

Significados e idoneidad de secuencias didácticas en un taller de capacitación sobre ecuaciones

Meanings and suitability of didactic sequences in a training on equations workshop

Sandra Graciela Baccelli y Emilce Moler

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata

Resumen

En este trabajo, se presentan los resultados de la aplicación de algunos constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), en un taller de articulación entre la escuela secundaria y la universidad. En el mismo se trabajó sobre el diseño y valoración de secuencias didácticas sobre ecuaciones. En particular, se detallan los significados relativos a ecuaciones, que emergieron del taller, y los distintos criterios de idoneidad didáctica para la valoración de las secuencias didácticas.

Palabras clave: ecuaciones, secuencias didácticas, significados, idoneidad didáctica

Abstract

In this work, results of applying some Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (OSA) constructs are presented, in a workshop of coordination between secondary school and university. The work is focussed on the design and evaluation of didactic sequences about equations. Particularly, the equations meanings emerging from the workshop and different criteria of didactic suitability for the evaluation of the didactic sequences are detailed.

Keywords: Equations, didactic sequences, meanings, suitability

1. Introducción

El desafío que implica enseñar matemática a todos los estudiantes, en el contexto de un mundo cambiante, plantea a los docentes la necesidad de analizar, evaluar y enriquecer las prácticas de enseñanza. En este sentido, se presenta la articulación, entre el nivel medio y el nivel universitario, como uno de los caminos a recorrer para la generación de nuevos espacios compartidos entre docentes. En consonancia con lo dicho, y como parte de las actividades de acompañamiento pedagógico del proyecto denominado *Pro-articulación Ciencia y Tecnología: competencias y vocaciones*, Universidad Nacional de Mar del Plata y Escuelas Secundarias, durante el año 2015, se desarrolló un taller para docentes de nivel medio, denominado “Diseño de secuencias didácticas de matemática en el contexto de las ecuaciones”. Dicha experiencia estuvo pensada como un espacio colaborativo de participación e intercambio de los docentes de ambos niveles (medio y universitario) para valorar, diseñar y analizar las prácticas docentes. Forma parte del Proyecto de mejora de la formación en ciencias exactas y naturales en la escuela secundaria, impulsado por el Ministerio de Educación de la Nación, de la República Argentina.

El tema sobre el que se trabajó fue ecuaciones. La elección del mismo surgió a partir de las dificultades que presentan los estudiantes, de ambos niveles, en su resolución. Dan

cuenta de esta afirmación los resultados de distintos instrumentos de diagnóstico en diferentes instancias, tanto nacionales como locales, a saber:

- Operativo Nacional de Evaluación (MED, 2013).
- Diagnóstico de Habilidades Matemáticas Ingreso 2012 (Aznar, Baccelli, Prieto, Figueroa y Moler, 2012)
- Test diagnóstico para ingresantes, a las carreras de ingeniería de distintas universidades argentinas (Ministerio de Educación y Deportes, 2012)

Las distintas instancias antes mencionadas informan sobre la problemática asociada a la resolución de ecuaciones, en estudiantes de nivel medio y de nivel universitario.

Además de las dificultades que se observaron en los estudiantes al resolver ecuaciones, el tema elegido adquiere importancia debido a su transversalidad tanto a nivel universitario como secundario y a la cantidad de aplicaciones intra y extra matemáticas que presenta.

El taller al que se hace referencia fue organizado por el Grupo de Investigación Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI). Tuvo como objetivo revisar, adaptar, valorar y reformular secuencias didácticas asociadas a ecuaciones para que los docentes participantes gestionaran idóneamente su trabajo en el aula. Se propusieron para ello herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009).

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo se aplicaron algunos de los constructos del EOS, específicamente los asociados al *significado* (personal o institucional) de un objeto matemático y a la *idoneidad didáctica*. Estos constructos fueron utilizados para el diseño y la valoración de las secuencias didácticas que crearon los docentes, como trabajo final, para la aprobación del taller. En este trabajo se presenta una síntesis de los elementos teóricos utilizados, la aplicación de los constructos del EOS implementados en el taller y reflexiones finales a las que se arribaron al concluir la experiencia que se relata.

2. Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Cognición Matemáticos (EOS), como línea de investigación en Didáctica de la Matemática, viene desarrollándose en España desde 1994 (Godino y Batanero, 1994; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2009; Pochulu, 2012).

