Análisis ontosemiótico de un texto de Lagrange sobre la teoría algebraica de ecuaciones

Onto-semiotic analysis of a Lagrange text on the algebraic theory of equations

Claudina Canter y Silvia Etchegaray

Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

Este trabajo tiene como propósito esencial aportar a la construcción de un marco de referencia institucional que ayude a determinar el grado de idoneidad epistémica de procesos de enseñanza vinculados al abordaje de las estructuras algebraicas en la formación inicial del profesor en Matemáticas. En este artículo se pretende mostrar la utilidad de las herramientas del EOS para poner al descubierto la complejidad ontosemiótica de prácticas y objetos funcionando en diferentes niveles de algebrización; y la necesidad de transitar por niveles intermedios de algebrización para lograr la construcción de las estructuras. El objetivo específico del mismo es indagar sobre los objetos y procesos que se ponen en juego en prácticas de Lagrange que le permitieron construir una importante conjetura para el posterior avance de la Teoría Algebraica de Ecuaciones.

Palabras clave: idoneidad epistémica, procesos algebraicos, objetos algebraicos, niveles de algebrización, formación de profesores

Abstract

The essential purpose of this paper is contributing to the construction of an institutional reference frame that helps determining the epistemic suitability degree of teaching processes related to approaching algebraic structures in the initial formation of mathematics teachers. We show the EOS tools usefulness to highlight the onto-semiotic complexity of practices and objects operating at different algebrization levels; and the need to transit through intermediate algebrization levels to achieve the construction of structures. The specific objective is investigating the objects and processes that are put into play in of Lagrange's practices and that allowed him to construct an important conjecture for the later advance of the Equations Algebraic Theory.

Keywords: epistemic suitability, algebraic processes, algebraic objects, levels of algebrization, teacher training

1. Introducción

En este trabajo se pretende poner en evidencia la utilidad de algunas de las herramientas construidas en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino *et al.*, 2007) para el análisis de prácticas matemáticas tanto personales como institucionales. Dicho análisis ayuda a responder a las preguntas ¿Cómo se *piensa* matemáticamente? ¿Cómo se *hace* matemática? ¿Cómo se *expresa* en matemática? ¿Cómo *relativizan* los diversos contextos los significados de las diferentes producciones?

Una de las metas a alcanzar en este trabajo es comenzar a construir un marco de referencia institucional respecto al abordaje del estudio de las estructuras algebraicas en la educación superior, específicamente en la formación de profesores de matemáticas. Para ello consideramos importante dar cuenta de la complejidad ontosemiótica de los sistemas de prácticas algebraicas que ponen al descubierto las configuraciones y los

Canter, C. y Etchegaray, S. (2017). Análisis ontosemiótico de un texto de Lagrange sobre la teoría algebraica de ecuaciones. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemátic*os. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

procesos necesarios para la emergencia de las estructuras (grupo, anillo, modulo, cuerpos etc.) en la institución matemática. Dicho marco de referencia permitirá, más adelante, diseñar con un alto grado de *idoneidad epistémica*[1] actividades que puedan plantearse como potenciales generadoras de conocimiento útil para la comprensión de las estructuras algebraicas en la formación de profesores de matemáticas. En este trabajo se analizan los aportes realizados por Lagrange (1736 - 1813) a la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones, considerando que este análisis aportará elementos para la atribución de significado a las estructuras algebraicas por parte de los futuros profesores de matemáticas de secundaria.

Cabe destacar que la construcción de dicha teoría se inicia con la búsqueda de métodos para resolver ecuaciones por radicales, más tarde el problema fue encontrar un método general para la resolución de las ecuaciones y finalmente, viendo que era imposible la resolución por radicales de todas las ecuaciones, se preguntaron cuáles serían las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pudiera resolverse a partir de alguna relación entre sus coeficientes. El trabajo de Lagrange se enmarca en la búsqueda de un método general para la resolución de ecuaciones.

