El problema de la argumentación: una aproximación desde el EOS

Argumentation issues: an approximation from the OSA

Aitzol Lasa, Miguel R. Wilhelmi y Jaione Abaurrea

Universidad Pública de Navarra – Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Resumen

La clasificación clásica de argumentos en inductivos y deductivos limita la comprensión y gestión de los procesos de estudio en matemáticas. Los currículos oficiales no concretan con precisión qué tipo de argumentos son válidos, dificultando la labor del docente. Además, la introducción del software de geometría dinámica en el aula intensifica los momentos de ilustración de propiedades, modificando con ello el contrato didáctico y los criterios de aceptación de proposiciones. La idoneidad didáctica permite pues incorporar al análisis de la argumentación criterios ecológicos, mediacionales, de interacción, cognitivos y afectivos que dan coherencia a las prácticas operativas y discursivas.

Palabras clave: argumentación, obstáculo, fenómeno didáctico, contrato didáctico, exploración-ilustración-demostración.

Abstract

From the classical point of view, arguments can be deductive or inductive, but this narrow classification restricts the comprehension and management of mathematical learning processes. Official curricula does not accurately specify which kind of arguments are considered valid, making teacher tasks complicated. Furthermore, the didactical contract and the criteria for the acceptation of propositions are been modified by the introduction of dynamic geometry software in classroom activity, which intensifies the moments for illustration of properties. Didactical suitability adds ecological, mediational, interactional, cognitive and affective criteria to the analysis of the argumentation, which gives coherence to the operative and discursive practices.

Keywords: argumentation, obstacle, didactical phenomena, didactical contract, exploration-illustration-demonstration.

1. Introducción

Desde una perspectiva filosófica y científica, los argumentos empleados para justificar una proposición se clasifican tradicionalmente en dos tipos: *inductivos* o *deductivos*. Los documentos curriculares utilizan estos dos términos para describir los modos de razonamiento utilizados en la práctica matemática escolar. Esta clasificación tradicional de los argumentos matemáticos está padeciendo un progresivo desgaste en los textos legales educativos, que centran el interés en los aspectos lógico-deductivos del discurso. Prueba de ello es la redacción del currículo que desarrolla la ley de educación LOMCE.

> "Las matemáticas contribuyen de manera especial al desarrollo del pensamiento y razonamiento, en particular, el pensamiento lógico-deductivo y algorítmico, al entrenar la habilidad de observación e interpretación de los fenómenos, además de favorecer la creatividad o el pensamiento geométrico-espacial" (BON, 2015, 44)"

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Abaurrea, J. (2017). El problema de la argumentación: una aproximación desde el EOS. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

En este currículo no se cita explícitamente el razonamiento *inductivo* (con la excepción de una referencia en el cálculo de probabilidades en Bachillerato[1]). Sin embargo, en el mismo documento se considera que la actividad matemática escolar debe contemplar prácticas alejadas de la mera aplicación de procedimientos algorítmicos, donde el razonamiento inductivo y la determinación de heurísticas juegan un papel esencial en la resolución de problemas, la comunicación del proceso de resolución, la búsqueda de patrones, regularidades y leyes matemáticas, la elaboración de modelos, etc. Además, esto es especialmente necesario en un contexto donde la argumentación probabilística, basada en *big data*, está permitiendo avanzar e innovar en herramientas y teorías de la argumentación, que permiten establecer inferencias suficientemente argumentadas, es decir, con una cierta probabilidad de ser ciertas (Casacuberta, 2013).

La clasificación tradicional de argumentos en *inductivos* o *deductivos* no solo ha caído en desuso en los currículos oficiales y en los libros de texto, sino que la progresiva introducción de software en la práctica matemática y los desarrollos en *demostración automática de teoremas* (DAT) ha modificado el concepto mismo de demostración. La DAT permite aportar resultados en los cuales una proposición queda demostrada si se cumple para un número finito de casos (Botana et al., 2015). Además, estos desarrollos han entrado ya en el contexto escolar de la mano del software de geometría dinámica. Así, la existencia de estas *demostraciones empíricas* obliga a revisar la clasificación misma de los argumentos y su *transposición didáctica* en los distintos niveles educativos, ya que ponen en cuestión la clasificación *inductiva-deductiva* desde el punto de vista epistemológico.