Este enfoque teórico entiende por práctica matemática “toda actuación o manifestación (lingüística o no) efectuada por alguien para resolver problemas matemáticos, informar a otros la solución, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). En esta línea, llama *significado de un objeto matemático* al “sistema de prácticas operativas y discursivas utilizadas resolver un cierto tipo de problemas”. Si estas prácticas pertenecen a un determinado individuo corresponden al *significado personal* de un objeto matemático, en cambio sí son compartidas en el interior de una institución, constituyen el *significado institucional*. En este contexto, se entiende por aprendizaje a la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, por medio de su participación en las comunidades de prácticas. Godino (1996) sostiene que la principal finalidad de la enseñanza es el acoplamiento de los significados personales e institucionales en forma progresiva.

Para valorar un proceso de instrucción matemática, el EOS considera seis criterios, que se articulan en forma coherente y sistemática, que componen la llamada *Idoneidad didáctica* (Godino, 2013, p. 116) son:

- La *idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- La *idoneidad cognitiva* expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- La *idoneidad interaccional* está vinculada a las formas de comunicación entre docentes y alumnos a lo largo de una trayectoria didáctica. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las formas de interacción entre los actores de la clase permiten tanto identificar como resolver los conflictos de significado que tuvieron lugar durante dicho proceso. Es particularmente esencial a esta dimensión, la habilidad docente, tanto para anticipar posibles errores de los alumnos ante determinadas actividades, como para conducir al estudiante a potenciar su propio razonamiento para develar contradicciones o validar conjeturas.
- La *idoneidad mediacional* representa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La *idoneidad afectiva* se vincula al grado de implicación (interés, motivación,...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- La *idoneidad ecológica* se asocia al grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

La noción de idoneidad didáctica se puede utilizar en el análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, en la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, en el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También se aplica para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales (Godino, 2011 p.7).

La Figura 1 (Godino, 2011), representa las características principales de la idoneidad didáctica. En la misma, el pentágono regular representa la situación ideal de un caso de máxima idoneidad para cada una de las seis componentes. Y en su interior, el pentágono irregular sombreado corresponde a una determinada situación real en la que se ha representado la idoneidad de cada componente. El EOS proporciona una serie de indicadores que permiten operativizar cada una de las mencionadas idoneidades, poniendo en detalle cuáles son los aspectos que deben ser foco del análisis (Godino, 2011, p. 9)

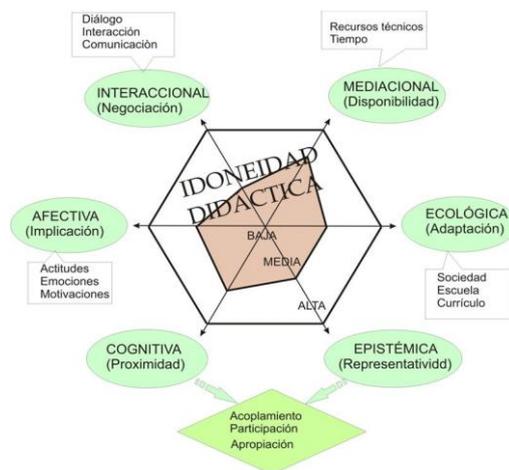


Figura 1. Características principales de la idoneidad didáctica. Fuente: Godino, 2013, p. 116.

3. Descripción y análisis de la experiencia

El curso implementado en el año 2015 tuvo la modalidad de taller, y se desarrolló a lo largo de siete encuentros presenciales de 3 horas cada uno, distribuidos en un semestre.

El grupo de docentes que participaron, todos de nivel medio, fue heterogéneo en cuanto a edad, formación académica y lugar de trabajo. Los docentes participantes manifestaron sus expectativas de implementar en el aula lo que surgiera de la experiencia en el taller. Estas características y opiniones de los participantes fueron relevadas, durante el primer encuentro, a través de una encuesta inicial que se les propuso, para conocer las particularidades del grupo de los docentes.

En el primer encuentro se propuso, como actividad central, la resolución en forma grupal, de una guía de *situaciones* (ejercicios, problemas, aplicación de procedimientos, etc.) asociadas a ecuaciones (Tabla 1). Los objetivos de esta actividad fueron, en primer lugar, el análisis de las dificultades que los estudiantes presentan al momento de resolver este tipo de situaciones y, luego, hacer emerger los significados asociados a ecuaciones.

Posteriormente, se realizó una puesta en común sobre las dificultades más frecuentes según los docentes en las que incurrieran los alumnos de Educación Secundaria al resolver dichas actividades y las posibles estrategias para superarlas.

