Integración de instrumentos metodológicos para el análisis de la validación matemática en la escuela

Integrating methodological tools for the analysis of mathematical validation in school

Víctor Larios Osorio[1] y Noraísa González González[2]

[1] Universidad Autónoma de Querétaro (Maestría en Didáctica de las Matemáticas), México

[2] Esc. Sec. Gral. "Mariano Matamoros", USEBEQ, México

Resumen

La validación en Matemáticas, a través de la «demostración», es un proceso epistemológicamente necesario, pero no independiente al proceso mismo de construcción del conocimiento. No obstante en la escuela muchas veces sí se presenta independiente por la idea que se tiene sobre la demostración aunque, en realidad, los alumnos validan el conocimiento matemático que construyen de diversas maneras a fin de darle sentido y convencerse. Estos procesos de validación de los alumnos están incluidos en su proceso de aprendizaje, por lo que se requiere su estudio a fin de orientarlos. En este trabajo se presenta la evolución que ha tenido una línea de trabajo para incorporar diversos instrumentos metodológicos de acuerdo a las necesidades encontradas en la investigación con miras de proponer herramientas de enseñanza y de evaluación a los docentes.

Palabras clave: Validación, demostración, esquemas de argumentación, modelo de Toulmin.

Abstract

Validation through «proof» in Mathematics is an epistemologically necessary process, although it is not independent of the knowledge building process. However, both processes are often presented independently at school, but in fact students validate their mathematical knowledge in different ways in order to make sense of this knowledge and convince themselves. These validation processes of students take part in their learning process, which means they have to be guided. We present in this paper the evolution of a research agenda evolution that incorporates several methodological tools according to the needs found in this research with the aim of proposing teaching and evaluation tools for teachers.

Keywords: Validation, proof, proving, argumentation schemes, Toulmin's model.

1. Introducción

En las Matemáticas existe la necesidad epistemológica de validar el conocimiento desarrollado y en la escuela se requiere que los alumnos aprendan el carácter científico de ese conocimiento, entonces se requiere que en esta última institución se enseñen procesos de validación del conocimiento que aprenden los alumnos. Tales procesos deben tener ciertas características y no pueden tratarse de manera aislada a los demás procesos durante la construcción del conocimiento. En otras palabras, la validación del alumno de su saber matemático es una parte de su proceso de aprendizaje matemático y no un proceso independiente del mismo.

Larios, O. V. y González, G. N. (2017). Integración de instrumentos metodológicos para el análisis de la validación matemática en la escuela. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Este proceso escolar tiene como referente el conocimiento matemático, el cual ha ido cambiando con la influencia de los desarrollos filosóficos, matemáticos, técnicos y científicos, además de la naturaleza y la manera de representar de los objetos matemáticos. Esto es porque la idea de demostración no ha sido estática o absoluta, y aunque ello corresponde a la Filosofía de las Matemáticas (Bloch, 2000; Hanna, 1996; Rav, 1999; Thurston, 1994), sí influencia a la Educación Matemáticas, además de intervenir aspectos cognitivos y socioculturales de los alumnos.

Ante la necesidad de incorporar la validación en el aprendizaje de las Matemáticas se han llevado cabo múltiples trabajos de investigación y desarrollo (una revisión la presentan Fiallo, Camargo y Gutiérrez, 2013). En este trabajo presentamos cómo el desarrollo de varios proyectos sobre la validación y la demostración ha llevado a tomar en cuenta propuestas teórico-metodológicos de manera integrada, y cómo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) proporciona elementos que permiten su incorporación.

2. Ciclos para la producción de validaciones y configuraciones epistémicas

A fin de evitar que se promueva la idea de que existe un tema específico para demostrar en los cursos de Matemáticas y así también de que la validación del conocimiento matemático es algo ajeno a la construcción de dicho conocimiento, se puede proponer que la producción de justificaciones es un producto de las exploraciones y de las observaciones realizadas. Relacionado con ello está la noción de *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero, Garuti y Mariotti, 1996), la cual propone que la construcción de la demostración (validación) es un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por diversas etapas de una manera no necesariamente lineal y que pueden enlistarse de la siguiente manera:

1. Exploración de una situación dada que puede ser propuesta por el profesor o generada a partir de situaciones previas.
2. Producción de una conjetura o planteamiento de una propiedad tras la observación llevada a cabo.
3. Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas o propiedades planteadas u observadas.
4. Producción de la demostración que valida o justifica, mediante el encadenamiento de argumentos, las conjeturas o las propiedades planteadas u observadas.