Se presenta a continuación una síntesis del marco teórico del estudio, que articula aportes del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), de la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas (TSDM) y de la Teoría de la argumentación (TA), a la vez que incorpora la demostración automática de teoremas (DAT) como una forma de argumentación en la práctica matemática. Con otras palabras, el objetivo del estudio teórico consiste en integrar de manera coherente la DAT en el marco del EOS y de la TSDM, utilizando elementos de la TA.

2. Marco teórico

En el EOS, los *argumentos* son junto con el *lenguaje*, los *conceptos*, los procedimientos, las *proposiciones* y las *situaciones*, un tipo de *objeto matemático primario* (Godino, Batanero y Font 2007; Godino, 2012). Los objetos primarios permiten la *práctica operativa, discursiva y regulativa* en matemáticas y se movilizan en contexto, según cinco dualidades: expresión-contenido, personal-institucional, ejemplar-tipo, unitario-sistémico, ostensivo-no ostensivo (figura 1).

Los argumentos se caracterizan, en primera instancia, como aquellos "enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, y pueden ser deductivos o de otro tipo" (Godino, 2012). Se identifican también como argumentos, comprobaciones o justificaciones, pero no se realiza un análisis epistemológico de su naturaleza, sino que se recurre a su utilidad e interés en un contexto para la resolución de problemas o para el análisis de situaciones.

[1] "Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación" (BON, 2015, 47)

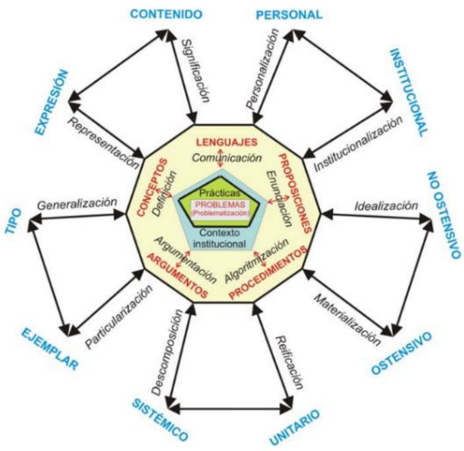

Figura 1. Ontosemiótica de la práctica matemática (Godino, 2012)

La TSDM (Brousseau, 1998; 2007) introduce la noción de *obstáculo*, ligado a la argumentación y a la construcción del conocimiento, y de desarrollos que describen la relación dialéctica entre los distintos actores de la práctica matemática, en términos de *contrato didáctico*. Los elementos *dialécticos* y *retóricos* también participan, pues, en la argumentación, y ésta excede la mera utilización de silogismos de un sistema lógico-deductivo. En particular, la TSDM advierte del peligro del uso de la *analogía* si no es establecida por el sujeto, sino introducida por el docente en un acto deliberado y explícito. Con otras palabras, en la argumentación la dualidad personal-institucional es decisiva. Por ello, se requiere de un modelo que permita la valoración de un argumento como una práctica compleja que se desarrolla entre distintos actores. La Teoría de la argumentación (TA) (Bermejo, 2014) se ajusta a este requerimiento, dado que aporta un modelo en el que la argumentación tiene cierto carácter informal y donde predomina el lenguaje natural.

Además, si se quiere construir un modelo que valide la argumentación matemática en el contexto escolar, necesariamente, se deben tener en cuenta en las prácticas argumentales el software empleado. En particular, el modelo debe ser coherente con la Demostración automática de teoremas (DAT), presente en algunos softwares de aplicación en el contexto educativo (Botana et al., 2015).

