Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática

Onto-semiotic analysis of a mathematical modelling task

Belén Giacomone

Universidad de Granada

Resumen

Como parte del desarrollo profesional del profesor, como también del formador e investigador en educación matemática, es necesario disponer de instrumentos que permitan realizar análisis pormenorizados de la actividad matemática escolar. En este trabajo se describe el análisis ontosemiótico *a priori* de una tarea de modelización matemática, que fue implementada con un grupo de futuros profesores de matemáticas. El objetivo está en mostrar la eficacia de algunas herramientas teóricas y metodológicas del *enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático* para analizar la diversidad de objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas. Este análisis permitirá identificar potenciales conflictos en el aprendizaje matemático. Finalmente, el análisis ontosemiótico llevado a cabo permite tomar conciencia de la importancia de incorporar este tipo de acciones en la formación del profesorado.

Palabras clave: Análisis ontosemiótico, prácticas matemáticas, tarea analítica-algebraica formación de profesores

Abstract

As a part of the teacher's professional development, as well as for teacher educators and mathematics education researchers, instruments that allow the detailed analysis of school mathematical activity are required. This paper describes the a priori onto-semiotic analysis of a mathematical modelling task, which was implemented with a group of prospective mathematics teachers. The objective is to show the effectiveness of some theoretical and methodological tools from the onto-semiotic approach of mathematical knowledge to analyze the diversity of objects and processes involved in mathematical practices. This analysis will be used for identifying potential conflicts in mathematical learning. Finally, the onto-semiotic analysis carried out help us to become aware of the importance of incorporating these actions in teacher education.

Keywords: Onto-semiotic analysis, mathematical practices, analytic-algebraic task, teacher education

1. Introducción

Para comprender las dificultades y conflictos de aprendizaje, es necesario comenzar por realizar análisis epistemológicos de las tareas matemáticas y los diversos modos de abordarlas. Sin embargo, para lograr dicho análisis, se requiere contar con herramientas específicas que permitan analizar a un nivel microscópico, las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de tareas. Este es el punto de partida de este trabajo; dar a conocer un tipo de herramienta, tanto teórica como metodológica que permita progresar en la identificación de los objetos matemáticos involucrados en la actividad matemática y abordar el estudio de los diversos factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos.

El trabajo que aquí se presenta complementa a otros realizados previamente con una finalidad similar; en Giacomone y Godino (2016) se reflexiona sobre la importancia de realizar análisis *a priori* de las tareas y se describe un ciclo de diseño en el cual se hacen

Giacomone, B. (2017). Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

operativas estas herramientas. Así, la tarea que se desarrolla en este trabajo, fue aplicada como parte del mencionado diseño, en el contexto de en un curso de máster para la formación de profesores de educación secundaria.

En la siguiente sección se describe el marco teórico que soporta el tipo de análisis aplicado y se describe también el método empleado. En la tercera sección se concretiza el análisis ontosemiótico a partir de una tarea analítica-algebraica sobre modelización matemática re-diseñada previamente. Finalmente en la última sección, se plantean las implicaciones de este trabajo en el campo de la formación de profesores de matemáticas.

2. Marco teórico y método

El *Enfoque Ontosemiótico* (EOS) es un sistema teórico inclusivo que articula diversas aproximaciones y modelos usados en la investigación en educación matemática (Font, Godino y Gallardo, 2013; Godino, Batanero y Font, 2007). Entre las nociones que se vienen desarrollando en este marco, se encuentra la herramienta *Configuración de objetos y procesos* (Figura 1), emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas, en la cual se incluye una tipología explícita de objetos matemáticos (y de sus respectivos procesos), que facilita la descripción y el análisis de la actividad matemática.

