

Explorando el significado intuitivo de la probabilidad en profesores de matemática

Exploring the intuitive meaning of probability in mathematics teachers

Héctor Bastias Montaner¹, Hugo Alvarado Martínez² y Lidia Retamal Pérez³

^{1 2 3}Universidad Católica de la Santísima Concepción

Resumen

En este trabajo se estudian las intuiciones sobre la probabilidad en situaciones cotidianas de un grupo de profesores de matemática de secundaria. Se analizan las respuestas de 118 profesores a un cuestionario de ocho ítems sobre la asignación intuitiva de probabilidades en contexto de contingencia nacional. Los resultados muestran diversidad en las puntuaciones de posibilidad de ocurrencia en los diferentes ítems, que es producto de los sesgos que se tienen sobre el tema. Consideramos que el estudio del razonamiento probabilístico en la educación media debe comenzar con la reflexión sobre las intuiciones de probabilidad.

Palabras clave: Probabilidad, intuición, educación secundaria, formación de profesores.

Abstract

In this paper we study the probability intuitions in everyday situations of a group of secondary mathematics teachers. We analyse the responses of 118 teachers to a questionnaire with eight items on the intuitive allocation of probabilities in the context of national contingency. The results show diversity in the possibility of chance scores in the different items, due to the biases on the topic. We consider that the study of probabilistic reasoning in middle school must begin with the reflection on probability intuitions.

Keywords: Probability, intuition, secondary education, teacher training.

1. Introducción

En la actualidad profesores y estudiantes se enfrentan cotidianamente con lecturas de interés personal en los medios de comunicación, donde aparecen informaciones sobre situaciones en que hay incerteza sobre sucesos de contingencia nacional. Sin embargo, en la etapa escolar, en la enseñanza de la probabilidad no se atiende a las ideas informales y creencias que tienen los alumnos sobre las probabilidades (Kahneman y Tversky, 1972).

Una dimensión de indagación en educación estadística es estudiar las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico; en particular, investigar cómo las personas hacen juicios y toman decisiones cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Landín y Sánchez (2010) señalan que una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar, es capaz de modelarlas y cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento.

Este trabajo es parte de un estudio más amplio que estamos llevando a cabo sobre la evaluación de los conocimientos de las probabilidades que tienen los profesores de matemática en la Octava región de Chile. La primera etapa que aquí presentamos es la evaluación de los resultados de un cuestionario de ocho ítems, aplicado a 118 profesores

Bastias, H. Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

de matemática que enseñan en el sistema escolar de la educación secundaria, acerca de la presencia de la probabilidad en situaciones cotidianas. Se analiza el significado intuitivo de probabilidad que atribuyen los profesores de matemática a situaciones de incertidumbre, por medio de una escala cuantitativa de 0% a 100% en la asignación de posibilidad de ocurrencia de eventos impredecibles, con el fin de explorar su grado de creencias en ambientes de incertidumbre contextualizados.

2. Fundamentación

2.1. Marco teórico

El estudio se apoya en el marco teórico del Enfoque-ontosemiótico (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). En este marco teórico (EOS), la enseñanza y aprendizaje están relacionados con el significado institucional y el significado personal que posee un objeto matemático, entendidos como toda entidad que interviene en una tarea matemática. Además, los autores establecen que la comprensión de un objeto matemático es progresiva y que no puede ser observada directamente, pero su práctica personal (significado personal) es la que permite indagar en un acercamiento global al significado declarado por la institución (significado institucional). En este trabajo, consideramos que un primer acercamiento a la comprensión de la probabilidad en la educación media debe iniciarse con actividades que favorezcan la reflexión sobre el significado intuitivo de probabilidad. La experiencia del profesor de matemática enfrentado a situaciones simples bajo incertidumbre le va a permitir conducir a sus estudiantes hacia una adecuada intuición sobre la probabilidad. En consecuencia, pretendemos analizar el significado institucional evaluado acerca de las intuiciones probabilísticas en los profesores de matemática.