3. Desarrollo del estudio: articulación de un marco para la argumentación

El problema objeto de estudio parte de la utilización de la DAT en contextos educativos, donde se utiliza un software de geometría dinámica (SGD). En este trabajo, se desarrolla un modelo de argumentación que parte de la TA, y que es coherente con el tipo de argumentación que se solicita a los estudiantes en tareas escolares. El modelo pretende responder a la pregunta "¿qué se evalúa en el aula de matemáticas?" y se ejemplifica en tareas usuales en Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

3.1 Demostración automática

La progresiva introducción de software de geometría dinámica (SGD) en el contexto escolar ha contribuido a una tendencia por la cual la mera *ilustración* de una propiedad geométrica sustituye la *demostración* lógico-deductiva de la misma, dado que el docente hace un uso meramente *ilustrativo* del modelo dinámico, y muestra una propiedad al estudiante, sin entrar en el proceso demostrativo que valida el resultado (Lasa y Wilhelmi, 2013; Lasa, 2015). El modelo dinámico permite el análisis exhaustivo y ágil de un gran número de ejemplos, y la ausencia de contraejemplos es un indicio suficiente para que en la actividad de aula se acepte una determinada propiedad. La aceptación de que una comprobación visual de un cierto resultado es suficiente para su validación en el contexto escolar, viene acompañada de un fenómeno de fragmentación del currículo, por el cual los contenidos matemáticos se trabajan de forma aislada, sin establecer conexiones matemáticas entre resultados.

A pesar de este uso generalizado de los SGD, algunos de éstos softwares disponen desde hace décadas de módulos que permiten la *verificación numérica aproximada* de tipo probabilístico, y otros módulos para la *demostración automática de teoremas* (DAT), que traducen la información geométrica al lenguaje algebraico para computar su veracidad de manera no-probabilística (Botana et al., 2015). En particular, el software GeoGebra (GGB) dispone de herramientas que realizan la verificación numérica aproximada a partir de operaciones booleanas (como, por ejemplo, las herramientas Son-Iguales, Son-Paralelas, etc.; en la figura 2) y herramientas para la demostración automática (Demuestra y Demuestra-Detalles). El docente, por regla general, desconoce la existencia misma de instrumentos que permiten la demostración automática cuando emplea GGB en el aula, y además, en el supuesto de conocer estas herramientas, no es ése el uso principal que hace el docente, siendo pues la demostración automática un campo novedoso abierto al estudio y a la investigación en didáctica.

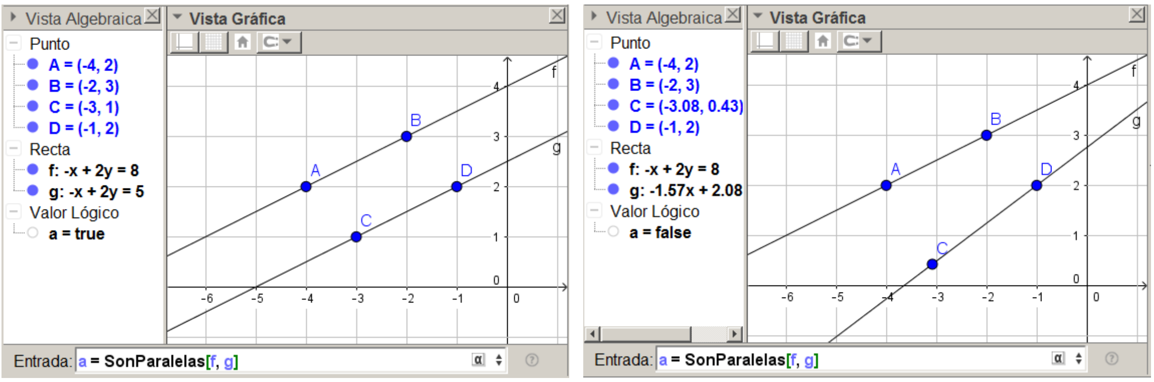

Figura 2. Output de la herramienta VNA Son-Paralelas

Atendiendo a la *dimensión epistemológica*, se podría decir que los SGD aplican de manera algorítmica una serie de resultados teóricos (módulos de demostración automática) a la información numérica y algebraica que resulta de los objetos geométricos *particulares* que se han representado en la vista gráfica. El estudiante únicamente explora la propiedad matemática sobre un número limitado de casos particulares, pero tiene la seguridad de la veracidad del resultado porque, por un lado, él no ha sido capaz de encontrar contraejemplos y porque, por otro lado, un procedimiento computacional "opaco" de la máquina así lo garantiza (figura 3).

