

Análisis de los objetos matemáticos en libros de texto de ingeniería

Analysing mathematical objects in engineering textbooks

Claudia Margarita Acuña Soto y Beatriz Alejandra Veloz Díaz

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este trabajo nos planteamos analizar libros de texto de matemáticas utilizados en ingeniería para ver si cumplen con la necesidad de hacer de la gráfica un instrumento de conocimiento, esto es, si se usan e incorporan las propiedades gráficas para lograr los objetivos de aprendizaje. Hacemos este análisis bajo el supuesto de que hay dos puntos de vista contrapuestos en la elaboración de textos de educación matemática: formalista y activo. Además, nos apoyamos en la definición de objetos primarios asociados a la configuración epistémica para hacer una comparación de los contenidos de algunos textos con base en el principio de que las gráficas pueden ser tratadas como parte del contenido matemático, o como mera ilustración. Elegimos algunos de los textos sugeridos en programas de estudio de ingenierías de tres universidades mexicanas.

Palabras clave: Configuraciones epistémicas, objetos matemáticos, gráficas, análisis de libros de texto.

Abstract

In this paper, we analyse mathematics textbooks used in engineering to study if they meet the need to make graphs an instrument of knowledge, that is, if they use and incorporate graphical properties to achieve the learning objectives. We carry out this analysis under the assumption that there are two opposing points of view in the elaboration of mathematical education texts: formal and active. In addition, we use the definition of primary objects associated with the epistemic configuration, to compare the contents of some textbooks, basing on the principle that the images can be treated as part of the mathematical content or as mere illustration. We select some textbooks suggested in the engineering curricula for three Mexican universities.

Keywords: Epistemic configurations, mathematical objects, graphics, textbook analysis.

1. Introducción

El estudio de los objetos matemáticos que intervienen en el análisis de las prácticas matemáticas requiere de la vinculación entre gráfica y ecuación, particularmente cuando éstas se encuentran en el espacio 3D. Los estudiantes de matemáticas, física, ingenierías, diseño, arquitectura, animación digital, entre otros, requieren de una articulación entre los objetos gráficos y sus respectivas ecuaciones, así como las propiedades que los vinculan. Cuando observamos estos objetos desde una perspectiva aproximada a la realidad, tenemos buenas condiciones de interpretación de sus propiedades, ya que esta presentación podría capacitar al estudiante para analizar e interpretar gráficas, figuras (Parzysz, 1988), etc., por lo que contar con instrumentos gráficos que nos proporcionen información sobre lo que sucede en 3D con base en lo que observamos en 2D sería de utilidad.

El objeto de nuestra investigación se relaciona con encontrar los nexos de interpretación entre cuerpos en 3D con base en proyecciones ortogonales en 2D, por lo que la relación entre la ecuación y la gráfica es de gran importancia para este fin. Lograr ese objetivo nos

lleva a analizar los recursos didácticos disponibles, que en este caso se refieren a los libros de texto con los que cuentan, en particular, los ingenieros.

Los libros de texto son la herramienta a través de la cual los estudiantes deberían tener posibilidad de mejorar sus habilidades de interpretación del contenido matemático. Las gráficas suelen aparecer en ellos, pero el uso que se les da frecuentemente no va más allá de una mera ilustración (Mesquita, 1998), lo que empobrece este recurso que, de otra forma, podría proporcionar un entorno de reflexión sobre las propiedades matemáticas, al tiempo que se prescinde de un valioso entorno de investigación.

En este trabajo nos planteamos analizar libros de texto de matemáticas utilizados en ingeniería para ver si cumplen con la necesidad de hacer de la gráfica un instrumento de conocimiento, esto es, si se usan e incorporan las propiedades gráficas para lograr los objetivos de aprendizaje. Con dicho fin hemos elegido algunos de los textos sugeridos en programas de estudio de ingenierías de tres universidades mexicanas: Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Universidad Nacional del Estado de Morelos (UAEM) y Universidad Veracruzana (UV).