A partir de esta idea se han propuesto varios proyectos en los que han participado alumnos del nivel medio en México en los cuales observaron situaciones, propusieron propiedades geométricas y produjeron justificaciones en ambientes con Software de Geometría Dinámica (SGD) (González, 2010; González y Larios, 2012; Larios, 2005). Hay que mencionar que las actividades que se diseñaron estuvieron enmarcadas en la Geometría del Triángulo y el SGD fungió como instrumento de mediación semiótica entre los alumnos y el conocimiento geométrico. Este software, por su capacidad dinámica que le otorga el «arrastre», les permitió a los alumnos la exploración y la búsqueda de regularidades, situación que de otra manera queda reservado a alguien con un entrenamiento cognitivo más avanzado (como un matemático estudiante o profesional).

Ante la necesidad de conocer los elementos involucrados en los objetos matemáticos que aparecieron durante las actividades, se utilizaron las *configuraciones epistémicas* (Godino, Contreras y Font, 2006). Ello permitió clarificar las interrelaciones entre ellos, sus relaciones con otras actividades y las transformaciones durante el proceso didáctico.

Por ejemplo, para el trabajo con el estudio de las medianas de un triángulo y sus propiedades se elaboró la configuración epistémica que se muestra en la Figura 1 (González, 2010, p. 43):

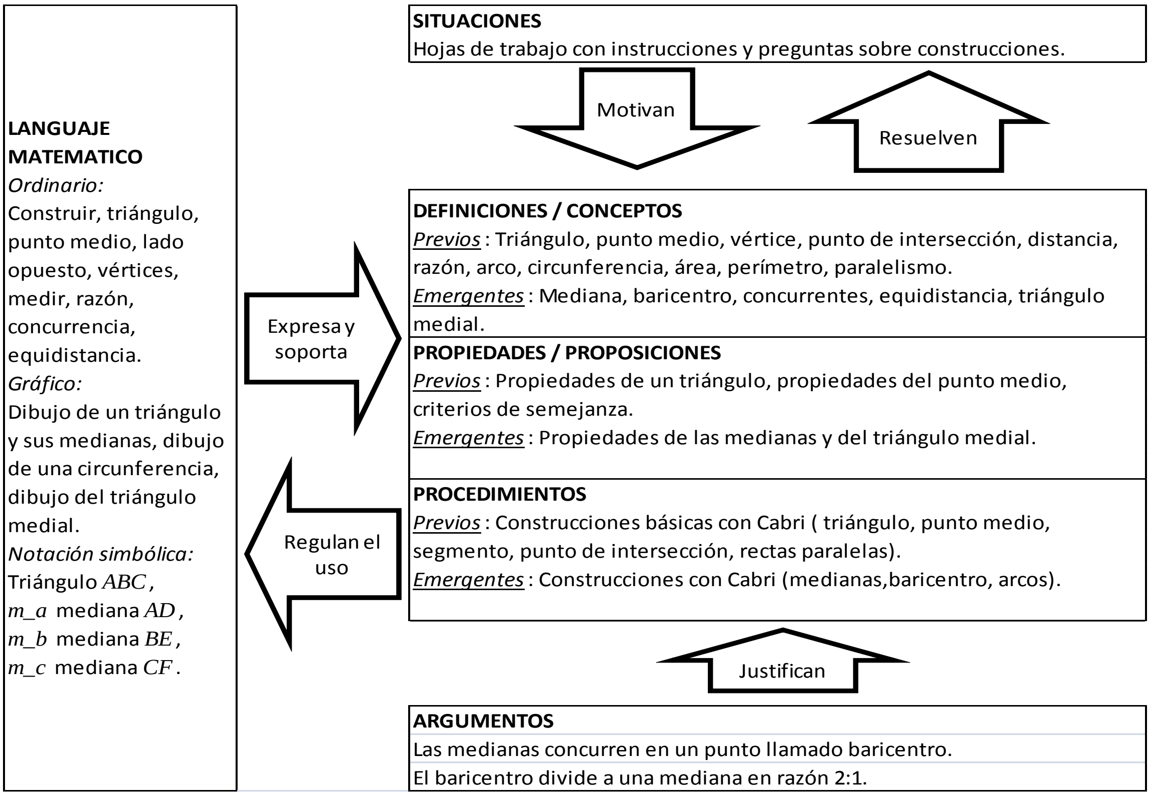

Figura 1. Configuración epistémica de las medianas del triángulo.

