Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación sobre las transformaciones de las representaciones de una función

Assessing the epistemic facet of prospective teachers' didactic-mathematical knowledge on function representations transformations

Tulio R. Amaya De Armas y Juan Barboza Rodríguez

Universidad de Sucre, Grupo de investigación Proyecto Pedagógico, Colombia

Resumen

Se reportan los hallazgos de un trabajo realizado con 90 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas a los que se les pidió resolver un cuestionario sobre funciones. Se evidencian ciertas debilidades formativas de los futuros profesores en el manejo de las funciones, específicamente, con su reconocimiento en el contexto donde se les presentó; las dificultades se manifiestan cuando los profesores en formación deben reconocer sus elementos en una situación funcional y hacer las transformaciones requeridas en la solución de una tarea que involucre funciones. Los resultados obtenidos con este grupo de profesores en formación, señalan que éstos presentan ciertas dificultades para resolver tareas que les exijan el uso del conocimiento ampliado y especializado del contenido sobre funciones, por lo que la faceta epistémica en este grupo de profesores en formación, parece estar en un estado inicial de desarrollo.

Palabras clave: Funciones, registros de representación, profesores en formación, faceta epistémica.

Abstract

We report the findings from a study carried out with 90 students in the Mathematics degree who were asked to solve a questionnaire on functions. Results suggest the prospective teachers' difficulties in handling the functions, specifically in their recognition in the given context. These difficulties appear when the prospective teachers should recognise their elements in a functional situation and produce the requested transformation to solve a functional task. Consequently, these results suggest this group of prospective teachers present difficulties to solve tasks requiring the advanced and specialised content knowledge of functions and thus the epistemic facet in this group of teacher is still in an initial stage of development.

Key words: Functions, representation registers, teachers in training, epistemic facet

1. Introducción

En cualquier proceso formativo en matemáticas, sería deseable que el profesor en su quehacer esté preparado para gestionar los recursos que ayuden a los estudiantes a explorar el mayor número de representaciones del objeto estudiado, y así poder conectar lo aprendido con la realidad, de tal forma que se provean condiciones óptimas para que ese aprendizaje tenga las mayores probabilidades de éxito. Sin embargo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tradicionalmente se han encontrado dificultades, tanto en la forma de enseñarla, como en los procesos de aprendizaje (Orrantia, 2006). Quizás en razón de que, a diferencia de otras ciencias, el modo de acceso a los objetos matemáticos se hace únicamente por medios semióticos (Duval, 2012), por lo que

Amaya de Armas, T. R. y Barboza Rodríguez, J. (2017). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación sobre las transformaciones de las representaciones de una función. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

en la enseñanza y aprendizaje de esta área necesariamente se requieren mediadores semióticos. En todo progreso del conocimiento se necesita transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base de un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido (Duval, 2004). Duval distingue dos tipos de transformaciones en/entre representaciones de un objeto matemático: *el tratamiento* que consistente en decodificar los elementos de una representación y recodificarlos en el mismo registro, y *la conversión*, que es una transformación de un objeto, de un registro a otro, es decir, es aquella en la que se decodifican los elementos de un registro y se recodifican en otro registro.

Teniendo en cuenta lo anterior, las mismas experiencias de las personas ya están, por naturaleza, semiotizadas, es decir, cualquier proceso con intención comunicativa está asociado a un sistema de signos. Además, cualquier representación de un objeto matemático en cualquier registro es un modelo del objeto, por lo que para que una persona pueda representar un objeto matemático, con el fin de comprenderlo, debe establecer fuertes conexiones entre los signos que utiliza para hacerlo (Peirce, 1974). Pero no todas las representaciones contienen la misma información, hay información entre representaciones de un objeto en diferentes registros donde algunos elementos pueden coincidir, y en otros complementarse. Cuando hay elementos coincidentes entre dos o más registros, a la puesta en paralelo de tales elementos, se les llama congruencia entre los elementos de las representaciones de dicho objeto. Al respecto, Duval (2004) considera importante el recurso a varios registros para facilitar la comprensión del concepto estudiado, y en ese mismo sentido D´Amore (2009) señala que en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas.

