Evaluación del razonamiento de alumnos de secundaria en problemas de permutaciones

Assessing secondary school students' reasoning on permutation problems

Javier García de Tomás[1], Pedro Arteaga[2], Rafael Roa[2]

[1]I.E.S.O. Cinxella, [2]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos los procesos de resolución de problemas de permutación por parte de alumnos de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria, que aún no han recibido una enseñanza formal del tema. Para ello se propone a los estudiantes que forman parte de la muestra seis problemas de permutaciones ordinarias y con repetición, variando también el tipo de elemento a permutar (personas, números y objetos) y teniendo en cuenta problemas de selección y problemas de colocación. Se comparan las respuestas y estrategias en estos tipos de problemas identificando conflictos semióticos.

Palabras clave: Permutaciones, estrategias, conflictos semióticos.

Abstract

In this paper we analyse the solving processes of permutation problems by students in the first three compulsory secondary education degrees, who have not yet received a formal teaching of the subject. For this purpose, the students are given six problems of ordinary and repetition permutations, where the type of elements (people, numbers and objects) are also varied and taking into account problems of selection and location. We compare the responses and strategies in these types of problems, and identify the students' semiotic conflicts.

Keywords: Permutations, strategies, semiotic conflicts.

1. Introducción

La combinatoria es hoy día una amplia rama de la matemática y base de la matemática discreta, con muchas aplicaciones en la ciencia, la técnica y la optimización (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994; 1997; Godino y Batanero, 2016; Wilhelmi, 2004). Sin embargo, su enseñanza no se resalta lo suficiente ya que suele aparecer ligada principalmente a la probabilidad. En este trabajo analizamos los procesos de resolución de problemas de permutación por parte de alumnos de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria, que aún no han recibido una enseñanza formal del tema. Para ello se propone a los estudiantes que forman parte de la muestra un cuestionario sencillo con problemas de permutaciones ordinarias y con repetición, variando también el tipo de elemento a permutar (personas, números y objetos). En total se considerarán seis problemas, combinando las anteriores variables. Tendremos en cuenta también dos tipos de problemas que Navarro-Pelayo (1994) describió como problemas de selección y problemas de combinación. Usaremos siempre un número pequeño de elementos para que el alumno si no sabe o no recuerda la fórmula lo pueda deducir por enumeración.

García de Tomás, J., Arteaga, P., y Roa, R. (2017). Evaluación del razonamiento de alumnos de secundaria en problemas de permutaciones. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

2. Marco teórico y antecedentes

En esta investigación usamos como base el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). En este marco integrador, se asume que los objetos matemáticos emergen de las prácticas matemáticas para dar respuestas a situaciones-problema de naturaleza intra o extra-matemática. En nuestro trabajo consideramos los problemas combinatorios, prácticas y objetos que se originan de su resolución. El significado de la combinatoria en nuestro estudio sería el conjunto de prácticas que se vinculan a la resolución de estos problemas y que tratamos de determinar en nuestro trabajo.

En el marco teórico, se diferencia entre el *significado institucional* (conjunto de prácticas, que sobre un cierto campo de problemas es compartido dentro de una institución) y el *significado personal* (conjunto de prácticas que adquiere una persona y puede ser diferente al aceptado dentro de la institución). Así diferenciamos el significado de la combinatoria y de las permutaciones en la institución docente y el que le pueda asignar un estudiante en nuestra investigación.

Función semiótica y conflicto semiótico

Según Godino (2002), en el trabajo matemático intervienen funciones semióticas o correspondencias con tres componentes: la expresión (signo); el contenido (significado de tal signo, lo representado) y un criterio o regla de correspondencia que sirve para interpretar la relación entre expresión y contenido. Es decir, en el trabajo matemático son necesarios una serie de pasos en los que se hace una interpretación o una representación. Cualquier tipo de objeto (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), puede participar en la función semiótica como expresión o contenido.