Exploración de casos particulares	+	Demostración automática de teoremas

Figura 3. Esquema "Exploración + DAT"

El procedimiento algebraico que se usa en el DAT y las largas y complejas secuencias de output que genera como resultado no son accesibles para un estudiante no-universitario. No obstante, la manera de gestionar un hipotético *contrato didáctico* (Brousseau, 1998; 2007) con una cláusula "demostración automática" excede *en acto* la clasificación de argumentos en exclusivamente *inductivos* o *deductivos*. En los momentos de *exploración* (Lasa y Wilhelmi, 2013; Lasa, 2105) el estudiante comprueba un número finito de casos particulares, pero dispone del apoyo de todo un sistema teórico (en este caso, los teoremas que aplica el sistema de acuerdo a un procedimiento algorítmico) que valida su argumentación.

El esquema de la figura 3 se puede extender a un *contrato didáctico* coherente que tenga validez sin el medio material SGD. La Teoría de la argumentación permite ensamblar ideas que sirven de alternativa a la clasificación dicotómica inductivo-deductivo.

3.2 Un modelo teórico basado en la Teoría de la argumentación

La filosofía primero, y la lógica formal más adelante, han tratado de sistematizar la tarea de evaluar un argumento. Es este sentido, un buen argumento sería aquel en el que se realizan buenas inferencias (se emplean silogismos válidos) a partir de buenas premisas (premisas verdaderas). La evaluación de los argumentos de los estudiantes ocupa una parte fundamental de la *práctica operativa y discursiva* en el aula de matemáticas, pero el punto de vista formal de la lógica tiene limitaciones a la hora de evaluar la argumentación cotidiana, y en particular, la argumentación de un estudiante que no tiene porqué conocer los entresijos de una axiomática compleja[2].

En efecto, pueden aparecer en el contexto escolar argumentos lógicamente válidos, pero que no cumplen una función comunicativa por no ser accesible al estudiante la estructura implícita del silogismo. Este hecho puede generar un problema de gestión de aula al profesor, ya que si se detiene en la explicación detallada del silogismo inherente al argumento puede incurrir en un fenómeno de *deslizamiento metacognitivo* (Brousseau, 1998; 2007); a su vez, si pasa por alto la explicación de la estructura lógica del argumento, un argumento no comprensible por el estudiante puede tener vocación de engaño y generar *obstáculos didácticos*. De hecho, las intervenciones del docente en el progreso de la práctica matemática deben hacer evolucionar el *significado personal previo* hacia la adquisición del *significado institucional pretendido*. En esta evolución es necesaria una transposición que debe tener en cuenta no únicamente la idoneidad epistémica, sino también la *cognitiva*, *ecológica*, *instruccional*, *mediacional* y *afectiva* (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

Tindale sigue la tradición clásica aristotélica cuando defiende que la argumentación se puede modelizar como una 3-tupla en la que participan la *lógica*, la *dialéctica* y la *retórica* (Bermejo, 2014). En este modelo, la *lógica* se encargaría del producto de la argumentación y del tipo de estructura algebraica o silogismo subyacente a una buena argumentación[3]; la *dialéctica*, del procedimiento de argumentación, las reglas que rigen la resolución de conflictos de significado (*idoneidad interaccional*) y la promoción del pensamiento crítico; y, por último, la *retórica*, del acto comunicativo en sí.

Si aplicamos este modelo teórico a la gestión de la *práctica operativa y discursiva* en el aula, observamos que la progresiva adquisición de las estructuras lógicas va de la mano

[2] La lógica en Filosofía de la ciencia en la Educación preuniversitaria ha ido evolucionando por la insatisfacción de estudiantes sobre su interés y utilidad, así como de docentes “preocupados por el razonamiento real sobre asuntos de interés común y por la suerte del discurso público” (Vega, 2014, 18).

