A. CONTRERAS, L. ORDÓÑEZ y C. BATANERO
(Eds.)

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Actas del Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas

Jaén, 18-21 Noviembre 2004

Editores:

Ángel Contreras
Lourdes Ordóñez

Comité Científico:

Ángel Contreras (Coord.)
Vicenc Font
Juan D. Godino
Lourdes Ordóñez

ÍNDICE

PÁGINA

P R E S E N T A C I Ó N
Juan D. Godino

P O N E N C I A S 6

ANÁLISIS DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE UN CUESTIONARIO SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL. REFLEXIONES DESDE EL MARCO DE LA TFS 11
Carmen Batanero y Carmen Díaz

LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS 35
Ángel Contreras

LA DIMENSIÓN DUAL "PERSONAL / INSTITUCIONAL" Y EL PROBLEMA DEL ENCAJE DE LOS OBJETOS PERSONALES DEL PROFESORADO EN LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS 62
Vicenc Font

ALGUNOS DESARROLLOS DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS 97
Juan D. Godino

C O M U N I C A C I O N E S

RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO GLOBAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA 116
Crisóstomo, E., Ordóñez, L., Contreras, A. y Godino, J.D.

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN 158
Estepa, A. y Ortega, J.

ANÁLISIS DE LAS DEFINICIONES DE *DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y FUNCIÓN DERIVADA DE UNA FUNCIÓN* DE LOS LIBROS DE TEXTO DEL BACHILLERATO-LOGSE DE CATALUNYA, APLICANDO LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS 196
Inglada, N. y Font, V.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS AL NÚMERO PI 209
Konic, P. y Godino, J.D.

PÁGINA

LOS ESTUDIANTES, LAS INSTITUCIONES Y EL PROGRAMA MATHEMÁTICA 223
Ortega, M. y Contreras, A.

EFICACIA DIDÁCTICA DE DEFINICIONES EQUIVALENTES DE UNA NOCIÓN MATEMÁTICA 233
EL CASO DEL VALOR ABSOLUTO
Wihelmi, M.R., Godino, J.D. y Lacasta, E.

C O M U N I C A C I O N E S *O N – L I N E*

EL SIGNIFICADO DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE: EVOLUCIÓN HISTÓRICA A PARTIR DE SUS CAMPOS DE PROBLEMAS 249
Alvarado, H. y Batanero, C.

USO DE REPRESENTACIONES DE LOS CONCEPTOS DE FUNCION Y DERIVADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS POR RESOLUTORES EXPERTOS 271
Avila, R.

OBTENCIÓN DE EXPRESIONES ANALÍTICAS A PARTIR DE GRÁFICAS: EL CASO DE LAS FUNCIONES SENOIDALES 301
Del Castillo, A.G.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS A LA NOCIÓN DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR 335
Etchegaray, S., Colombo, S. y Peparelli, S.

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA DERIVADA 346
Ibarra, E. y Gómez, J.

ALGUNAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN ACERCA DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE DESDE LA PERSPECTIVA DEL ENFOQUE ONTOLÓGICO – SEMIÓTICO 374
Markiewick, M. E.

T A L L E R E S

METÁFORAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS. EL CASO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES 384
Acevedo, J.I., Font, V. y Bolite, J.

LOS PROCESOS DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA Y EL LÍMITE . 400
García, M. y Sánchez, C.

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS DEL PROFESORADO SOBRE LA CONTEXTUALIZACIÓN DE FUNCIONES 442
Ramos, A.B. y Font, V.

PRESENTACIÓN

Primer Congreso sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas

PREFACIO

Cuando Ángel Contreras me informó, hace algunos meses, de su proyecto de organizar unas jornadas sobre la TFS mi primera reacción fue de extrañeza e intenté disuadirlo. Cuando después me dijo que iba a llamarle, "Primer Congreso Internacional ...." mi extrañeza se convirtió en perplejidad, aunque con la esperanza de que los logros posteriores, en forma de contribuciones al Congreso, fueran lo suficientemente importantes para tal propósito.

Hoy estamos aquí inaugurando este Congreso, gracias a la iniciativa y el intenso trabajo de Ángel y de todas las personas que, con su carisma, ha logrado implicar en la organización, y en transmitir interés e ilusión por la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Los resultados de la convocatoria son alentadores desde el punto de vista de las contribuciones que se han presentado, algunas de las cuales provienen de Ibero-América, y justifican el nivel internacional con el que se ha convocado. El uso de los recursos de Internet va a permitir efectivamente la comunicación y discusión de los trabajos, superando las barreras económicas infranqueables que suponen los desplazamientos físicos, y las limitaciones temporales de unas breves jornadas presenciales. El foro virtual abierto en la Universidad de Jaén para discutir los trabajos nos va a permitir ampliar verdaderamente a escala internacional el radio de difusión de los mismos.

