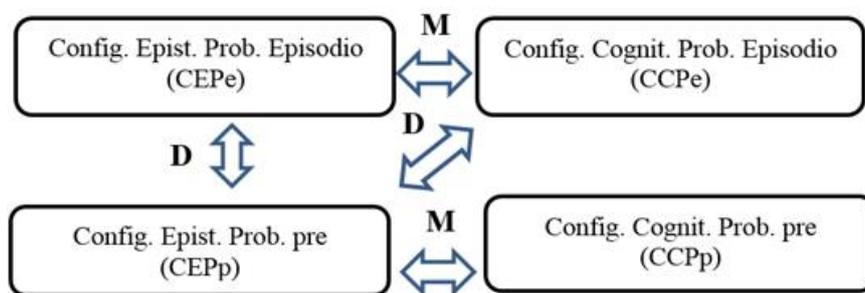


Figura 1. Comparación de configuraciones

Las letras que acompañan a las flechas indican la competencia de análisis didáctico (D) y la competencia matemática (M) que destaca más en la comparación de configuraciones.

En Malaspina, Rubio y Torres (2016) se expone con detalle este tipo de experiencias. Como ilustración, solo mostraremos el episodio y un problema creado por un participante, profesor de secundaria, al solicitarle que cree un problema pre.

4.1. Creación de un problema pre

- *Episodio:*

El profesor Carlos, en una de sus clases sobre funciones, propuso el siguiente problema a sus alumnos del segundo grado de educación secundaria:

En la bodega de la esquina de la calle en que vivo, cada kilogramo de papa cuesta S/.3. En el Mercado Mayorista, el cual se encuentra lejos de mi casa, cada kilogramo de papa cuesta S/.2, pero debo gastar en pasajes de ida y vuelta la cantidad de S/.5. ¿Siempre me resultará más conveniente comprar papas en el Mercado Mayorista? ¿Por qué?

Luego de unos minutos, algunos alumnos del profesor Carlos comentaron:

Juan: *Claro, siempre será más conveniente comprar en el mercado, porque ahí es más barato.*

María: *No siempre...depende...*

Mateo: *Será más conveniente comprar en el mercado si tiene que comprar más de 8 kilos de papa.*

- Problema creado por el participante P3 al pedirse la creación de un *problema pre*:

Lalo, es un niño que se "gana la vida" vendiendo rosas, ganando \$/. 2 por cada unidad. Para asegurar su venta del día él decide ingresar a un concierto de "música romántica" al que accede pagando \$/. 20. ¿Cuántas rosas como mínimo deberá vender para superar sus ventas normales que es en promedio de \$/30 de ganancia diaria? (Solución al reverso)

Las comparaciones de las configuraciones epistémica y cognitiva, de una solución experta y de la solución del propio autor del problema, hacen completamente evidente que el problema creado por el participante P3 no reúne las características de un problema pre. Ciertamente, en la creación de problemas pre, juega papel fundamental la competencia de análisis didáctico del autor del problema. El desarrollo de tal competencia se estimula con la estrategia ERPP, al orientar a los participantes del taller a elaborar configuraciones cognitivas de sus soluciones a los problemas creados por ellos mismos y hacer comparaciones con configuraciones, epistémica y cognitiva, del problema del episodio. En Torres (2016) se muestran ejemplos de configuraciones hechas por los profesores participantes de un taller usando ERPP.

El problema creado por el profesor P3 tiene más bien características de un problema pos y esto se hace evidente también con las comparaciones de configuraciones.

- *Otro episodio*

El siguiente episodio fue propuesto a profesores de secundaria en un taller, diseñado con la estrategia ERPP, que tuvo una primera sesión de conocimiento de las configuraciones de objetos primarios y de entrenamiento en la elaboración de configuraciones cognitivas.

El profesor Mario, en una clase de funciones, propuso el siguiente problema a sus alumnos del tercer grado de educación secundaria:

Encuentra un par de números cuya suma sea 43 y su producto sea el máximo posible.