En particular, el trabajo escolar con funciones ha sido problemático, desde la comprensión del concepto, hasta los procesos de enseñanza implementados, a pesar de que es uno de los objeto matemáticos que muestra una mayor facilidad en la producción de sus representaciones, por la cantidad de registros en los que es posible producirlos (Hitt y Morasse, 2009). En contraste con lo anterior, los profesores y formadores de profesores acostumbran a representar las funciones utilizando un solo registro de representación, privilegiando el trabajo procesual y algorítmico sobre el conceptual, primando los procesos y tareas de tipo algebraicos sobre cualquier otros (Hitt, 2003). Esto según Villa-Ochoa (2015) lleva implícito una dificultad, ya que si no se tiene cuidado de establecer congruencias e incongruencias entre un buen número de dichas representaciones se termina estudiando la representación (objeto ostensivo) por separado, lo que lleva al aprendiz a confundir la representación con su representado (objeto no ostensivo). Esto ha originado tanto en estudiantes como en profesores en formación, conflictos epistémicos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006), que pueden terminar afectando una comprensión adecuada, tanto de los conocimientos matemáticos objetos de enseñanza, como la forma de enseñarlos. Esto en razón a que “el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de los conocimientos, competencias y habilidades, de sus profesores” (Pino-Fan, Godino y Font, 2013, p.2).

En la investigación desarrollada se tuvo como objetivo evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función. Aquí solo se analizan las respuestas dadas a dos de las preguntas planteadas en el cuestionario. La estructura de este artículo es la siguiente: la introducción, marco teórico aspectos metodológicos, resultados, análisis y conclusiones.

2. Marco teórico

Shulman (2005), Ball, Thames y Phelps (2008) y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) sugieren, respecto al conocimiento de un profesor, que no es solo el conocimiento de los contenidos por un lado y el conocimiento de la pedagogía por el otro, sino una especie de amalgama del conocimiento de los contenidos y la pedagogía lo que es fundamental para su enseñanza. Además, en las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han sido muy fecundas tratando de indagar sobre los conocimientos matemáticos que debe dominar un profesor para enseñar las matemáticas eficientemente. Se destacan como pioneros en esta línea los trabajos de Shulman (1986, 2005), Ball, Thames y Phelps (2008), y Godino y colaboradores (Godino, 2009; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Pino-Fan y Godino, 2015). Uno de los modelos más destacados es el propuesto por Godino (2009), denominado Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), donde se establece un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas basadas en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos.

El modelo CDM fue ampliado por Pino-Fan y Godino (2015), proponiendo tres dimensiones a tener en cuenta: Dimensión Matemática, Dimensión Didáctica y Dimensión Meta Didáctico-Matemática, cada una a su vez, compuesta por sub-categorías.

Es de interés en este trabajo la faceta epistémica, la cual incluye el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido (ambos de la Dimensión Matemática) y el conocimiento especializado del contenido (de la Dimensión Didáctica), es decir, involucra el conocimiento de las matemáticas escolares en profundidad, así como las competencias del profesor para enseñarlas. Los tres tipos de conocimientos que involucra la faceta epistémica del CDM están muy relacionados entre sí, cada uno cumple funciones específicas aunque no exclusivas, ya que en algunos casos las comparten o se traslapan. La dimensión Matemática en su conjunto es integral, por la naturaleza de sus componentes: el conocimiento del contenido (común, ampliado y especializado) es absolutamente indispensable en un profesor de matemáticas, ya que éste debe conocer el material que enseña y poderlo modificar para construir situaciones problema, sin que pierda su esencia matemática. Es quizás el conocimiento más integrador de todos, ya que es hacía él hacia donde se dirigen los esfuerzos y recursos para llegar a un aprendizaje adecuado. El conocimiento especializado del contenido, facilita al profesor establecer los enlaces entre los conceptos, hacer vínculos y conexiones intra e inter registros y representaciones que permiten asignar significado y sentido a los objetos matemáticos estudiados. Este dominio comprende, entre otras, las formas didácticas de desarrollar la clase de matemáticas para que los contenidos sean accesibles a quienes aprenden, la selección de los registros más apropiados para representar los objetos matemáticos estudiados, cuál utilizar como registro principal y cuál o cuáles como auxiliares.