Tal como lo expresa Tignol (2002) una forma de aprender cómo se *hace* matemática es conociendo cómo se ha hecho antes y la perspectiva histórica en la que estaba inmerso el trabajo matemático en cuestión. El libro *Galois' Theory of Algebraic Equations* escrito por Tignol (2002) fue una de las fuentes literarias más importantes que nos permitió acceder a los aportes realizados por Lagrange a la construcción de la teoría antes mencionada.

El trabajo de Lagrange, clave para el desarrollo de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, puede subdividirse en tres partes: a) el estudio de los métodos existentes, b) el desarrollo de nuevos constructos matemáticos que le permitieron enunciar una primera e importante conjetura sobre el problema investigado y c) la elaboración de un método que pretendió ser general. En este trabajo se analizará la primera parte de lo realizado por el matemático en cuestión (incisos a) y b)) identificando los diferentes elementos de significados, procesos y niveles de algebrización de dichas prácticas, que serán luego utilizados como marco referencial epistémico para seleccionar *significados pretendidos* en la enseñanza de las estructuras algebraicas.

El intento de Lagrange por comprender cómo y porqué funcionaban los métodos existentes para la resolución de ecuaciones, lo llevó a relevar todos los métodos existentes, tanto los particulares para ecuaciones de grados 2, 3 y/o 4 como los que intentaron ser generales, como el método de Bezout. Este trabajo se centrará en el análisis de esta última producción ya que resultó ser el disparador de otro problema esencial para la matemática, a saber, el estudio exhaustivo del grupo de permutaciones de las raíces de una ecuación.

Nos interesa destacar, en primer lugar, cómo el contexto cultural de la época condiciona la producción de los científicos, ya que a pesar de contar Lagrange con algunos elementos que lo hicieron dudar acerca de la existencia de un método general para resolver ecuaciones por radicales de grado mayor o igual a cinco, él intentó durante toda su época de producción encontrarlo. En este trabajo se podrá leer la conjetura de

---

[1]Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia(Godino, Contreras y Font, 2006)

Lagrange que permitió el posterior avance en la construcción de la Teoría Algebraica de Ecuaciones por otros matemáticos.

El EOS, en tanto marco teórico principal de este estudio, nos brinda herramientas teóricas para analizar en forma conjunta el pensamiento matemático, los ostensivos asociados a él, las situaciones donde se pone en juego y los procedimientos, definiciones, proposiciones y argumentos que condicionan el desarrollo del conocimiento matemático, regulados además estos elementos por el uso operativo y discursivo del lenguaje matemático. El EOS proporciona tanto instrumentos teóricos-conceptuales como una metodología para abordar esta investigación y ayuda a mostrar los cambios y transformaciones de significados en los momentos claves del desarrollo del saber matemático estudiado.

Además, un reciente avance teórico que le otorga mayor significatividad a este estudio es el trabajo de Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) donde se plantean seis niveles de algebrización diferentes en la enseñanza obligatoria (primaria y secundaria). Se indagará sobre cuáles son los objetos y procesos algebraicos que Lagrange puso en juego en su producción alcanzando distintos niveles de algebrización, pues esto nos puede ayudar a valorar sobre cuáles son los procesos que favorecen el desarrollo algebraico en torno a esta problemática y nos alertará sobre potenciales conflictos semióticos que pueden presentarse en la enseñanza de las estructuras algebraicas.

Para analizar con pertinencia las investigaciones realizadas por Lagrange, en primera instancia se estudiaron los métodos para la resolución de ecuaciones relevados por dicho matemático. En segunda instancia se confeccionó una configuración epistémica correspondiente al sistema de prácticas de la primera parte del trabajo de Lagrange, la cual permite comenzar a entender el pensamiento y la producción matemática de esta figura clave para el desarrollo de la Teoría Algebraica de Ecuaciones.

Seguidamente se trabajó sobre el segundo nivel de análisis didáctico que propone el EOS, identificándose los procesos matemáticos existentes en el correspondiente sistema de prácticas. Con este tipo de análisis, que tiene por finalidad describir la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática indagada, se podrán explicar los potenciales conflictos semióticos que produce su realización.