A continuación, abordaremos los siguientes contenidos: El marco teórico, los resultados del análisis y los comentarios finales.

2. Marco teórico

El marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012) proporciona herramientas teóricas para el análisis de los libros de texto, en particular las nociones de configuración epistémica y cognitiva, cuyo fundamento son los llamados objetos matemáticos.

En este trabajo partimos de la afirmación de Godino (2002) quien dice que: “conocer en matemáticas quiere decir conocer el “sistemas de prácticas” (operativas y discursivas) (...) En los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino incluso las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos, desencadenan también procesos interpretativos” (p. 240).

Los objetos matemáticos son emergentes de los sistemas de prácticas y son los componentes de las configuraciones mencionadas, las que se conforman por seis objetos matemáticos primarios: lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones. El EOS considera dos tipos de configuraciones dependiendo de la dualidad personal-institucional, en primera instancia, la *configuración epistémica* es la que daría cuenta del proceso de solución a un problema por un experto, es decir, la perspectiva vista desde el proceso institucional. Por su parte, la *configuración cognitiva* es la que refleja la producción del alumno, esto es, la perspectiva personal. Tanto una como otra nos informan de la “anatomía de un texto matemático” (Font y Godino, 2006, p. 68).

El esquema de análisis propuesto por estos autores nos proporciona un panorama que contrasta ambas configuraciones, lo que permite ver la distancia cognitiva entre una y otra formulación y así tomar medidas remediales para mejorar el aprendizaje. En nuestro caso, no estamos ante esta problemática, debido a que los libros pueden, de hecho, considerarse como productos elaborados por expertos y se esperaría un tratamiento también experto.

Sin embargo, para los fines de la enseñanza, unos libros serán más adecuados que otros dependiendo de los intereses y objetivos que estos desarrollan y de quien los usa, en particular nuestro interés se sitúa en la detección y uso de la gráfica en los textos analizados, lo que difiere del uso dado por Font y Godino (2006) ya que en este caso sólo nos enfocamos a un aspecto: el gráfico, por lo que haremos uso exclusivamente de la configuración epistémica para los fines de análisis y de contraste entre algunos de los textos más populares de ingeniería en nuestras universidades sobre el uso matemático y didáctico de las gráficas.

En particular, en opinión de Van Dormolen (1986) existen dos puntos de vista que podemos considerar como contrarios en la elaboración de textos educativos de matemáticas. En el primero, llamado *formalista*, se considera que el pensamiento genuinamente matemático es aquel que se obtiene de las reglas algorítmicas y del razonamiento deductivo, y que el razonamiento intuitivo pertenece a los niveles preliminares que oscilan entre el saber y no saber. Por otro lado, el punto de vista al que llama *activo* se caracteriza por establecer que la matemática consiste de actividades como generalización, ordenación, clasificación, entre otras actividades que deben ser consideradas como la matemática genuina.

Cada uno de estos puntos de vista producen un tipo de texto particular, aunque estos no necesariamente son excluyentes, de hecho, eventualmente los encontramos combinados. Sin embargo, consideramos significativa esta dualidad porque nos interesan los tipos de tratamientos de los contenidos expresados en los libros de texto. Esta dualidad nos coloca no sólo frente a un estilo de escritura, sino a una interpretación de lo que es genuinamente matemático.

También será base del análisis la consideración sobre el uso de la gráfica que nos propone Mesquita (1998), en el sentido de que el uso de ésta puede llevarse a cabo como ilustración, o como parte del discurso matemático, en otras palabras, si se usa desde el punto de vista formalista o activo.