3. Aspectos metodológicos

En este trabajo se reportan los hallazgos de un trabajo realizado a finales del segundo semestre del 2014 con 90 estudiantes de un programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública colombiana: 28 del tercer semestre, quienes habían cursado dos cursos de didáctica de las matemáticas y tres cursos de cálculo; 28 del quinto semestre, quienes habían cursado cuatro cursos de didáctica de las matemáticas y los mismos tres cursos de cálculo que los anteriores y ecuaciones diferenciales, y 34 del octavo semestre, quienes habían cursado el programa en su totalidad y únicamente desarrollaban la práctica docente. A los estudiantes de los tres niveles se les aplicó un cuestionario con diversas cuestiones sobre una misma situación – problema descrita en la Figura 1. En este cuestionario se parte del registro gráfico como registro principal, hacia los registros aritmético analítico, aritmético algebraico y gráfico, como registros auxiliares. Se escogió esta situación porque permite relacionar las funciones con el contexto sociocultural, lo que facilita establecer congruencias entre elementos de dos o más representaciones de las funciones involucradas, comparar sus respectivos significados y encontrarles sentido al utilizarlos mientras se resuelve la situación.

Se tuvieron en cuenta las calificaciones de los estudiantes de cada grupo al resolver el cuestionario y se analizaron las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provienen; esto se hizo utilizando tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson a un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 0{,}05$). Aquí, por razones de espacio, solo se analizarán algunas respuestas dadas a dos de las preguntas planteadas en el cuestionario. El enunciado de la situación – problema del cuestionario es el siguiente :

> *En la gráfica se muestran los costos de edición y los ingresos por la venta de una edición facsimilar del poema dramático de Alfonso Reyes, 'Ifigenia Cruel'.*