Identificar los distintos procesos intervinientes no es tarea sencilla pues en muchos casos hay más de un proceso involucrado en la resolución de una situación – problema. Para ello es necesario realizar un análisis de los sistemas de prácticas de Lagrange que expondremos en el apartado 2, detallando en el inciso 2.1 el método de Bezout y las reflexiones de Lagrange, para luego realizar una configuración epistémica del sistema de prácticas de Lagrange en relación a todo el estudio realizado al método antes mencionado (2.2). En el apartado 2.3 se describen los procesos identificados en dicho trabajo. Por último, en el apartado 3, se explicitan las conclusiones logradas respecto a este doble análisis realizado.

2. Análisis de las prácticas de Lagrange

Hasta la segunda mitad del siglo XVIII, la teoría algebraica de ecuaciones había avanzado bastante. En esta época se contaban con varios métodos de resolución de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, pero no se había podido elaborar un método para resolver por radicales ecuaciones de grado igual o mayor a cinco.

Esta imposibilidad de encontrar un método que resolviera una ecuación independientemente de su grado llamó la atención de Lagrange, por lo que se abocó al estudio de los métodos existentes. Tal como él mismo expresa su problema de investigación era: "*… examinar varios métodos encontrados hasta la fecha para la solución algebraica de ecuaciones, para reducirlos a los principios generales, y para ver porqué estos métodos son exitosos en ecuaciones de tercer y cuarto grado y no lo son en grados mayores.*" (Citado por Tignol, 2002).

2.1. Descripción del método de Bezout y reflexiones de Lagrange

Uno de los métodos que estudió Lagrange fue, como ya anticipáramos, el de Bezout. El mismo consiste en eliminar la indeterminada Y entre dos ecuaciones:

$$X = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \cdots + a_{n-1} Y^{n-1} \quad (1)$$

$$Y^n = 1 \quad (2)$$

produciendo una ecuación de grado n en X, $R_n(X) = 0$ (la construcción de esta ecuación es realizada por el método de la resultante entre (1) y (2). No se detalla este método pues no forma parte de las posteriores prácticas de Lagrange.

Dividiendo R_n por sus coeficientes principales de ser necesario, podemos asumir que R_n es mónico. Las propiedades de $R_n(X)$ implican que si x e y están relacionadas por las ecuaciones (1) y (2), es decir, si

$$x = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}$$

para alguna raíz enésima de la unidad ω, entonces es una raíz de $R_n(X)$, de donde $R_n(X)$ es divisible por $X - (a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1})$ tal como lo justifica el Teorema del resto. En lo que concierne a $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ como indeterminadas independientes, los valores de *x* correspondientes a las varias raíces enésimas de la unidad ω son todas diferentes, por lo tanto:

$$R_n(X) = \prod_{\omega}(X - (a_0 + a_1\,\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1})) \quad (3)$$

donde el producto corre sobre las *n* diferentes enésimas raíces de la unidad ω. Las raíces de $R_n(X)=0$ son, de este modo, conocidas.

Para resolver una ecuación mónica arbitraria P(X)=0 de grado *n*, se deben determinar los parámetros $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ de tal modo que el polinomio $R_n(X)$ sea idéntico a P(X). La solución de P(X)=0 es fácilmente obtenida en la forma $a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}$.

Cabe destacar que la posibilidad de asignar algunos valores a $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ de manera tal que R_n sea idéntico a P no es clara, pero para el caso n=2,3 ó 4 es posible hacerlo.

Los polinomios R_n para estos casos particulares son:

$$R_2(X) = (X - a_0)^2 - a_1^2$$

$$R_3(X) = (X - a_0)^3 - 3a_1a_2(X - a_0) - (a_1^3 + a_2^3)$$

$$R_4(X) = (X - a_0)^4 - 2(a_2^2 + 2a_1a_3)(X - a_o)^2 - 4a_2(a_1^2 + a_3^2)(X - a_0) - (a_1^4 - a_2^4 + a_3^4 + 4a_1a_2^2a_3 - 2a_1^2a_3^2)$$

Es importante remarcar, como ya fuera anticipado, que si bien Bezout pretendió formular un método general, no lo logró.