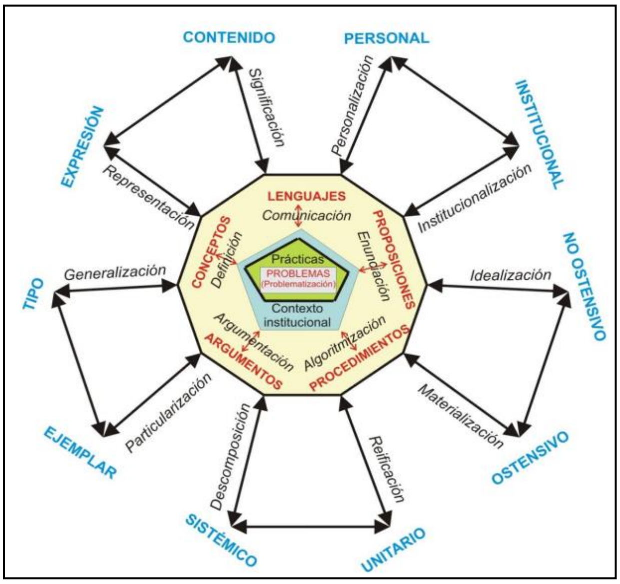


Figura 1. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

Estos objetos primarios son (Godino et al., 2007, p. 130):

- lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);
- situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios).
- conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función);
- proposiciones (enunciados sobre conceptos);
- procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo);
- argumentos (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos, tal como se muestra en la Figura 1.

A partir de la Tabla 1, se discute el papel que algunos de estos procesos (particularización - generalización; idealización - materialización; significación - representación; personalización - institucionalización) juegan en la aparición de los objetos primarios implicados, tanto en el enunciado de la tarea de la sección 3, como en la construcción de su solución. De esta manera, el fin educativo es mostrar que la aplicación de la herramienta *configuración ontosemiótica* puede ayudar a comprender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático, al revelar la trama de objetos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

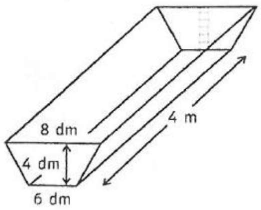
En el marco de un enfoque cualitativo, se trata de una investigación descriptiva a partir de una metodología de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas. En Godino (2002) se realiza una primera aproximación a dicha metodología analizando una lección de un libro de texto sobre la mediana; en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se realiza el análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta; en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se analizan las respuestas de un niño a una tarea relacionada con el aprendizaje de la decena; y en Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras (2016) se muestran las configuraciones ontosemióticas implicadas en el uso de diagramas y visualizaciones. En la sección 3 mostramos una versión del análisis que consideramos más operativa y eficaz para mostrar la configuración de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema. Así, con este aporte, se amplían nociones teóricas dentro del marco en cuestión.

3. Análisis ontosemiótico *a priori* de la tarea

En la Figura 2 se muestra la situación-problema que se va a analizar, seguida de una posible solución aplicando modelización matemática. El problema matemático fue tomado del trabajo de Segal y Giuliani (2010); además ha sido implementado por Etchegaray, Corrales y Nahuin (2015) en un taller de formación de profesores de matemática. Sin embargo, para realizar análisis epistemológicos donde se ponga en juego el conocimiento propio para la enseñanza de las matemáticas, se ha considerado necesario modificar la tarea incorporando los ítems a), b) y c) que se muestran a continuación. Respecto al ítem c) no será desarrollado en el análisis *a priori*, dado que no sigue el objetivo de este trabajo.

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo. Se trata de un prisma recto de 4 m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6dm, base mayor 8dm y altura 4dm.

Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300, … litros.



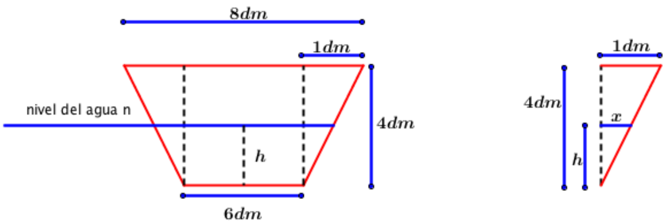
a) Encuentra la manera de preparar dicha varilla indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.
b) Identifica la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tareas (completa la tabla incluida abajo, añadiendo las filas necesarias).
c) Enuncia variantes del problema e identifica los cambios que se producen en los conocimientos puestos en juego en cada variación.

