La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas

Semantics and syntax in the equivalence of algebraic expressions

Sergio Chalé-Can[1], Viçens Font[2] y Claudia Acuña[1]

[1]Cinvestav-IPN, [2]Universidad de Barcelona

Resumen

La equivalencia algebraica es un concepto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico, y para su compresión se sugiere tener en cuenta las fuentes de significado sintáctico y semántico de la misma. En esta comunicación, nuestro objetivo es describir la complejidad de la noción de equivalencia en términos de significados parciales, entendidos éstos como sistemas de prácticas y configuraciones de objetos primarios y procesos activados en ellos. Para ello, utilizamos un ejemplo de solución a una tarea específica, en la cual la inducción completa juega un rol importante, y en el que se dificulta la conexión entre lo semántico y sintáctico. Concluimos con una breve reflexión sobre estas dos aproximaciones a la noción.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, equivalencia, semántica, sintáctica.

Abstract

The equivalence of algebraic expressions is a crucial concept for achieving algebraic thinking and for its understanding is necessary to consider their syntactic and semantic sources of equivalence. In this paper, our aim is to describe the complexity of the notion of equivalence in terms of partial meanings, which are understood as systems of practices and as configurations of primary objects and the involved processes. To achieve this goal, we use an example of solution to a specific task, where complete induction plays a key role, and where it is difficult to make the connection between the semantic and syntax sources. We conclude with a brief reflection about both approximations to this notion.

Keywords: Algebraic thinking, equivalence, semantic, syntactic.

1. Introducción

En este trabajo nos planteamos una reflexión teórica sobre la complejidad de la noción de equivalencia de expresiones algebraicas, la cual consideramos importante: debido a su presencia recurrente en la formación matemática básica de nuestros estudiantes; al constante uso que se hace de ella en la resolución de problemas; y a que es una de las grandes ideas del álgebra.

En particular, reflexionamos sobre la dialéctica entre la aproximación sintáctica y semántica a la noción de equivalencia, a través de un ejemplo de tarea, por medio de la cual caracterizamos las prácticas y configuraciones epistémicas (Font, Godino y Gallardo, 2013) asociadas a la noción bajo estudio. Las soluciones que proponemos a esta tarea son la prueba por medio de la inducción completa y los recursos visuales.

En general, nuestro objetivo es describir la complejidad de la noción de equivalencia en términos de significados parciales, entendidos éstos como sistemas de prácticas y configuraciones de objetos primarios y procesos activados en ellos. Las nociones teóricas antes mencionadas, así como la noción de *función semiótica*, constituyen un adecuado recurso para el análisis que llevamos a cabo (Godino, Batanero y Font, 2007).

Chalé-Can, S. Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponibles en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

2. Revisión de la literatura

Los acercamientos al estudio de la equivalencia algebraica han sido de dos tipos: 1) los que han puesto énfasis en la perspectiva sintáctica y 2) los que lo han hecho sobre la semántica (Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013; Kieran y Saldanha, 2005; Solares y Kieran, 2013). El acercamiento sintáctico tiene que ver con las relaciones y reglas inherentes al álgebra como lenguaje simbólico, por lo que los aspectos procedimentales son privilegiados y las reglas de transformación de expresiones algebraicas se usan para probar la equivalencia. En el acercamiento semántico, se hace énfasis en la interpretación de los contextos, situaciones o problemas para establecer si dos expresiones son o no equivalentes, en este caso la significación que permite el contexto (por ejemplo, la evaluación numérica) puede ser considerada como ejemplo de acercamiento semántico.

Tradicionalmente se considera que para el estudio y desarrollo de la equivalencia algebraica es necesario tener en cuenta elementos sintácticos y semánticos de las expresiones algebraicas, los cuales la literatura sugiere conectar y desarrollar a la par para conseguir una mejor comprensión de dicha noción (Solares y Kieran, 2013; Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013). Por otro lado, la experiencia previa de los estudiantes con las transformaciones algebraicas, tales como la factorización, expansión, agrupación y simplificación de términos, permite desarrollar una incipiente y espontánea noción de equivalencia, que implica la vinculación de expresiones por medio de éstas transformaciones. Así los autores sugieren la necesidad de una transición desde una noción espontanea de la equivalencia, hasta una concepción de la equivalencia que esté más asociada con el aspecto semántico (Kieran et al., 2013).