Las actividades que se desarrollaron se iniciaron con la construcción del triángulo, sus medianas y su baricentro. Después se estudió la relación entre los dos triángulos que se obtienen (el original y el triángulo medial), así como la razón en la que el baricentro divide a cada una de las medianas, y la obtención del triángulo original a partir de tres segmentos que se proporcionan cuyas medidas coinciden con las medianas del triángulo.

Las herramientas metodológicas permitieron identificar los elementos involucrados en los argumentos proporcionados por los alumnos y así realizar un análisis de éstos. Algunos alumnos no presentaron justificaciones deductivas, pero el ciclo mencionado de exploración, formulación de conjeturas y validación proporcionó la oportunidad de que los alumnos realizaran un trabajo que permitió validar su conocimiento, de manera individual y grupal.

Precisamente, como los alumnos proporcionaron diferentes tipos de argumentos de manera natural y, al parecer existe una complejidad creciente al respecto, en trabajos posteriores se han incluido otras herramientas metodológicas útiles para la clasificación y seguimiento de argumentos.

3. Esquemas de argumentación y caracterización de la demostración en la escuela

Al momento de analizar los argumentos producidos por los alumnos se puede percatar uno de la necesidad del uso de otras herramientas orientadas al proceso mismo de la justificación por parte de los alumnos. En varios trabajos (por ejemplo Arellano, 2013; Fajardo y Larios, 2015) se ha considerado como antecedente los *esquemas de demostración*, propuestos por Harel y Sowder (Harel, 2007; Harel y Sowder, 1998) y los *esquemas de argumentación* (Flores, Gómez y Flores, 2010). Aquéllos se produjeron en el contexto de investigaciones con alumnos del nivel secundario de educación y éstos últimos con profesores mexicanos también del mismo nivel. En el caso del trabajo de Flores y sus colegas identificaron similitudes con la propuesta de los otros colegas y les llamaron *esquemas de argumentación* porque los entienden como "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, p. 71) ya que no están ligados necesariamente a la demostración de teoremas, sino también a la validación de resultados de problemas. Bajo esta consideración han propuesto una categorización con cierta jerárquica de esquemas de argumentación como sigue:

- "*Autoritarios*, es decir, sus argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna *autoridad*. En nuestro caso puede ser un compañero profesor, un libro de texto o el instructor del curso.
- "*Simbólicos*, en los que el profesor utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados. (…)
- "*Fácticos*, en los que el profesor hace un recuento de lo que hizo o rep ite los hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo, el profesor expone una serie de pasos como si fueran un algoritmo.
- "*Empíricos*, en los que el profesor se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar un argumento.
- "*Analíticos*, en los que el profesor sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida." (Flores, 2007, p. 71)

Es importante mencionar que estos esquemas no se refieren a la demostración (o al argumento) únicamente como producto, sino a la demostración como proceso que pone en juego procesos cognitivos y en el que se establecen relaciones entre los elementos de la demostración (o del argumento).

Ahora bien, el aceptar que si un argumento puede ser considerado como una demostración, en el sentido de que proporciona validación (*convencimiento* y *persuasión*, en palabras de Harel, 2007), requiere acotar la noción a la que nos referiremos con la palabra «demostración» en el ambiente escolar y que forma parte del proceso de aprendizaje. Pero el proceso de aprendizaje de la forma de validación matemática no es espontáneo y sí es progresivo, por lo que se podría considerar su inclusión en los niveles escolares primario y secundario. Esto requiere poder evaluar los avances de los alumnos en este sentido y determinar cómo justifican (argumentan) los alumnos para poder establecer, con base en la referencia de la institución matemática (en el sentido de Godino y Batanero, 1994), los avances y las acciones necesarias para que, a través de la enseñanza, los alumnos aprendan a validar en Matemáticas.

Es por ello que, en concordancia con Recio y Godino (2001), se ha considerado una aproximación pragmática a la noción de la demostración en la escuela que incluye tomar en cuenta que hay justificaciones que aparecen en la escuela que no necesariamente cumplen con condiciones adecuadas para encaminarse hacia un pensamiento deductivo o formal. Las características propuestas consideran aspectos semánticos y sintácticos relacionados con el lenguaje matemático.