Luego de unos minutos, algunos alumnos comentaron:

Pedro: *Los números son 21 y 22*

Isabel: *El producto máximo no se puede saber*

Santiago: *¿Para qué me sirve resolver este problema?*

Uno de los profesores participantes en este taller – Profesor P11 – llegó a formular el siguiente problema, al pedirse la creación de un problema pre:

Determina las parejas de números naturales cuyas sumas sean 5 y 6, respectivamente; de tal manera que el producto de las componentes de las parejas sea el máximo posible. Elabora una tabla para cada caso.

- Para el caso cuya suma es 6, ¿cuáles son las componentes de la pareja de números cuyo producto es máximo?*
- Para el caso cuya suma es 5, ¿existe una sola pareja de números cuyo producto es máximo? Explica tu respuesta.*

- c) *Si consideramos que existe una única pareja de números no naturales cuya suma es 5 y, cuyo producto es máximo y no es un número natural, ¿cuáles son tales números?*
- d) *Elabora una estrategia para la obtención del producto máximo, en el caso que la suma de las componentes de las parejas sea un número par. ¿Esta estrategia es diferente en el caso que la suma sea un número impar? Explica tu respuesta.*
- e) *Formula el producto de dos números cuya suma es 5 como una función f de una variable real x .*

En Torres (2016), usando configuraciones epistémicas y cognitivas, e inclusive criterios de idoneidad, se hace un análisis bastante completo del problema del episodio y de algunos problemas creados al pedirse la creación de problemas pre; en particular, del problema creado por el participante P11, que reúne características de un problema pre en relación al problema del episodio.

4.2. Creación de problemas por elaboración, con la estrategia SPRP

Para aplicar la estrategia SPRP, con profesores de secundaria, se tuvo también una sesión previa con los participantes, para el conocimiento de las configuraciones de objetos primarios y un entrenamiento en la elaboración de configuraciones cognitivas, incluida una socialización con comentarios y discusión de sus configuraciones. En las siguientes sesiones se aplicó la estrategia SPRP. Se les propuso la siguiente situación, a partir de la cual debían crear (elaborar) un problema para alumnos de secundaria, en una primera etapa individualmente y luego agrupados en parejas.

Situación:

Las bodegas A, B y C, cercanas entre sí, venden determinada marca de jugo en botellas de litro, cada una a S/. 6.00; sin embargo, cada bodega brinda ofertas diferentes, cuando se compra más de una botella. Así,

Bodega A: Pagas por 2 botellas y llevas 3

Bodega B: Si llevas 2 botellas, por la segunda pagas S/. 3.00

Bodega C: Pagas por 3 botellas y llevas 4.

Luego de elaborado un problema por cada pareja (PG), se les pide que lo resuelvan y que hagan una configuración cognitiva de tal solución. Se pasó a una fase de socialización y en seguida a crear un nuevo problema (NPG). Según decisión de cada grupo, el nuevo problema podía ser pre o pos, en relación al problema recientemente elaborado (PG). La configuración cognitiva elaborada por cada grupo, enriquecida por la socialización, contribuye a enriquecer la competencia de análisis didáctico y específicamente a tener mejores elementos para la elaboración del nuevo problema, con la característica de problema pre o de problema pos.

A continuación transcribimos el problema de un grupo (PG5)

Sofía ha organizado una fiesta, para lo cual desea comprar 12 botellas de jugo. Cerca de su casa hay tres bodegas que hacen las siguientes ofertas.

Bodega A: Pagas por 2 botellas y llevas 3

Bodega B: Si llevas 2 botellas, por la segunda pagas S/. 3.00

Bodega C: Pagas por 3 botellas y llevas 4.

Si el precio de cada botella de litro es S/. 6,00, ¿en cuál de las tres bodegas le conviene comprar?

Este grupo decidió elaborar su nuevo problema (NPG5) con características de problema pre y lo transcribimos a continuación:

María hará una reunión y dispone de S/.100 para comprar botellas de jugo. En la bodega donde hace sus compras el precio es de S/. 6 cada botella; sin embargo, hay dos ofertas:

A: Si llevas 4 botellas, por la quinta pagas la mitad de su precio (S/. 3)

B: Pagas por 8 botellas y te llevas 10

¿Cuál de las dos opciones debe elegir María para comprar el mayor número de botellas con los S/. 100 que dispone?