Durante dos días y medio vamos a tener ocasión, las personas aquí reunidas, de discutir y mejorar nuestras contribuciones, con las ventajas que suponen siempre la interacción directa, pero tenemos también la oportunidad de continuar el diálogo mediante el foro virtual, no sólo con nosotros mismos, sino con toda la comunidad de investigadores interesados en el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática.

Esta es una buena oportunidad para hacer un breve "balance de situación" sobre el significado y alcance de la TFS, recordando los puntos de referencia de donde proviene, los investigadores interesados, los temas abordados y aquellos en los que se está trabajando en la actualidad.

La TFS se inserta dentro de un paradigma de investigación en Didáctica de la Matemática que se conoce habitualmente como "Didáctica Fundamental" (Gascón, 1998) cuya entrada a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas prioriza el análisis epistemológico del propio saber matemático. Las teorías de Situaciones Didáctica (Brousseau, 1997), Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990), y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992) son aportaciones bien reconocidas dentro de ese paradigma y puntos de partida de la TFS.

En nuestro caso, hemos visto la necesidad de complementar dichos modelos teóricos con nuevos puntos de vista sobre el saber matemático, prestando una atención especial a los fenómenos semióticos y ontológicos. El estudio de las consecuencias de este punto de vista, o enfoque onto-semiótico, para la investigación y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el horizonte que nos ha abierto la TFS, y que aspira a constituirse en un punto de vista unificador de otros modelos teóricos usados en Didáctica de las Matemáticas.

En cuanto a los grupos y temas de investigación permitirme hacer una breve referencia a los mismos, lo que nos dará una instantánea de su estado actual. La siguiente tabla resume la situación:

PAÍS	UNIVERSIDAD/ CENTRO	INVESTIGADORES	TEMAS
España	Granada:	J. D. Godino	Fundamentos teóricos DM
		C. Batanero	Educación estadística
		R. Roa	Razonamiento combinatorio
		B. Cobo	Significado de los promedios
		J.J. Ortiz, L. Serrano y M. J. Cañizares	Significado de los conceptos probabilísticos en los libros de texto
	Córdoba	A. M. Recio	Demostración matemática
	Jaén	A. Contreras	Análisis matemático
		C. Sánchez	
		M. García	
		L. Ordóñez	
		L. Luque	
		A. Estepa	Medidas de dispersión estadística
		J. Ortega	
	Barcelona	V. Font	Análisis matemático
		N. Inglada	Metáforas en educación matemática
		B. Ramos	Objetos personales matemáticos y

			didácticos del profesorado
	Pamplona	M. R. Wilhelmi	Análisis matemático
Argentina	Río Cuarto	S. Etchegaray	Divisibilidad
		P. Konic	Número PI
		M.E. Markiewics	Razonamiento plausible
		S. Colombo	Geometría analítica
		S. Peparelli	Significados curriculares de la probabilidad
	Centro Babbage	L. Saidon	Obstáculos y errores de profesores ante el uso de recursos informáticos
	Santa Fe	L. Tauber	Significados de la d. normal
Cuba	Universidad de Guantánamo	F. A. Casanova	El aprendizaje de las nociones básicas de la numeración y el cálculo en los escolares de las primeras edades
Chile	Concepción	H. Alvarado	Significados del T. Central del Limite
México	Universidad de Sonora	R. Ávila	Análisis matemático
	Escuela Normal Superior de Hermosillo	A.A. Montoya	Significados institucionales de la probabilidad en la educación básica en México
	CINVESTAV-UNAM	J. Salinas	Análisis epistemológico de la prueba matemática y de las condiciones cognitivas que favorecen el aprendizaje usando geometría dinámica
	Tecnológico Monterreu	B. Ruiz	V. Aleatoria
Venezuela	Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay	M. Arrieche	Conjuntos y números naturales
		A. Meléndez	La parábola en educación media
		Y. Urdaneta	Derivada en estudiantes de ingenieria
		Y. González	Fracciones en educación básica
		M. Mayma	Papel de la aritmética en la formación de los estudiantes de educación básica.
		T. Figueroa	Resolución de problemas

El trabajo que presenté en París en 1993 con el título *La notion du signifié dans la didactique des mathematiques,* con ocasión del congreso *Vingt ans de Didáctique des Mathématiques en France,* contenía unas modestas ideas sobre el significado de los objetos matemáticos. Pero esta pequeña chispa ha tenido la fortuna de estar rodeada de un "material de combustión" extraordinario, como son las inteligencias de personas como Carmen Batanero, Vicenç Font, Angel Contreras, entre otras, lo que explica esta pequeña fogata que es hoy la TFS. Estoy convencido que este Primer

Congreso sobre la TFS va a ser la brisa que va a activar esa fogata hasta convertirla en un incendio de grandes proporciones.

Finalmente, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a las instituciones que han apoyado económicamente la celebración del congreso, Junta de Andalucía y Universidad de Jaén, y en particular a Ángel Contreras de la Fuente.