Así que consideraremos que la demostración matemática en el contexto escolar es una serie de argumentos que tiene las siguientes características:

- Hacen referencia a un hecho matemático.
- Tienen como función primaria el de convencerse a sí mismo y a otros para proporcionar una explicación del hecho matemático.
- Las formas de comunicación utilizadas deben ser conocidas por los miembros de la comunidad escolar o, en su defecto, que puedan ser aprendidas por ellos.
- Los enunciados utilizados son aceptados por la comunidad escolar, ya sea explícita o implícitamente.
- La serie de argumentos está organizada con base en formas de razonamiento válidas o correctas. En particular se puede considerar el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos (González y Larios, 2012, p. 33).

Como se puede observar, esta caracterización puede ser muy ambigua pero al depender de algún contexto escolar específico el profesor es el responsable de que exista un proceso de transposición didáctica y de institucionalización lo más apropiado, epistemológicamente hablando, y lo más adecuado, desde el punto de vista cognitivo, posible.

4. Modelo de análisis funcional de argumentos

Otra herramienta que ha sido considerada para analizar la estructura de los argumentos y así facilitar su estudio es el modelo de Toulmin (2007). Este modelo pretende servir como base para el análisis estructurar de argumentos que se presentan y que no necesariamente son matemáticos.

El esquema más sencillo del modelo contiene estructuralmente tres componentes: Los datos (D), las conclusiones (C) y las garantías (G). Así un argumento deductivo comienza con los primeros, obtiene las conclusiones y se soporta en éstas últimas.

Ahora bien, un alumno que está aprendiendo Matemáticas (nivel Primario o Secundario) no utiliza de manera espontánea ese argumentos con esta estructura (de otra manera no tendría caso hablar de diversos esquemas de argumentación), sino que está es la manera «final» de argumentar en el proceso de aprendizaje matemático. Entonces es necesario considerar una estructura que incluya más elementos.

Un esquema más amplio dentro del modelo de Toulmin contiene también el respaldo (R), que sirve de soporte a las garantías; los modalizadores (M), que matizan el argumento, y las excepciones (E) que pueden servir para aceptar o rechazar las conclusiones dependiendo de la situación. Esto se ilustra en la figura 2.

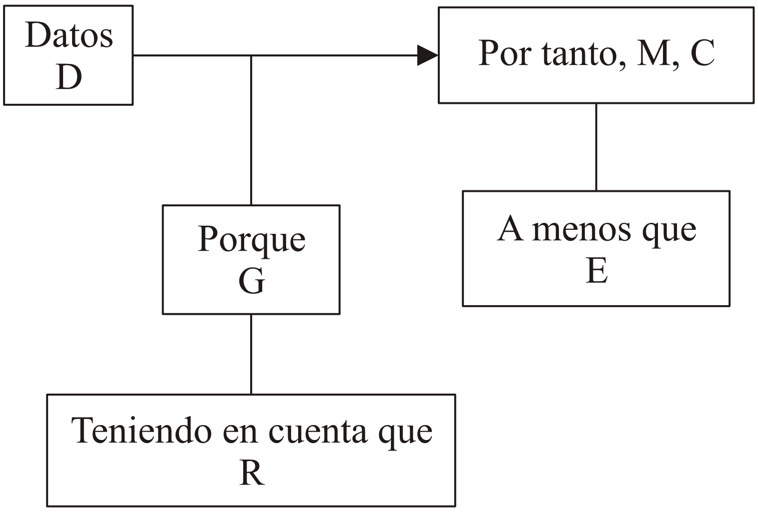

Figura 2. Esquema básico (ampliado) del modelo de Toulmin.

Knipping (2008) muestra algunos ejemplos en que analiza argumentos locales con este modelo y expresa:

> "El modelo de Toulmin es útil para reconstruir un paso de un argumento, que nos permite singularizar argumentos en el proceso de demostración (...). Llamaré a estos 'pasos de argumentación' o argumentos locales. Pero también es necesario exponer la estructura del argumento como un todo (la estructura anatómica), el cual llamaré argumento global o la 'estructura' de la argumentación del proceso de demostración." (p. 430)

En este momento se está trabajando una manera de vincular los esquemas de argumentación y los diversos elementos (y estructura) que proporciona el análisis con el modelo de Toulmin para clarificar la identificación de tipos de argumentos proporcionados por los alumnos. Una primera aproximación se presenta en Larios (2015, pp. 405-406):

- Si se tiene una justificación que la parte de la garantía (G) está basada en afirmaciones como "el profesor dijo…" o "en el libro dice…" entonces hay indicativos de que dicha justificación corresponde a un esquema autoritario. Incluso pueden omitirse los datos (D) en el argumento porque se ignoran deliberadamente y los elementos M y E pueden omitirse por ser innecesarios.