Las funciones semióticas, generalmente vienen dadas por su expresión, y los otros dos componentes quedan implícitos. Por ejemplo, en la expresión Vm,n el estudiante ha de hacer una interpretación, recordando que se refiere a las variaciones ordinarias de m elementos tomados n en n; y además recordar que m es el tamaño del conjunto inicial y n el de la muestra que se quiere tomar. Cuando se produce un desacuerdo entre el significado que ha establecido el autor de la función semiótica y el que hace el interpretante de la misma se habla de conflicto semiótico. Uno de los objetivos de nuestro trabajo es identificar los conflictos semióticos en los problemas de permutación.

Antecedentes del estudio

Para Inhelder y Piaget (1955) la capacidad combinatoria es un componente básico del razonamiento formal, ya que es necesario para la lógica proposicional en los adolescentes. Según los autores, el razonamiento hipotético- deductivo actúa mediante técnicas propias de la combinatoria cuando se aplican sobre un conjunto de posibilidades para examinar y enumerar, hasta alcanzar la solución final. Una vez cubierto el periodo en el que se adquieren las operaciones formales, los estudiantes adolescentes descubren de forma espontánea la enumeración sistemática, luego deberían ser capaces de resolver problemas sencillos de combinatoria, aunque no hubieran recibido ningún tipo de instrucción sobre ella. Fischbein y Gazit (1988) sin embargo concluyen que la capacidad de resolver problemas de combinatoria no se alcanza de forma espontánea ni siquiera en el nivel de las operaciones formales, luego los estudiantes requieren recibir instrucción para ello. Se pueden formar intuiciones primarias incorrectas si no se educa el razonamiento combinatorio; de ahí el interés de enseñar este tema de una forma simple desde lo antes posible.

Varios autores analizan posteriormente las estrategias de los estudiantes y sus errores en los problemas combinatorios. Entre ellos destacamos los estudios de Navarro-Pelayo (1994) con estudiantes de secundaria y Roa (2000) con estudiantes de la licenciatura de matemáticas, de quienes hemos tomado algunos problemas de nuestro cuestionario. Una de las variables que consideran es el modelo combinatorio del enunciado. En nuestro caso tomamos dos de los modelos analizados por estos autores: el modelo de selección donde los problemas se plantean como extracción de muestras de una población y el modelo de colocación de un cierto número de objetos en varias celdas o casilleros.

Nuestro estudio se diferencia de los anteriores en que nos centramos exclusivamente en los problemas de permutación, por ser estos los únicos citados en el currículo de secundaria y porque nuestros alumnos no han tenido instrucción en combinatoria.

3. Método

La población sobre la que se realiza el presente estudio la constituyen los estudiantes de los tres primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Dentro de este grupo, la población específica de la que se van a tomar las muestras, son los estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria que recibe estudiantes de tres municipios cercanos.

La muestra se compone de 23 estudiantes de 1º de ESO con edades comprendidas entre los 12-13 años; 28 estudiantes de 2º de ESO, con edades entre 13-15 años; y, 24 estudiantes de 3º de ESO, con un rango de edades entre 14-16. Se contó con la colaboración de los profesores y del director del centro, así como de estos estudiantes; a todos ellos agradecemos su colaboración. Los conocimientos de combinatoria de estos estudiantes se reducen a estrategias intuitivas de enumeración, utilizadas en el tema de probabilidad en el último curso de educación primaria, pues no han recibido enseñanza formal de combinatoria. No obstante, de acuerdo a Fischbein y Gazit (1988) e Inhelder y Piaget (1955), es de esperar un razonamiento combinatorio intuitivo que les permita resolver problemas cuando el número de elementos es pequeño.

Cuestionario utilizado

En nuestra investigación se propone un cuestionario sencillo, formado exclusivamente por problemas relativos a permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición. Se eligió esta operación combinatoria por ser la única mencionada explícitamente hasta 3º ESO en las nuevas directrices curriculares que se terminarán de implantar este curso (MECD, 2015). Se planteó a los estudiantes seis problemas (ver ejemplo en la Figura 1) variando las variables de la tarea en la forma mostrada en la Tabla 1. Por tanto se tienen tres problemas de permutación y de permutación con repetición e igual número de colocación y selección. Además dos problemas de cada tipo de objeto a permutar.