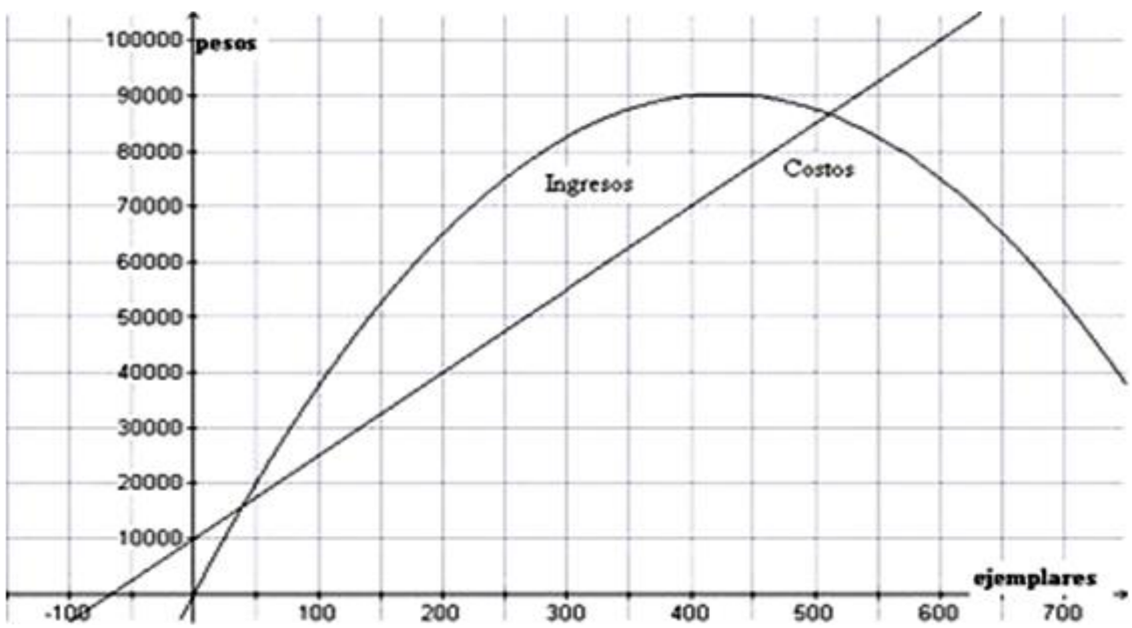

Figura 1. Gráfico presentado a los estudiantes. Original tomado de:
http://historiasdeactividades.blogspot.com/2007/09/ifigenia-cruel-de-alfonso-reyes.html

1. ¿Dentro de qué valores se debe mantener la oferta para obtener ganancias?

2. ¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?

4. Resultados y análisis

En la presentación de los resultados, para cada ítem se presenta una tripleta (i, j, k) donde "*i*" (entre 0 y 28) representa la cantidad de estudiantes del tercer semestre, "j" (entre 0 y 28) la de los del sexto semestre y "k" (entre 0 y 34) la de los del octavo semestre que hicieron referencia al tópico analizado en ese ítem. Y se presenta $P_{(r)i,\ j,\ ó\ k}$ donde r = 3, 6 u 8 semestre, para referir a un profesor en formación de alguno de los tres niveles.

4.1. Análisis de las respuestas dadas al cuestionario

Ítem 1. ¿Entre qué valores se debe mantener la oferta para obtener ganancias?

En este ítem se quiso indagar por el dominio de la función Ganancias en el contexto de la situación. Se esperaba que los profesores en formación realizaran un análisis visual, y a partir de ahí, obtuvieran sus respuestas. El 58,88% (13, 20, 20) de los estudiantes dieron respuestas acertadas a este ítem. Pero con ciertas limitaciones en la identificación del dominio de la función Ganancias en el registro gráfico, como se muestra en el manuscrito de $P_{(6)1}$ (figura 2) cuando dice "entre 35 y 400 ejemplares", confundiendo el dominio de la función Ganancias con el intervalo donde ésta crece. Esto evidencia dificultades en este grupo de estudiantes para establecer conexiones entre las representaciones semióticas de una función (Meel, 2003). Sin embargo, el grado de concordancia entre las respuestas al interior de los grupos fue bajo (χ^2 = 7.450, P>0.05), es decir, sin tener en cuenta los aciertos y los errores, el grado de heterogeneidad en las respuestas intra-grupos fue alto, lo que quiere decir que los errores con la identificación del dominio de una función en diferentes registros, no son generalizados.

Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su mayoría verbales, combinados con números naturales, y algunos signos de agrupación, como puede apreciarse en la solución dada por $P_{(6)1}$ (figura 2). Respecto a los *conceptos/definiciones*, la totalidad de los estudiantes utiliza funciones e intervalos expresados de diversas maneras: "entre 35 y 400 ejemplares"; "$x\epsilon$(45, 510)"; "de 40 a 510 ejemplares". En cuanto a las *proposiciones/propiedades* utilizadas: (5, 12, 15) proponen como zona de ganancias, la región comprendida entre la gráfica de los ingresos y la de los costos, como se muestra en la solución dada por $P_{(8)12}$ (figura 3), al manifestar que "*para obtener ganancias en la gráfica debe haber área bajo la curva de ingresos y sobre la recta de los costos*". Los *procedimientos* utilizados fueron mayoritariamente visuales, combinados con procesos numéricos y algebraicos, como se puede apreciar en la respuesta dada por $P_{(6)1}$, $P_{(3)1}$ y $P_{(6)5}$, mostrados en las figuras 2, 4 y 5 respectivamente. Y *los argumentos* dados por un amplio grupo de profesores en formación (18, 14, 16) fueron muy escasos, caracterizados por algunas explicaciones o descripciones bastante apropiadas, pero con pocas o nulas razones de su actuar, como se muestra en la solución dada por $P_{(6)1}$, $P_{(3)1}$ y $P_{(6)5}$. Sin embargo, se presentaron casos aislados (1, 3, 4) de profesores en formación, quienes hicieron argumentos muy adecuados, como es el caso de $P_{(8)12}$ (figura 3), quien relaciona adecuadamente los elementos de las funciones involucrados en la situación.