Juan D. Godino
Universidad de Granada

REFERENCIAS

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1): 7-33.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1993). La notion du signifié dans la didactique des mathematiques. En M. Artigue y cols (Eds.), *Vingt ans de Didáctique des Mathématiques en France* (pp. 218-224). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 10 (2,3): 133-170

PONENCIAS

ANÁLISIS DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE UN CUESTIONARIO SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL. REFLEXIONES DESDE EL MARCO DE LA TFS[1]

Carmen Batanero y Carmen Díaz
Universidad de Granada

RESUMEN

Describimos brevemente el proceso de elaboración de un cuestionario de evaluación, y lo analizamos desde el punto de vista de la TFS. La finalidad es reflexionar sobre las instituciones y procesos de muestreo implicado, así como sobre las posibilidades de generalización y criterios de idoneidad de las tareas e instrumentos de evaluación.

ANALYSING THE PROCESS OF BUILDING A CONDITIONAL PROBABILITY QUESTIONNAIRE. REFLECTIONS FROM THE SFT FRAMEWORK

ABSTRACT

We briefly describe the building of an assessment questionnaire and analyse this process from the SFT point of view. The aim is reflecting on the institutions and sampling processes involved, as well as on the generalization possibilities and idoneity criteria for assessment tasks and instruments.

1. INTRODUCCIÓN

La construcción de instrumentos de evaluación es habitual en la investigación en educación, donde se siguen en mayor o menor medida las normas metodológicas habituales en psicometría. Desde el punto de vista del marco teórico de las TFS, un instrumento de evaluación tiene como finalidad proporcionar información sobre los *significados personales* de un grupo de estudiantes sobre un objeto o un grupo de objetos matemáticos dados y la investigación encaminada a la construcción de estos instrumentos o el análisis de las respuestas a los mismos entraría en el campo de la *semiometría* (Godino, 1999; 2002). La semiometría contempla lo que podemos describir como *estática de significados sistémicos*, esto es, la caracterización de la trama de las funciones semióticas (o al menos una

[1] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 8-31)

muestra representativa de tal trama) en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas. La "medida" de tales significados (sistemas de prácticas) tendrá un carácter cualitativo y será relativa a una persona, institución, contexto fenomenológico y momento temporal especificado). Aunque el objeto de estudio de la evaluación es el significado personal, este proceso no puede dejar de lado la faceta institucional de los objetos matemáticos, que sirve de pauta de comparación con los significados personales evaluados.

Por otro lado, ni el significado holístico o global de un objeto de enseñanza ni siquiera los significados pretendidos o implementados en una enseñanza sobre dicho objeto pueden ser abarcados en un solo instrumento de evaluación. Tampoco el significado personal del alumno puede ser explicitado completamente en las respuestas a tareas o la observación de su actividad durante una prueba. En este trabajo describiremos brevemente el proceso seguido en la construcción de un cuestionario dirigido a evaluar la comprensión de la probabilidad condicional por estudiantes de Psicología. La finalidad principal es reflexionar sobre la complejidad de la función evaluadora, los diferentes niveles y tipos de significados personales e institucionales involucrados y sobre la información que diferentes tipos de análisis psicométricos pueden proporcionar respecto a las posibilidades de generalización en la investigación educativa.

1.1. El contexto de la investigación

La construcción del cuestionario citado forma parte de una investigación realizada en el Departamento de Psicología Social y Metodología de las Ciencias del Comportamiento de la Universidad de Granada (Díaz, 2004). El concepto de probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

1.2.Constructos y variables

Al tratar de evaluar la comprensión sobre un cierto concepto de un grupo de alumnos, hemos de tener en cuenta que es un *constructo inobservable*

(León y Montero, 2002), por lo que sus características deben ser inferidas de las respuestas de los alumnos. Un constructo es un atributo psicológico que caracteriza los comportamientos de los individuos y nos permite explicar patrones de comportamiento. Sólo pueden ser observados indirectamente, están sujetos al cambio y sólo los comprendemos vagamente, de aquí la dificultad de su evaluación que llevamos a cabo mediante alguna *variable* observable, por ejemplo, la puntuación en un cuestionario (Osterlind, 1989). Generalmente hay más de una posible forma de definir el constructo, cuya definición se realiza a dos niveles:

- *Definición semántica*: en términos de comportamientos observables o reglas de correspondencia entre el constructo y la conducta.
- *Definición sintáctica:* en términos de las relaciones lógicas o matemáticas del constructo con otros constructos o variables dentro de un marco teórico.

En este trabajo nos limitaremos a la definición semántica, que considera la especificación detallada de la variable de interés (en este caso la comprensión de la probabilidad condicional). Desde nuestro marco teórico, las especificaciones del contenido podrían describirse como tipos de prácticas operatorias y discursivas (Godino, 2003) asociadas al objeto "probabilidad condicional". La diferenciación entre constructos y variables también se recoge en las TFS, puesto que se diferencia entre el dominio de las ideas u objetos abstractos (personales e institucionales) y el dominio de los significados o sistemas de prácticas de donde emergen tales objetos inobservables (Godino, 1999), lo que permite plantear con nitidez la dificultad del problema de la evaluación.