Lagrange se dedicó a buscar las razones del funcionamiento de este método el cual se transformó en la fuente de inspiración para la construcción de su conjetura. Él observó que las raíces de la ecuación propuesta de grado n son de la forma $a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1}$, donde ω es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1. Si ζ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, las n raíces de la unidad serán:1, $\zeta,\ \zeta^2, \dots,\ \zeta^{n-1}$.

Sustituyendo 1, $\zeta,\ \zeta^2, \dots,\ \zeta^{n-1}$ por ω se obtiene la siguiente expresión de las raíces:

$$x_1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

$$x_2 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1}$$

$$x_3 = a_0 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta^4 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{2(n-1)}$$

$$\dots$$

$$x_n = a_0 + a_1\zeta^{n-1} + a_2\zeta^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)(n-1)}$$

Luego, en general: $x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \zeta^{(i-1).j}\ i = 1, \dots, n$ (4)

Este sistema es fácil de resolver para $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$. En efecto, los valores de a_k, se obtienen multiplicando cada ecuación por una potencia adecuada de ζ de modo que el coeficiente de a_k sea 1, y sumando las ecuaciones resultantes se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{(j-k).(i-1)}\right) \quad (5)$$

Si $j \neq k$, entonces ζ^{j-k} es una de las raíces n-ésimas de la unidad distinta de 1. Por lo tanto ζ^{j-k} es una raíz de

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

Luego,

$$\sum_{i=0}^{n} \zeta^{(j-k).(i-1)} = 0$$

Por lo que en el lado derecho de (4), todos los términos son cero salvo el correspondiente al índice $j = k$, el cual es na_k. Así la ecuación (4) queda:

$$a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i\right) \quad (6)$$

Es decir, *logra poner los coeficientes en función de las raíces*. Es fácil ver que si x_1, x_2, x_3, x_4 son consideradas indeterminadas independientes, todos los valores obtenidos para a_k de todas permutaciones de x_1, x_2, x_3, x_4 son distintas. Por lo tanto, a_k es raíz de una ecuación de grado n!. Sin embargo, Lagrange muestra que ${a_k}^n$ toma sólo (n-1)! valores**.** Además, si n es primo, ${a_k}^n$ es una raíz de una ecuación de grado n-1 donde sus coeficientes pueden ser determinados por las soluciones de una ecuación simple de grado (n-2)!. Así, para $n = 5$, la determinación de ${a_k}^5$ necesita de soluciones de una ecuación de grado 3!=6.

Si *n* no es primo, el resultado es más complicado. Usando un argumento similar al caso de n primo, Lagrange muestra que si $n = p.q$ donde p es primo, y si k es divisible por q , ${a_k}^p$ es raíz de una ecuación de grado $p-1$ cuyos coeficientes dependen de una ecuación simple de grado $\frac{n!}{(p-1)p(q!)^p}$. Para $n = 4$ se sigue que ${a_2}^2$ puede ser hallada resolviendo una ecuación de grado $\frac{4!}{1.2.(2!)^2}$ =3, pero para $n = 6$, para determinar ${a_3}^2$ se necesita resolver una ecuación de grado $\frac{6!}{1.2.(3!)^2}$=10.