En las soluciones dadas por los tres grupos de profesores en formación, se nota que pudieron identificar muchos de los elementos de las funciones involucradas en la situación. Sin embargo, presentaron dificultades en la ejecución de los procedimientos escogidos en busca de una solución apropiada, en algunos casos porque escogieron estrategias inadecuadas o porque no lograron adecuarlas a las condiciones de la situación, como es el caso de $P_{(6)5}$ (figura 5), quien no logró dar con una expresión algebraica para la función Ganancias a pesar de que por esa vía era posible hacerlo. Esto evidencia el conocimiento común del contenido, en estos estudiantes, en un estado de desarrollo adecuado, mientras que el conocimiento ampliado del contenido en un estado inicial de desarrollo. El conocimiento especializado del contenido también está en un estado inicial de desarrollo, ya que dan cuenta de algunos objetos matemáticos primarios y logran establecer algunos vínculos entre éstos al resolver la tarea planteada en este ítem, lo que concuerda con lo planteado por Godino (2009), respecto a las características del conocimiento especializado, para considerarse adecuado o no.

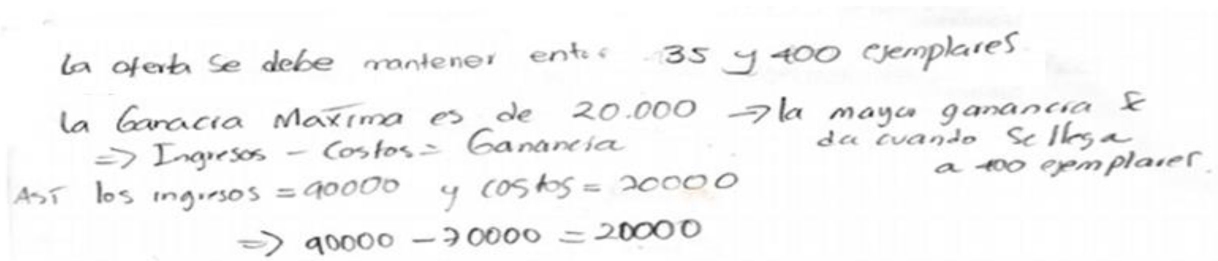

Figura 2. Respuestas dadas por $P_{(6)1}$ al cuestionario

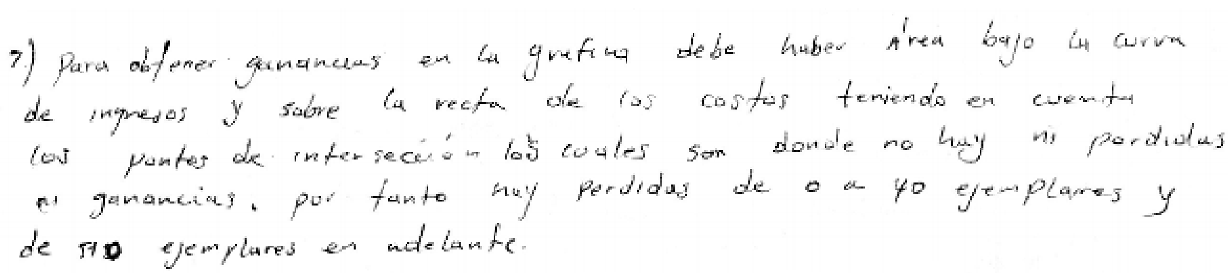

Figura 3. Respuesta dada por el profesor $P_{(8)12}$ al ítem 1

Ítem 2. ¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?