Durante el segundo encuentro, se presentaron algunos conceptos fundamentales del EOS, en particular se hizo foco en la idea de práctica matemática, la noción de significado de objetos matemáticos e idoneidad didáctica. A partir de estas herramientas teóricas, se les solicitó a los docentes que, a través de una lluvia de ideas, enumeraran las prácticas matemáticas que se ponen en juego en cada uno de cinco ejercicios presentados. Las prácticas asociadas a cada ítem que iban surgiendo se registraron en el pizarrón, y luego fueron contrastadas con las que los docentes a cargo habían consignado previamente (Tabla 2). En todos los casos se observó que había amplia coincidencia.

Tabla 1. Ítems de la actividad propuesta para la clasificación de significados

1. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$ b) $\frac{x-2}{x^2 - x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ c) $\cos^2(x) = \frac{1}{4}$ con $0 \leq x < 2\pi$

2. Se localizó a un globo meteorológico a cierta altura. A partir de ese momento, su altura sobre el nivel del mar puede describirse, en forma aproximada, por la fórmula

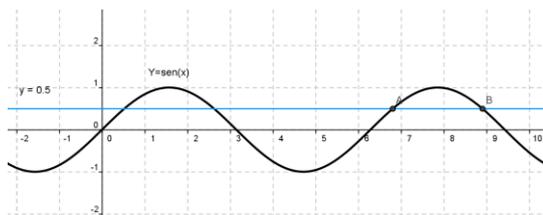
$h(x) = 8 + \frac{1}{16}(x^3 - 12x^2 + 47x - 60)$ donde x es la cantidad de días y h es la altura en miles de metros. Se

quiere averiguar:

- ¿A qué altura estaba el globo cuando fue localizado?
- ¿Alcanzó otra vez esa altura?
- ¿Llegó en algún momento a una altura de 8000 m?

3. La alta acidez de la leche inhibe el crecimiento de bacterias. Si se disminuye el pH a 3.5 se logra la destrucción total de las mismas. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno que corresponde a dicho pH? ($\text{pH} = -\log(\text{H}^+)$)

4. Hallar las coordenadas exactas de los puntos A y B



5. Determinar si el valor 2 es solución de la ecuación:

$$\text{Log}(8+x) + \text{Log}(x+98) = 4$$

Finalmente, a partir de esta enumeración de prácticas y su análisis correspondiente, surgieron cuatro significados, ligados a ecuaciones. Estos cuatro significados se describen a continuación:

- *Significado de la ecuación como práctica algorítmica:* vinculado a las prácticas de manipulación algebraica para encontrar los valores solución de una ecuación. En general, está asociado a la aplicación de ciertas reglas y algoritmos, de allí su denominación.
- *Significado de la ecuación como un modelo matemático asociado a un problema intra o extra matemático:* asociado a situaciones modelizadas a partir de una relación expresada como una ecuación. Esto es, la ecuación expresa situaciones del problema y, el cambio en valores de las variables, tiene significado en la misma.
- *Significado de la ecuación como expresión de una relación entre variables representada en distintos registros (gráfico, coloquial o simbólico):* concerniente a la traducción entre distintos lenguajes. En la resolución de una ecuación interviene la traducción, en una igualdad de símbolos, una relación expresada en lenguaje coloquial o representada en un registro gráfico.

- *Significado proposicional de la ecuación*: considerando una ecuación como una relación de igualdad entre expresiones que contienen una o más incógnitas, que al ser reemplazadas por valores puedan resultar verdadera o falsa.

Tabla 2. Prácticas matemáticas asociadas a cada ítem, surgidas de la puesta en común.