Otro factor importante que se debe tener en cuenta cuando se reflexiona sobre la equivalencia de expresiones algebraicas, es el tipo de expresión matemática con la que estamos trabajando, si se trata de una ecuación, una expresión, un polinomio, una función polinomial o racional, etc.; porque para decidir la equivalencia de estos diferentes tipos de expresiones hay que tener en cuenta su naturaleza y las restricciones que cada uno presenta (Solares y Kieran, 2013).

3. Marco teórico

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática es una perspectiva pragmática, antropológica y semiótica, lo cual implica tener en cuenta la experiencia de los individuos para la construcción del conocimiento matemático, y reconocer que los objetos matemáticos emergen de un sistema de prácticas, como entidades construidas progresivamente, que se enriquecen y complementan en la resolución de campos de problemas a partir de la actividad reflexiva, y se considera semiótica, porque en toda actividad matemática se recurre a la transformación de signos dentro de sistemas semióticos culturalmente dados (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Una idea clave en esta aproximación es la de práctica, la cual se describe como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012).

Para analizar las respuestas a la tarea que presentamos, utilizamos la noción de *Configuración epistémica* (Godino, Batanero y Font, 2007), la cual nos permite identificar y describir, de manera pormenorizada, los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos), sus significados, y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas institucionales. Los objetos primarios son relacionados unos con otros y forman configuraciones, las cuales pueden ser definidas como redes de objetos que son involucrados, y emergen de un sistema de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007).

A partir de la literatura revisada, notamos que se consideran dos fuentes de significado parciales para la equivalencia: la semántica y la sintáctica. Si ponemos nuestra atención en las propiedades algebraicas sintácticas, se dice que dos expresiones f y g son equivalentes cuando estas expresiones tienen una re-escritura algebraica común, la cual puede ser obtenida por medio de la aplicación de propiedades algebraicas conocidas (conmutativa, asociativa, distributiva, identidades notables, etc.). Desde el punto de vista semántico, se dice que, dos expresiones f y g son equivalentes, cuando para un valor dado x en el dominio común de las funciones dadas, se cumple que $g(x) = f(x)$, lo cual es conocido como la aproximación numérica a la equivalencia (Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013).

Asumimos, de acuerdo con la literatura revisada, que la complejidad de la noción de equivalencia se puede describir en términos de dos significados parciales llamados sintáctico y semántico. Ahora bien, en este trabajo ampliaremos la manera de entender la relación entre la perspectiva sintáctica y la semántica a la equivalencia.

Por un lado, la definición de equivalencia sintáctica, básicamente nos dice que la aplicación de determinadas reglas permite substituir una expresión por otra, consideramos necesario incluir que dos expresiones pueden considerarse equivalentes como resultado de la aplicación de la inducción completa, de lo cual resulta un significado establecido a partir del uso exclusivo de los signos. Teniendo en cuenta lo anterior afirmado, nos planteamos una problemática respecto a la aceptación de la equivalencia de expresiones algebraicas, que ejemplificamos más adelante con una tarea. Por otro lado, diremos que dos expresiones son equivalentes semánticamente cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales y en el que, además, se puede decir que estos dos significados son el mismo.

Es usual, que para comprobar la equivalencia se necesita de dos expresiones f y g. La segunda expresión g, en algunos casos puede ser obtenida de la aplicación de reglas algebraicas sobre *f*, pero en otros casos no es posible o fácil, como mostramos en el ejemplo de tarea que planteamos.

Cuando no es posible generar una segunda expresión algebraica, podemos recurrir a la equivalencia semántica, la cual, nos parece mucho más creativa, porque: a) nos permite encontrar la segunda expresión por medio de otros recursos, b) nos permite asegurar la equivalencia sin necesidad de utilizar reglas de transformación y c) nos dice por qué son las dos expresiones equivalentes más allá de la aplicación de reglas.