2.2. Significados de la probabilidad

Es innegable cómo hoy en día está más presente en el lenguaje cotidiano de las personas el uso de las palabras y las nociones de azar y probabilidad. Al igual que en sus inicios, se mantienen las discusiones sobre las diferentes interpretaciones de tipo filosóficas de las concepciones y definición de azar (Batanero, 2016). Investigadores de Educación Estadística destacan los dos puntos de vista complementarios que señala Hacking (1975) en el inicio del cálculo de probabilidad. Un primer punto es situar la probabilidad como grado de creencia personal en la verosimilitud de los sucesos inciertos; y por otro lado, por medio de las observaciones, la probabilidad intenta medir objetivamente esta verosimilitud.

Batanero (2005) realiza una caracterización de los diferentes significados de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Analiza los diferentes elementos de campos de problemas, procedimientos, lenguaje, propiedades y conceptos relacionados en los cinco significados de la probabilidad. A saber, significado de la probabilidad intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. En este estudio nos centramos en analizar cómo se presenta el primer significado descrito en una muestra de profesores de matemática.

Significado intuitivo de la probabilidad. Las ideas intuitivas de probabilidad como grado de creencia personal es común encontrarlas en diversos juegos de azar de los jóvenes (poco probable, probable, altamente probable) y también en los medios de comunicación aparece destacada la probabilidad en los anuncios acerca de las creencias de un colectivo de personas en un tema de contingencia nacional. Godino, Batanero y

Cañizares (1987) recomiendan trabajar la aproximación intuitiva con asignación cualitativa de probabilidades en la educación primaria. Gómez, Batanero y Contreras (2014) señalan que este enfoque de expresión lingüística en algunos casos se puede ordenar por su mayor verosimilitud y cuantificar sólo en casos sencillos sin formalismo matemático. En nuestro caso, las ideas intuitivas de la probabilidad tienen una asignación cuantitativa empleada en diversas situaciones de la vida real por profesores de matemática.

Sharma (2014) considera que la probabilidad informal está firmemente establecida en la cultura común y que obstaculiza el aprendizaje de la probabilidad formal. English y Watson (2016) señalan que las creencias intuitivas sobre "artefectos aleatorios" pueden influir aún más en las respuestas de los alumnos. Amir y Williams (1999) sostienen que creer en la suerte puede contribuir a creer que el resultado del lanzamiento de una moneda, o la forma en que se lanza tiene un impacto, o se producirá el resultado preferido. Todas estas creencias pueden incidir en la comprensión de los niños de la probabilidad formal. Estrada, Díaz y de la Fuente (2006) en su estudio de sesgos en el razonamiento sobre la probabilidad condicional evidencian las dificultades presentadas en estudiantes universitarios y recomiendan poner atención en el trabajo con futuros profesores de matemáticas.

3. Metodología

Los ocho ítems que se proponen a continuación forman parte de un cuestionario más amplio sobre evaluación de conocimientos básicos y formales de probabilidad dirigido a profesores que enseñan matemática en el segundo ciclo escolar (alumnos de 12 a 17 años). También, a modo de prueba piloto para ver la redacción y claridad de las preguntas, se aplicó el cuestionario a un grupo de 250 estudiantes universitarios. Los primeros cuatro ítems fueron seleccionados de los estudios de Díaz (2009), Kahneman y Tversky (1972, 1982), Pollatsek, et al. (1987) y Tversky y Kahneman (1974, 1980). Los ítems 5 al 8 fueron elaborados por los autores a partir del contexto de situaciones de contingencia nacional.

A continuación, se describen ocho ítems en que los profesores de matemática deben estimar el grado de creencias sobre probabilidades en situaciones cotidianas. Para ello, *los profesores intuitivamente tienen que asignar un valor de posibilidad de ocurrencia de 0% 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100% en los siguientes enunciados:*

Ítem 1. Visitar el hospital de Concepción, seleccionar un bebe y que sea de sexo masculino.

Este ítem puede ser relacionado con el experimento del lanzamiento de una moneda situando el cálculo de la probabilidad de que sea sello (masculino). Se tiene el espacio muestral $\Omega = \{\text{femenino, masculino}\} = \{\text{cara, sello}\}$ y la $P(\text{sello}) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar un bebé varón corresponde a un 50%. También, otro argumento tiene en consideración que en la ciudad de Concepción, Chile existen más nacimientos hombre que mujeres; en la relación de cada 100 mujeres por cada 105 hombres (Informe Instituto Nacional de Estadística INE, 2012). Se espera entonces que la posibilidad de encontrar un bebe hombre esté entre 50 % y 60%.