Tabla1. Diseño del cuestionario

Elemento a permutar	Colocación	Selección
Objetos	Problema 2, P	Problema 1 , PR
Personas	Problema 6, PR	Problema 4, P
Números	Problema 3, P	Problema 5, PR

Este primer ítem se ha tomado de la investigación de Navarro-Pelayo (1994). Fue también utilizado por Roa (2000). Se propone un problema en el contexto de selección, pues se trata de elegir elementos de una población finita (las cuatro fichas de colores iniciales). Los elementos de la población son objetos que se diferencian por el color. Es necesario tener en cuenta el orden, pues vamos anotando los colores según se obtienen y no sería, por ejemplo, lo mismo ARAB que AARB. Como se desea agotar todas las fichas, nos encontramos ante un problema de permutaciones; se trataría de permutaciones con repetición, porque hay dos fichas del mismo color en la caja. Por ello, si en la permutación ARAB, por ejemplo, permutamos entre sí las dos letras A, se obtiene la misma.

Problema 1. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Figura 1. Ejemplo de problema en el cuestionario

El problema se puede resolver de diferentes formas. Puesto que la mayoría de los estudiantes no ha estudiado las fórmulas de las operaciones combinatorias, se espera que lo aborden con estrategias intuitivas de enumeración y utilizando estrategias tales como fijar una variable, dividir el problema en partes, generalizar o recursión (Roa, 2000). También sería posible formar un diagrama en árbol o algún tipo de esquema gráfico que apoye la enumeración; utilizando, por ejemplo, un dibujo de las fichas de colores o una tabla. El estudiante podría obtener una fórmula, usando las reglas de la suma y el producto o aplicar directamente la fórmula de permutaciones si la conoce. Del mismo modo se analizaron el resto de los problemas.

4. Resultados y discusión

Para tener una visión general de los resultados obtenidos, a continuación compararemos estos resultados en función de las diversas variables consideradas. Por un lado se analiza la corrección de la respuesta: correcta si se enumeran o cuentan correctamente todos los casos; parcialmente correcta si falta algún caso o se repite, pero todos los casos son posibles, e incorrectas cuando se producen configuraciones que no se ajustan a lo pedido en el enunciado.

Estrategias de resolución

Además de estudiar las soluciones, hemos analizados las estrategias seguidas para determinarlas. Se han encontrado las siguientes:

Esquemas gráficos: aunque ninguno de los grupos conoce los diagramas de árbol, algunos estudiantes realizan algún esquema similar, agotando todas las posibilidades que resultan cuando se empieza con un determinado color, después con otro, y así sucesivamente hasta cubrirlas todas (Figura 2).

Figura 2. Ejemplo de esquema gráfico en el problema 1

Enumeración sistemática completa: en algunos casos se ha utilizado la técnica de la enumeración sistemática, entendiendo como tal, fijar un primer elemento de la permutación y variar el resto para formar el segundo elemento; después, con cada una de las posibilidades encontradas de dos elementos, variar el tercero y así hasta formarlas todas. Un ejemplo se muestra en la Figura 3. Se ha encontrado también e*numeración sistemática incompleta* y e*numeración no sistemática.*