3. Resultados del análisis

Los cuatro libros que hemos elegido responden a las sugerencias de los programas de estudio de las universidades mexicanas UNAM, UAEM y UV, correspondientes a escuelas de ingeniería. Estos serán analizados por parejas dependiendo de la abundancia del recurso gráfico que encontramos en ellos, debido a que consideramos que debe haber una diferencia si tienen pocas gráficas o por el contrario aparecen en abundancia. Por ello hemos hecho dos grupos con dos textos cada uno, en el primer grupo hay pocas gráficas y en el segundo hay mayor cantidad.

El grupo de dos libros de texto con pocas gráficas corresponde a los siguientes libros:

1. Cálculo multivariable de Stewart (1999).
2. Cálculo de varias variables de Zill (2011).

En las tablas 1 y 2, mostramos la configuración epistémica de estos dos textos.

Del análisis de estas dos configuraciones podemos decir que el lenguaje utilizado en estos libros es muy semejante en su aproximación, debido a que está conformado casi exclusivamente por definiciones y solicitudes procedimentales del contenido. Las situaciones planteadas tienen el carácter de elaboración repetida de los ejemplos, no hay indicaciones que permitan interpretar la relación ecuación-gráfica, así como los

procedimientos, los conceptos y las propiedades juegan un papel esencialmente procedimental.

Tabla 1. Configuración epistémica del libro de Stewart

LENGUAJE	Se utiliza un lenguaje formal donde no hay explicaciones que permitan relacionar los conceptos que presenta. Abarca varias situaciones sin dar oportunidad a que el estudiante fije su atención en los distintos aspectos.
SITUACIONES	Los ejercicios planteados son muy similares a los ejemplos, sólo cambian los valores, pero la situación es la misma. El uso de las gráficas es confuso.
PROCEDIMIENTOS	Calcular ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas. Mostrar que dos rectas son oblicuas con base en el paralelismo.
CONCEPTOS	Ecuación vectorial, parámetro, ecuaciones paramétricas, números directores, ecuaciones simétricas y rectas oblicuas. Sin embargo, ninguno se presenta como definición.
PROPIEDADES	La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas. Si cambiamos el punto o el parámetro, o elegimos un vector paralelo distinto, entonces las ecuaciones cambian.
ARGUMENTACIONES	Si una función f se expresa mediante una fórmula y no se especifica el dominio, entonces se sobre entiende que éste es el conjunto de todas las parejas (x, y) para las cuales la expresión es un número bien definido.

Tabla 2. Configuración epistémica del libro de Zill

LENGUAJE	El lenguaje que se usa es formal de tipo indicativo, con el cual plantean ejemplos numéricos, los que propician a la reflexión sobre los mismos ejercicios que proponen, pues sólo cambian los valores, pero el ejemplo es el mismo.
SITUACIONES	Los ejercicios solicitan cálculos, solo cambian los valores, las situaciones son las mismas o muy similares. Esto es: Ejemplo: Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(4, 6, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Ejercicio: Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto $(4, 6, -7)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$. Además, ningún ejemplo cuenta con gráficas.
PROCEDIMIENTOS	Obtener ecuaciones vectoriales a partir de ciertos datos. Encontrar las ecuaciones paramétricas y simétricas de una recta. Determinar si dos rectas son paralelas, perpendiculares o se intersectan y en qué punto lo hacen.
CONCEPTOS	Ecuación vectorial, parámetro, vector direccional, números direccionales, ecuaciones paramétricas, ecuaciones simétricas y rectas oblicuas. Definición de las rectas perpendiculares y las paralelas.
PROPIEDADES	Se obtienen ecuaciones simétricas a partir de las ecuaciones paramétricas, con tres números direccionales distintos de cero. Dos rectas L_1 y L_2 en el espacio tridimensional que no se intersecan y que no son paralelas reciben el nombre de rectas oblicuas. Las rectas oblicuas yacen en planos paralelos.
ARGUMENTACIONES	No aparecen.