Ítem 2. Una persona en Chile poco delicada y de actitud fría e indiferente. Es más probable que sea hombre a que sea mujer.

Este ítem es una adaptación de Tversky y Kaneheman (1974). Se pretende cuantificar que tan probable es que la persona descrita sea hombre a que sea mujer, al reconocer que las características dadas corresponden al prototipo de un hombre en lugar de una mujer. Los autores indican que la respuesta de forma heurística es que esta persona sea identificada como hombre, ignorando las consideraciones estadísticas relevantes. En Chile hay muchos más hombres que mujeres, existiendo 100 mujeres por cada 105 hombres. (Ministerio de desarrollo social de Chile, 2013)

Ítem 3. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero.

Estudios que han explorado este tipo de preguntas han coincidido en que los encuestados generalmente se dejan llevar por un razonamiento causal (Pollatsek et al., 1987; Tversky y Kahneman, 1980) cuantificando con un alto grado de probabilidad este tipo de pregunta. Cuando la probabilidad condicional es presentada en contextos sociales, el conocimiento previo de los eventos puede interferir con el cálculo de las probabilidades, especialmente si no hay una clara comprensión e interpretación del lenguaje condicional (Batanero, 2009).

Consideremos el suceso A que el joven sea ingeniero (efecto) y el suceso B que el padre sea ingeniero (causa). Estamos en presencia de una relación causal que en términos simbólicos podemos expresar $P(A|B)$ al cuantificar la probabilidad de que ocurra el suceso A dado que ha ocurrido el suceso B. En este caso se espera que los profesores utilicen un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas.

Ítem 4. Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.

Pollatsek et al. (1987) plantearon a los estudiantes la siguiente cuestión: ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable? a) Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules, b) Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules, c) Los dos sucesos son igual de probables. Los autores pretendían determinar si los estudiantes cuando se enfrentan a eventos condicionales razonan en términos de condiciones o en términos de causalidad; observando una variedad de respuestas de los estudiantes. El 50% de los estudiantes indicó que la opción (a) era la más probable, ningún estudiante eligió la opción (b) y un 40% de los estudiantes eligió la opción (c). Tversky y Kahneman (1982) obtuvieron que las personas encontraban más probable que “una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules” que “una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules”, aunque cerca de la mitad de los sujetos de su estudio respondieron que “ambos sucesos son igual de probables”. Los autores explican este hallazgo con la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

El ítem 4 será propuesto a los profesores de matemática con el fin de determinar si cuando se enfrentan a eventos condicionales razonan en términos de condiciones o en términos de causalidad. En este contexto social consideremos la opción A que la madre tenga los ojos azules (causa) y B que la niña tenga los ojos azules, por tanto tenemos $P(A|B)$, que es una relación diagnóstica, al estimar la causa dado el conocimiento del efecto.

Ítem 5. Que los Cuartos Medios de su colegio obtengan sobre 500 puntos en la PSU Matemática 2017.

El puntaje promedio nacional de Matemática en la prueba de Selección Universitaria PSU año 2015 fue 494 puntos (Informe PSU 2015). Este informe deja en evidencia que

los puntajes más altos los obtienen los estudiantes que provienen de colegios particular pagado seguido por los colegios particular subvencionado y municipal. Se pretende indagar con este ítem la percepción que tienen los profesores de matemática respecto al puntaje que obtendrían sus alumnos de acuerdo a su centro educacional.

Ítem 6. Jóvenes chilenos sean donantes de órganos.

La Coordinación Nacional de Donación de Órganos (2016) presentó un informe con las cifras en la cantidad de trasplantes y donantes que hay en el país, arrojando que actualmente la tasa de donaciones de órganos en Chile es de 7 por cada millón de habitantes. Ante este déficit de donadores es que en octubre del 2013 entra en Chile la ley de donante universal la cual consiste en que toda persona mayor de 18 años es considerada como donante de sus órganos una vez fallecida y ya no se podrá renunciar a ser donante de órganos al renovar la cédula de identidad o la licencia de conducir. En caso contrario se debe ir a una notaría dejando por escrito la decisión mediante una declaración simple, pero a pesar de esta medida las cifras no son muy alentadoras de donantes, la organización “Sociedad Chilena de Trasplante” dio a conocer que sólo un 30% de los jóvenes entre 18 y 28 años se declara donante de órganos.