[3] “Un argumento resulta falaz porque sus premisas no son aceptables, no son pertinentes para la cuestión o no prestan apoyo suficiente a la conclusión. Un buen argumento es el que cumple estos criterios de aceptabilidad, pertinencia (relevance) y suficiencia (ARS)” (Vega, 2014, 31).

del acto comunicativo mismo. De esta manera, una misma argumentación tiene valor, o no la tiene, no en sí mismo, sino en función del contexto escolar (*idoneidad ecológica*), y sobre todo, en función de las estructuras lógicas o “teorías matemáticas” que los estudiantes son capaces de manejar en cada etapa educativa (*idoneidad cognitiva*).

No es posible, pues, usar únicamente la lógica formal como teoría de referencia en la validación de los argumentos matemáticos escolares. Por contra, en el modelo de Tindale, los pensamientos *inductivos* y *deductivos* se acoplan en una estructura en la que la actividad matemática se centra en la búsqueda de contraejemplos en un conjunto finito de casos particulares, que el docente gestiona a partir de los polos *dialéctico* y *retórico*. Si un argumento sucumbe ante un contraejemplo, entonces éste se muestra falaz y emerge como un silogismo fallido. Por el contrario, si un argumento aguanta los sucesivos envites de la búsqueda de contraejemplos, se puede considerar válido “dentro del ámbito de trabajo” en el que se encuentra el grupo de estudiantes. Con otras palabras, no es un *monstruo* (Lakatos, 1978).

En una *configuración didáctica dialógica*, donde el docente da encaje a la argumentación del estudiante en el comunicación y construcción de la teoría matemática, la institucionalización es compartida (*idoneidad afectiva*). Así, a pesar de que la propiedad se verifica para un número reducido de casos, es decir, para aquellos casos que se han podido ejemplificar en el aula, la argumentación no es meramente *inductiva*; se apoya en una *teoría implícita* que valida la argumentación (figura 4).

Conjunto finito de casos particulares verificados	+	Teorema Proposición Teoría implícita
$\forall x \in A\ finito, P(x)$		$A \subset B \to x \in B, P(x)$

Figura 4. Esquema “Exploración + Teoría Implícita”

El silogismo que queremos analizar tiene, pues, la siguiente estructura:

$$A \subset B, \forall x \in A, P(x) \to \forall x \in B, P(x)$$

Y la falacia consiste en deducir que todos los elementos de un conjunto B satisfacen una cierta proposición P, bajo la hipótesis de que todos los elementos de un subconjunto A de B cumplen esta proposición, pero sin aportar un Teorema o una “teoría implícita” que justifique la generalización del argumento. Es decir, este modelo teórico permitiría dar por válida la generalización del argumento, siempre y cuando se apoye en un contexto matemático que legitime esta “regla de inducción”, que vendría justificada por la existencia de un teorema u otro resultado que permita extender la hipótesis que cumplen los elementos del conjunto A, a todos los elementos de B.

Corresponde pues al docente la elección de la “teoría implícita” que marcará el terreno de juego de la argumentación matemática. Si la teoría que selecciona es insuficiente para dar por válidas generalizaciones en el ámbito de aplicación de la proposición P, su mala gestión puede generar *obstáculos de origen didáctico*. A su vez, si la teoría seleccionada es excesivamente amplia, no accesible al estudiante, la explicación del argumento puede hacer fracasar el acto comunicativo, generando fenómenos de *deslizamiento metacognitivo* o de *ilusión de la transparencia* (el docente no toma consciencia de la distancia entre los significados personales de los estudiantes y el institucional enseñado). En cualquiera de los casos, la ausencia de un apoyo teórico ajustado provoca que el silogismo sea fallido y tenga la estructura de una falacia lógica.

4. Exploración, validación y falacias en la Educación preuniversitaria

Se presentan a continuación algunos ejemplos de argumentaciones que pueden ser consideradas como falacias, y su relación con los fenómenos didácticos.