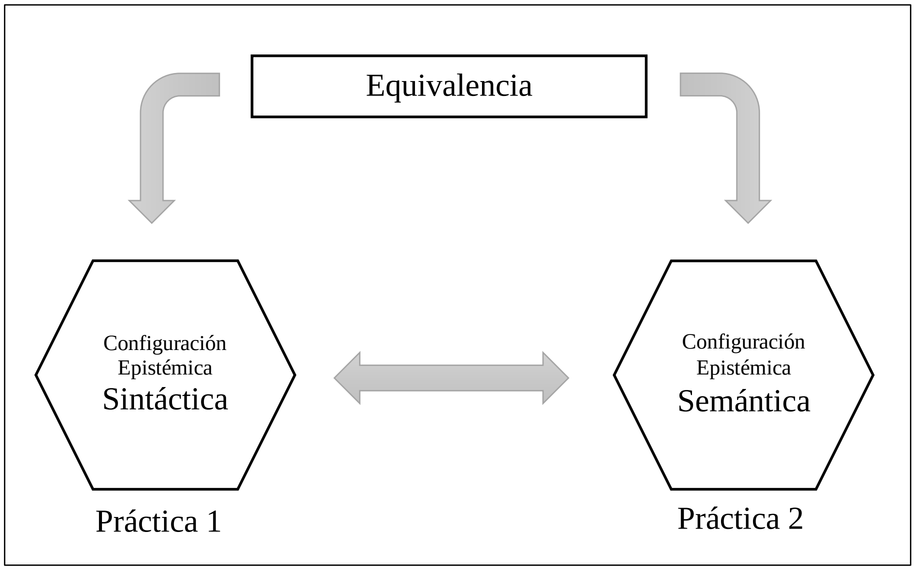

Figura 1. Diagrama sobre la equivalencia

De acuerdo con el modelo teórico asumido en este trabajo nos proponemos describir estos significados parciales en términos de prácticas, configuraciones epistémicas de objetos primarios y procesos activados en estas prácticas. Para ello, utilizaremos como contexto de reflexión una tarea cuya solución es la suma de los cuadrados de los números naturales, la cual planteamos, y resolvemos a continuación, al finalizar de cada solución, presentamos por separado de manera sintética, las *configuraciones epistémicas* movilizadas para ambas soluciones presentadas.

4. Tarea-ejemplo como contexto de reflexión

4.1. La perspectiva sintáctica

Considere la siguiente tarea en la que hay que demostrar una propiedad de los números enteros naturales:

Tarea 1: ¿Cómo podemos estar seguros que se cumple esta igualdad:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \textit{Relación A}$$

Para justificar esta equivalencia se puede recurrir a la demostración por inducción completa, la cual en términos generales versaría de la siguiente manera:

Sea $s(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, debemos probar que $s(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Así, sea $n = 1$ tenemos: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Sea $n = k$, tenemos: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Ahora mostremos que para $n = k + 1$ se cumple que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)(k+1)}{6}$$
$$=\frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}$$
$$=\frac{(k+1)((k+2)[2(k+1)+1]}{6}$$

A partir de esta última expresión vemos que la relación su cumple para $k+1$ y que la relación A es cierta.

Prácticas

Las prácticas realizadas en la solución, consisten en aplicar los pasos de la demostración por inducción completa. Primero evaluamos las dos expresiones para $n=1$ y comprobamos que se obtiene el mismo resultado. Después suponemos la igualdad para el caso $n=k$ como cierta y luego trasformamos la suma de los cuadrados de los $k+1$ números naturales en una expresión equivalente sustituyendo la suma de los cuadrados de los k números naturales por su expresión equivalente. Después se pasa a común denominador, se factoriza y se aplican propiedades como la distributiva hasta llegar a la expresión de la derecha de la relación A para el caso $k+1$. Por último, dado que se ha completado la demostración por inducción completa se concluye que las dos expresiones son equivalentes.

Configuración epistémica de objetos primarios

La configuración epistémica (realizada por un resolutor ideal) activada en la práctica matemática acabada de describir se puede representar de la manera siguiente:

Procesos

En la perspectiva sintáctica hay un proceso de argumentación, de tratamiento, etc… y de manera particular, hay que resaltar que, no son necesarios procesos de significación de las expresiones involucradas, porque se pueden operar o realizar transformaciones de ellas, sin que sean asociadas a algún significado. Por ejemplo, no es necesario interpretar $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ como la suma de los cuadrados de los enésimos números naturales, basta considerarla como una expresión sobre la cual se pueden realizar acciones, y no como la representación de algún objeto matemático.