Cómo puede observarse cuando el grado de la ecuación es mayor o igual a cinco el grado de la ecuación auxiliar es mayor que el grado de la ecuación original. Este estudio minucioso provocó en Lagrange muchas dudas, las mismas pueden verse reflejadas en la conjetura que formuló:

> Como se desprende del análisis que acabamos de dar de los principales métodos para hallar las soluciones de ecuaciones, todos estos métodos se reducen al mismo principio general, a saber: 1º, que la ecuación o ecuaciones dadas (las que usualmente se denominan ecuaciones reducidas) resulten ser de un grado menor que el grado de la propuesta o por lo menos descomponible en otras ecuaciones de grado menor; 2º, que los valores de las raíces buscadas pueden deducirse fácilmente de ellas.
>
> El arte de resolver ecuaciones consiste en descubrir las funciones de las raíces que tienen las propiedades antes mencionadas, pero ¿es siempre posible encontrar tales funciones, para las ecuaciones de cualquier grado, es decir, para cualquier número de raíces? Esta es una pregunta que parece muy difícil de responder en general. (Lagrange 1770, citado por Tignol, 2002)

2.2. Configuración epistémica de las prácticas de Lagrange

Para estudiar la articulación entre los distintos elementos de significado de esta práctica matemática se realizó la configuración epistémica (tabla 1), gracias a ella se puede observar cómo el tipo de problema planteado, determinar cómo y porqué funciona el método de Bezout para la resolución de ecuaciones, supone un trabajo de búsqueda y reflexión. Con este tipo de trabajo Lagrange logra caracterizar las raíces de las ecuaciones auxiliares utilizadas para dar solución a las ecuaciones originales, poniendo al descubierto *la expresión* a partir de la cual son obtenidas y *la estructura* de dichas ecuaciones. Es decir, pudo demostrar que los coeficientes de la ecuación son polinomios simétricos en relación a las raíces de la ecuación original y, además, concluyó que el grado de la ecuación auxiliar está directamente relacionado con la cantidad de valores que toma la expresión que las origina al permutarse las raíces de la ecuación original.

Como puede observarse en este sistema de práctica que estamos analizando, Lagrange realiza un estudio estructural de las ecuaciones algebraicas. Esto es justamente así pues estudió relaciones entre las propiedades de los elementos, obteniendo así *propiedades de propiedades.* Este trabajo sentó las bases para el surgimiento de una nueva rama de estudio dentro del álgebra, las estructuras algebraicas.

El análisis que realizó Lagrange al método de Bezout y a otros métodos existentes para resolver ecuaciones le llevó a trabajar con las permutaciones de las raíces de las ecuaciones. En efecto, dicho trabajo le llevó a obtener los primeros resultados que conforman la actual Teoría de Grupos aunque él no se percató de ello.

Cabe destacar que a pesar de haber logrado probar importantes proposiciones donde las permutaciones juegan un papel determinante, Lagrange no elaboró ninguna notación al respecto por lo que algunos argumentos propuestos por él se hicieron difíciles de comprender. Vemos aquí la importancia de una notación adecuada que permita *materializar* el objeto, no sólo para poder comunicar los avances sino sobre todo para visualizar su contenido semántico y profundizar su investigación. Una vez que Lagrange analizó minuciosamente las distintas relaciones que se podían establecer entre las raíces de la ecuación que se pretendía resolver y la ecuación auxiliar a utilizar para tal fin, sintió que tenía elementos suficientes como para diseñar su propio método de resolución "olvidándose", que en un principio había observado algunas regularidades que lo llevaron a pensar que tal vez las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco no tendrían solución.

Tabla 1. Configuración epistémica asociada al estudio sobre el método de Bezout

<table>
<tr><td colspan="2">Situación problema
Determinar cómo y porqué funciona el método de Bezout para la resolución de ecuaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definiciones y conceptos disponibles (con el significado de la institución matemática)
Ecuación, raíz, coeficientes, polinomios, sistema de ecuaciones, raíces de la unidad, polinomios simétricos elementales, división de polinomios.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas operativas (procedimientos)</td></tr>
<tr><td><u>Elementos ostensivos</u>
<u>Puestos a funcionar</u>:
Métodos de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, manipulaciones algebraicas.