4.1. Búsqueda del término general en una sucesión

En las tareas matemáticas de búsqueda de patrones, es usual solicitar a los estudiantes que formulen la regla general de una serie, partiendo de un número finito de elementos, y que continúen dando valores de la serie en función de esa regla. Por ejemplo, ante la secuencia 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18,…, el docente espera que el estudiante aporte la fórmula de una sucesión aritmética de diferencia 3, es decir, se apoya en una "teoría implícita" que centra el contexto de trabajo en la utilización de funciones lineales (figura 5):

$$a_n = (n-1) \times 3$$

Sin embargo, todo matemático experimentado sabe que existen infinitas sucesiones cuyos siete primeros términos coinciden con los dados en la secuencia finita, como por ejemplo:

$$b_n = (n-1) \times 3 + c_n \prod_{k=1}^{7} (n-k)$$

Donde c_n es una sucesión arbitraria de términos numéricos. Una vez más, la conclusión tiene la misma estructura de silogismo fallido, a no ser que agreguemos una "teoría matemática" a aquello que estamos argumentando. En efecto, para un estudiante de EP o ESO, la solución b_n no es accesible, ya que el producto $\prod_{k=1}^{7}(n-k)$ es un componente algebraico que está fuera de su *nivel de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Sin embargo, al restringir la actividad al conjunto de las "funciones lineales", la solución a_n tiene un encaje natural dentro de la teoría de la proporcionalidad que el estudiante sí domina, y por lo tanto, es capaz de argumentar.

La proposición P se cumple para: $x \in A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$	+	Sucesiones aritméticas Proporcionalidad simple Funciones lineales
$\forall x \in A\ finito, P(x)$		$A \subset B \to x \in B, P(x)$

Figura 5. Esquema "Exploración + Teoría Implícita"

4.2. La multiplicación en función del conjunto numérico

Pongamos el ejemplo clásico de una maestra que, con al ánimo de ayudar a los niños en la adquisición de un significado para la multiplicación, les aporta la siguiente regla para controlar su resultado: "la multiplicación sirve para 'hacer más grande algo'; el producto es siempre mayor que los factores". Esta proposición es cierta para $\forall x \in \mathbb{N}$, y por ello, una vez que el niño certifica desde su experiencia la veracidad de la misma para un número finito de casos, la teoría implícita "el producto es una operación binaria interna en el conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$" asegura la validez de la regla (figura 6).

El producto es mayor que los factores	+	Conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ *, operación binaria interna en $(\mathbb{N}, \leq)$
$A \subset \mathbb{N}, \forall x \in A\ finito, P(x)$		$A \subset B \subset \mathbb{N} \rightarrow x \in B, P(x)$

Figura 6. Validación del acto comunicativo

Ahora bien, desde el punto de vista de la argumentación, la proposición tiene una validez limitada a los actos comunicativos en EP, y además, el mismo argumento se revela falaz cuando se amplía el campo numérico a los conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Es decir, cuando se sustituye la "teoría implícita" que validaba el resultado, el mismo argumento se revela falaz, pudiendo ser origen de un *obstáculo didáctico*.

4.3. Resolución de inecuaciones asociadas a funciones continuas

La técnica de resolución de inecuaciones asociadas a funciones continuas (polinómicas en la mayoría de casos) suele realizarse en dos pasos: 1) resolución de la ecuación asociada y obtención de sus raíces; 2) análisis del signo de la función en los intervalos de extremos dichas raíces. La proposición "el signo de un punto de la función en un intervalo determina el signo de todos los puntos del intervalo" se comprueba para un número finito de valores, pero la teoría implícita "funciones continuas" valida el resultado obtenido sin la comprobación efectiva ni la fundamentación teórica explícita del signo de los infinitos puntos del intervalo (figura 7). El estudio de la parábola ejemplifica este tipo de actividades en ESO.

El signo de un punto determina el signo de todos los puntos en un intervalo	+	Teoría de las funciones continuas
$\forall x \in A\ finito, P(x)$		$A \subset B \rightarrow x \in B, P(x)$

Figura 7. Validación del acto comunicativo

5. Conclusiones y comentarios finales

La *práctica operativa y discursiva* del estudiante en la actividad matemática en el aula se apoya en argumentos naturales cuya validación por parte del docente y de sus compañeros es compleja por naturaleza, y no se explica de manera suficiente a partir de la clasificación clásica de argumentos en *inductivos* y *deductivos*. El modelo de argumentación supera ésta clasificación clásica e integra de manera coherente los usos que se hacen de la argumentación en EP y ESO. Además, el modelo se ajusta al tipo de argumentación que se toma por válido al emplear SGD y DAT en el aula.