Al resolver este ítem, solo el 38,88% (12, 13, 10) de los estudiantes pudo determinar el intervalo donde la Ganancia es máxima, y aunque tienen una rara tendencia a dejarse llevar por lo visual (Hitt, 2003), no consideraron las representaciones geométricas como complementarias en su proceso de resolución del problema, evidenciando un conflicto epistémico (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006); y como se esperaba, (14, 11, 23) terminaron confundiendo la Ganancia máxima con los Ingresos máximos. Una de las principales dificultades fue no considerar un intervalo para la ganancia máxima, como se muestra en el manuscrito de $P_{(6)1}$ (figura 2), quien dice "*la ganancia máxima es de 20.000→ la mayor ganancias se da cuando se llega a 400 ejemplares*". La tendencia por grupos fue a dar respuestas similares al interior de éstos (χ^2 = 14.355, $P< 0.05$), es decir, hubo homogeneidad, tanto en aciertos como en desaciertos, y como el porcentaje de aciertos, al resolver este ítem fue bajo, el nivel de desarrollo del conocimiento común del contenido, fue incipiente.

Los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación al resolver este ítem fueron mayoritariamente verbales, combinados con números naturales, elementos gráficos y signos de operación, como puede apreciarse en cada uno de los manuscritos que se ponen como ejemplo. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan están máximos y mínimos, intervalos, función y ecuación, en particular $P_{(6)1}$ modela la función Ganancias utilizando una estructura aditiva, que evidencia el uso del concepto de función y la expresa diciendo "Ingresos - Costos = Ganancias". En relación a las *proposiciones/propiedades* relacionan la mayor distancia entre las gráficas de las funciones Ingresos y Costos con la mayor ganancia, como lo hace $P_{(3)1}$ (figura 4) y los que confundieron ganancias máximas con ingresos máximos escogieron el intervalo más alto de la función Ingresos como los puntos donde la función Ganancias toma sus valores máximos. En cuanto a los *procedimientos* utilizados se evidencia el uso de procesos de visualización complementados con procesos algebraicos y algunos trazos figurales: como lo hacen $P_{(6)1}$ y $P_{(3)1}$ en sus soluciones. $P_{(3)1}$ por ejemplo, muestra en la gráfica, los intervalos donde las funciones de Ganancias e Ingresos son máximas rayando la región correspondiente en la representación geométrica, estableciendo con esto, congruencias entre elementos de las representaciones gráficas, figural y del lenguaje coloquial. Los *argumentos* que dan son muy limitados, como se evidencia en el manuscrito de $P_{(6)1}$, cuando dice "Así los ingresos = 90.000 y costos = 70.000 → Ingresos – Costos = Ganancia → en la gráfica → 90.000 – 70.000 = 20.000 ← representa la ganancia".