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

Figura 2. Tarea de modelización matemática

Una posible respuesta a la tarea, está dada por la siguiente secuencia de prácticas matemáticas operativas y discursivas, dividida en 8 unidades de análisis elementales; esta descomposición permite realizar análisis más detallados de la actividad matemática que se pone en juego en la resolución del problema.

1. Considero *dm* y *dm*^{3} como las unidades de longitud y volumen; por lo tanto 4*m*=40*dm* y litro=*dm*^{3}
2. El volumen total del bebedero es $V = \frac{(8dm+6dm)}{2}\,4dm.40dm = 1120dm^3$
3. La altura *h* del agua del bebedero varía de $0 \leq h \leq 4$
4. El volumen de agua del bebedero *V(h)* varía de $0 \leq V(h) \leq 1120$
5. Las bases de los trapecios son paralelas porque están determinadas por el nivel que alcanza el agua, paralelo al nivel 0. Por lo tanto, los triángulos de la derecha son semejantes porque sus bases son paralelas.



Por lo tanto sus lados son proporcionales

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{h} \text{ luego } x = \frac{1}{4}h$$

6. Así, la base mayor del trapecio de altura h es $n = x + 6 + x = 6 + \frac{1}{2}\,h$
7. El volumen de agua contenido en un bebedero si tuviera altura h será de:

$$V(h) = \frac{\left(6 + \frac{1}{2}h + 6\right)}{2}\,.h.40$$

$$V(h) = 240h + 10h^2$$

8. Despejo la altura en función del volumen: $10\,h^2 + 240h - v = 0$

$$h(v) = -12 + \sqrt{144 + \frac{1}{10}v}$$

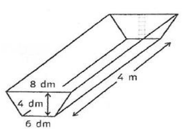
9. Para cada valor de *v* pedido, la altura del trapecio *h(v)* (graduación de la varilla) será:

Volumen v (dm^3)	Altura de la varilla $h(v)$ (dm)
0	0
100	0.41
200	0.81
300	1.19
400	1.56
500	1.93
600	2.28
700	2.63
800	2.97
900	3.3
1000	3.62
1100	3.94
1120	4

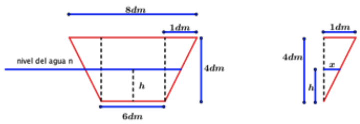
10. Para la graduación de la varilla, se puede utilizar algún programa informático indicando las medidas obtenidas, o bien pasar las alturas a centímetro y graduarla manualmente.

La Tabla 1 sintetiza el análisis ontosemiótico del enunciado y su resolución, descompuesta en las unidades de análisis descritas anteriormente. La columna de la derecha describe los objetos referidos en las prácticas matemáticas de la columna central. La columna de la izquierda indica el papel, rol o función, que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo, así como su intencionalidad.

Tabla 1. Análisis ontosemiótico

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas
Contextualizar el problema; presentar los datos.	<u>Enunciado</u> En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo. Se trata de un prisma recto de 4m ... 	*Elementos lingüísticos:* relación entre lenguaje natural y la representación gráfica; convenciones asumidas para identificar la dimensiones del bebedero. *Conceptos:* prisma recto y sus elementos; trapecio isósceles y sus elementos; figuras geométricas congruentes; unidades de longitud; relación entre unidades de medidas de longitud.
Presentar la situación problemática	Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua ...	*Conceptos:* volumen de un prisma recto; altura; posición vertical; unidades de volumen; pasajes de unidades; varilla de medición.
Enunciar el problema que se	a) Encuentra la manera de preparar dicha varilla	*Conceptos:* relación entre altura y volumen de un prisma recto;

