

Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades condicionales y juicios de asociación a partir de una tabla de contingencia

Semiotic conflicts in computing conditional probabilities and in association judgments from a contingency table

Gustavo R. Cañadas

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo fue evaluar la competencia respecto al cálculo de probabilidades y juicios de asociación en una tabla de contingencia 2x2 por estudiantes universitarios, finalizada una experiencia de enseñanza. Se describe la experiencia desarrollada en un curso reglado de análisis de datos del grado de Psicología, y la evaluación del aprendizaje en 94 estudiantes de psicología. Se encuentra que la mayoría es capaz de calcular probabilidades condicionales en una tarea abierta, con ayuda de Excel, y proporcionar un juicio de asociación correcto. Esto muestra una mejora producida por el proceso de enseñanza realizado, aunque igualmente aparecen algunos conflictos semióticos después de la instrucción.

Palabras clave: Tabla de contingencia, probabilidad condicional, juicio de asociación, conflictos semióticos, formación universitaria

Abstract

The aim of this research was to evaluate the university students' competence in computing probabilities and producing association judgments in a 2x2, after a teaching experience was completed. The teaching experience developed in a regular data analysis course in the degree of Psychology and the evaluation of learning in 94 psychology students are described. Most students were able to compute conditional probabilities in an open task, using Excel, and provided a correct judgment of association. These results suggest an improvement in the students' knowledge as a consequence of the teaching process; however, some semiotic conflicts remain after the instruction.

Keywords: contingency table, conditional probability, judgment of association, semiotic conflicts, university education

1. Introducción

Las tablas de contingencia son un instrumento de gran utilidad en la presentación y análisis de datos cualitativos, que se utilizan con gran frecuencia en actividades profesionales, donde se estudia si existe asociación entre variables. A pesar de su importancia, el aprendizaje del tema no se encuentra exento de errores y dificultades, que persisten incluso después de la enseñanza (Batanero, Estepa y Godino, 1997). La investigación sobre la comprensión del tema después de la enseñanza es bien escasa y se centra en las estrategias intuitivas de los estudiantes en la interpretación de dichas tablas (Inhelder y Piaget, 1955; Jenkins y Ward, 1965).

El objetivo de esta investigación fue evaluar la competencia del manejo de una tabla de contingencia 2x2 respecto al cálculo de probabilidades y juicios de asociación, así como la identificación de conflictos semióticos asociados en estudiantes de psicología, después de recibir enseñanza sobre el tema; de este modo se completa la investigación

precedente con resultados de un proceso de instrucción.

2. Marco Teórico

En este trabajo se utilizan nociones del Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado por Godino y su equipo de colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Siguiendo a Font, Godino y D'Amore (2007), en nuestro trabajo asumimos que, en las prácticas matemáticas, se presentan múltiples funciones semióticas, debido a la necesidad de usar y operar con objetos matemáticos, que son inmateriales. Además, se considera una tipología de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas y que pueden jugar, el papel de antecedente o consecuente de una función semiótica. Si las interpretaciones realizadas por los alumnos no son las esperadas por el profesor, se produce un *conflicto semiótico*. Dichos conflictos se conciben como cualquier disparidad o discordancia entre los significados de una expresión por dos sujetos, profesor y alumno. Nuestro trabajo se orienta al estudio de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de psicología para trabajar con tablas de contingencia y la detección de estos conflictos semióticos.

2.1 Investigaciones previas

La mayoría de los investigadores que han analizado las tablas de doble entrada se han centrado en la capacidad de los estudiantes para evaluar la asociación entre las variables. Una síntesis de ellas se presenta en Estepa (1993). Todos estos trabajos, se basaron en el estudio de Inhelder y Piaget (1955), quien consideró la comprensión de la asociación como el último paso en el desarrollo de la idea de la probabilidad y se centran en la descripción de las estrategias de los sujetos al juzgar la asociación. Estepa (1993) y Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) complementan dicha investigación identificando concepciones incorrectas como la concepción causal (confundir asociación y causalidad) o la determinista (aceptar sólo la asociación perfecta).

Otra línea de investigación diferente es la llevada a cabo por Lonjedo y Huerta (e.g. Huerta, 2009), interesándose por las variables que influyen sobre la resolución de problemas de probabilidad condicional, y estudian las estrategias de los estudiantes en diferentes tipos de problemas. Otros trabajos estudian las dificultades de comprensión y aplicación de la probabilidad, así como los sesgos de razonamiento asociados. En particular para esta investigación es importante tener en cuenta los resultados de Falk (1986) que indican que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente las dos diferentes probabilidades condicionales $P(A/B)$ y $P(B/A)$ y los de Einhorn y Hogarth (1986) y Ojeda (1995), quienes observaron que algunos estudiantes malinterpretaron la conjunción "y" confundiendo la probabilidad conjunta y la condicional.