- En el caso de justificaciones que se ajusten a esquemas simbólicos se podría esperar que la garantía (G) esté basada en el manejo de símbolos de una manera poco clara a partir de los datos (D) existentes. Estos aparecen explícitamente y se utilizan, pero precisamente es la manera en cómo se utilizan, apelando incluso a "propiedades" inventadas, lo que indicaría el tipo de esquema.

- En el caso de los esquemas fácticos (o de recuento fáctico) las garantías proporcionadas hacen referencia directa a las construcciones o algoritmos utilizados. Es posible que el respaldo (R) aparezca de manera explícita, pero tanto ésta como G pertenecen a, como se dijo, algoritmos o pasos realizados. Es como decir que algo "funciona" porque se hizo como se hizo (para que "funcionara"), pero no se proporciona la razón del "funcionamiento". Tanto los modalizadores (M) como las excepciones (E) pueden estar presentes por las limitantes de los algoritmos, de los procedimientos y de las herramientas utilizadas (calculadoras, papel, computadoras, etcétera).

- Un esquema empírico podría incluir justificaciones en los que los datos (D) son considerados como casos particulares y la garantía (G) utilizada hace referencia tales casos particulares. La aparición de modalizadores y excepciones que hagan referencias a casos particulares evidenciaría aún más el tipo de esquema utilizado. Algunos tipos de justificaciones podrían considerar el caso de razonamientos abductivos.
- En el caso de que se tuviera una justificación con una estructura como la esquematizada en la figura 1 y que tanto la garantía (G) como el respaldo (R) poseyeran la característica de proporcionar propiedades en las que son verificadas hipótesis para la obtención de la conclusión (C), se podría pensar en esquemas analíticos.

Sin embargo, en un trabajo de evaluación, a partir de una continuación del proyecto que reportó Arellano (2013), se están mostrando evidencias de que no sólo el contenido de los elementos involucrados sirve para indicar el tipo de argumento que presentan los alumnos, sino las relaciones entre tales elementos (no nada más la estructura). Esto nos lleva a pensar en la necesidad de ampliar las herramientas necesarias para el estudio de la validación en la escuela.

5. Los procesos matemáticos y las configuraciones didácticas: El trabajo a seguir

Todos los aspectos mencionados (la caracterización de la demostración en el contexto escolar, la estructura de argumentos proporcionados, la posible jerarquía entre los esquemas de argumentación) proporcionan una base para poder analizar y fomentar el desarrollo de las demostraciones en la escuela como medio de validación del conocimiento matemático personal de cada uno de los alumnos de los niveles básicos.

Sin embargo, no podemos dejar de lado el hecho de que el aprendizaje de la demostración, es decir, el hecho de construir la noción de demostración como validación del conocimiento matemático es un proceso complejo y no un producto. Se requiere pensar que no sólo la demostración (*proof*) es un producto que puede ser clasificado, sino también un proceso (*proving*) que involucra otros procesos que pueden y deberían ser evaluados para poder ser promovidos durante el aprendizaje de las Matemáticas, tal como se ha sugerido en Larios (2015). Podemos evaluar estos productos, pero en el salón de clase se hace necesario ir más allá y considerar el seguimiento continuo de los procesos que llevan a la generación de tales productos.

Así que el análisis de las justificaciones puede aprovechar la herramienta propuesta en el EOS que se denomina *configuraciones didácticas*, para identificar los episodios en los que se producen los argumentos y así evitar descontextualizarlos (ver, como ejemplos similares, sus usos en Larios, Font y Nieto, 2013, y en Pochulu y Font, 2011).

Consideramos que el demostrar (como validación) es un macroproceso, por lo que se ha decidido trabajar en la selección de algunos de los procesos que propone el EOS (representados en la Figura 3) para identificar descriptores a fin de evaluar su desarrollo durante la construcción de las demostraciones en el contexto escolar con procedimientos similares a los que propuso Rubio (2012) al relacionarlos con las facetas duales propuestas en el EOS.