<u>Emergentes</u>: determinar los coeficientes de los polinomios auxiliares como función de las raíces de la ecuación propuesta y las raíces de la unidad.</td><td><u>Significado</u>
Se busca encontrar los coeficientes de un polinomio ya construido de modo que la ecuación a resolver resulte idéntica a dicho polinomio. Es necesario recurrir al cambio de variables y algunos métodos de resolución de ecuaciones ya conocidos.
Para determinar los coeficientes se realizan todas las permutaciones posibles entre las raíces. Aquí no se utilizan las permutaciones con su significado funcional.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas discursivas (Propiedades y argumentos)</td></tr>
<tr><td><u>Elementos no ostensivos</u>
<u>Puestas a funcionar</u>: teorema fundamental de fracciones simétricas, teorema del resto.
<u>Emergentes</u>: Si a_k (coeficiente de la ecuación auxiliar) es raíz de una ecuación de grado n!, ${a_k}^n$ toma sólo (n-1)! valores. Además, si n es primo, ${a_k}^n$ es una raíz de una ecuación de grado n-1 donde sus coeficientes pueden ser determinados por las soluciones de una ecuación simple de grado (n-2)!.</td><td><u>Argumentos</u>
<u>Utilizados</u>: Demostraciones deductivas, Argumentos generados por inducción empíricas

<u>Emergente</u>: Conjetura</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elementos lingüísticos</td></tr>
<tr><td><u>Ostensivos</u>
$X^3 + pX + q = 0$
$X^4 + pX^2 + qX + r = 0$
$R_n(X) = \Pi_\omega(X - \Upsilon(w))$
$a_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} \zeta^{-(i-1).k} x_i\right)$

(no aparece una notación para las permutaciones)</td><td><u>Significado</u>
Incógnitas, números reales, símbolos para suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz. Igualdad, ecuación, sistema de ecuaciones, notación polinomial.</td></tr>
</table>

Llama la atención que teniendo una conjetura basada en observaciones realmente relevantes no intentara probarla; sin duda la cultura científica en la que estaba inmerso no le facilitó dar ese gran paso.

2.3. Análisis de objetos y procesos de las prácticas de Lagrange

Antes de comenzar con el segundo nivel de análisis del sistema de práctica de Lagrange es bueno aclarar que no todos los procesos desarrollados en dichas prácticas se realizan en el mismo nivel de algebrización. Para nuestro propósito, en tanto docentes preocupados y ocupados de mejorar la formación inicial de los profesores de matemáticas, a cargo de asignaturas correspondiente a una matemática superior, esto nos resulta esencial.