En su configuración cognitiva y la fundamentación de haber elaborado un problema pre, afirman que han modificado y reducido la información, buscando facilitar el uso de la tabulación como procedimiento y la proporcionalidad como concepto. Las ofertas que describen son representativas del tipo de ofertas que se dan en la situación y permiten encontrar valores unitarios según cada oferta, para tener como proposición que “siempre es más conveniente elegir la oferta B”, teniendo como argumento que “el precio unitario es el cociente entre lo que se paga y el número de botellas que se lleva”.

Ciertamente, consideramos que el NPG5 es un problema pre, en relación al PG5 y que las experiencias de elaborar configuraciones cognitivas y socializarlas, contribuyó a llegar a este enunciado.

De las 8 parejas que trabajaron en el taller, 3 decidieron hacer problemas pre y los restantes hicieron problemas pos. Este hecho es coherente con las observaciones hechas en otros talleres, en el sentido de que en los profesores, sobre todo los de secundaria y superior, hay un predominio de la competencia matemática sobre la competencia didáctica, lo cual hace preferir la creación de un problema con mayor demanda cognitiva que la creación de un problema que facilite aprendizajes.

A continuación transcribimos el problema inicial de la pareja 1 (PG1) y el NPG1, que lo caracterizaron como problema pos respecto a PG1.

PG1: Determinar una “oferta competitiva” más conveniente para los compradores, en relación a las ofertas de las bodegas A, B, y C.

NPG1: Considerando las ofertas de las bodegas A, B y C, determinar la cantidad mínima de botellas de jugo a vender en cada bodega para obtener una ganancia mayor de S/. 200, si el costo de cada caja de 12 botellas de jugo es de S/. 40.

En la configuración cognitiva y la fundamentación de haber elaborado un problema pos, el Grupo 1 afirmó que ampliaron la información, introduciendo un precio de costo, que a su vez es un nuevo concepto. También introdujeron otros nuevos conceptos, como ganancia e ingreso. En el procedimiento consideraron funciones afines, comparación de éstas y resolución de inecuaciones lineales. No explicitaron argumentos, pero es evidente que requieren mayor demanda cognitiva que resolver PG1.

Examinando los problemas pre y los problemas pos elaborados en el taller, en el marco de la estrategia SPRP, confirmamos que ésta contribuye a articular las competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. La creación de problemas pre está más relacionada con las competencias de análisis didáctico, en el marco del conocimiento didáctico matemático del profesor, y la creación de problemas pos con la competencia matemática, en el marco del conocimiento matemático *per se*.

5. Conclusiones y comentarios finales

Se ha percibido que en el proceso de creación de problemas con propósitos didácticos, mediante la estrategia ERPP, la reflexión didáctica desarrollada usando las configuraciones epistémica y cognitiva contribuye a crear más adecuadamente un Problema Pre, cuya característica principal es favorecer la comprensión y solución del problema dado en el Episodio (Torres, 2016). Así, la estrategia ERPP, en sus fases (2) a (8) contribuye a fortalecer la competencia de análisis e intervención didáctica considerada en el modelo CCDM. Orienta la reflexión didáctica tanto sobre el problema dado en un episodio como sobre la creación de otro que facilite la comprensión y solución del problema dado. Su desarrollo sistemático en la formación de profesores contribuirá a fortalecer el conocimiento didáctico-matemático de éstos. Se tendrán experiencias concretas para tomar conciencia de las facetas del conocimiento didáctico-matemático y para reflexionar sobre ellas, de forma especial sobre la epistémica, la cognitiva, la ecológica y la afectiva.