3. Método

3.1 Muestra y diseño de la enseñanza

La experiencia se llevó a cabo en el grado de Psicología en la Universidad de Granada, dentro del curso *Técnicas de Análisis en la Investigación Psicológica*, asignatura obligatoria de primer curso. En el estudio participaron 94 estudiantes, mayoritariamente mujeres, como es frecuente en esta carrera, en un rango de edad comprendido entre 19 y 20 años. Estos alumnos habían tenido durante el primer cuatrimestre una asignatura de estadística, donde se les enseñó probabilidad. Los alumnos que faltaron en el proceso de

enseñanza fueron excluidos de los análisis. La enseñanza se implementó en el segundo cuatrimestre académico, finalizando la asignatura.

El diseño de la enseñanza comenzó fijando su contenido, a partir de un análisis previo del tema en libros de estadística orientados a Psicología o Educación. De dicho análisis, se seleccionaron los objetos matemáticos para la construcción de la propuesta didáctica (problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, representaciones y argumentos), organizándolos en un proceso de estudio pretendido. También se tuvieron en cuenta los principios de diseño instruccional propuestos por Cobb y McClain (2004).

El proceso de estudio se organiza en cuatro lecciones específicamente diseñadas (Cañadas, 2011), con soporte en una página web en que se desarrollan los bloques de contenido (www.ugr.es/~analisisdedatos/webcurso/presentacion.html): (1) tablas de contingencia, lectura e interpretación; (2) asociación estadística, dependencia funcional e independencia; (3) el estadístico Chi-cuadrado y contrastes asociados; y (4) medidas de asociación. Asimismo, se proporcionó al estudiante hojas de cálculo ya programadas en Excel para facilitar los cálculos, con breves descripciones en cada hoja.

3.2 Tarea de evaluación propuesta a los estudiantes

En este problema (ver Figura 1), se plantean varias preguntas sobre una tabla 2x2, cuya asociación no es estadísticamente significativa ($p=0,386$). El alumno puede tener teorías previas al respecto, pensando que el medicamento mejore la ansiedad y la relación sería de tipo interdependencia. Este problema fue resuelto sin ayuda del ordenador.

Problema. Un grupo de 200 personas aquejadas de ansiedad fue dividido aleatoriamente en dos subgrupos. Al primer grupo se ofreció unas píldoras realmente efectivas para que tomaran tres al día, y al otro se ofreció un placebo (medicamento sin efecto). Al cabo de un mes fueron interrogados sobre la eficacia de las pastillas tomadas, con el siguiente resultado:

	Su ansiedad ha disminuido	Siguen con mucha ansiedad
Medicamento contra la ansiedad	50	15
Placebo	96	39

- Preguntado un paciente, dice que su ansiedad casi ha desaparecido; está encantado con el tratamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que este paciente haya tomado el placebo?
- ¿Hay asociación entre el tipo de tratamiento (medicamento o placebo) y el efecto producido (la ansiedad disminuye o no)? ¿O son las variables independientes?
- Indica cómo has llegado a esta conclusión (puedes usar el método que prefieras)

Figura 1. Problema planteado

En el primer apartado, se plantea al estudiante el cálculo de una probabilidad condicional a partir de una tabla de contingencia, tarea propuesta en otras investigaciones (Díaz, 2007; Contreras, 2011), en las que se describen errores como la confusión entre probabilidad condicional. Para resolver este apartado el estudiante ha de leer e interpretar los valores de la tabla, e identificar el numerador y el denominador de dicha probabilidad. La solución correcta sería: $P(\text{Placebo}|\text{ansiedad ha disminuido}) = 96/(50 + 96) = 96/146 = 0,657$.