Tabla 2. Procesos y objetos matemáticos activados en las prácticas analizadas

Tipos de procesos	Procesos activados en las prácticas matemáticas analizadas
Materialización – Idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo)	1. Cuando se trabaja con el método de Bezout para resolver ecuaciones, la relación entre raíces de la unidad y raíces (no ostensivo) se *materializa* con la definición de las raíces de la ecuación como combinación lineal de las raíces de la unidad. 2. El método de Bezout exige *la idea* de que todo polinomio puede obtenerse a partir de un polinomio general de grado n con n coeficientes a determinar.
Particularización – Generalización (dualidad extensivo – intensivo)	1. Lagrange *generaliza* la escritura de las raíces de una ecuación a partir de las raíces n-ésimas de la unidad tomando como referente la escritura de las raíces de las ecuaciones de grado menor a 5. El problema está en hallar los *valores particulares* de los coeficientes a_k (con k =3,…, n-2) que acompaña a las nombradas raíces n-ésimas de la unidad.
Descomposición – Reificación (dualidad sistémico – unitario)	1. En el método de Bezout, se *descompone* una vez al comienzo para constituir un sistema de dos ecuaciones cuya indeterminada es Y. Luego, mediante la técnica de la resolvente, se *reifica* para construir una ecuación general de grado n en X. Para resolver casos particulares se vuelve a *descomponer* la ecuación dada en tantas ecuaciones como coeficientes tenga. Por último *reifica* escribiendo unos parámetros en función de otros para más tarde obtener su valor y poder calcular las raíces de la ecuación original utilizando las raíces de la unidad.
Representación – Significación (dualidad expresión – contenido)	1. Usos de las raíces de la unidad para expresar las raíces de una ecuación dada. 2. Construcción de un polinomio auxiliar para resolver la ecuación propuesta: $R_n(x) = \prod_{\omega}(x-(a_0+a_1\omega+...+a_{n-1}\omega^{n-1}))$ 3. Determinación y representación de las raíces de las ecuaciones auxiliares como funciones de las raíces de la ecuación propuesta. Lagrange muestra a través de esta representación las propiedades de las raíces de las ecuaciones auxiliares. 4. *Representación de los parámetros en función de las raíces* de la ecuación y de las raíces de la unidad. 5. *Representación* de las raíces de una ecuación como combinación lineal de las raíces n-ésimas de la unidad.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas son considerados en el marco del EOS desde las siguientes facetas o dimensiones, sostenidas por distintas dualidades: *proceso de materialización - idealización* (dualidad ostensivo - no ostensivo); *proceso de particularización - generalización* (dualidad ejemplar - tipo); *proceso de descomposición - reificación* (dualidad sistémico – unitario); *proceso de representación - significación* (dualidad expresión - contenido); *proceso de personalización - institucionalización* (dualidad personal - institucional). Estas facetas se complementan de manera dual y dialéctica y son aplicables a los distintos objetos primarios. (Godino, et al., 2007). Los procesos antes detallados pueden encontrarse en todos los niveles de algebrización (Godino, et al., 2014). Es decir, un mismo proceso puede tener lugar en cualquiera de los niveles de algebrización dependiendo del juego de lenguaje en que se desarrollan los objetos algebraicos que se ponen en juego.

Cabe destacar que a pesar de haber logrado probar importantes proposiciones donde las permutaciones juegan un papel determinante, Lagrange no elaboró ninguna notación al respecto por lo que algunos argumentos propuestos por él se hicieron difíciles de comprender. Vemos aquí la importancia de una notación adecuada que permita *materializar* el objeto, no sólo para poder comunicar los avances sino sobre todo para visualizar su contenido semántico y profundizar su investigación. Tal como ya se había adelantado, por último, se analizará, en detalle, cada uno de los procesos matemáticos detectados para conocer en qué nivel de algebrización se producen y así entender el grado de algebrización de la actividad matemática desarrollada por Lagrange.

En relación a los procesos duales de Materialización – Idealización detectados se puede decir que ambos pertenecen al quinto nivel de algebrización ya que las actividades matemáticas desplegadas requieren la realización de cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con distintas variables.

> Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del cuarto nivel (familia de ecuaciones, familia de funciones). (Godino, et. al., 2015).

Se identificó solo un proceso de Particularización – Generalización, en este caso se trata de la generalización de la escritura de las raíces de una ecuación a partir de las raíces n-ésimas de la unidad tomando como referencia la escritura de las raíces de las ecuaciones de grado menor a 5. En este caso no se está trabajando con las familias de las ecuaciones de los distintos grados sino que se está tratando de unificar una escritura para las raíces de una ecuación cualquiera sea su grado. Es decir, el objeto matemático involucrado ha cambiado, por lo que no se puede incluir a este proceso dentro del quinto nivel de algebrización. Por otra parte, en el sexto nivel de algebrización se estudia a las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades estructurales, por lo que tampoco se puede identificar esta práctica en este nivel de algebrización. Entonces: ¿a qué nivel de algebrización pertenece? Teniendo en cuenta las relaciones que se ponen en juego en el proceso en cuestión podría ser incluido en un nivel intermedio entre el nivel 5 y el nivel 6. Justamente, en el artículo de Godino, et al., (2015) se menciona que los niveles de algebrización no son estancos y que quizás se necesite ahondar en la complejidad de las transiciones de un nivel a otro.