2. SIGNIFICADO DE REFERENCIA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Nuestro primer paso ha sido elaborar un procedimiento para identificar, mediante una definición semántica precisa, el constructo (Martínez Arias, 1995). Para dotar de una mayor objetividad a esta definición de nuestra variable, nos hemos basado en un análisis de contenido de una muestra de libros de texto que utilizan los alumnos de Psicología en las asignaturas de análisis de datos. Además hemos tenido en cuenta los errores y dificultades señalados en las investigaciones previas sobre la probabilidad condicional. Con todo ello delimitamos el *significado de referencia* en nuestro estudio. Hacemos notar que este es un significado parcial, puesto que el objeto probabilidad condicional tiene un significado más completo, si se tienen en

cuenta los elementos aportados a dicho significado desde la matemática (por ejemplo, en nuestro estudio no trataremos el concepto de intercambiabilidad), la historia (sucesivas concepciones históricas de la probabilidad condicional y los campos de problemas que las originaron), psicología y didáctica. Todo ello constituiría el *significado holístico o global* del concepto.

2.1.Investigaciones previas

En primer lugar partimos de las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de las ideas de probabilidad condicional e independencia, tanto en el campo de la Psicología, como en el de la Educación, recopilando, además, los ítems usados en las mismas, que serían la base posterior de la construcción de un banco de ítems. Podemos clasificar las investigaciones encontradas en los apartados siguientes:

- *Comprensión intuitiva de la probabilidad condicional y sus relaciones con la probabilidad simple y dependencia* (Maury, 1985, 1986; Kelly y Zwiers, 1986; Totohasina, 1992; Sánchez, 1996).
- *Condicionamiento y causación:* La existencia de una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional percibe en forma diferente las relaciones causales y diagnósticas (Tversky y Kahneman, 1982a). La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal (Falk, 1986; Gras y Totohasina, 1995).
- *Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional* (Eddy, 1982; Falk, 1986; Batanero y cols., 1996).
- *Confusión de probabilidad condicional y conjunta* (Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987; Einhorn y Hogarth, 1986; Ojeda, 1995; Tversky y Kahneman, 1982b).
- *Situaciones sincrónicas y diacrónicas:* Ojeda (1995).
- *Razonamiento bayesiano* (Kahneman & Tversky, 1982c; Bar-Hillel, 1983; Totohasina, 1992; Teigen, Brun & Frydenlund, 1999)
- *Influencia del formato y los datos* (Pollatesk y cols.,1987; Fiedler, 1988; Gigerenzer, 1994)
- *Enseñanza de la probabilidad condicional (*Sdlemeier, 1999; Martignon & Wassner, 2002).

Esta revisión nos permitió comprobar que las investigaciones se habían centrado en puntos aislados de la comprensión del concepto y sugirió la necesidad de construir un cuestionario comprensivo. Por otro lado, se enriquece el significado puramente matemático del concepto, al tener en cuenta aspectos psicológicos involucrados, tales como la falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982b) o la falacia del eje temporal (Falk, 1986).

2.2.Análisis de contenido de libros de texto de estadística para psicólogos

El estudio de los libros de texto es una forma –limitada- de acercarnos al significado institucional de la probabilidad condicional en la institución "análisis de datos en psicología", es decir en los cursos universitarios de análisis de datos para este tipo de estudiantes. El análisis de contenido se basa en la idea de que las unidades del texto pueden clasificarse en un número reducido de categorías (Weber, 1985). Sirve para efectuar inferencias mediante la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione y Matalón, 1989). El procedimiento seguido consistió en elaborar un listado con las 31 universidades españolas en las que se imparte la licenciatura de Psicología y solicitar a los directores de los correspondientes departamentos el programa y bibliografía recomendada. Conseguimos repuestas de 23 de estas universidades. De un total de 79 libros diferentes recomendados de análisis de datos 20 eran citados por 4 o más universidades. Trece de ellos incluían el tema de probabilidad condicional y fueron analizados. Además se incluyeron otros 5 libros de orientación bayesiana.

2.3.Especificación de la variable

El análisis realizado de los libros y las investigaciones previas sirvió para elaborar la tabla de especificaciones de nuestro cuestionario, que se presenta en la Tabla 1. Aunque al elaborar esta tabla sólo se diferenció el nivel conceptual como procedimental, así como los cuatro niveles superiores en la taxonomía de Bloom, podríamos haber diferenciado los diferentes elementos de significado considerados por Godino (2003).