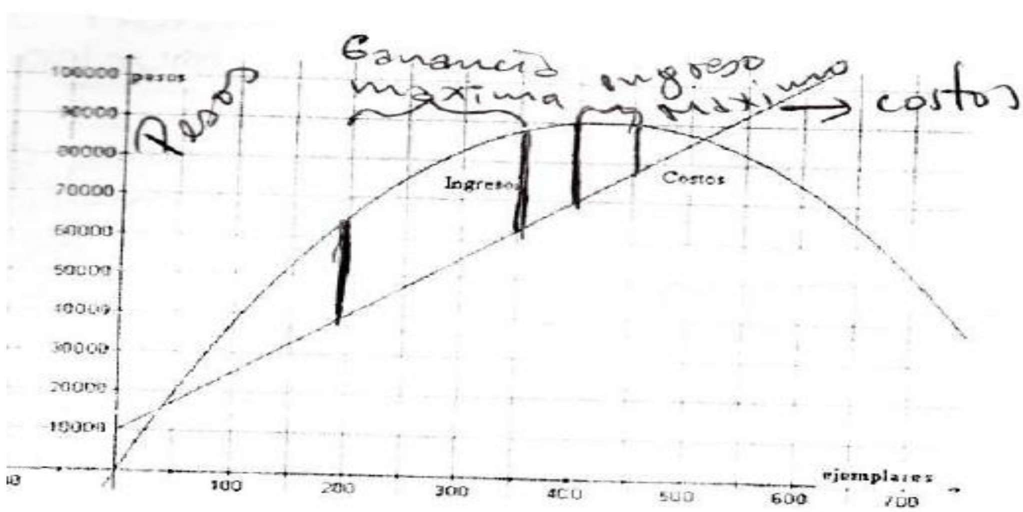

Figura 4. Respuesta de $P_{(3)1}$ a los ítem correspondientes a Ingresos y Ganancias máximas

Entre 45 y 510 ejemplares
$x \in (45, 510)$, x = ejemplares
en la grafica que describe una parábola
hay un máximo en el punto $(700, 90000)$,
y en los costos el punto de la recta $(400, 70000)$
indica el costo de 70000 al producir 400 ejemplare.
así se tiene $90.000 - 70000 = 20.000$
Sería 20.000 la ganancia máx

$$C(x) = 150x + 10000$$

$$I(x) = ax^2 - bx - 10000 \quad \text{con } a<0$$

$$g(x) = \int_a^b ax^2 - bx - 1000\, dx.$$

Figura 5. Respuesta dada por $P_{(6)5}$ a varios ítems del cuestionario.

Los resultados evidencian ciertas debilidades formativas de los futuros profesores con el reconocimiento de la función en el contexto donde se les presentó, así como para identificar los elementos de la función y cómo éstos se relacionan. En general, se nota que estos profesores en formación han hecho poco uso de diferentes representaciones de una función, así como de las transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento entre los registros asociados, lo que podría justificar sus dificultades al establecer congruencias entre los elementos de dichas representaciones, lo que denota que el nivel del lenguaje matemático que usan no es el más adecuado. Según Godino, Batanero y Font (2003, p. 66) si una persona "sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido".

5. Conclusiones

Se encontraron serias dificultades relacionadas con la carencia en el conocimiento del contenido de las funciones, lo que se manifiesta cuando los profesores en formación deben reconocer y comprender sus elementos en una situación funcional y hacer las transformaciones requeridas en la solución de una tarea que involucre funciones. Estos aspectos son requeridos para hacer una transposición didáctica adecuada de este concepto y así, facilitar su comprensión por parte de los estudiantes del nivel correspondiente . Esto puede deberse a la falta de oportunidades en el trabajo conceptual del objeto función y su desplazamiento por el habitual trabajo de lo algebraico (Sgreccia y Massa, 2012).

Las dificultades encontradas en los estudiantes, desde los planteamientos de D'Amore (2009), frente a lo que se denomina la renuncia del estudiante a la devolución y a la incapacidad para implicarse en la actividad propuesta, se hallan ligadas a la incapacidad para realizar transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, quizás por falta de una didáctica específica dentro del proceso de formación que reciben a nivel institucional.

Así que los resultados obtenidos con este grupo de profesores en formación señalan que éstos presentan serias dificultades para resolver tareas que les exijan el uso del conocimiento ampliado y especializado del contenido sobre funciones y si se tienen en cuenta los planteamientos de Pino-Fan y Godino (2015), la faceta epistémica en este grupo de profesores en formación está en un nivel inicial de desarrollo.

Referencias

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), *389-407*.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica, 11,* 150-164.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Godino, J. D (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D. Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 1-24.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-223.

Hitt, F. y Morasse, C. (2009). Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. *Electrónic Journal of Research in Rducational Psychology, 7*(17), *243-260*.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagógica, 23*(71), 158-180.

Peirce, Ch. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *Revemat, 8(2)*, 1– 49.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico – matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 9*(2), 1-30.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. *Educación Matemática, 24*(3), 33-66.