Por otro lado, la demostración por inducción nos permite justificar la relación A y que es cierta para todos los números naturales; sin embargo, no permite saber cómo a partir de $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ se llega a la expresión $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y cómo se asegura que ambas expresiones son equivalentes.

Para responder a los anteriores cuestionamientos debemos recurrir a lo que llamamos equivalencia semántica y plantearnos la problemática de la conexión entre la aproximación sintáctica y la semántica a la equivalencia de expresiones algebraicas.

Tabla 1. Configuración epistémica para el significado sintáctico

Problema	Demostrar la equivalencia de las dos expresiones de la Relación A.
Lenguaje	Expresiones diferentes en el mismo registro (simbólico): $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
Definición	Equivalencia sintáctica (dos expresiones f y g son equivalentes sintácticamente cuando la aplicación de unas determinadas reglas, fijadas previamente, permiten considerar que $f=g$ es válida).
Proposiciones	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ Principio de inducción completa: Si $p(n)$ es verdadera para n_0 y si $p(m+1)$ es verdadera para todo natural $m \geq n_0$ para la cual $p(m)$ es verdadera, entonces $p(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$. Propiedades asociativa, conmutativa, distributiva del álgebra.
Procedimientos	Una proposición $p(n)$ es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones: Paso 1. La proposición $p(n)$ es verdadera para $n=1$, Paso 2. Se supone que $p(k)$ es verdadera, donde k es un número natural cualquiera. Paso 3. Se demuestra que $p(k+1)$ es verdadera. Reglas para transformar expresiones algebraicas.
Argumento	Las dos expresiones son equivalentes como resultado de la aplicación correcta de los tres pasos del procedimiento de demostración por inducción completa.

4.2.La perspectiva semántica

Para dotar de un contexto a la tarea 1, considere la siguiente tarea:

Tarea 2

a) *Usando las piezas que se muestran en la Figura 2, construya un cubo de lado 1, 2, y 3.*
b) *Describa las piezas que son necesarias para construir, de la misma forma, un cubo de lado 4.*
c) *Pueden las piezas cuadrangulares ser usadas para construir un cubo de lado n si hay* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *cubos de lado 1? Justifica tu respuesta.*

En general, el objetivo de la tarea, es proponer una base semántica para la justificación de la relación $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, lo cual se inicia desde los incisos a y b, puesto que la actividad lleva a la emergencia, de las propiedades de los números naturales. La prueba por inducción completa de la relación planteada como tarea 1, es la respuesta al inciso c de la tarea 2, esta prueba lleva a la emergencia de un argumento que posibilita a los estudiantes asegurarse de la validez de la relación planteada, y lo más importante para nosotros, de que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ es equivalente a $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (Font, Godino, Gallardo, 2013). A continuación, planteamos las respuestas a los incisos a, b y c con base en las perspectivas para el estudio de la equivalencia algebraica.

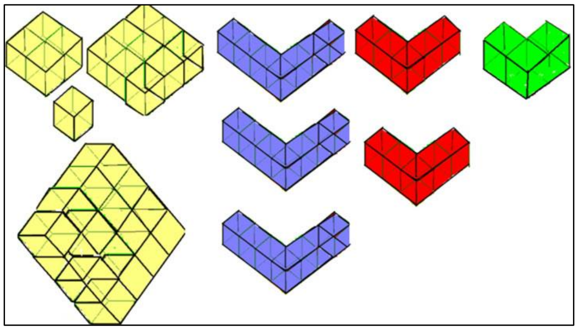

Figura 2. Piezas para la tarea

Solución

Ensamblando las piezas de cubos mostrados en la Figura 2, formemos el cubo de lado dos. Iniciamos con el cubo de lado uno, pondremos alrededor de ésta una pieza con forma de escuadra formada por 3 cubos, luego en la base otra pieza de 2×2, para obtener finalmente el cubo de lado dos como se muestra en la Figura 3. Así, con esta construcción tendremos un total de $1^2 + 2^2 + 3 = 2^3$ cubos.