Tabla 1. Especificaciones del contenido del cuestionario

	Contenido	Comprensión	Aplicación	Análisis	Síntesis
Conocimiento conceptual	1. Definición de la probabilidad condicional	x	x		

	2. Reconocer que la probabilidad de P(A) >0 para poder definir P(B/A)	x			
	3. Reconocer que una probabilidad condicional cumple los axiomas.	x			
	4. Reconocer que la probabilidad condicional supone una restricción del espacio muestral	x	x		
	5. Distinguir probabilidad condicional con inversa	x	x		
	6. Distinguir probabilidad conjunta, condicional y simple	x	x		
	7. Probabilidad conjunta menor que probabilidad simple	x	x		
	8. Distinguir sucesos independientes, dependientes y mutuamente excluyentes	x	x		
Conocimiento procedimental	9. Calcular una probabilidad condicional dentro de un único experimento			x	x
	10. Resolver correctamente problemas de probabilidad condicional en un contexto de muestreo con reposición			x	x
	11. Resolver correctamente problemas de probabilidad condicional en un contexto de muestreo sin reposición			x	x
	12. Resolver correctamente problemas de probabilidad condicional a partir de probabilidades conjuntas y simples			x	x
	13. Resolver correctamente problemas condicionales cuando se invierte el eje de tiempo			x	x
	14. Distinguir situación condicional, causal y diagnóstica			x	x
	15. Resolver correctamente problemas en situaciones diacrónicas			x	x
	16. Resolver correctamente problemas en situaciones sincrónicas			x	x
	17. Resolver correctamente problemas de probabilidad compuesta haciendo uso de la regla del producto en caso de sucesos independientes			x	x
	18. Resolver correctamente problemas de probabilidad compuesta haciendo uso de la regla del producto en caso de sucesos dependientes			x	x
	19. Aplicar correctamente el cálculo de la probabilidad condicional en situaciones de sucesos múltiples (regla de la probabilidad total)			x	x
	20. Aplicar correctamente el cálculo de la probabilidad condicional en situaciones de probabilidad inversa (regla de Bayes)			x	x

En nuestro caso, estamos considerando los conceptos y propiedades (conocimiento conceptual) así como los problemas y algoritmos (conocimiento procedimental), aunque no se diferencian entre si este tipo de elementos. No hemos prestado atención especial al lenguaje o a los argumentos, aunque por supuesto quedan implícitamente evaluados en los ítems de respuesta abierta, que se podrían reanalizar para estudiar la comprensión de este tipo de elementos.

3. PROCESO DE SELECCIÓN DE ÍTEMS

Un ítem de un cuestionario es una unidad de medida que consta de un estímulo y una forma prescriptiva de respuesta y su fin es inferir la capacidad del examinado en un cierto constructo (habilidad, rasgo, etc.), proporcionando datos cuantificables sobre la persona que lo completa (Osterlind, 1989). Desde el punto de vista de la TFS, y aún teniendo en cuenta la naturaleza esencialmente compleja del significado de los objetos matemáticos, en el análisis de las actuaciones de los alumnos nos interesa con frecuencia fijar la atención en procesos interpretativos específicos y en las dificultades inherentes a los mismos, por lo que en la respuesta a cada ítem podríamos tener en cuenta *significados parciales* o incluso *elementales* de la probabilidad condicional (Godino y Batanero, 2003).

Al considerar el número total de ítems, hemos tratado de cubrir adecuadamente el contenido y asegurar una fiabilidad satisfactoria (Millman y Greene, 1989), teniendo en cuenta la restricción de la posible longitud total del test. Usamos tanto ítems de opciones múltiples como de respuesta abierta y comenzamos con un conjunto inicial de unos 50 ítems (2-3 por cada especificación de contenido).

Una vez concluida la planificación del cuestionario, realizamos una selección de los ítems que constituirían el cuestionario piloto, siguiendo los dos sistemas sugeridos en Osterlind (1989):

- El análisis a partir de un juicio requiere pedir a una serie de expertos que valoren los ítems particulares, de acuerdo con algunos criterios.
- La valoración numérica requiere que los ítems se administren a una muestra de sujetos y se basa en el estudio de una serie de indicadores estadísticos de los mismos.

3.1. Juicio de expertos

Millman y Greene (1989) indican que el "experto" lo define el propósito del instrumento y que el grupo elegido de expertos ha de representar una

diversidad relevante de capacidades y puntos de vista. En nuestro caso, fueron seleccionados en base a su conocimiento experto de probabilidades y más particularmente de probabilidad condicional, así como a la experiencia de investigación sobre el tema. Participaron 9 investigadores en didáctica de la estadística, tanto españoles como iberoamericanos. Nuestro objetivo era doble:

- Establecer un consenso sobre la tabla de especificaciones del instrumento, decidiendo cuales especificaciones del contenido eran relevantes para los propósitos del instrumento. De este modo se reforzarían los resultados obtenidos del análisis de contenido de los libros de texto.
- Establecer un consenso de opiniones de los expertos sobre cómo cada ítem particular se ajusta bien para evaluar el contenido específico para el cuál ha sido diseñado que sirviesen como base para elegir los ítems definitivos.