Ítem	Algunas prácticas matemáticas asociadas
1	<ul style="list-style-type: none"> - Factorizar - Obtener el dominio - Realizar manipulaciones algebraicas para obtener ecuaciones equivalentes - Verificar la/s solución/es en forma analítica (verificación de igualdad) - En ecuaciones trigonométricas analizar relación signo función- cuadrante - Verificar la/s solución/es en forma gráfica (verificación de valores de abscisa para valores de ordenada)
2	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretar el enunciado - Interpretar la variable independiente y la variable dependiente - Interpretar la unidad en que está representada cada variable - Hallar el valor de la función para un valor de x dado - Usar la calculadora - Usar software para representar la gráfica de la función - Plantear una ecuación (incisos b y c) - Realizar manipulaciones algebraicas para obtener ecuaciones equivalentes - Verificar y validar las soluciones obtenidas
3	<ul style="list-style-type: none"> - Interpretar el enunciado - Interpretar la variable independiente y la variable dependiente - Plantear una ecuación - Realizar manipulaciones algebraicas para obtener ecuaciones equivalentes - Usar la calculadora - Verificar y validar las soluciones obtenidas
4	<ul style="list-style-type: none"> - Leer la gráfica - Reconocer el sistema de medición - Interpretar los puntos como intersección de las gráficas de las dos funciones - Vincular la pertenencia de un punto a una gráfica con el cumplimiento de la ecuación que la representa. - Plantear la ecuación. - Realizar manipulaciones algebraicas para obtener ecuaciones equivalentes - Usar la calculadora - Verificar y validar las soluciones obtenidas
5	<ul style="list-style-type: none"> - Verificar si 2 satisface la igualdad reemplazando la variable x. - Usar la calculadora - Realizar manipulaciones algebraicas para obtener ecuaciones equivalentes

Como actividad final del encuentro, se propuso un conjunto de actividades en las que los docentes debían analizar el significado predominante y, si era posible, los significados secundarios. La puesta en común permitió el intercambio y la discusión.

Durante el tercer encuentro se desarrolló el concepto de idoneidad didáctica y sus distintas dimensiones (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica). Adaptando en forma de pregunta, la descripción de dichas dimensiones, para ser aplicadas en la valoración de las secuencias didácticas que servirían como trabajo final del taller. A saber:

- *Idoneidad epistémica*: las prácticas que se implementan en clase, ¿forman una muestra representativa de las prácticas consideradas fundamentales respecto de ese objeto matemático?
- *Idoneidad cognitiva*: las prácticas que se pretende que los estudiantes hagan propias, ¿están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos? ¿Los aprendizajes logrados se acercan a lo que se pretendía?
- *Idoneidad mediacional*: los recursos materiales y temporales otorgados a esta secuencia didáctica, ¿son adecuados?
- *Idoneidad interaccional*: las formas de interacción, ¿permiten identificar y resolver conflictos de significado?, ¿favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas?
- *Idoneidad afectiva*: ¿se favorece el interés y la motivación en los alumnos?
- *Idoneidad ecológica*: en la secuencia didáctica, ¿se contemplan el proyecto educativo de la escuela, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional?

El abordaje de los indicadores, a partir de preguntas-detonantes, para valorar la idoneidad didáctica, tuvo el doble propósito de que los docentes los conocieran y los aplicaran para la valoración de secuencias didácticas (Anexo).

En las sesiones presenciales siguientes, se trabajaron cuestiones relativas a las prácticas intervinientes en las ecuaciones que cada docente eligiera para su trabajo final, donde debían explicitar: a) los significados trabajados en dichas prácticas y b) la valoración de la idoneidad de un proceso de estudio potencial basado en ellas.

En la última sesión ya se contaba con una versión impresa y otra digital del trabajo final, para compartir con todo el grupo que formaba parte del taller. Así, en primer lugar, cada docente presentó una parte de su secuencia didáctica. Se les solicitó que eligieran una actividad asociada a los cuatro significados acordados y su correspondiente valoración de idoneidad a priori. Esta puesta en común permitió, no sólo la difusión de un tramo del trabajo final, sino también el intercambio enriquecedor y colaborativo con todos los docentes que intervinieron en el taller. Los temas, asociados a ecuaciones, elegidos por los docentes fueron: Proporcionalidad directa, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones lineales, funciones cuadráticas, funciones trigonométricas.

En segundo lugar, los trabajos presentados por los docentes fueron analizados por otro grupo de docentes. Se distribuyeron los trabajos en forma impresa y se les proporcionó una rúbrica de coevaluación (Anexo). El objetivo de esta tarea fue que cada equipo o docente pudiera evaluar la idoneidad didáctica, a priori, de la secuencia diseñada.

La misma comprende los distintos indicadores de idoneidad epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, ecológica e interaccional trabajados oportunamente durante los encuentros y adaptados al tema que abordó el curso. Se propusieron tres niveles de valoración: muy satisfactorio, satisfactorio y poco satisfactorio destinados a evaluar el grado de cumplimiento de los indicadores correspondientes a cada idoneidad. Asimismo se anexó una columna de sugerencias para que cada docente pudiera expresar otros pareceres.