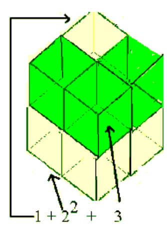

Figura 3. Cubo de lado 2

Continuemos con nuestra construcción y ahora agreguemos al cubo de lado dos una pieza de 3×3 cubos en la base y dos escuadras de 5 cubos para cubrirlo, como se muestra en la Figura 4. Así para formar este cubo necesitamos $1^2 + 2^2 + 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 3^3$ cubos.

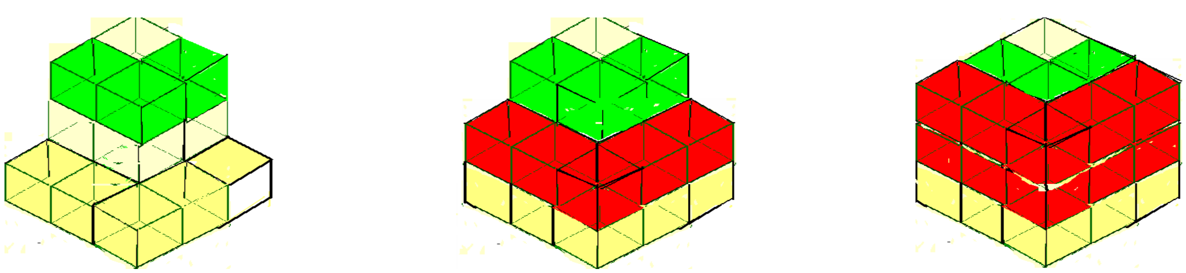

Figura 4. Cubo de lado 3

Procediendo de manera semejante, formamos el cubo de lado 4, este cubo está formado por una base de 4×4 cubos, tres escuadras de 7 cubos, más los anteriores cubos que habíamos agregado. Siendo formado éste por: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 4^3$ cubos.

Bajo las anteriores consideraciones, tendremos la siguiente cantidad de cubos para el enésimo cubo:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots (n-1)(3 + 2(n-2)) = n^3$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots 2n^2 - 3n + 1 = n^3 \ldots \quad (*)$$

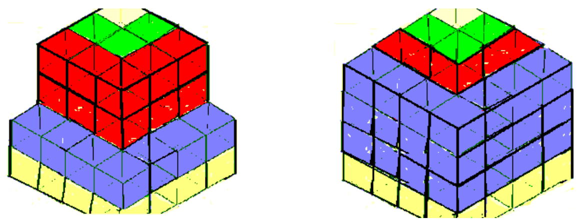

Figura 5. Cubo de lado 4

A partir de este desarrollo visual, hemos aportado un referente para las expresiones algebraicas que aparecen en las relaciones que hemos planteado y si consideramos:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = T$

Y que:

$$2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2T - 3\frac{(n+1)n}{2} + n$$

Y realizando algunas sustituciones en $(*)$, tenemos que:

$$T - 2T - \frac{3(n+1)n}{2} + 2 = n^3$$

$$2T + 4T - 3(n+1)n + 2n = 2n^3$$

$$6T = 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$T = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Así $T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, de donde podemos afirmar que con sólo $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ no podemos construir el cubo de lado n. Pero lo más importante es que tenemos un argumento para afirmar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Prácticas

Las prácticas realizadas en la solución presentada, consisten en identificar la relación A como la sexta parte de un cubo. Para ello, primero debemos construir los distintos cubos y notar un patrón de construcción que podemos generalizar para el enésimo cubo y relacionarlo con expresiones algebraicas que modelan su construcción; después, retomar las expresiones algebraicas asociadas, reconocer formas algebraicas conocidas, aplicar propiedades y reglas del álgebra para obtener la relación A.