Ítem 7. Aprobación de la Presidenta de Chile al término de su mandato.

Los medios de prensa en los últimos años están anunciando que en Chile se percibe una crisis política, presentando en la población un descontento generalizado del Gobierno de Chile. Las últimas encuestas realizadas por el centro Adimark (2015) arrojaron que la aprobación de la Presidenta de Chile va decreciendo; en Enero de 2016 presentaba 29% de aprobación, Marzo 26% y Mayo un 23% de aprobación a su gestión. Se espera que la percepción respecto de esta situación sea baja por parte de la opinión de los encuestados.

Ítem 8. El chileno es impuntual en la hora de llegada al trabajo.

El estudio “Mirémonos: saber cómo somos” publicado en el diario la Nación el 2010, dio a conocer que un 84% de los Chilenos encuestados considera ser impuntual. Con retrasos entre 8 a 15 minutos promedio. Existe una preocupación de las autoridades respecto a la impuntualidad del chileno, pues esta va aumentando lo que significa según el estudio realizado por Instituto Libertad una pérdida país de US\$615 millones anuales.

4. Resultados

El estudio inicial acerca de la asignación de probabilidades intuitivas se realizó con 118 profesores de matemática que ejercen en distintos colegios de la educación media de la región del Bío-Bío en Chile, y cuya caracterización es la siguiente: 34 profesores de colegios particular pagado, 70 de colegios particular subvencionado y 14 profesores de colegios municipales; 56 profesores y 62 profesoras; con años de experiencia entre uno y más de 20 años. Todos los profesores, en el currículo de su formación inicial, han recibido formación formal de probabilidades. La aplicación de un cuestionario fue contestado vía online y con lápiz y papel en sesiones de talleres para profesores sobre Probabilidad y Estadística año 2016 en la Universidad Católica de la Santísima Concepción de Chile. En lo que sigue se muestran los resultados de cada enunciado del ítem, representado en gráficos de barras con valores dados en porcentajes.

Ítem 1. *Visitar el hospital de Concepción, seleccionar un bebe y que sea de sexo masculino.* Se observa en la Figura 1 que un 72,9% de los profesores considera que la

probabilidad de seleccionar al azar un bebé varón en la ciudad de Concepción es de un 50%. La primera solución que viene a la mente como respuesta intuitiva es 1/2, al considerar el espacio muestral equiprobable para el sexo (niño y niña). Tversky y Kahneman (1974) indican que antes preguntas de respuesta simple se produce un sesgo predecible de nuestra mente, donde la persona contesta obviando ciertos datos estadísticos; en nuestro caso que en Concepción hay más nacimiento hombres (Informe INE, 2012). Además, sólo un 1,7% de los profesores otorga un 60% de probabilidad de encontrar un bebe hombre, mientras que un 22,1% considera que la probabilidad es inferior al 50%.

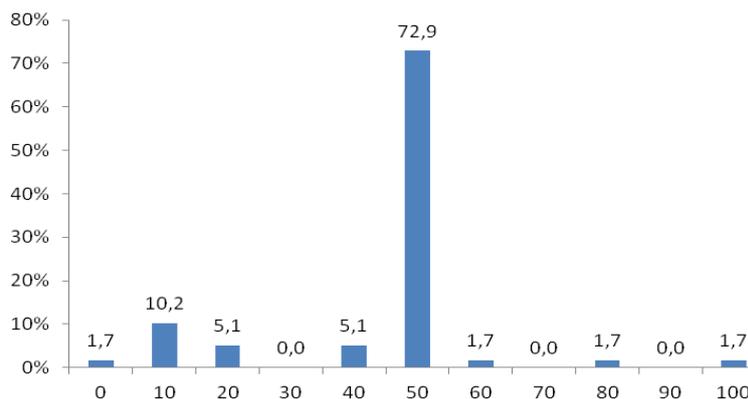


Figura 1. Resultados en el ítem 1

Ítem 2. *Una persona en Chile poco delicada y de actitud fría e indiferente. Es más probable que sea hombre a que sea mujer.* La Figura 2 muestra que un 55,9% de los participantes asigna un 50% de probabilidad que las características dadas correspondan a una persona de sexo masculino. También, sólo un 3,4% de los profesores considera por debajo del 50% la ocurrencia de esta posibilidad, y un 40,7% considera la posibilidad de al menos el 60% de probabilidad que la descripción corresponda a un hombre.