quiere resolver: medir de manera indirecta el volumen del agua a partir de la altura de la varilla. (modelización); construcción de una varilla como instrumento de medida.	indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.	relación entre altura y distancia. *Concepto de justificación* sobre un procedimiento
Fijar una unidad de medida; acción requerida para realizar operaciones.	Solución 1. Considero *dm* y dm^3 como las unidades de longitud y volumen; por lo tanto 4*m*=40*dm* y litro=dm^3	*Conceptos:* magnitudes de longitud y volumen; unidades de longitud y volumen. *Procedimientos:* • pasar de metros a decímetros; • pasar de litros a decímetros cúbicos. *Proposiciones:* • 4m = 40dm • 1litro = 1dm3 *Argumentaciones:* basada en las reglas de conversión de unidades.
Determinar el volumen de agua máximo. Acción necesaria para el paso 3.	2. El volumen total del bebedero $V = \frac{(8dm+6dm)}{2}\, 4dm. 40dm = 1120dm^3$	*Conceptos:* cantidad de volumen total del bebedero; dimensiones y volumen de un prisma recto; dimensiones y área de un trapecio isósceles. *Procedimiento*: • cálculo del volumen de un prisma recto a partir de los datos. *Proposición:* • $\mathrm{V} = 1120\mathrm{dm}^3$ *Argumentación:* de tipo deductivo a partir de los datos
Determinar los posibles valores de la altura, los cuales condicionan las funciones de las prácticas siguientes.	3. La altura *h* del agua del bebedero v está comprendida en el siguiente intervalo: $0 \leq h \leq 4$	*Conceptos:* función; variables dependiente e independiente; intervalo real; numero reales; extremos del intervalo; mayor igual; menor igual. *Convenio de etiqueta*: *h* *Proposición:* • $0 \leq h \leq 4$ *Justificación* basada en los datos del problema.
Determinar los posibles valores del volumen, los cuáles condicionan	4. El volumen de agua del bebedero *V(h)* está comprendido en el siguiente intervalo:	*Conceptos: ídem* *Convenio de etiqueta*: *V*(*h)* *Proposición:* • $0 \leq V(h) \leq 1120$

la práctica 8.	$0 \leq V(h) \leq 1120$	*Justificaciones:* basadas en los datos del problema y cálculo previo.
Establecer relaciones entre la altura h del trapecio y su base mayor n. Acción necesaria para modelizar el área del trapecio en función de su altura	5. Las bases de los trapecios son paralelas porque están determinadas por el nivel que alcanza el agua, paralelo al nivel 0. Por lo tanto, los triángulos de la derecha son semejantes porque sus bases son paralelas.  Por lo tanto sus lados son proporcionales $\frac{1}{4} = \frac{x}{h}$ luego $x = \frac{1}{4}h$	*Elementos lingüísticos:* lenguaje visual-diagramático y lenguaje algebraico. *Conceptos:* teorema de Thales; semejanza de triángulos; proporcionalidad. *Convenio de etiquetas*: x; n; marcas en las figuras. *Proposición:* • Las bases de los trapecios son paralelas *Argumentación:* dada por la definición de nivel de agua. *Proposición:* • $x = \frac{1}{4}h$ *Argumentación:* por semejanza de triángulos. *Procedimientos*: • representar y relacionar figuras geométricas para mostrar la semejanza de los triángulos; • igualdad de razones; • despeje de la variable x en función de la altura *h*.
Determinar las dimensión de la base mayor del trapecio para calcular su área en el paso siguiente.	6. Así, la base mayor del trapecio de altura h es $n = x + 6 + x = 6 + \frac{1}{2}\,h$	*Conceptos:* base mayor de un trapecio isósceles, función lineal. *Procedimientos*: • reemplazar valores obtenidos previamente; • suma algebraica. *Proposición:* • $n = x + 6 + x = 6 + \frac{1}{2}\,h$ *Argumentación deductiva* basada en los datos obtenidos en el paso anterior.
Obtener la expresión del volumen en función de la altura del agua.	7. El volumen de agua contenido en un bebedero si tuviera altura h será de: $V(h) = \frac{\left(6+\frac{1}{2}h+6\right)}{2}\,.h.40$ $V(h) = 240h + 10h^2$	*Conceptos:* área del trapecio de altura h, volumen del prisma recto con base trapezoidal, función cuadrática. *Procedimientos*: • simplificación de una expresión algebraica. Proposición • $V(h) = 240h + 10h^2$ *Argumentación:* deductiva basada en la definición del volumen de un