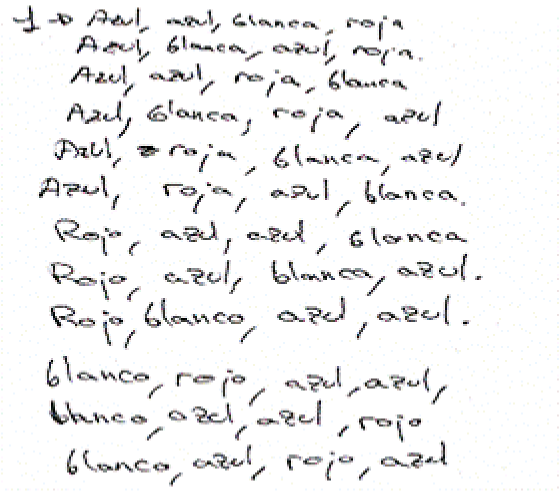

Figura 3. Ejemplo de enumeración sistemática

Fórmulas: los grupos a los que se les ha pasado el cuestionario no tienen instrucción en combinatoria y la mayoría desconoce las distintas tipologías y la formulación específica de cada una. Pero algunos vienen de otros centros donde podrían haberla estudiado; o bien han intentado deducirlas y utilizarlas en la resolución de los problemas usando las reglas de la suma y el producto.

Tablas: En algunos casos, los estudiantes construyen una tabla como ayuda a la enumeración. Por ejemplo, en la Figura 4 se construye una tabla en cuya primera fila se han fijado los puestos que constituyen en comité y en las restantes han ido variando los nombres de los voluntarios.

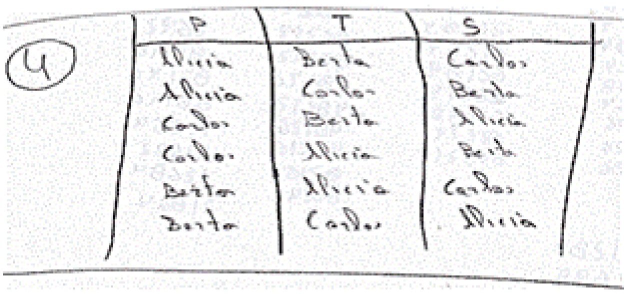

Figura 4. Ejemplo del uso de tablas

A continuación mostramos los resultados. En primer lugar, se analiza la diferencia entre los problemas de permutaciones ordinarias y con repetición; seguidamente, las observables entre los problemas de selección y colocación y, finalmente, las diferencias por curso. Para ello, en cada caso totalizamos las otras variables sumando los resultados, excepto en la variable analizada.

4.1. Comparación entre permutaciones ordinarias y con repetición

En la Figura 5 presentamos el porcentaje de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas en estos dos tipos de problema, observando que no hay diferencias entre los mismos. En cambio en el trabajo de Navarro-Pelayo (1994) resultaron mucho más sencillos los problemas de permutaciones ordinarias (62% de respuestas correctas, frente al 25% en las permutaciones con repetición). Esta autora calcula estos porcentajes sin diferenciar los alumnos con y sin instrucción y, por otro lado, no considera las respuestas parcialmente correctas.

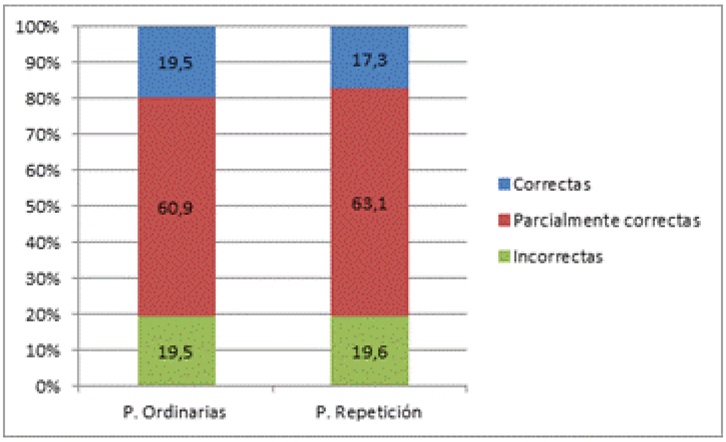

Figura 5. Porcentaje de respuestas en problemas de permutaciones ordinarias y con repetición