Se proporcionó a cada uno de estos expertos un cuestionario en que se les pedía, para cada unidad de contenido y para cada uno de los ítems asociados a la misma su grado de acuerdo (en una escala 1 a 5) sobre su adecuación a los fines de nuestra evaluación. Un ejemplo de la estructura y contenido del cuestionario a expertos se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Ejemplo de contenido y estructura del cuestionario a expertos

Contenido 1: Definición de la probabilidad condicional.

Ítem 1. Explica con tus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional.

Ítem 2. ¿Qué quiere decir la expresión "la probabilidad condicional de A dado B es 1/4"?
a) En la cuarta parte de los experimentos obtenemos A y B simultáneamente
b) A ocurre la cuarta parte de las veces en que ocurre B
c) B ocurre la cuarta parte de las veces en que ocurre A
d) A o B ocurren la cuarta parte de las veces

El contenido "Definición de la probabilidad condicional" es relevante
El ítem 1 es adecuado para este contenido
El ítem 2 es adecuado para este contenido
1: Nada 2 3 4 5: Mucho

3.2. Pruebas pre-pilotos de items

Los ítems fueron divididos en cuatro cuestionarios, con objeto de que el número total de ítems a completar en una sesión por un mismo grupo de alumnos no fuera excesivamente largo, de modo que tuviesen tiempo suficiente para responder. Participaron en las pruebas pre – piloto dos grupos diferentes de alumnos, de primer año en la Licenciatura de Psicología (en total 157 alumnos, con una nota media de acceso en selectividad de 7,49). Los porcentajes de estudiantes con diferentes tipos de bachillerato fueron los siguientes: ciencias 27'6%, letras 72,4%. Se trata de sujetos voluntarios, como es frecuente en investigaciones en ciencias sociales.

Tabla 2. Resultados en pruebas pre-piloto

Ítem	n	porcentaje correcto	Observaciones
1	49	75.5	
2	52	71.2	No eligen el distractor d
3	49	24.5	
4	52	73.1	
5	157	24.8	Domina el distractor c
6	49	36.7	
7	52	15.4	Domina el distractor d
8	49	36.7	
9	52	a) 65.4; b) 46.2	
10	49	a) 46.9; b) 38.8	
11	157	47.1	Domina el distractor c
12	52	a) 76.9;b) 44.2; c) 65.4	
13	49	a) 24.5; b) 71.4; c) 46.9	
14	81	37.0	Domina el distractor c
15	76	27.6	Domina el distractor c

3.3.Selección de ítems para el cuestionario

Una vez finalizadas las fases anteriores, seleccionamos los ítems que compondrían el cuestionario piloto, con el siguiente proceso:

- Primeramente se desecharon aquellas especificaciones de contenido en las que el grado de acuerdo sobre su relevancia no fuese suficientemente elevado y consensuado.
- Para aquellos contenidos con alto grado de acuerdo respecto a su relevancia se examinaron los ítems. Dichos ítems no tenían *idoneidad epistémica* para el elemento particular de significado evaluado. Se desecharon los ítems que no fuesen altamente valorados por los expertos. De entre los ítems bien valorados se eligió el que hubiese presentado menor índice de dificultad en las pruebas pre-piloto de ítems. Los ítems excesivamente difíciles no tenían *idoneidad cognitiva*. Algunos ítems también se desecharon porque algún distractor fue elegido mayoritariamente (mientras que lo ideal es que las respuestas se distribuyan homogéneamente entre distractores) o porque el contexto

muy marcado –por ejemplo campeonatos de tenis- distraía la atención del estudiante y forzaba la respuesta. En este caso, incluso cuando el ítem tuviese idoneidad epistémica y cognitiva no tenía *idoneidad didáctica,* más específicamente no es adecuado a la tarea evaluadora del conocimiento pretendido.

4. PRUEBAS DEL CUESTIONARIO PILOTO

4.1.Significado evaluado en el cuestionario

Una vez elegidos los ítems que formarían el cuestionario (18) se analizó su contenido primario y secundario. Por ejemplo, el ítem siguiente (número 4 en el cuestionario) fue diseñado para evaluar el contenido primario *"distinguir sucesos dependientes, independientes y mutuamente excluyentes".* Pero al analizarlo aparecen otros contenidos secundarios, ya que el alumno debe también "*resolver correctamente problemas de probabilidad compuesta haciendo uso de la regla del producto en experimentos independientes"* para reconocer que el distractor d) es incorrecto.