4. Comentarios finales

La finalidad de este trabajo fue presentar la aplicación, en un taller de articulación para docentes, de algunas de las herramientas del EOS, para el diseño y valoración de una secuencia didáctica.

La determinación de los cuatro significados, que emergieron del consenso del grupo, resultó posible a partir del análisis de las dificultades, las estrategias y las prácticas matemáticas involucradas en algunas problemáticas relativas a ecuaciones. Esta clasificación de los significados, representó un insumo fundamental en la elaboración de secuencias didácticas que favorezca en los estudiantes la construcción de esos significados.

La posibilidad de valorar las secuencias mediante los indicadores de idoneidad como una herramienta tanto teórica como metodológica, permitió la evaluación y co-evaluación de las secuencias que serían la presentación del trabajo final del taller.

Este proceso valorativo dio lugar a la mejora de las secuencias tendiente al incremento de la idoneidad. En particular, la idoneidad epistémica, ya que dichas secuencias no fueron implementadas en el aula. El uso de la planilla de evaluación de secuencias (Anexo), resultó una herramienta que facilitó la utilización de los indicadores puestos en juego para valorar una secuencia didáctica sobre ecuaciones, tanto para los docentes que participaron del taller, como para los evaluadores de sus trabajos.

Para finalizar, las herramientas teóricas-metodológicas que se aplicaron del EOS, permitieron por un lado la difusión de este enfoque, en docentes que en su mayoría lo desconocían y, por otro lado, la posibilidad de trasladar al aula resultados que surgen del campo de la investigación educativa.

Anexo**PLANILLA DE EVALUACIÓN DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS**

Evaluadores: Autor/es: Tipo de ecuaciones abordadas:

Idoneidad	Indicador	Muy satisfactorio	Satisfactorio	Poco satisfactorio	Sugerencias
Epistémica	Utiliza una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación, aplicación y problematización,				
	En las tareas y actividades, aparecen los distintos significados de ecuaciones.				
	Utiliza diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos, con el nivel del lenguaje adecuado para los estudiantes.				
	Las definiciones, los enunciados y los procedimientos están clara y correctamente expresados, de acuerdo al nivel educativo al que se dirigen Se planifican momentos de validación.				
Cognitiva	Se prevén instancias de evaluación de los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema				
	Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable).				
Afectiva	Se proponen tareas de interés o situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.				
Mediacional	Se prevé el uso de materiales manipulativos y/o informáticos que permitan introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido.				
	El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la secuencia planteada.				
	Las actividades son acordes a los horarios de la clase y a los espacios disponibles.				
	Los significados pretendidos /implementados son acordes al tiempo previsto (presencial y no presencial) La distribución del tiempo prioriza los contenidos más importantes o nucleares del tema o los que presentan más dificultad de comprensión.				
Ecológica	Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.				
	Se integran nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) En la secuencia propuesta.				
	Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.				
	Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.				
Interaccional	Se describen actividades docentes y discentes en las que se propicia el diálogo y comunicación.				

Referencias

- Aznar, A., Baccelli, S., Prieto, G., Figueroa, S., Distéfano, M. L. y Moler, E. (2012). Habilidades matemáticas en ingresantes a carreras de ingeniería: un análisis de las dificultades desde el enfoque ontosemiótico. *Actas del Foro Mundial de Educación en Ingeniería World Engineering Education Forum (WEEF 2012)* Buenos Aires. Disponible en: <http://weef2012.edu.ar/archivos/papers/WEEF2012.pdf>
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanding. En L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417-424). Valencia: Universidad de Valencia.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.
- Ministerio de Educación y Deportes (2012). *Programa estratégico para la formación de ingenieros (PEFI) 2012-2016*. Buenos Aires: Autor. Disponible en: http://pefi.siu.edu.ar/aplicacion.php?ah=st530a7badf1bbc&ai=contenidos|19000030&id_id%20ioma=2&id_menu=18
- Ministerio de Educación y Deportes (MED) (2013). *Resultados del Operativo Nacional de Evaluación*. Buenos Aires: Autor. Disponible en: <http://portales.educacion.gov.ar/diniece/files/2015/04/INFORME-DE-RESULTADOS-ONE-CENSO-2013.pdf>
- Pochulu, M. (2012). Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En M. Pochulu. y M. Rodríguez (Eds.). *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. (pp. 63-89) Los Polvorines, Argentina: Eduvin y Ediciones UNGS.