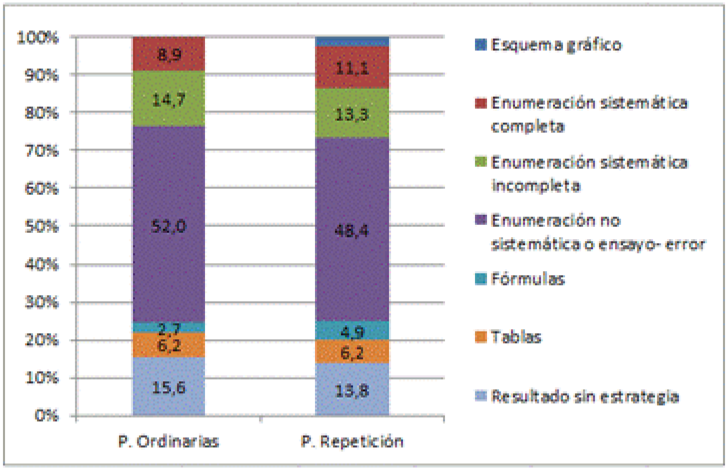

Figura 6. Porcentaje de estrategias en problemas de permutaciones ordinarias y con repetición

En la Figura 6 se comparan las estrategias observadas, siendo la más utilizada la enumeración no sistemática en los dos tipos de problema. El resto de las estrategias se han utilizado en un tanto por ciento similar, excepto el uso de fórmulas, que casi se duplica en los problemas de permutaciones con repetición, y el esquema gráfico que ha sido sólo utilizado en los problemas de repetición.

4.2. Comparación entre problemas de selección y de colocación

En la Figura 7 presentamos el porcentaje de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas en estos dos tipos de problema, observando que los problemas de selección han sido más sencillo para los estudiantes, al igual que ocurrió en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) y según indican Fischbein y Gazit (1988). El porcentaje de respuestas correctas (25,8) duplica en los problemas de selección al correspondiente a los problemas de colocación (11,1). Además hay un 7% menos de respuestas incorrectas. Las diferencias entre respuestas incorrectas y parcialmente correctas entre los problemas de colocación y selección son muy similares, aproximadamente de 7 puntos porcentuales; mientras que en el caso de las respuestas correctas, la diferencia es de aproximadamente el doble, en este caso tomando ventaja los problemas de selección frente a los de colocación.

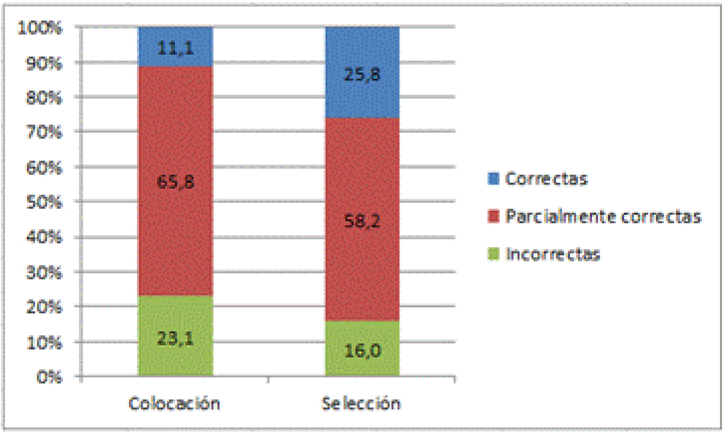

Figura 7. Porcentaje de respuestas en problemas de selección y colocación

En la Figura 8 se deduce que la más utilizada vuelve a ser la enumeración no sistemática. Comparando los dos tipos de problema, se ha utilizado más la estrategia de enumeración no sistemática en los problemas de colocación, 55,5%, frente al 44,9% en los de selección. En los problemas de selección ha sido más aplicada la enumeración sistemática completa y las fórmulas.