Los procesos de Descomposición – Reificación hallados pertenecen a los métodos de resolución por radicales para ecuaciones de tercer y cuarto grado, respectivamente. Si bien las operaciones algebraicas que se realizan son más complejas que las necesarias para dar solución a una ecuación de segundo grado, los objetos sobre los cuales se trabaja son las familias de las ecuaciones de grado 3 y grado 4 y el procedimiento de resolución consiste en la realización de cálculos analíticos (sintácticos) que implican el uso de uno o más parámetros, junto con variables o indeterminadas.

> Las operaciones que se realizan en las que intervienen parámetros, cuando son realizadas de manera comprensiva y no puramente algorítmica, implican una fase superior en el proceso de reificación de los objetos intensivos representados (familias de ecuaciones y funciones). (Godino, et. al., 2015)

Por otra parte, Bezout, al representar los parámetros de la ecuación dada en función de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad está indagando en la estructura de los polinomios estudiando de este modo su funcionamiento y sus propiedades, lo que nos permitiría decir que esta parte de la práctica corresponde a un 6º nivel de algebrización.

En relación a los procesos de Representación – Significación detectados se puede decir que los procesos 1, 2 y 5 se corresponderían con un nivel intermedio entre el nivel 5 y el nivel 6, pues establecer las relaciones necesarias, tanto para definir una raíz en función de las raíces de la unidad, o construir el polinomio auxiliar que permita darle solución a una ecuación propuesta (una ecuación auxiliar dependiendo del grado del polinomio en cuestión), requiere realizar cálculos analíticos con los parámetros y las variables, como así también es necesaria la comprensión del funcionamiento y de las propiedades de estas familias de ecuaciones.

3. Conclusiones finales

Por un lado, lo expuesto en este trabajo pone en evidencia la no linealidad del trabajo matemático que ingenuamente se espera encontrar (tal como aparece en los libros de texto científicos). Es decir, no es inmediato, por ejemplo, que luego de planteada una conjetura el trabajo siguiente sea la de demostrarla o refutarla. Por otra parte, el estudio minucioso de los procesos y objetos matemáticos involucrados en la práctica de Lagrange que se analizó, permite arrojar luz sobre la importancia que tiene la relación dialéctica que sostiene a los procesos objetivados por el EOS.

Aquí puede observarse con claridad cómo los procesos duales están ligados estrechamente con los objetos matemáticos y el modo en el que dichos objetos son utilizados. En efecto, Lagrange pudo reconocer la importancia de permutar parámetros y raíces pero no pudo concebir a las permutaciones como funciones con características singulares que funcionan dentro de una estructura algebraica. Esta ausencia de significados le imposibilitó obtener resultados más significativos dentro de la Teoría de Ecuaciones Algebraicas.

Este análisis permitió conocer la importancia de transitar distintos procesos para la construcción de objetos algebraicos. Estos objetos, sus relaciones y los procesos detectados forman parte del marco referencial que nos permitirá el diseño de actividades idóneas para la enseñanza del abordaje de las estructuras algebraicas en la educación superior.Por último, el análisis realizado en este trabajo, pone al descubierto la necesidad de transitar por niveles intermedios de algebrización para lograr la construcción de las estructuras, situadas en la literatura didáctica en un nivel máximo de algebrización. Teniendo en cuenta, que el trabajo de Lagrange se localiza en los inicios de la construcción de la Teoría de ecuaciones algebraicas, podríamos además pensar que se abren nuevos caminos para imaginarse niveles superiores de algebrización.

Cabe aclarar que también Godino, et. al. (2015) reconocen la posibilidad de alcanzar niveles de algebrización mayores a los que han podido caracterizar. La siguiente cita así lo demuestra: "…es posible que el nivel 6 de algebrización, cuya descripción refleja una fase incipiente de reificación de los objetos intensivos intervinientes, se pueda complementar con otros dos niveles más avanzados, propios de los estudios universitarios. Esta es una cuestión abierta a futuras investigaciones.”

Referencias

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32* (1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Tignol, J. P. (2002). *Galois' theory of algebraic equations*. Danvers, MA: World Scientific.