Por ejemplo, en el libro de Zill se usa la gráfica exclusivamente para mostrar ejemplos de los problemas y las propiedades a las que hace alusión, esto es, la gráfica es usada como ilustración. Por otro lado, tenemos que en el texto de Stewart este uso de ilustración de los ejemplos, además se ve obstaculizado por una mala estrategia de presentación. Esto se debe a que se indica en la gráfica a cuál de las propiedades se refiere, pero hay que hacer una inspección de todo el contenido presentado para poder establecer el vínculo entre la gráfica y la propiedad de la que se habla, esto es, la presentación es deficiente de manera que ni siquiera es posible hacer una detección directa de las propiedades sobre la gráfica con un acercamiento instantáneo, como se requiere para que ésta sea efectiva (Duval, 2003).

Observamos no sólo que el enfoque de estos libros es formalista, sino que la presentación de las gráficas, por lo menos en uno de ellos, es descuidada, de manera que no sirven ni siquiera de ilustración, sino que incluso llega a representar un obstáculo para el entendimiento de los contenidos tratados.

A continuación, en las tablas 3 y 4, vamos a analizar los dos libros siguientes que, en particular, contienen mayor número de gráficas:

1. Cálculo vectorial de Marsden y Tromba (1981).
2. Álgebra lineal de Hitt (2002).

Tabla 3. Configuración epistémica del libro de Marsden y Tromba

LENGUAJE	Formal de tipo indicativo, en el cual plantean ejemplos numéricos y algunos teóricos, los cuales tienen sus respectivas gráficas propiciando así la reflexión.
SITUACIONES	Los ejercicios solicitan cálculos, otros son de tipo teórico. Algunos son parecidos a los ejemplos, pero la mayoría plantea situaciones distintas que retan al estudiante.
PROCEDIMIENTOS	Calcular suma y multiplicación de vectores. Construcción gráfica de rectas. Determinar ecuación de rectas de condiciones dadas.
CONCEPTOS	Sistema de coordenadas, puntos en el espacio, ternas ordenadas, elemento cero, base vectorial canónica, plano generado. Definición de vector, suma vectorial, producto interno.
PROPIEDADES	Del producto interno. Producto cruz.
ARGUMENTACIONES	Elementales como: La prueba de la primera propiedad del producto interno: $a \cdot a \geq 0$ $a \cdot a = 0 \text{ si y sólo si } a = 0$

En el caso del lenguaje de estos libros tenemos que es formal en ambos, pero se aprecia un esfuerzo por promover una reflexión a partir de las situaciones planteadas. En el libro de Hitt, por ejemplo, se incorporan acciones de prueba mostrando con anterioridad situaciones sencillas, pero dejando que el estudiante se esfuerce en esa dirección. En estos dos libros encontramos una buena cantidad de gráficas, las cuales no sólo sirven para ilustrar las relaciones algebraicas, sino que son usadas para construir el significado respectivo. En las gráficas es en donde gran parte del tratamiento semántico es desarrollado y el enfoque de ambos va en la dirección de articular la ecuación y la gráfica desde el punto de vista matemático.

Tabla 4. Configuración epistémica del libro de Hitt

LENGUAJE	Formal explícito, luego de dar las definiciones explica los pasos requeridos para las demostraciones.
SITUACIONES	Plantea ejemplos teóricos de espacios vectoriales, vectores generadores, independencia lineal, bases, entre otros, de los cuales la mayoría tienen sus respectivas gráficas propiciando así la reflexión. Los ejercicios solicitan demostraciones teóricas, cálculos y análisis de figuras para identificar cierto tipo de vectores. La mayoría plantea situaciones distintas que retan al estudiante. Usa la representación gráfica como un recurso para establecer las propiedades y explica las relaciones analíticas.
PROCEDIMIENTOS	Demostrar que un espacio es considerado espacio vectorial. Demostrar que algún subconjunto es un sub-espacio vectorial. Encontrar un sistema de vectores generadores. Proporcionar un sistema de vectores linealmente independientes. Proporcionar una base. Graficar relaciones algebraicas.
CONCEPTOS	Escalar, vector. Definición de espacio vectorial real, sub-espacio vectorial, combinación lineal, vectores generadores, vectores linealmente independientes, dimensión n , producto interno.
PROPIEDADES	De los números reales. De un espacio vectorial real. Del producto interno.
ARGUMENTACIONES	Propone un Teorema. Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial real E , entonces S es un sub-espacio vectorial de E si cumple ciertas condiciones.