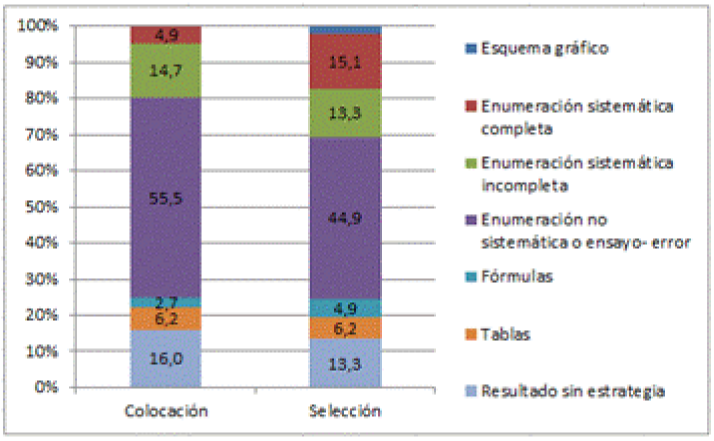

Figura 8. Porcentaje de estrategias en problemas de selección y colocación

4.3. Comparación por curso

En la Figura 9 presentamos los porcentajes para cada curso, observando claramente un aumento de las respuestas correctas con el avance de los niveles educativos, es decir, con la edad de los alumnos, al mismo tiempo que también desciende el porcentaje de respuestas incorrectas. Este resultado coincide con lo expuesto en la investigación de

Fischbein y Gazit (1988), pues el razonamiento combinatorio parece desarrollarse espontáneamente con la edad, aunque no completamente. Vemos, que efectivamente son sólo el 32% las respuestas correctas en el curso tercero, pero también notamos que duplican las de segundo y casi multiplican por seis las de primero. Igualmente hay un gran descenso de las respuestas incorrectas de primero a tercero, que se reducen a la tercera parte. Puesto que la enseñanza favorece en gran medida el razonamiento combinatorio, pensamos que estos resultados apoyarían el iniciarla desde el tercer curso, donde los estudiantes tienen ya una buena intuición para el tema.

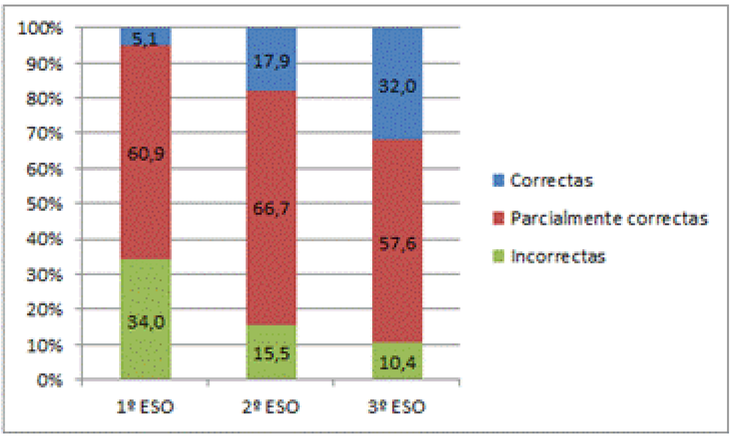

Figura 9. Porcentaje de respuestas según corrección por cursos

En lo que respecta a las estrategias, a partir de la Figura 10 se concluye que la enumeración es la técnica más utilizada en todas sus versiones y en todos los cursos. Con el aumento de la edad, cada vez van siendo enumeraciones más sistemáticas, que pasan del 2,2% en primer curso a 19,5% en tercero en detrimento del ensayo- error, que se reduce del 61,6% en primero a 35,4% en tercero.