El docente debe dar validez a los argumentos de los estudiantes, y ésta evaluación afecta directamente a la valoración que el estudiante recibe del docente en la institución educativa. Es imperativo, pues, que en los procesos de estudio se supere la clasificación en "buenos" y "malos" argumentos, interpretando estos en términos de *idoneidad didáctica*, es decir, teniendo en cuenta tanto la dimensión epistémica como las ecológica, mediacional, cognitiva, afectiva e interaccional, para así poder evaluar justamente los argumentos de un estudiante. Si los textos legales no concretan el tipo de argumentación que se toma por válido, se corre el riesgo de que el docente solo disponga de un repertorio ajustado a sus creencias y saberes para validar las estrategias argumentales de sus estudiantes.

Dado que un argumento no es válido por sí mismo en función únicamente de su estructura lógica, una buena argumentación debe tomar en consideración los aspectos dialécticos y retóricos, que se traducen en la exploración de casos y en la búsqueda de contraejemplos. La concepción del argumento lógico-deductivo como único argumento válido en la práctica matemática escolar contradice la práctica diaria docente, cuando ésta se basa en la resolución de problemas, o incluso en la aplicación de técnicas aisladas dentro del *contrato de imitación* que no están suficientemente fundamentadas.

Aun y todo, la teoría implícita que subyace de la argumentación juega un papel determinante en la validación de un argumento, y es además la responsable, en última instancia, de algunos *fenómenos* y *obstáculos didácticos* que pueden surgir en la práctica escolar. En particular, se ha observado cómo una teoría correcta en un determinado contexto puede ser origen de *obstáculos didácticos*, mientras que una teoría correcta pero que excede el *nivel de algebrización* del estudiante, produce un fenómeno de *deslizamiento*.

La categorización de los *fenómenos* y de los *obstáculos* de origen didáctico en tanto que argumentos cuya estructura tiene connotaciones de *argumento falaz*, permite su análisis desde el punto de vista de Teoría de la argumentación. El modelo de argumentación que se presenta en este trabajo tiene potencialmente la capacidad de categorizar fenómenos y obstáculos de manera sistemática; se podría, por ejemplo, describir el umbral a partir del cual una teoría implícita particular empieza a obstaculizar la emergencia de conocimientos de un nivel algebraico superior; o se podría relativizar el papel auxiliar de ciertas teorías implícitas en la argumentación, ya que la misma teoría (por ejemplo, la estructura del conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ con una operación interna *) bien puede servir de "escalera" que permite el acceso progresivo a niveles superiores de algebrización, o generar un obstáculo didáctico.

Referencias

Bermejo, L. (2014). *Falacias y argumentación*. Madrid: Plaza y Valdés.

Boletín Oficial de Navarra (BON) (2015). *Decreto Foral 24/2015, de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra*. Pamplona: Autor. Disponible en, http://www.navarra.es/home_es/Actualidad/BON/Boletines/2015/127/.

Botana, F., Hohenwarter, M., Janicic, P., Kovacs, Z., Petrovic, I., Recio, T. y Weitzhofer, S. (2015). Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *Journal of Automated Reasoning*, *55*(1), 39-59.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Traducción de Dilma Fregona). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Casacuberta, D. (2013). Innovación, Big Data y Epidemiología. *Revista Iberoamericana de Argumentación* 7, 1-12. Disponible en, http://revistas.uned.es/index.php/RIA/article/view/10725.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para maestros. *Enseñanza de las*

Ciencias, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *4*(2), 1–26.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lasa, A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*. Bilbo: Udako Euskal Unibertsitatea (UEU).

Lasa, A. y Wilhelmi, M.R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *2*(1), 52-64.

Vega, L. (2014). El renacimiento de la teoría de la argumentación. *Revista Iberoamericana de Argumentación*, *9*, 1-41.