Como podemos observar, el tratamiento de estos dos últimos libros sobre las gráficas difiere de los primeros, porque en esencia estos últimos apoyan el aprendizaje haciendo de la gráfica un instrumento de conocimiento.

4. Comentarios finales

Hemos analizado cuatro libros enfocados a los temas de nuestro interés, los clasificamos en dos apartados dependiendo de la proliferación de las gráficas bajo el supuesto de que aquellos en donde hubiese más, probablemente las usasen como una herramienta y no sólo como una ilustración, lo que hemos corroborado luego del análisis llevado a cabo.

En los primeros dos libros encontramos un tratamiento esencialmente algorítmico, la gráfica tiene un papel de ilustración - en el caso de que ésta sea útil- y no se le explota en la construcción de un referente significativo. Por otro lado, la forma cómo los dos últimos usan las gráficas, da oportunidad de la construcción de significado a través de la actividad. Además, siendo acordes con una visión activa los autores se dirigen al estudiante promoviendo la reflexión debido a la incorporación de retos y de la inclusión de aspectos que articulan los objetos estudiados.

El tratamiento relativo a los cuerpos 3D de los textos analizados bajo la óptica de la configuración epistémica fue analizada particularmente considerando los objetos

matemáticos relativos a: 1. Lenguaje 2. Situaciones y 3. Procedimientos, lo que nos permitió establecer el vínculo ecuación-gráfica al que antes nos hemos referido.

De manera sintética proponemos a continuación en la tabla 5 las cualidades relativas a los tres primeros objetos del esquema del EOS en el caso de los textos analizados:

Tabla 5. Comparación de tres objetos matemáticos y posible tipo de tratamiento

	Lenguaje	Situaciones	Procedimientos	Tratamiento
James Stewart	Formal	Variación numérica de los ejemplos	Calcular para determinar propiedades	Formalista
Dennis Zill	Formal	Variación numérica de los ejemplos	Calcular para determinar propiedades	Formalista
Marsden/Tromba	Formal indicativo	Propuestas que retan al estudiante	Calcular Graficar	Activo
Fernando Hitt	Formal explícito	Propuestas que retan al estudiante	Calcular Graficar Demostrar	Activo

Observamos que hay libros con un tratamiento de la relación ecuación-gráfica que podrían dar sustento a un aprendizaje activo, que son los que consideran a la gráfica no como una ilustración, sino como un objeto matemático. Sin embargo, son pocas las producciones de este tipo y no son ampliamente utilizadas por los profesores en las aulas de educación superior.

Consideramos que los libros de texto expresan distintos puntos de vista sobre la forma cómo se lleva a cabo el aprendizaje, lo que influye en el tratamiento que se hace de los contenidos. Dado que son pocos los textos que incluyen a las gráficas como herramienta de conocimiento pensamos que la mayoría de los estudiantes de ingeniería de las escuelas referidas están recibiendo una educación formalista que no articula la ecuación con la gráfica.

Referencias

- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: CIVESTAV.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matematica Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Godino, J. D., (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135.
- Hitt, F. (2002). *Álgebra lineal*. México: Pearson Educación.
- Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (1981). *Cálculo vectorial*. México: Fondo Educativo Interamericano.

- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, 19(1), 79-92.
- Stewart, J. (1999). *Cálculo multivariable*. (3ª Ed.) México: International Thomson Editores.
- Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 141-171). Dordrecht. The Netherlands: Springer
- Zill, D. y Wright, W. (2011). *Matemáticas 3: Cálculo de varias variables*. México: McGraw Hill.