Ítem 3. Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A el suceso "se extrae un trébol" y B el suceso "se extrae una reina" ¿Los sucesos A y B son independientes?

a) Sí, en todos los casos.
b) No son independientes porque en la baraja hay una reina de tréboles.
c) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es reina y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta y para mirar si es trébol.
d) No, porque P(reina de trébol)= P(reina) x P(trébol)

Los otros distractores tratan de detectar diferentes errores descritos en la literatura de investigación sobre probabilidad condicional:

- En el distractor b) se trata de detectar la posible confusión entre sucesos excluyentes y sucesos independientes.
- En el distractor c) se trata de detectar la posible creencia errónea que sólo pueden ser independientes los sucesos de experimentos diacrónicos.
- En el distractor d) se presenta la definición correcta de la regla del producto, junto con la afirmación incorrecta que esta regla no se cumple en el caso de sucesos independientes. Precisamente en este caso se cumple porque los sucesos son independientes y tratamos de ver si el alumno detecta el error en la afirmación presentada en el distractor.

Este análisis para cada uno de los ítems permitió comprobar que todas las unidades de contenido especificadas en la tabla 1 quedaban cubiertas al menos dos veces en el cuestionario. En esta tabla representamos, por tanto el significado de la probabilidad condicional *evaluado* por el cuestionario, que es más restringido que el significado holístico y en ciertos aspectos también que el socio-profesional en la institución de enseñanza – evaluado en el análisis de textos. Pero incluye elementos psicológicos, tomados de las investigaciones previas, que no se tienen en cuenta en la enseñanza y por tanto son nuevos respecto al significado institucional socio-profesional.

4.2.Análisis de ítems

Finalizado el instrumento piloto, decidimos realizar pruebas del mismo, con objeto de obtener información empírica sobre las características de esta primera versión del instrumento y comprobar que era útil para los objetivos pretendidos. Al mismo tiempo deseábamos analizar sus limitaciones, con objeto de identificar aquellos puntos en que sería necesario continuar el trabajo para mejorarlo. Las pruebas piloto se llevaron a cabo con dos muestras de estudiantes universitarios. La primera de ella estuvo formada por 37 alumnos que cursaban 5º año de la Licenciatura de Matemáticas en la especialidad de Metodología. Se eligió a estos alumnos, debido a su alta preparación y porque el disponer de este grupo de alumnos nos permitiría comparar si los errores más frecuentes en alumnos de psicología se repetían en alumnos con alta preparación matemática.

Análisis de respuestas

Analizamos, en primer lugar, las respuestas obtenidas en cada uno de los ítems. En los ítems de opciones múltiples (como el ítem 2) que se presenta a continuación simplemente estudiamos las frecuencias y proporciones de respuestas (Tabla 3).

> **Ítem 4.** Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verde y el 15% Azul. Un testigo identificó el taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

Tabla 3. Resultados en el Item 4

	Matemáticas		Psicología	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a) 80 %	7	18,9	10	17,5
b) 15%	6	16,2	2	3,5
c) (15/100) x (80/100)	18	48,6	17	29,8
d) 41 %	4	10,8	16	28,1
Blanco	2	5,4	12	21,1
Total	37	100,0	57	100,0

Ítem 5. Hemos lanzado dos dados y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos números sea un 6?

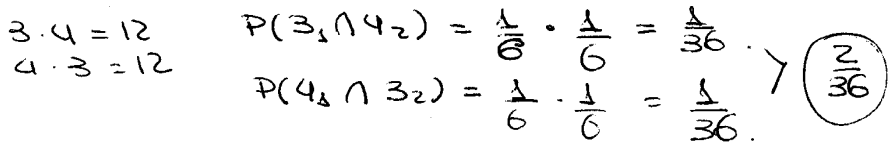
En los ítems de respuesta abierta se ha puntuado de acuerdo a la mayor o menor completitud. Por ejemplo, en el ítem 3 se ha seguido el siguiente criterio: 0:No se responde, o se responde incorrectamente; 1: Identifica los casos favorables o posibles, pero no resuelve el problema; 2) Identifica los casos favorables y posibles, plantea el problema pero comete algún error y 3) Resuelve el problema correctamente, como en el caso siguiente: *"{(2,6), (3,4), (6,2), (4,3)}; 2/4=1/2= 0,5"*.

Tabla.4. Resultados en el ítem 5

	Matemáticas			Psicología		
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Blanco	1	2,7	2,7	7	12,3	12,3
0	13	35,1	37,8	23	40,4	52,7
1	4	10,8	48,6	12	21,1	73,8
2	7	18,9	67,5	9	15,8	89,6
3	12	32,4	100,0	6	10,5	100,0
Total	37	100,0		57	100,0	

Aunque no los hemos analizado explícitamente, estos ítems de respuesta abierta permiten identificar los elementos de significado usados por el alumno, así como sus conflictos semióticos. Un ejemplo es el siguiente en que el alumno ha identificado los casos favorables, identifica la independencia de los sucesos y la importancia del orden pero no identifica el problema como de probabilidad condicional, sino lo confunde con otro de probabilidad simple. Por ello, encuentra la probabilidad de cada caso, aplicando la regla del producto (correctamente) y suma las probabilidades (aplicando el axioma de la unión). El alumno muestra un razonamiento probabilístico bueno, y ha aplicado un gran número de

elementos de significado, pero aparece un *conflicto semiótico* al no interpretar correctamente el enunciado del problema.