En los siguientes apartados, el estudiante debe hacer un juicio de asociación, a partir de los datos dados en la tabla (Batanero y Díaz, 2008). El estudiante podría realizar un contraste formal de independencia, para lo cual tendría que plantear las hipótesis, y calcular el estadístico Chi-cuadrado, especificando sus grados de libertad. Comparando con el valor crítico, llegaría a la conclusión de que los resultados no son estadísticamente significativos, por lo cual habría que aceptar provisionalmente la

hipótesis de independencia. También podría usar cualquier procedimiento intuitivo. Por ejemplo, podría realizar una comparación entre frecuencias esperadas en caso de independencia (Batanero y Díaz, 2008) con frecuencias observadas, concluyendo que son muy parecidas; esto indica que no hay relación entre las variables. Asimismo, el estudiante puede no hacer ningún tipo de cálculo, sino comparar los valores de las celdas que informan de una dependencia directa (50 y 39), con los valores de las celdas que informan de una dependencia inversa (15 y 96).

Como síntesis del análisis realizado, mostramos en el Anexo los objetos matemáticos incluidos en el problema abierto usado en la evaluación, clasificados de acuerdo al marco teórico y que incluye la mayoría los objetos incluidos en la enseñanza, lo que dotará de validez de contenido al proceso de evaluación

4. Análisis y Resultados

A continuación, se analizan los resultados obtenidos, clasificando las respuestas en correctas, parcialmente correctas e incorrectas, añadiendo un ejemplo de cada categoría.

4.1 Cálculo de probabilidad

Como se ha indicado el estudiante ha de leer la tabla para obtener la probabilidad pedida. A continuación, se describen las respuestas encontradas.

Respuestas correctas:

RC.1. El estudiante calcula de forma directa la probabilidad condicionada a partir de la tabla de contingencia. Reconoce la probabilidad condicionada, mostrando que diferencia este concepto de la probabilidad simple y conjunta: “P(Placebo/ansiedad ha disminuido)=96/146=0,657” (Estudiante 62).

RC.2. El estudiante usa una notación adecuada, calculando la probabilidad a partir de la fórmula de la probabilidad condicionada que recuerda de las asignaturas pasadas. Como en el caso anterior, muestra que es capaz de discriminar probabilidades simples, compuestas y condicionales. Además, es capaz de recordar y aplicar correctamente la fórmula de la probabilidad condicional, calculando primero la probabilidad conjunta del numerador, y después la probabilidad simple del denominador: “P(Placebo/ansiedad ha disminuido)= $\frac{P(\text{Placebo} \cap \text{ansiedad}_{\text{menor}})}{P(\text{ansiedad}_{\text{menor}})} = \frac{0,48}{0,73} = 0,657$ ” (Estudiante 21).

Respuestas parcialmente correctas:

RP.1. El estudiante identifica el cálculo de una probabilidad condicional, pero comete un error de cálculo. Contreras (2011) encontró 3 casos (1,6%): “0,675” (Estudiante 2).

Respuestas incorrectas:

RI.1. El estudiante calcula la probabilidad conjunta, en lugar de la condicional, confundiendo estos dos conceptos, como también se ha encontrado en las investigaciones de Einhorn y Hogarth (1986); Ojeda (1995) y el estudio de Contreras (2011) donde se dan 14 casos (7,7%): “96/200 = 0,48” (Estudiante 19).

RI.2. El estudiante calcula la probabilidad simple, en lugar de la probabilidad condicional, mostrando confusión entre estos dos conceptos, conflicto que aparece en

otras investigaciones (Estrada y Díaz, 2007; Contreras, 2011). Un ejemplo es el que reproducimos a continuación: “ $146/200=0,78$ ó $135/200=0,67$ ” (Estudiante 14).

RI.3. El estudiante calcula una probabilidad condicional diferente de la que se le pide. Batanero, Estepa, Godino y Green (1996) y Contreras (2011), observaron esta confusión. Falk (1986) considera como explicación la imprecisión del lenguaje cotidiano: “ $50/146=0,342$ ” ó “ $96/135$ ” (Estudiante 39).

RI.4. El estudiante divide dos frecuencias absolutas, que llevan a una razón; es decir, confunde estos dos conceptos. En la investigación de Contreras (2011), se encuentra un caso: “ $50/96=0,52$ ” (Estudiante 54).

RI.5. El estudiante confunde la fórmula de la probabilidad condicional, intercambiando el numerador con el denominador. Esto le lleva a obtener una probabilidad superior a uno. Contreras (2011) también describe dos casos, pero ninguno que intercambie numerador y denominador en la fórmula de la probabilidad condicional. El estudiante tiene un conflicto en no recordar la fórmula de la probabilidad condicional, y otro en considerar que una probabilidad puede superar la unidad, dando respuestas como la siguiente: “ $146/96=1,52$ ” (Estudiante 100).