<table>
<tr><td></td><td></td><td>prisma con base trapezoidal.</td></tr>
<tr><td>Modelizar una situación: expresar la altura en función del volumen.</td><td>8. Despejo la altura en función del volumen:
$10\,h^2 + 240h - v = 0$
$h(v) = -12 + \sqrt{144 + \frac{1}{10}v}$</td><td>Conceptos: ecuación cuadrática; soluciones de una ecuación de segundo grado.
Proposición:
• $h(v) = -12 + \sqrt{144 + \frac{1}{10}v}$
Procedimiento y argumentación:
• cálculo de una solución cuadrática.</td></tr>
<tr><td>Expresar con una tabla la respuesta al problema.</td><td>8. Dar valores a la v, calcular la altura h
<table>
<tr><th>Volumen v (dm³)</th><th>Altura de la varilla $h(v)$ (dm)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>100</td><td>0.41</td></tr>
<tr><td>200</td><td>0.81</td></tr>
<tr><td>300</td><td>1.19</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>
</td><td>Elementos lingüísticos: relación entre lenguaje algebraico, aritmético y tabular.
Procedimientos:
• hallar el valor numérico de la función h(v) para cada valor de la variable independiente;
• construcción de una tabla;
Proposiciones:
• para $100dm^3$ la altura del agua es 0.41dm;
• para $200dm^3$ la altura es 0.81dm;
...
Argumentación: basada en cálculos aritméticos
Proposición:
• la graduación de la varilla está es la variación de la altura del agua h del trapecio.
Justificación: dada por la interpretación del modelo matemático a la realidad, tal que la altura de la varilla está representada por la altura del agua.</td></tr>
</table>

El análisis reflejado en la Tabla 1, se complementa con el reconocimiento de los procesos que se ponen en juego:

- Procesos de significación-representación:

Las prácticas y objetos ponen de manifiesto procesos de significación y representación que realiza implícitamente el sujeto epistémico que resuelve el problema. La columna central contiene los objetos ostensivos constitutivos de las prácticas elementales, los cuales son la expresión o antecedente de la función semiótica que se establece con los objetos identificados en la tercera columna y que constituyen los correspondientes contenidos o significados de dichas funciones semióticas. Se trata en este caso de funciones semióticas de tipo referencial. Pero cada práctica elemental textualizada en la columna central puede ser también interpretada en términos del papel que desempeña en el proceso resolutivo. De este modo se establece una nueva función semiótica cuyo antecedente es la práctica textualizada y el contenido o significado es el uso o papel desempeñado.

Este análisis de las funciones semióticas, y por tanto, de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en el proceso resolutivo, no es exhaustivo. Cada práctica elemental se puede a su vez descomponer en otros elementos constituyentes, los cuales a su vez desempeñan su propio rol dentro de la práctica y refieren a otros objetos no ostensivos. En particular, se pueden también analizar, en términos de funciones semióticas, las conversiones entre los registros de representación semiótica implicados (numérico, gráfico y algebraico), así como los tratamientos que se realizan dentro de cada registro (Godino, et al., 2016).