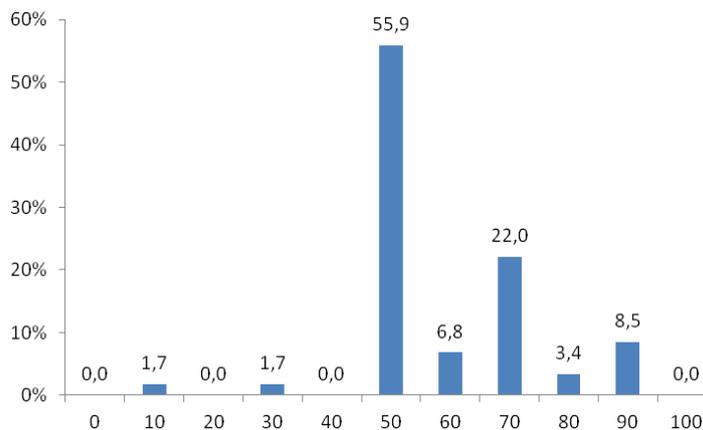


Figura 2. Resultados en el ítem 2

Estos resultados han sido señalados por Kahneman y Tversky (1972) indicando que con frecuencia las personas valoramos la probabilidad o frecuencia de aparición de algunos acontecimientos sobre la base de asociaciones que se tienen en mente y evidencia que este tipo de heurística de representatividad conduce a serios errores debido, a que la

similaridad o representatividad no es influida por factores diversos que afectaran a los juicios de probabilidad.

Ítem 3. *Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero.* En este ítem la cuantificación fue más diversa en la asignación intuitiva de probabilidad en los profesores de matemática. Se observa en la Figura 3 que un 40,7% de los profesores considera al menos un 60% de probabilidad de que el joven sea ingeniero bajo la condición que su padre es ingeniero. Mientras que un 22,1% de los profesores manifiesta que la posibilidad de que ocurra este suceso es inferior al 40%. De los 118 profesores un 44 (37,3%) asignaron un 50% de probabilidad de que sea ingeniero el joven dado que su padre es ingeniero. Estos resultados no coinciden con las investigaciones de Pollatsek, et al. (1987) que indican que la mayoría de los encuestados encontraban altamente probable esta situación.

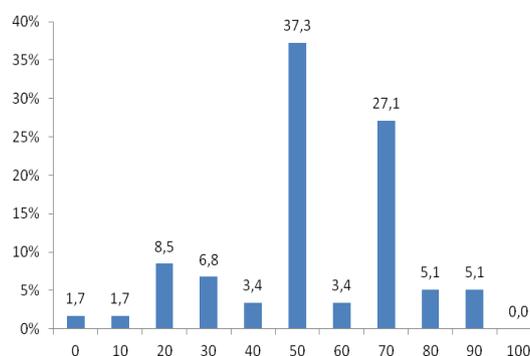


Figura 3. Resultados en el ítem 3

Ítem 4. *Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.* En la Figura 4 llama la atención que un 34% de los profesores estimaron sobre un 50% la posibilidad que la madre tenga los ojos azules si su hija tiene ojos azules, expresando un razonamiento diagnóstico, es decir, que ocurra una causa dado el conocimiento del efecto. Además, un 40,7% de los profesores asignaron un 50% de probabilidad a esta situación y un 18,7% de los profesores indicó una probabilidad inferior al 50%. Estos resultados no son acorde con los de Pollatsek, et al. (1987) el cual señalan que el 0 % de los encuestados consideraba probable este ítem.