En la Tabla 1 observamos 56 (59,6%) respuestas correctas. Entre las incorrectas resalta la respuesta RI.1, en la que los estudiantes calculan la probabilidad conjunta, en lugar de la probabilidad condicional, error que, como se ha dicho, aparece en bastantes investigaciones. El resto de errores apenas aparece. También queremos destacar que este apartado ha sido respondido por todos los estudiantes, lo que nos indica que, en principio, la tarea de calcular una probabilidad condicionada fue asequible.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el problema, apartado a

	Frecuencia	Porcentaje		Frecuencia	Porcentaje
RC.1	55	58,5	RI.1	26	27,6
RC.2	1	1,1	RI.2	5	5,3
RP.1	1	1,1	RI.3	2	2,1
			RI.4	3	3,2
			RI.5	1	1,1
Total	57	60,7	Total	37	39,3

En la investigación de Contreras (2011) se obtiene un 43,7% de resultados correctos, y Estrada y Díaz (2007) obtuvieron un 56% de respuestas correctas en el cálculo de probabilidades condicionales en tablas de contingencia. Por otro lado, Díaz (2007), obtiene un 52% de respuestas correctas en estudiantes de psicología. Nuestros resultados (59,6% de RC), son mejores que todas estas investigaciones, lo que sugiere que la enseñanza fue productiva en nuestros estudiantes.

4.2. Juicios de asociación

En este problema, se presenta una pequeña asociación (Phi de Pearson=0,061), por lo que algunos estudiantes consideran que no la hay, aunque posteriormente se puede apreciar cómo los estudiantes en su mayoría al aplicar propiedades de independencia y observar que no se cumplen con exactitud, tienden a indicar la asociación. Solo hemos considerado dos tipos de respuestas en este apartado. En la Tabla 2 se observa que la mayoría de los estudiantes indica que hay asociación, pues la independencia no es perfecta. Ello nos indica un buen aprendizaje de las nociones de asociación,

independencia y sus propiedades, pues la mayoría detecta la asociación, a pesar de ser pequeña. Al comparar con los ítems del cuestionario de conocimientos intuitivos (Cañadas, Batanero, Contreras y Arteaga, 2011), aparentemente los resultados son similares, pero la intensidad de la asociación no es similar a la de ninguno de los ítems de dicho estudio. Además, en aquel cuestionario no se diferenciaba en el signo de la asociación, haciendo mucho más difícil el problema que tratamos en este trabajo.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el problema, apartado b

	Frecuencia	Porcentaje
RC.1 Asociación	68	72,3
RI.1 Independencia	12	12,8
No responde	14	14,9
Total	94	100

4.3. Estrategias en el juicio de asociación

Al igual que en Cañadas et al. (2011) a continuación describimos las estrategias usadas para decidir la asociación.

Estrategias correctas:

EC.1. Comparar las distribuciones condicionales por filas ó por columnas, aplicando una de las propiedades de la independencia. Esta estrategia ya apareció en el estudio de Cañadas et al. (2011), y fue descrita por Estepa (1993) Un ejemplo sería el siguiente: “He calculado las frecuencias relativas condicionales por filas y los resultados no han sido iguales, por lo tanto, no hay independencia de las variables habiendo así asociación entre ellas” (Estudiante 82).

EC.2. El estudiante calcula las frecuencias esperadas en caso de independencia y las compara con las observadas. Si dichas frecuencias coinciden en todas las celdas, entonces considera que las variables son independientes. En el siguiente ejemplo, el estudiante utiliza explícitamente una de las propiedades de la independencia.

“Frecuencias esperadas

47,45	17,55
98,55	3,645

Son independientes no existe relación entre estas variables (Estudiante 10).

EC.3. El estudiante calcula el estadístico Chi-cuadrado para realizar un contraste de independencia, completando los pasos del proceso. Esta sería una estrategia formal, fruto del aprendizaje y no aparece en el Cañadas et al. (2011). A continuación, presentamos una respuesta en esta categoría.

Frecuencias esperadas

47,45	17,55	0,14	0,37
98,55	3,645	0,12	0,18

$\text{Chi}^2=0,14+0,37+0,12+0,18=0,81$; no es estadísticamente significativo, por lo tanto son independientes (Estudiante 93).