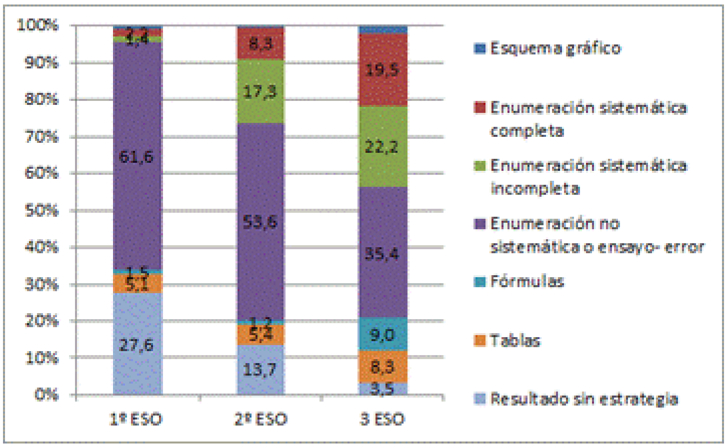

Figura 10. Porcentaje de estrategias según corrección por cursos

También destacan otras estrategias como el uso de tablas o fórmulas a medida que crecen los alumnos; el uso de tablas llega al 8,3% y el de fórmulas al 9% en tercero. Por otro lado, va dejando de aparecer la falta de argumentos para explicar los resultados alcanzados.

4.4. Conflictos semióticos

Al analizar las respuestas de los estudiantes se observaron los siguientes conflictos semióticos, en que los estudiantes producen funciones semióticas no acordes a las institucionales o realizan una interpretación errónea de ciertas funciones semióticas:

- *No diferencia permutaciones idénticas.* Aparece como efecto de la enumeración no sistemática, cuando el estudiante no identifica configuraciones idénticas desde el punto de vista institucional.
- *No agota todas las posibilidades para producir un conjunto de permutaciones,* debido a que no utiliza un razonamiento recursivo completo.
- *Confusión en el número de elementos al formar una muestra.* Cuando al formar la permutación el número de objetos es mayor que el original, interpretando erróneamente las condiciones del problema.
- *Confundir las características del elemento a permutar:* Por ejemplo, al permutar bolas de colores, incluir un color que no aparece en la formulación del problema, interpretando erróneamente el enunciado.
- *Repetir un elemento cuando no está permitido.* En una permutación ordinaria repetir alguno de los elementos, confundiendo permutación con y sin repetición. Aparece en Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000).
- *Considerar distinguibles elementos que no lo son*. Esto ocurre principalmente en las permutaciones con repetición y fue observado por Navarro- Pelayo (2004).
- *Al fijar una variable en una permutación de tamaño n, no observar que hay que trabajar con una permutación de tamaño n-1 para fijar el resto de las posiciones.*
- *Confundir el tamaño de la permutación que se debe formar;* por ejemplo, formar pares de objetos.
- *Fallo en la aplicación de la regla del producto.* Fijadas algunas posiciones, para hallar todas las permutaciones a que da lugar no se multiplica por el número de permutaciones posibles, sino por el número inicial de elementos.
- *Confundir el conjunto a colocar con el conjunto de puestos que debe ser colocado en el modelo de colocación*. También aparece en Navarro-Pelayo; puesto que se trabaja con dos conjuntos de objetos diferentes se interpreta erróneamente el papel de cada uno de los conjuntos.

5. Consideraciones finales

Nuestros resultados confirman los trabajos de Fischbein y Gazit (1988) quien indica que la capacidad para resolver problemas de combinatoria no se alcanza de forma espontánea cuando los alumnos no han recibido instrucción al respecto, ni siquiera en el nivel de las operaciones formales. Igualmente, en el estudio de Navarro-Pelayo se observa una gran dificultad en los estudiantes que no han recibido instrucción.

La combinatoria es la base de la matemática discreta y un gran apoyo en el estudio de la probabilidad, por lo que un razonamiento combinatorio incompleto dificulta estas otras materias, pero sin embargo, es posible introducir ideas combinatorias en diferentes ramas de las matemáticas y en forma gradual (Godino y Batanero, 2016). Por tanto, se concluye este trabajo con la esperanza de motivar e inspirar tanto a los profesores para su labor en el aula como a las personas que diseñan los currículos, para que se conciencien de la importancia del tema y promuevan la enseñanza de la combinatoria en esta etapa educativa.

Agradecimientos: Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. I.O.S. Press

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 193-198.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2016). Implicazioni delle relazioni fra epistemologia e insegnamento della matematica per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria. *La Matemática e la sua Didatica, 24*(1-2), 17–39.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39*(1-2), 127-135.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: P.U.F.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.