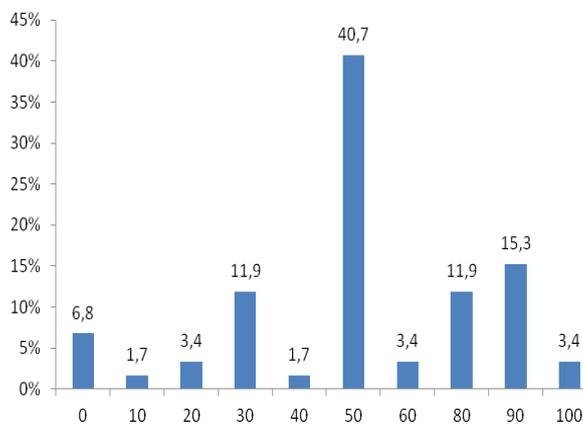


Figura 4. Resultados en el ítem 4

Los ítems 5, 6, 7 y 8 de contexto nacional se presentan en un gráfico de Box-plot (Figura 5). Las respuestas fueron variadas en el ítem 5 *Que los Cuartos Medios de su colegio obtengan sobre 500 puntos en la PSU Matemática 2017*. Un 62,8% de los profesores estiman una probabilidad mayor al 50% que sus alumnos obtendrán sobre 500 puntos en la Prueba de Selección Universitaria, PSU. También, sólo un 18,7% del profesorado considera que los puntajes de sus alumnos estarán debajo del promedio nacional.

Respecto del ítem 6 *Jóvenes chilenos sean donantes de órganos*, el 30,6% de los profesores estimó entre un 10% y 30 % de probabilidad que los jóvenes están a favor con la donación de órganos, y se corresponde con las encuestas nacionales sobre el tema. Un 35,7% fue más optimista otorgando una probabilidad mayor al 50%.

Por otro lado, en concordancia con los sondeos de las encuestas políticas (ítem 7 *Aprobación de la Presidenta de Chile al término de su mandato*), un 66% de los profesores percibe un débil gobierno presidencial calificándolo entre un 20% y 30%; otro más crítico proyectaron un 19% de probabilidad. Hubo un 10% de los profesores que le otorgaron una probabilidad entre 50% o 80% de aprobación del gobierno.

Por último, en el ítem 8 *El chileno es impuntual en la hora de llegada al trabajo*, un 47% del profesorado evaluó con probabilidad superior al 50% que efectivamente el chileno no es puntual en el horario de trabajo (ítem 8) y que se corresponde con las encuestas de opinión pública. En cambio, un 22,1% de los profesores no está de acuerdo y asignaron una probabilidad menor al 50% que el chileno es impuntual.

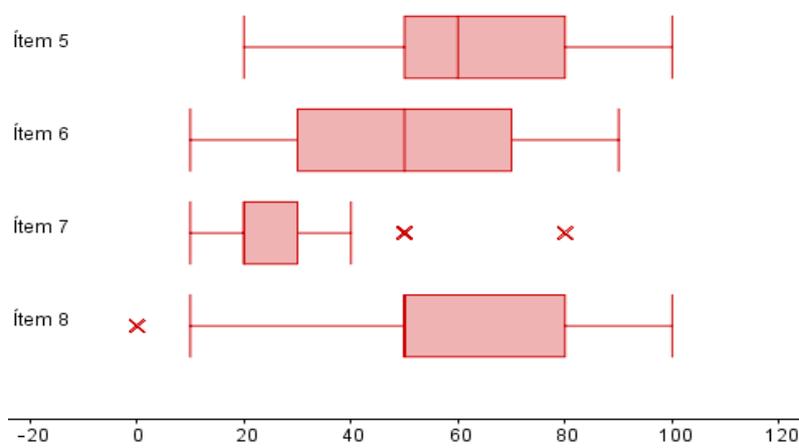


Figura 5. Resultados en los ítems 5, 6, 7 y 8

5. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el significado intuitivo de probabilidad que atribuyen los profesores de matemática frente a preguntas simples de interés personal que involucra la incertidumbre. En particular, hemos ampliado el campo de problemas de este tema, limitado a los sorteos y juegos de azar presentes en la probabilidad informal.