Estrategias parcialmente correctas:

EP.1. Comparación de razones de casos a favor y en contra. El estudiante compara las razones 50/96 y 15/39, que en caso de independencia coinciden. Es decir, aunque el estudiante está basándose en uno de los coeficientes de asociación (razón de productos cruzados), que no llega a interpretar, por lo que hemos considerado la estrategia parcialmente correcta. Sería una estrategia descrita por Inhelder y Piaget (1955) como propia de las operaciones formales y de nivel 5 (Pérez Echeverría, 1990). En Cañadas et al. (2011), fue una de las estrategias correctas utilizadas por los estudiantes. Un caso de este tipo es: “50/96 \neq 15/39” (Estudiante 77).

Estrategias incorrectas:

EI.1. El estudiante intenta aplicar un procedimiento informal, comparando las celdas que informan de una dependencia directa, con las que informan de una dependencia inversa. El conflicto aparece porque no usa todas las celdas de la tabla. Esta estrategia aparece en Cañadas et al., (2011). Un ejemplo: “Hay mayoría personas que cumplen las dos condiciones o no cumplen ninguna” (Estudiante 72).

EI.2. Se calculan las frecuencias relativas dobles y se comparan entre sí. Se aplica una propiedad de la independencia, donde si las frecuencias esperadas condicionales coinciden con las frecuencias absolutas, entonces hay independencia. El estudiante tiene un conflicto al confundir estas dos frecuencias, que también aparece en Díaz (2007) y Contreras (2011) y Cañadas et al. (2011). Un ejemplo se incluye a continuación.

0,25	0,075	“Porque las frecuencias por filas o por columnas no dan los mismos resultados, por tanto, son dependientes” (Estudiante 6).
0,48	0,195	

EI.3. El estudiante compara frecuencias marginales creyendo en forma errónea que, si las frecuencias marginales coinciden, entonces hay independencia. Esta estrategia también fue encontrada en Estepa (1993) y Cañadas et al. (2011). Un ejemplo sería: “Son dependientes, ya que ninguno de los resultados totales coincide” (Estudiante 43).

RI.4. Dividir las cuatro frecuencias absolutas por una frecuencia absoluta marginal. El estudiante quiere aplicar la propiedad consistente en que, si las distribuciones condicionales coinciden, entonces hay independencia. Pero tiene un conflicto al calcular las frecuencias condicionales. Esta estrategia no fue encontrada en Cañadas et al. (2011). Por ejemplo:

50/65=0,76	96/65=0,7	15/65=0,23	39/65=0,6	No son independientes. Sí hay asociación (Estudiante 81).
0,76	0,23	0,28		
0,7	0,28	0,675		

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el problema, apartado c

Frecuencia			Porcentaje		
RC.1	66	70,2	RI.1	1	1,1
RC.2	4	4,2	RI.1	1	1,1
RC.3	2	2,1	RI.2	2	2,1
RP.1	3	3,2	RI.3	1	1,1
			No responde	14	14,8
Total	75	79,7	Total	19	20,2

La mayoría de las estrategias empleadas para llegar al juicio de asociación son correctas (72 estudiantes, 76,5%), resultados mucho mejores que los obtenidos antes de la enseñanza (Cañadas et al., 2011), donde ninguno de los ítems alcanzó el 15% de estrategias correctas. Únicamente han empleado estrategias erróneas 5 estudiantes después de la enseñanza (5,4%), aunque hay que tener en cuenta que 14 (14,8%) no han respondido. Además, aparecen estrategias formales, y no únicamente informales como en Cañadas et al. (2011). Se han abandonado prácticamente las estrategias de nivel 4 o inferior (Pérez Echeverría, 1990).

5. Conclusiones

En este problema todos los estudiantes han respondido al apartado (a) donde se les pedía una probabilidad condicional, aunque sólo el 59,6% dan la respuesta correcta. Por otro lado, aunque en los apartados b y c, donde se les pedía un juicio de asociación y su justificación 14,8% no han respondido, la mayoría (72%) detecta la pequeña asociación y este juicio es basado en una estrategia correcta (76,4%). Generalmente esta estrategia es formal, basada en la comparación de las frecuencias observadas y esperadas en caso de independencia; en otros casos se usan estrategias intuitivas correctas de nivel 5 (Pérez Echeverría, 1990). Podemos decir que hubo una gran mejora en el cálculo de probabilidades condicionales, ya que nuestros resultados mejoraron los obtenidos por todas las investigaciones previas con las que se compara (Díaz, 2007; Estrada y Díaz, 2007; Contreras, 2011). Concluimos que la enseñanza recibida ha contribuido a mejorar la competencia de los estudiantes en la realización de juicios de asociación.

El análisis de las respuestas abiertas permitió también identificar algunos conflictos semióticos, que clasificamos en lo que sigue en varios apartados.