Configuración epistémica de objetos primarios para la perspectiva semántica

La configuración epistémica (realizada por un resolutor ideal), activada en la práctica matemática acabada de describir se puede representar de la manera siguiente:

Tabla 2. Configuración epistémica para el significado sintáctico

Problema	Mostrar por medio de recursos visuales si las piezas cuadrangulares de la Figura 2, pueden ser usadas para construir un cubo de lado *n* si hay $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ cubos de lado 1.
Lenguaje	Expresiones diferentes en uno o más registros diferentes (por ejemplo, dibujos). Expresiones diferentes en el mismo registro (simbólico).
Definición	Equivalencia semántica (dos expresiones son equivalentes semánticamente cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significado y en el que, además, se puede decir que estos dos significados son el mismo.)
Proposiciones	Proposiciones propias del contexto que dan significado a los símbolos. Reglas para transformar expresiones simbólicas.
Procedimientos	Aplicación correcta de las reglas y procedimientos propios del contexto, por ejemplo, las maneras de ensamblar los cubos y su relación con las expresiones algebraicas.
Argumento	Las dos expresiones son equivalentes como resultado de argumentos, visuales, por elemento genérico, inducción, abducción, etc.

Procesos

En la perspectiva semántica es necesario un proceso de significación de los objetos o relaciones algebraicas que surgen, dichos procesos se vuelven necesarios para las expresiones o relaciones que se quieren demostrar, ya que éstos son la fuente de sentido para los estudiantes. Un dibujo, alguna línea, marca o cualquier representación no algebraica puede ser la fuente de este sentido. Esta fuente semántica, nos permite saber o justificar las relaciones que se plantean mediante símbolos algebraicos, igualmente nos permite conocer cómo fue construida cierta fórmula, regla o relación, de dónde fue obtenida o cómo se llegó a ella.

Sin embargo, construir un contexto a partir del cual podamos resolver el problema planteado en el inciso c de la tarea 2, puede ser para algunos evidente y para otros no. El contexto que se tome en cuenta para esta tarea, puede ser que ayude a la compresión de las relaciones, pero que dificulte su demostración o el entendimiento de ésta, es decir, la semántica no se conecta directamente con la sintáctica, y algunos pasos regidos por la sintáctica no son posibles de justificar por la semántica. En éstas aproximaciones, hay un momento en el que la construcción del principio matemático requiere del abandono del recurso visual.

A partir de la construcción que los estudiantes realizan en los incisos a y b, emergen relaciones sobre la suma de los números naturales y sus propiedades, estás propiedades se ven expresados por lo visual y se reflejan en lo simbólico, llegando a afirmar en el proceso que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Así, con lo anterior tenemos un argumento semántico para la justificación de la suma de los cuadrados de los números naturales.

5. Reflexiones finales

En este trabajo partimos del supuesto que la equivalencia es una noción compleja con dos significados parciales que se conocen como sintáctico y semántico que deben ser articulados. Es en esta complejidad y en la articulación de lo semántico con lo sintáctico, que nos centramos en el presente escrito, ejemplificando por medio de un tipo de tarea que dicha articulación no es fácil de conseguir.

El hecho de considerar dos tipos de equivalencias y su posible articulación nos lleva a considerar tres posibilidades de relación ente ellas, en éstas los estudiantes podrían construir las siguientes ideas relacionadas con la equivalencia: 1) solo reconocen la equivalencia semántica, 2) solo reconocen la equivalencia sintáctica o 3) son capaces de articular los dos tipos de equivalencia. De hecho, la literatura muestra ejemplos en los que se dan alguna de estas posibilidades, por ejemplo, en Rojas (2015) se muestran casos en los que se da la equivalencia sintáctica pero no la semántica al resolver una tarea de probabilidad o de geometría analítica. De igual manera, en el mismo trabajo antes citado, se muestra como los significados semánticos interfieren algunas veces en la aceptación de equivalencias por medio de la utilización de la sintaxis algebraica.

Referencias

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The Emergence of objects from Mathematical Practices. *Educational Studies in Mathematics 82*(1), 97-124.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik–The International Journal on Mathematics Education 39*, 127–135.

Godino, J., Castro W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema 26*(42B), 483-511.

Kieran, C. y Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 193-200). Melbourne: PME.

Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D. y Drijvers, P. (2013). Desing researches' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 45*, 1045-1056.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las ciencias, 33*(1), 151-165.

Solares, A. y Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-148.