Habitualmente profesores y estudiantes tienen acceso a los medios de comunicación con información de forma resumida en tablas, gráficos y porcentajes, que no son fáciles de interpretar y a su vez pasan a formar parte de su percepción sobre situaciones de incertidumbre. Esta experiencia, de iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades con asignación cuantitativa, podría permitir al profesor medir en una propuesta de enseñanza

del tema la correspondencia de este significado personal de las intuiciones probabilísticas con el significado institucional pretendido (Godino, Batanero y Font, 2007).

Las investigaciones sobre razonamiento probabilístico señalan que ante preguntas de respuesta simple se produce un sesgo predecible de nuestra mente, donde la persona contesta obviando ciertos datos estadísticos. En nuestro estudio esta situación fue reflejada en las preguntas: Visitar el hospital de concepción, seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino (ítem 1), Una persona en Chile poco delicada y de actitud fría e indiferente, es más probable que sea hombre a que sea mujer (ítem 2), Que los cuartos medios de su colegio obtengan sobre 500 puntos en la PSU matemática 2017 (ítem 5) y Jóvenes chilenos que sean donantes de órganos (ítem 6). Además, los ítems 3 que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero (razonamiento causal) y el ítem 4 que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules (relación diagnóstica), no encontramos coincidencias con las investigaciones de Pollatsek et al. (1987). Estos resultados pueden ser tenido en cuenta en el primer ciclo escolar a la hora de enseñar las intuiciones sobre el azar y la probabilidad. Coincidimos con Gea, Fernández, Batanero y Benavides (2016) que manifiestan su preocupación sobre las dificultades de los alumnos en el desempeño de ideas sobre azar e intuiciones erróneas de experimentos aleatorios.

Debido a la débil preparación sobre probabilidad que tienen los profesores de matemática, consideramos necesario investigar y proponer alternativas de apropiación gradual de los distintos significados de probabilidad presente en el currículo de matemática escolar. Como lo señalan Batanero, Contreras y Díaz (2015) los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de la Dirección de Investigación, Proyecto DIN 03/2015 (UCSC, Chile).

Referencias

- Adimark, G. (2015). *Informe de la encuesta de opinión pública: Evaluación gestión del gobierno*. Santiago, Chile. Disponible en, http://www.adimark.cl/es/estudios/documentos/18_eval%20gobierno_ago_2015.pdf
- Amir, G. y Williams, J. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(10), 85-107.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C.(2009). Retos para la formación estadística de los profesores. Trabajo presentado en el *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola*. Universidade do Minho, Braga, Portugal. Disponible en: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Formprofesores.pdf>
- Batanero, C. (2016). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). Prague: European Society for Research in Mathematics Education. Disponible en: hal.archives-ouvertes.fr/hal-01280506/document.
- Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Paradigma*, XXXII (2), 53-68.

- English, L. D., y Watson, J. M. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 28-62.
- Estrada, A., Díaz, C. y Fuentes, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En P. Bolea, M. Moreno y M.J. González, *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 277-284). Zaragoza: SEIEM.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. New York: Springer
- Gea, M. Fernández, J. Batanero, C. y Benavides, A. (2016). Intuición sobre el azar: Análisis de una experiencia aleatoria con alumnos de educación primaria. *Atas do XXVII Seminário de Investigacao em Educacao Matemática* (pp. 89-102). Porto: APM. Disponible en: http://www.apm.pt/files/_actas27_5815cae189de6.pdf.
- Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Síntesis.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon*, 31(2), 25-42.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Hacking, I (1995). *El surgimiento de la teoría de la probabilidad*. Barcelona: Gedisa.
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. *Cognition*, 11, 143-157.
- Landín, P. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 598-618.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C., Hardiman, P., y Cobb, G. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.
- PSU (2015). *Informe de resultados de pruebas de selección universitaria 2015*. Santiago, Chile: Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional DEMRE. Disponible en: <http://www.sip.cl/NSIP/wp-content/uploads/2016/05/Infome-PSU-2015-Final.pdf>
- Sharma, S. (2014). Teaching probability: A socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, 78-84.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1980). Causal schemas in judgments under uncertainty. In E. M. Fishbein (Ed.), *Progress in Social Psychology*, (pp.49-72). Hillsdale, NJ: Erlbaum.