Conflictos semióticos relacionados con conceptos o propiedades: (1) confundir las frecuencias relativas dobles con las frecuencias esperadas. Este conflicto aparece también en Díaz (2007) y Contreras (2011); (2) el estudiante compara frecuencias marginales creyendo en forma errónea que, si las frecuencias marginales coinciden, entonces hay independencia. También fue encontrado en Estepa (1993).

Conflictos semióticos involucrados en los procedimientos: (1) no usas todas las celdas de la tabla. Generalmente se usan dos celdas (presencia-presencia y ausencia-ausencia); (2) otro conflicto de cálculo aparece al intentar calcular las frecuencias condicionales.

Conflictos semióticos involucrados con el cálculo de probabilidades: (1) confunden el tipo de probabilidad que se necesita, calculando la probabilidad conjunta, en lugar de la probabilidad condicional. Aparece en el estudio de Contreras (2011); (2) calcular la probabilidad simple, en lugar de la probabilidad condicional, descrito en otras investigaciones (Estrada y Díaz, 2007; Contreras, 2011); (3) algunos estudiantes calculan una probabilidad condicional diferente de la que se le pide, como ocurre en otros trabajos (Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996; Contreras, 2011; Falk, 1986); (4) en el cálculo de probabilidades condicionales, algunos estudiantes dividen dos frecuencias absolutas, que llevan a una razón; es decir, confunde estos conceptos. En Contreras (2011) aparece este mismo conflicto (5) en el cálculo de probabilidades condicionales, algunos estudiantes confunden la fórmula de la probabilidad condicional, intercambiando el numerador con el denominador. Esto le lleva a obtener una probabilidad superior a uno, como ocurre en dos casos en el trabajo de Contreras (2011).

Referencias

- Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Ed.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 191-206). Minnesota, MN: International Statistical Institute.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Cañadas, G. R. (2011). *Las tablas de contingencia para psicología*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Cañadas, G. R., Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología, *Educación Matemática*, 23(2), 5-32. ISSN: 0187-8298. Editorial: Santillana.
- Cobb, P. y McClain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students' statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 375-395). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*, 99, 3-19.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Estrada, A. y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO*, 44, 48-58.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 3-9.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2 y 3), 237-284.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Huerta, P. (2009). On conditional probability problem solving research – structures and contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 163-194.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: Presses Universitaires de France.
- Jenkins, H. M. y Ward, W. C. (1965). Judgment of the contingency between responses

and outcomes, *Psychological Monographs*, 79, 1-17.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumno respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

ANEXO, Objetos considerados en la evaluación

Tipo	Objetos matemáticos
Sit-pro.	P1. Resumir la información obtenida de un conjunto de observaciones bivariantes de modo que se visualicen posibles relaciones entre las variables. P2. Cálculo de probabilidades asociadas a valores específicos de una o las dos variables. P3. Contraste de independencia.
Leng.	R1. Lenguaje verbal. R2. Lenguaje simbólico. R3. Tablas (de frecuencia y de contingencia). PR1. Lectura e interpretación de la tabla PR2. Cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionales PR3. Cálculo de frecuencias condicionales y marginales PR4. Fórmula de cálculo de las frecuencias esperadas PR5. Formulación de hipótesis (contraste de independencia) PR6. Calcular frecuencias relativas marginales a partir de las absolutas marginales PR7. Independencia si coinciden frecuencias condicionales por columnas ó filas PR8. Aceptar/rechazar la hipótesis nula basándonos en el valor p PR9. Comprobar las propiedades de independencia
Procedimientos	C1. Variable simple / doble valor. C2. Frecuencia absoluta doble y marginal C3. Frecuencia relativa marginal. C4. Frecuencia relativa condicional. C5. Frecuencia relativa doble C6. Distribución marginal. C7. Distribución condicional. C8. Probabilidad conjunta y condicional C9. Independencia /Asociación C10. Dependencia aleatoria y dependencia funcional C11. Frecuencias esperadas
Conceptos	PP1. Igualdad frecuencias relativas condicionales en caso de independencia PP2. Igualdad frecuencias relativas condicionales y marginales en independencia PP3. Celdas que indican signo de asociación en la tabla 2x2 PP4. Frecuencias esperadas en caso de independencia PP5. Relación entre asociación y causalidad PP6. Propiedades de independencia PP7. Cuando un valor chi cuadrado es estadísticamente significativo
Propiedades	
Arg.	A1. Razonamientos informales. A2. Comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar. A3. Deductivos