La creación del Problema Pos, cuya característica principal es ser más retador que el problema del episodio, pone énfasis en el conocimiento matemático *per se*, tanto común como especializado, pues el “dejar volar la imaginación y la creatividad” para crear un problema más retador lleva a establecer nuevas relaciones entre los elementos de la información dada en el problema del episodio y en algunos casos se han planteado requerimientos de generalización en contextos intra-matemáticos, cuya solución necesita conocimientos que van más allá de los que corresponden al nivel en el que el profesor enseña. Así, la estrategia ERPP, en sus fases (9) a (11) contribuye a pasar mediante una experiencia propia, del conocimiento común al conocimiento ampliado. Algo similar ocurre en la estrategia SPRP, en sus fases (7) a (10) cuando el grupo decide crear un problema pos, respecto al problema que creó inicialmente. Tal experiencia también le será útil al profesor como parte de su conocimiento didáctico-matemático, sobre todo en la faceta epistémica, como conocimiento especializado del contenido.

Las fases de trabajo grupal consideradas en las estrategias de creación de problemas, favorecen grandemente prestar atención a las facetas interaccional, afectiva y ecológica del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Algunas interrogantes / propuestas vinculando la creación de problemas y el EOS:

- a. Siendo tan importante la creación de problemas de matemáticas y su interacción con la resolución de problemas, tanto en el avance de la matemática como en su didáctica, y siendo el EOS un enfoque que se caracteriza por su visión holística ¿no sería pertinente que en el concepto de práctica matemática se ponga énfasis tanto en la resolución de problemas como en la creación de problemas? Es importante destacar en la didáctica de la matemática al “profesor solucionador de problemas” y al “profesor creador de problemas”.
- b. En el proceso de *problematización* considerado en el EOS ¿no debería explicitarse que comprende tanto los procesos de resolución como de creación de problemas? En este contexto, resulta interesante profundizar investigaciones realizadas (Mallart, Font y Malaspina, 2016) estableciendo vinculaciones con los criterios de idoneidad.

Referencias

Abu-Elwan, R. (1999). The development of mathematical problem posing skills for

- prospective middle school teachers. En A. Rogerson (Ed.) *Proceedings of the International conference on Mathematical Education into the 21st Century: Social challenges, Issues and approaches*, 2, 1–8, Cairo, Egypt.
- Bonotto, C., y Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving and creativity in the primary school. En F. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing*. (pp. 103-124) New York: Springer.
- Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (en prensa). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education*.
- Cárdenas, J. (2015). *Análisis de problemas de adición, sustracción y multiplicación de expresiones decimales, creados por estudiantes del sexto grado de primaria en una experiencia didáctica*. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, no publicada. Lima: PUCP.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in pre service teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 243-270.
- Einstein, A. y Infeld, L. (1938). *The evolution of Physics from early concepts to relativity and quanta*. New York: Simon y Schuster.
- Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101
- Ellerton, N. F., Singer, F. M. y Cai, J. (2015). Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. En F. M. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.). *Mathematical Problem Posing, Research in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J.L. González, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297) Málaga: SEIEM.
- Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524.
- Malaspina U. (2013). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41 – 49.
- Malaspina, U. (2015). La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática - UNIÓN*, 41, 136-141.
- Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2014). Problem posing as a means for developing teacher competencies. En *38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 38)*. (pp. 356-356). Vancouver: PME.
- Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic.
- Malaspina, U., Rubio, N. y Torres, C. (2016). A proposal to stimulate in-service teachers' competence in didactic analysis by problem posing. Trabajo presentado en el *13th International Congress on Mathematical Education, ICME 13*, TSG 19. Hamburgo, Alemania.
- Mallart, A., Font, V., y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, XXXVIII, 152, 14 – 30
- Martínez, C. (2015). *Estrategias para estimular la creación de problemas de adición y*

- sustracción de números naturales con profesores de educación primaria*. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Lima: PUCP.
- Matzko, V., y Thomas, J. (2015). Beyond routine: fostering creativity in mathematics classrooms. En F. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing*. (pp. 125-140) New York: Springer.
- Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 29(3), 75 – 80.
- Silver, E. A. (2013). Problem posing research in mathematics education. Looking back, looking around and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157 – 162.
- Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico*. Tesis de Maestría no publicada. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú.