Significados personales sobre la vinculación entre una variable estadística y su variable binomial asociada en el contexto de un problema

Personal meanings on a statistical link between variable and its associated binomial variable in the context of a problem

Stella Maris Figueroa y María Andrea Aznar

Universidad Nacional de Mar del Plata, Facultad de Ingeniería

Resumen

En este trabajo se muestra un estudio de los significados personales de un problema cuya modelización corresponde a una distribución binomial. Los datos corresponden a estudiantes de estadística básica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y fueron relevados al concluir el estudio de la ley de los grandes números. Exponer los significados personales de los estudiantes proporciona información necesaria para un próximo diseño instruccional que considere los conflictos cognitivos encontrados y que favorezca la vinculación entre una variable estadística con su variable aleatoria asociada, en el campo de problemas de la ingeniería, para propiciar una enseñanza conjunta de la estadística y de la probabilidad, a través de actividades complementarias.

Palabras clave: significados personales- ingeniería- variable estadística-variable binomial

Abstract

In this paper we study about the personal meanings of a problem whose modelling corresponds to a binomial distribution. The data were collected from students of basic statistics of engineering careers of the Universidad Nacional de Mar del Plata, after they finished the study of the law of large numbers. The identification of the personal meanings of students provides information needed for an upcoming instructional design that considers the cognitive conflicts found and to promote the link between a statistical variable with his random associated variable in the field of engineering problems, as well as to promote the joint teaching of statistics and probability, through complementary activities.

Keywords: personal meanings – engineering - statistical variable- binomial variable

1. Introducción

El Proyecto de *Modernización de la Enseñanza de las Ingenierías*, llevado adelante por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI Morano, Micheloud y Lozeco, 2005) con la colaboración del Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI) de la Agencia Española de Cooperación Internacional comenzó hace más de dos décadas y fue transformándose con las posteriores resoluciones del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, que fijaron el modelo y estándares de la enseñanza de la ingeniería en la Argentina.

Considerando estas experiencias y atendiendo a la necesidad de actualización de los modelos de enseñanza, fundamentalmente a los cambios ocurridos a nivel nacional e internacional en todos los ámbitos, es que el CONFEDI aprobó en 2004 un plan de trabajo para llevar adelante un Proyecto Estratégico de Reforma Curricular de las

Figueroa, S. y Aznar, M. (2017). Significados personales sobre la vinculación entre una variable estadística y su variable binomial asociada en el contexto de un problema. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Ingenierías. De este proyecto surge el documento citado para la formación de los ingenieros por competencias. En el área de estadística, las competencias específicas que son descriptas en el documento se mencionan a continuación y forman parte de los requerimientos internacionales para su enseñanza:

- Planificar y ejecutar estrategias para la resolución de problemas relacionados con estadística.
- Utilizar, interpretar y elaborar diferentes representaciones utilizando distintos registros y lenguajes: tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, gráficas o expresiones funcionales.
- Utilizar, tecnología informática para el análisis y la resolución de problemas vinculados con estadística.

Para fomentar en el estudiante el desarrollo de habilidades que le permitan resolver problemas ingenieriles, utilizando herramientas y estrategias de la estadística, es necesario que ésta le sea enseñada en el escenario de situaciones problema afines. En ese sentido, se busca diseñar un abordaje didáctico que respete las recomendaciones internacionales para una enseñanza contextualizada de la estadística, tal como señalan Batanero (2001) y los estándares internacionales de enseñanza de la estadística (ver, por ejemplo, Carver et al., 2016).

Siguiendo esas recomendaciones se puede diseñar una estrategia de enseñanza en la que los estudiantes respondan a una problemática usando la estadística como un instrumento de investigación, en una enseñanza de la estadística con proyectos de análisis de datos.

Muchas dificultades en el aprendizaje de la inferencia surgen cuando el estudiante no identifica el contexto en el que está trabajando o no diferencia si trabaja con una muestra o con la población (Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Otro ejemplo se produce cuando está estimando la media poblacional por intervalos y, en lugar de escribir el parámetro que está estimando entre los extremos del intervalo, expresa el valor puntual de la estimación entre los extremos encontrados. Respecto a la distribución binomial, Alvarado y Batanero (2007) analizan las dificultades de los estudiantes para comprender la aproximación mediante la distribución normal.

Tradicionalmente, los textos de estadística para ingenieros, comienzan con estadística descriptiva, donde desarrollan el concepto de variable estadística como aquella *característica que puede ser medida* (muchas veces ni se menciona que la variable estadística describe los datos de una muestra) y, luego, al estudiar la teoría de probabilidades, se expone la unidad relativa a variables aleatorias. La definición de una variable aleatoria como función, con dominio en el espacio muestral, que asigna un número real a cada elemento del mismo, puede quedar aislada en la teoría de probabilidades si no se reconoce al espacio muestral asociado a un proceso de muestreo como el *conjunto de todas las muestras posibles que se pueden tomar de una población*. En general se lo define como el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Al llegar a ese capítulo, los estudiantes "ya olvidaron" la variable estadística y no la relacionan con la variable aleatoria.

Para favorecer la *vinculación entre una variable estadística y su variable aleatoria asociada* se puede proponer una estrategia de enseñanza que, a partir de un problema modelizable con su variable aleatoria correspondiente, se pueda comparar su distribución de probabilidades con la distribución de frecuencias relativas de la variable estadística asociada. La idea es, tal como señala Batanero (2013), presentar la estadística como complementaria de la probabilidad, para no separarla de su enseñanza.

Para ello, se deben realizar experimentos aleatorios, con material manipulativo o mediante simulación, obtener datos empíricos de estos experimentos y comparar los resultados obtenidos con sus predicciones calculadas mediante probabilidades. El análisis de datos permite la visualización de las regularidades según el comportamiento de los fenómenos aleatorios, donde se produce la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad.

El campo de problemas de la ingeniería referidos al control de calidad de un lote de producción y muestreo de aceptación del mismo, utiliza frecuentemente el modelo binomial, que por la importancia de sus aplicaciones, es la temática elegida para el diseño de un proceso de instrucción de este primer curso de estadística para estudiantes de ingeniería. Considerar el número de piezas o proporción de unidades defectuosas en una muestra es el ejemplo más sencillo que llevan las pruebas aleatorias repetidas e independientes a la sucesión de pruebas de Bernoulli, y con ellas, a la variable aleatoria binomial. De esta manera, se establecen comparaciones entre los datos reales y/o simulados de la realidad, obtenidos de cada una de las muestras, con los valores teóricos que surgen de la población, al tener en cuenta todos los resultados posibles del experimento aleatorio.

Con la intención de lograr este pasaje de lo empírico a lo teórico en los dos sentidos, este trabajo estudia los significados personales puestos en juego luego de un proceso de instrucción, sin especial énfasis en la vinculación de una variable estadística con su variable aleatoria asociada, al concluir el estudio de la ley de los grandes números. El acercamiento empírico está dado por la simulación a través del software GeoGebra (https://www.geogebra.org/.)

Exponer los significados personales de los estudiantes proporcionará información necesaria para un próximo diseño instruccional que considere los conflictos cognitivos encontrados y que favorezca la vinculación entre las dos variables en el campo de problemas de la ingeniería.

2. **Marco Teórico**

El sustento teórico de este trabajo es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Esta propuesta teórico-metodológica de investigación en Didáctica de la Matemática, viene desarrollándose en España desde el año 1994 por Godino, Batanero y Font (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006; Pochulu, 2012). De ese amplio marco teórico se utilizan en este trabajo algunos constructos que se describen a continuación.

Este enfoque define a una *práctica matemática* como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos. Una práctica matemática puede ser de índole personal o compartida en el seno de una institución. Dentro de este marco, se considera que la institución está conformada por las personas que comparten una misma clase de situaciones problemáticas. A partir de este constructo surge la noción de *significado*, definido como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas (Godino et al, 2009).

De acuerdo con lo anterior, en el escenario de una clase, para un determinado objeto matemático se considera el *significado personal* que cada alumno le asigna a dicho objeto para diferenciarlo del significado fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo, como expresiones del *significado institucional* del mencionado objeto.

Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado de objetos matemáticos a los que en este enfoque se los clasifica como primarios (Godino et al, 2009, p.7):

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. en sus diversos registros escrito, oral, gestual, etc.)
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, etc.)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.).

En los sistemas de prácticas matemáticas intervienen y aparecen conjuntos de objetos conformando redes llamadas *configuraciones*. Las mismas pueden ser *cognitivas* o *epistémicas* de acuerdo la condición de personal o institucional de los objetos involucrados. Estas configuraciones, junto con los sistemas de prácticas, son las herramientas teóricas que propone este enfoque para describir los conocimientos matemáticos expresados en términos de significados. (Godino, Batanero y Font, 2007).

Se puede describir metafóricamente el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales en una clase. Esta diferenciación entre las facetas personal e institucional de los significados matemáticos es fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino et al, 2009). En el estudio de un proceso de instrucción adquiere relevancia la detección de *conflictos semióticos*, planteados como discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones.

La aplicación de herramientas metodológicas proporcionadas por el EOS permite caracterizar los conocimientos institucionales y personales para el diseño de un proceso de instrucción. Una de estas herramientas es la “Guía para el reconocimiento de objetos y significados” (GROS). Esta herramienta puede realizarse para cada una de las situaciones problemáticas que se propondrán a los estudiantes. Insta al docente a realizar un análisis de los objetos intervinientes y emergentes en la resolución de la situación y los significados que se les atribuye en un contexto específico, lo cual contribuirá a su gestión didáctica de los conocimientos puestos en juego en el proceso de instrucción (Godino, 2013).

3. Metodología

Se administró un cuestionario de siete preguntas a 67 estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, en la clase siguiente al desarrollo del teorema de Bernoulli, la ley de los grandes números.

La elaboración del cuestionario surgió a partir de una guía GROS construida para la modelización de una situación-problema para la vinculación de una variable estadística con su variable aleatoria asociada. Dicha guía, por razones de espacio, no se expone en esta comunicación.

3. 1. Descripción del Cuestionario

En la Figura 1 puede observarse el cuestionario, respondido por uno de los estudiantes. En el mismo, se solicita la identificación del experimento aleatorio, que corresponde al envío de cinco transmisiones de señales, el número de elementos de su espacio muestral asociado, dado por $2^5 = 32$ elementos, y el número de señales erróneas que pueden ser transmitidas al efectuar el experimento, los enteros comprendidos entre 0 y 5 inclusive.

Luego se requiere responder a la problemática de determinar cuántas señales erróneas es más probable de ser transmitidas, significa que los estudiantes deberían modelizar la situación problema para argumentar su respuesta. El pedido explícito de utilizar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria que modeliza el problema, propone hacer ostensiva esta distribución para que, posteriormente, el estudiante pueda compararla con las distribuciones empíricas de su variable estadística, como se plantea en la última pregunta del cuestionario. El análisis de sus resoluciones, se realiza a continuación.

4. Resultados

Los significados personales declarados de los estudiantes se conocieron a través del análisis de sus resoluciones. La Tabla 1 detalla los tipos de respuesta de las preguntas 1 y 2.

Tabla 1. Tipos de respuesta a las preguntas 1 y 2

Pregunta 1 Experimento aleatorio	%	Pregunta 2 N. de elementos del espacio Muestral	%
Envío de cinco transmisiones	67	2^5=32	6
		5	73
Conteo del número de fallos	15	6	5
		2	13
Sin Responder	18	Sin Responder	3
Total	100	Total	100

La pregunta de *cuál es el experimento aleatorio ante el envío de cinco transmisiones de señales*, dio lugar a tres tipos de respuestas. El 67 % de los estudiantes identificó el experimento aleatorio de enviar 5 señales, pero sólo un 6% respondió correctamente a la 2da pregunta, referida al *número* de *elementos del espacio muestral*, indicando los 32 elementos. Se destaca el 73% de estudiantes que respondió incorrectamente esa pregunta, no analizó a cada transmisión como a un experimento aleatorio, ni la identificó como a una prueba de Bernoulli. El 15% de los estudiantes consideró el experimento de enviar y contar el número de señales erróneas en las cinco trasmisiones efectuadas. Sólo el 5% respondió que los resultados posibles son los enteros comprendidos entre 0 y 5.

La Figura 1 muestra una “resolución típica” del cuestionario. En este caso, el estudiante considera como espacio muestral, los valores de la variable aleatoria *número de fallos en las cinco transmisiones de señales*. Responde *cinco* al número de elementos del espacio muestral y, respecto del número de señales erróneas que pueden ser transmitidas, también responde *cinco*, pero escribe las seis. A continuación, se muestran la Figura1 y la Tabla2, con el tipo de respuestas a la 3ra y 4ta pregunta.

Trabajo Práctico

Ante el envío de cinco transmisiones de señales:

1. ¿Cuál es el experimento aleatorio? envío de transmisiones de señales
2. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? cinco
3. ¿Cuántas señales pueden ser transmitidas erróneamente? cinco → $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
4. Si la probabilidad de enviar una señal errónea es 0,4. ¿Cuántas señales erróneas enviadas es más probable que sean transmitidas? Justifica tu respuesta con la distribución de probabilidades correspondiente a la variable aleatoria que modeliza el problema. V. a. binomial $\Rightarrow E(x) = np = 5 \cdot 0{,}4 = \boxed{2}$
5. Escribe todos los sucesos mutuamente excluyentes que pueden ocurrir cuando se produce una sola transmisión errónea de las cinco señales enviadas. ¿Qué cálculo haces para obtener la cantidad de sucesos mutuamente excluyentes? $\{E,\bar{E},\bar{E},\bar{E},\bar{E};\ \bar{E},E,\bar{E},\bar{E},\bar{E};\ \bar{E},\bar{E},E,\bar{E},\bar{E};\ \bar{E},\bar{E},\bar{E},E,\bar{E};\ \bar{E},\bar{E},\bar{E},\bar{E},E\}$ $* \binom{5}{1}$
6. En cinco transmisiones cualesquiera. ¿Identificas sucesos independientes? Justifica tu respuesta.
7. Compara **la distribución de probabilidades de la variable aleatoria** obtenida de las respuestas al problema, con **la distribución de frecuencias relativas de la variable estadística** X:“ número de transmisiones erróneas en cinco transmisiones de bits” para los distintos tamaños de muestras: 10, 20, 50, 100 y 200 que se simularon con GeoGebra, como se muestran a continuación:

6. * Sí, las transmisiones no dependen entre sí.

muestra10 =

Valor	Frecuencia Relativa
1	0.4
2	0.4
3	0.2

muestra20 =

Valor	Frecuencia Relativa
1	0.25
2	0.6
3	0.05
4	0.1

muestra50 =

Valor	Frecuencia Relativa
0	0.02
1	0.22
2	0.38
3	0.32
4	0.06

muestra100 =

Valor	Frecuencia Relativa
0	0.08
1	0.27
2	0.33
3	0.28
4	0.04

muestra200 =

Valor	Frecuencia Relativa
0	0.1
1	0.26
2	0.32
3	0.24
4	0.07
5	0.02

Extrae conclusiones relativas a:

a) Los valores que puede tomar una variable estadística y su variable aleatoria asociada.

b) Las frecuencias relativas de la variable estadística con las probabilidades respectivas de su variable aleatoria asociada en cada caso. ¿Qué papel juega el tamaño de la muestra? Justifica tu respuesta con la teoría correspondiente.

c) ¿Qué relación encuentras entre una variable estadística y su variable aleatoria asociada?

Figura 1. Resolución típica del cuestionario de un estudiante de ingeniería de la UNMDP

La cuarta pregunta pretende la modelización de la situación-problema: *si la probabilidad de enviar una señal errónea es 0,4. ¿Cuántas señales erróneas enviadas* *es más probable que sean transmitidas? Justifica tu respuesta con la distribución de probabilidades correspondiente a la variable aleatoria que modeliza el problema.* El 52% de los estudiantes, supo responder esta pregunta con diferentes argumentos: a) Los que identificaron el modelo binomial y sólo calcularon el valor esperado, b) los que construyeron la distribución de probabilidades de la variable aleatoria binomial y eligieron el valor con mayor probabilidad; c) los que hicieron las dos cosas, o d) la minoría, que planteó una ecuación usando n y p, con la definición de probabilidad según Laplace, p = x/n donde la incógnita es el número de casos favorables en la ecuación: 0,4= x/5. Estos últimos no identificaron el modelo binomial ni justificaron que x=2 tiene la mayor probabilidad, como muestra la Tabla2.

Tabla 2. Tipos de respuestas a las preguntas 3 y 4

Pregunta 3 N. de señales que pueden ser transmitidas erróneamente	%	Pregunta 4 N. de señales erróneas más probable	%
De cero a cinco	48	Calculan n.p	52
Pueden ser cinco	37	Construyen la distr. de probabilidades binomial	9
De uno a cinco	3	Construyen la dist.prob. y calculan n.p	5
Sin Responder o Responden otra cosa	12	No identifican Binomial y plantean la ecuación 0,4=x/5	6
		Sin Responder o Responden otra cosa	28
Total	100	Total	100

La quinta pregunta solicitó a los estudiantes *escribir todos los sucesos mutuamente excluyentes que pueden ocurrir cuando se produce una sola transmisión errónea de las cinco señales enviadas.* También les preguntó *¿Qué cálculo haces para obtener la cantidad de sucesos mutuamente excluyentes?* Su respuesta fue sorpresiva para el análisis, ya que el 73% de estudiantes que no reconocieron los 32 elementos del espacio muestral, no notaron que los cinco sucesos mutuamente excluyentes que encontraron, forman parte del espacio muestral que describieron. La Figura 1 evidencia este conflicto semiótico observado en este porcentaje importante de estudiantes.

La sexta pregunta, respecto de la independencia de sucesos fue: *En cinco transmisiones cualesquiera. ¿Identificas sucesos independientes? Justifica tu respuesta.* Si bien la mayoría de los estudiantes detectó que cada transmisión es independiente de otra, pocos justificaron a los sucesos independientes como al resultado de cada transmisión (transmisión correcta o errónea). Esto tiene que ver con la dificultad que encontraron al identificar el experimento aleatorio y el espacio muestral.

En la séptima y última pregunta, en líneas generales, pocos estudiantes interpretan el significado de las tablas que representan las distribuciones empíricas de la variable estadística, por lo que les es difícil comparar cuando, en muchos casos, ni siquiera calcularon la distribución de probabilidades de la variable aleatoria que propone la cuarta pregunta. Hubo pocas respuestas para esta pregunta en relación con las anteriores, pero se extrajo información para considerar en el próximo diseño instruccional sobre este tema. Las respuestas más destacadas, se muestran a continuación, con la descripción de los conflictos semióticos encontrados:

- *“Con una muestra pequeña no aparecen la totalidad de los resultados posibles, pero cuando la muestra es más grande, los resultados comienzan a tender a un valor (en este caso a 2) que es lo que se esperaba, por la Ley de los Grandes Números,…”* El conflicto semiótico está dado por la confusión en la aplicación de la ley de los grandes números: son las frecuencias relativas las que tienden a la probabilidad respectiva cuando aumenta el tamaño de la muestra, no el valor más probable.
- *“Para n=5, había calculado que pueden ser transmitidas 2 señales erróneamente, luego para n=200, la probabilidad de que se transmitan dos señales erróneamente es 0,32 siendo éste el mayor valor de la tabla”.* En esta respuesta se encuentran varios conflictos semióticos: 1) confunde el valor más probable en cinco transmisiones, como si fuera el único caso. 2) Confunde el número de las cinco repeticiones del experimento aleatorio con la cantidad de muestras de distintos tamaños. 3) La “probabilidad” a la que hace referencia es la frecuencia relativa que figura en la tabla de la muestra de tamaño 200. Además, si bien identificó la variable binomial para el cálculo de su esperanza, no encontró su distribución de probabilidades y no la relacionó con las variables de Bernoulli.
- *“La variable en estudio nunca cambia, sólo su elaboración matemática”.* Si bien no da precisiones a qué se refiere con *elaboración matemática*, el estudiante tiene la idea de una sola variable, la de estudio, que puede referirse a un contexto muestral o poblacional.
- *“Un resultado de un experimento aleatorio será más factible aproximarlo mediante una variable aleatoria que realizarlo en la práctica y obtener valores imprecisos”.* Se detectan varios conflictos semióticos: 1) creencia que los experimentos aleatorios *se aproximan* siempre con una variable aleatoria. 2) Pensar que *más factible* trabajar con una variable aleatoria es desconocer que en la realidad se trabaja con datos muestrales, porque no es posible hacer censos cada vez que se desea estudiar alguna característica de la población y 3) preferir no trabajar *en la práctica, porque da valores imprecisos,* es no reconocer que en la inferencia se trabaja con una sola muestra y que, de esa evidencia muestral, se extraen conclusiones para la población, que esa *imprecisión* depende del tamaño de la muestra, y del conocimiento que permite argumentar los resultados obtenidos, como la ley de los grandes números en este caso.
- *“A medida que aumentan las muestras, las distribuciones se acercan al valor esperado”* El conflicto semiótico está dado por no reconocer la distribución de frecuencias relativas como un sistema de valores que toma la variable con sus frecuencias relativas respectivas, por lo que las distribuciones no se acercan al valor esperado. La confusión surge al no identificar que el promedio de esta variable estadística se aproxima al valor esperado de su variable aleatoria asociada a medida que aumenta el tamaño muestral.

4.1. Análisis de los resultados

Con respecto al análisis de las resoluciones de los estudiantes de todo el cuestionario, pudieron detectarse conflictos semióticos comunes y prácticas matemáticas personales que llamaron la atención, lo que inmediatamente llevó a una reflexión posterior sobre las prácticas institucionales efectuadas. Los mismos se describen a continuación:

- Existe ambigüedad en el reconocimiento del experimento aleatorio: algunos estudiantes lo identifican así: *"se transmiten 5 señales y se analiza si llega correctamente o no al receptor*. A pesar de reconocer el experimento tal como lo esperaba el profesor, no todos ellos encuentran los 32 resultados posibles. Otros estudiantes analizan *cuántas señales erróneas pueden llegar.* En ese caso, el espacio muestral coincide con los valores de la variable aleatoria X: "número de señales erróneas en 5 transmisiones". Esta respuesta fue considerada en muchos estudiantes. Por esa razón modelizan el problema con la distribución binomial.
- La mayoría de los estudiantes identificó correctamente los cinco sucesos mutuamente excluyentes de la pregunta 5, pero eso no fue suficiente para que modificaran sus respuestas sobre el espacio muestral y sobre la cantidad de sus elementos. Este conflicto semiótico fue uno de los más llamativos, ya que no se replantearon el experimento aleatorio que habían considerado previamente.
- Confusión entre las variables de Bernoulli y binomial. Esta confusión parte de la falta de claridad en la identificación del experimento aleatorio, al considerar una sola señal cuando se transmiten cinco.
- Para determinar el valor más probable, muchos estudiantes responden con el valor esperado y no lo eligen de la distribución de probabilidades (porque no la construyen). Esto hace que no puedan compararla con las distribuciones empíricas de la pregunta 7.
- Confusión de sucesos mutuamente excluyentes con independientes, conflicto descrito en la investigación sobre probabilidad condicional (ver, por ejemplo, Borovcnik, 2012). A pesar de distinguir que cada transmisión no se relaciona con las otras, no tienen presente el experimento aleatorio, donde cada resultado posible es una cinco-upla elemental.
- No reconocen la variable estadística. El tamaño de cada una de las muestras y la cantidad de repeticiones por muestra confundió a muchos estudiantes, que no comprendían las tablas. Este fue un indicador que es necesario ofrecerle a los estudiantes más prácticas en las que deban recopilar información real o simulada.

5. Conclusiones

En este trabajo se planteó la pregunta de qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante de ingeniería para resolver un problema de modelización con la distribución binomial, y si, en ese contexto, logra la vinculación entre una variable estadística y su variable aleatoria asociada. Para ello se analizaron las respuestas a un cuestionario elaborado ad hoc. Se detectaron conflictos semióticos que pudieron explicarse con la *Guía para el reconocimiento de objetos y significados* (Godino, 2013) construida especialmente para este estudio.

El material obtenido contribuirá al rediseño instruccional de una propuesta didáctica que ponga mayor énfasis en la vinculación de estas dos variables. Dicha propuesta debe contemplar prácticas matemáticas que promuevan el trabajo concreto con distribuciones empíricas de problemas reales o simulados para su vinculación con las distribuciones de probabilidades correspondientes; con la identificación correcta del experimento aleatorio, su espacio muestral asociado y la modelización de la variable aleatoria involucrada en el problema.

Referencias

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números, 57*. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros.

Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 277-291.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2*, 5-27.

Carver, R., Everson, M., Gabrosek, J., Rowel, G.H., Horton, N., Lock, R., Mocko, M., Rossman, A., Homes, G., Velleman, P., Witmer, J. y Wood, B. (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College report*. Reston, VA: American Statistical Association. Disponible en: http://www.amstat.org/education/gaise.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* (pp. 235-246). Nueva York: Springer.

Godino, J. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques***,** *14*(3),325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006) Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Morano, D., Micheloud, O. y Lozeco, C. (2005). *Proyecto estratégico de reforma curricular de las ingenierías* 2005-2007. Trabajo presentado en la *XXXVII Reunión Plenaria del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería*. Santa Fe, Argentina. 4 al 6 de mayo.

Pochulu, M. (2012) Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En M. Pochulu y M. Rodriguez (Eds.) *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 63-89). Villa María: Editorial Universitaria Villa María.

Ruiz, B y, Albert, J. A. (2013) La relación entre la variable aleatoria y la variable estadística: un análisis epistemológico disciplinar. *Probabilidad Condicionada 2*,383-390

Walpole, R. E., Myers R. H. y Myers S. L. (1999). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. 6ª edición. México: Prentice Hall.