- Procesos de materialización-idealización:

Los objetos identificados tienen una faceta ostensiva (visible) y otra no ostensiva (ideal, abstracta), resultando complejas las relaciones que existen entre ambas (Godino, Giacomone et al., 2016). En el caso de la tarea de la Figura 2, se trata de construir una varilla, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos, como se menciona en la fila 3. Además, se parte de la representación material de un objeto real (bebedero con forma de prisma) o ideal (prisma recto con base trapezoidal); así, el dibujo dado es una materialización de un objeto ideal, a partir del cual se pretende realizar la modelización matemática pedida. Otro ejemplo está en la expresión $V(h) = 240h + 10h^2$ (práctica 7), la cual moviliza una serie de objetos no ostensivos, como es la función cuadrática, variables dependientes, independientes... que si bien no están presentes al observar la expresión simbólica, son necesarios para el trabajo matemático.

- Procesos de particularización-generalización:

Se considera al bebedero como ejemplar de un cierto tipo de objeto, y se obtiene una fórmula general, para cualquier objeto que represente un prisma recto con base trapezoidal. La expresión *V(h)* es un ejemplar del tipo *volumen en función de la altura.* Se utilizan fórmulas generales y se aplican a los casos particulares del problema. Las proposiciones referidas a la semejanza de triángulos están particularizadas a los datos del problema y al tipo de figura geométrica (práctica 5)

- Procesos de descomposición-reificación:

La dualidad unitario-sistémico está ligada a los procesos de reificación (constitución de objetos como una totalidad) y descomposición (inversa). En este caso, se trata de un cuerpo geométrico presentado ostensivamente, que interviene como un todo unitario que debe ser descompuesto en diferentes elementos: áreas de las caras, alturas, triángulos, etc.

4. Conclusiones e implicaciones para la docencia

El tipo de análisis que se ha implementado, esto es, el reconocimiento y la gestión de los conocimientos en la realización de las tareas, permite que el futuro profesor, formador o investigador, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y tome consciencia de la diversidad de significados que se les atribuye en el contexto específico.

En diversos trabajos (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012; Rubio, 2012; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016) se aplican las herramientas teóricas del EOS al campo de la formación del profesor de matemáticas y desarrollo profesional. Se asume que el profesor de matemáticas debe desarrollar la competencia específica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, hemos iniciado una investigación de diseño a partir de la planificación, implementación y análisis retrospectivo de experiencias didácticas con un grupo de futuros profesores de matemática de educación secundaria. En Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2016) se presentan los primeros resultados sobre la exploración inicial de los significados personales de los estudiantes; finalmente la tarea, tal como se muestra en la Figura 2, ha sido implementada como instrumento de evaluación en dicho diseño. El análisis *a priori* de cada una de las tareas implementadas durante toda la experiencia formativa, nos ha permitido a los investigadores y al profesor del curso, tomar conciencia de las relaciones complejas entre los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, prever conflictos cognitivos y gestionar las dificultades efectivas en el aula; asimismo ha sido un soporte en la puesta en común.

Particularmente, con el análisis mostrado en este trabajo, se considera que el profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos, y usarla de manera competente para la elección de las tareas, las cuales formarán parte del proceso de diseño didáctico.

Referencias

Etchegaray, S., Corrales, J. y Nahuin, K. (2015). Un proceso de modelización en la formación del profesor: Análisis didáctico-matemático. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 655). Villarrica: SOCHIEM.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Giacomone, B. y Godino, J. D. (2016). Experiencia formativa para desarrollar una competencia didáctico-matemática de futuros profesores. *Actas del XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas, ni más ni menos*. Jerez: CEAM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 269-277). Málaga, España: SEIEM.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, J. A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez,

P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 272-285). Málaga, España: SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Blanco, T. F., Wilhelmi, M. R. y Contreras, A. (2016). Onto-semiotic configurations underlying diagrammatic reasoning. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 291-298). Szegel, Hungary: PME.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(Especial),* 133-156.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1-21.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 71-98.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, España.

Segal, S. y Giuliani, D. (2010). *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades.* Bs. As., Argentina: Libros del Zorzal.