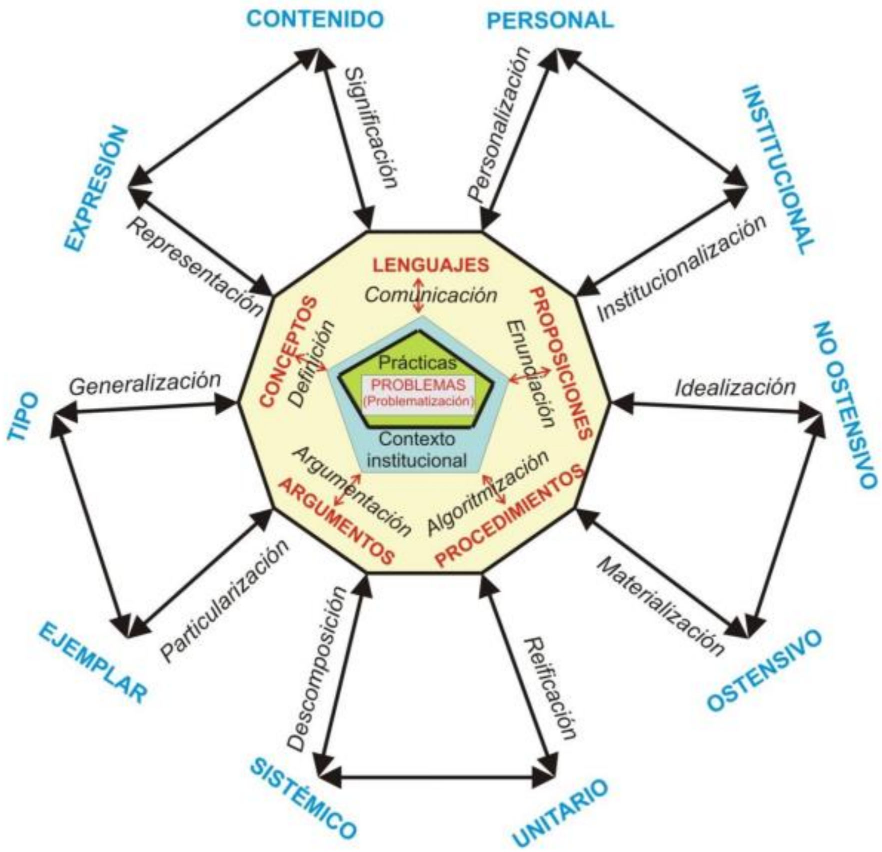

Figura 3. Configuración de objetos y procesos. (Tomado de Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone, 2016, p. 97)

En este momento se han planteado algunos avances en proyectos (ver por ejemplo Fajardo y Larios, 2015) que proporcionen niveles de desempeño o descriptores que ayuden a cubrir la necesidad docente de tener herramientas de evaluación que permitan darle un seguimiento y promover el aprendizaje de la demostración como validación del conocimiento matemático que es construido de manera continua (Larios, 2015).

Referencias

Arellano C., C. (2013). *La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México. Disponible en: http://ri.uaq.mx/handle/123456789/1232.

Bloch, E. D. (2000). *Proof and fundamentals.* Boston: Birkhäuser.

Boero, P., Garuti, R. y Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez y L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology* *of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Valencia: Universidad de Valencia.

Fajardo A., M. C. y Larios O., V. (2015). Análisis de los esquemas de argumentación de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Sahuarus. Revista Electrónica de Matemáticas, 1*, 68-73.

Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración, 31*(2), 181-205.

Flores S., A. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Flores E., C., Gómez R., A. y Flores S., Á. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae*, *12*(2), 22-42.

Godino, J. D. y Batanero B., C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, Á. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 91-110.

González G., N. (2010). *Conceptualización de propiedades de las figuras geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio.* Tesis de maestría. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.

González G., N. y Larios O., V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria.* Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 21-34). Valencia: Universidad de València.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 65-78). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). Washington: AMS.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 427-441. DOI: 10.1007/s11858-008-0095-y.

Larios O., V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica.* Tesis doctoral. México, México: Cinvestav.

Larios O., V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. En P. Scott y Á. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2015* (vol. 7, pp. 399-412). Santo Domingo, República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Larios O., V., Font M., V. y Nieto H., J. A. (2013). Prácticas docentes en la secundaria del Estado de Querétaro. En V. Larios Osorio y A. J. Díaz Barriga Casales (Eds.), *Las prácticas docentes en Matemáticas en el Estado de Querétaro* (pp. 93-185).

Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.
Pochulu, M. y Font M., V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, *14*(3), 361-394.
Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5-41.
Recio, Á. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.
Rubio G., N. V. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.
Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177.
Toulmin, S. E. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona: Ediciones Península.