.

Seguidamente se analizaron las características psicométricas de los ítems, dificultad y discriminación. Puesto que el índice de dificultad es una proporción (la proporción de alumnos que superan el ítem) calculamos adicionalmente los intervalos de confianza de dicha proporción con la fórmula habitual, mediante la hoja de cálculo Excel. Para el cálculo de la proporción de aciertos en los ítems de respuestas abiertas en los que, además de la respuesta totalmente correcta (máxima puntuación), también se han considerado las respuestas en que el razonamiento e identificación de los datos sea correcta, aunque haya algún error de cálculo.

Una aportación metodológica es el uso de inferencia bayesiana para mejorar la estimación de los índices de dificultad, utilizando el programa Le Bayesien (Lecoutre, 1996) que realiza el cálculo bayesiano con proporciones (Bernard, 1998). Esta estimación se ha realizado con dos tipos de distribución a priori:

- Distribución a priori no informativa, es decir, sin tener en cuenta la información previa (Lecoutre, 1996).
- Utilizando resultados del ítem en las pruebas pre-piloto, siguiendo uno de los métodos recomendados en Serrano (2003), que consiste en tener en cuenta los éxitos y fracasos en la prueba anterior para definir la distribución a priori.

En ambos casos calculamos los intervalos de credibilidad y los comparamos con los intervalos de confianza obtenidos en la aproximación clásica. Cuando se dispone de información previa, los intervalos obtenido son más precisos y además nos proporciona una probabilidad epistémica (es decir de que el parámetro esté en este intervalo), lo que no se logra en inferencia clásica.

Tabla 4. Estimación de índices de dificultad

Ítem	Índice observado en prueba piloto	Intervalo de confianza (95%)	Índice corregido	(Éxitos/fallos) en Prueba pre-piloto	Intervalo de credibilidad bayesiano (95%) según d. a priori	
	(n=57)				No informativa	Informativa

I1	0,860	.7667-.9526	0,853	(37, 12)	.753-.931	0,729-0,877
I2	0,720	.5990-.8396	0,716	No probado	.594-.823	---
I3	0,281	.1604-.4010	0,284	(23, 134)	.177-.406	.135-.238
I4	0,175	.0736-.2773	0,171	(26, 131)	.094-0.289	.123-.223
I5	0,825	.7227-.9264	0,819	(45, 31)	.711-.906	.610-.765
I6A	0,877	.7893-.9651	0,871	(23, 26)	.774-.943	.596-.771
I6B	0,298	.1758-.4207	0,299	(19, 30)	.192-.425	.261-.433
I6C	0,421	.2889-.5532	0,422	(12, 37)	.264-.550	.255-.433
I6D	0,421	.2889-.5532	0,422	(35, 14)	.264-.550	.462-.649

Discriminación

También hemos calculado los índices de discriminación para cada uno de los ítems por dos sistemas diferente:

1. Como correlación entre el ítem y la puntuación total del cuestionario. La mayor parte de los ítems tienen una correlación positiva; pero a veces no es suficientemente significativa lo que da idea de un constructo sistémico más que unidimensional.
2. Mediante el estudio de la diferencia en proporción de aciertos al ítem en los estudiantes de psicología respecto a un grupo de mayor preparación (estudiantes de matemáticas, con alta formación en matemáticas y estadística), aplicando el test usual de diferencia de proporciones. Resaltamos que en algunos ítems los estudiantes de matemáticas no obtienen mejores resultados que sus compañeros, posiblemente porque los sesgos de razonamiento no se corrigen con la instrucción exclusivamente formal.

Tabla 5. Dificultad y discriminación

	Índice Dificultad		Índice Discriminación n = 94		
	Matemáticas	Psicología	Diferencia grupos		Correlación corregida con total
	n = 37	n =57	Valor diferencia	Valor tipificado	
I1	0,784	0,860	-0,076	-0,93	***,687
I2	0,784	0,720	0,064	0,71	**,297
I3	0,108	0,281	-0,173	-2,21	-,202
I4	0,081	0,175	-0,094	-1,39	-,036
I5	0,811	0,825	-0,014	-0,17	,107
I6A	0,946	0,877	0,069	1,21	*,205
I6B	0,459	0,298	0,161	1,58	*,215
I6C	0,730	0,421	***0,309	3,15	**,371
I6D	0,730	0,421	***0,309	3,15	**,345

* p=0.05; ** p= 0.01; *** p=0.001

4.3.Fiabilidad, generalizabilidad y validez

Una vez realizado el análisis de ítems, hemos tratado de buscar algunas evidencias de la fiabilidad y validez de la prueba, siendo conscientes que, al estar todavía en las fases iniciales de la construcción, estas evidencias

son sólo provisionales y deberán ser completadas en el futuro. Como sugiere Godino (1999), la solución de los problemas de investigación, con criterios de calidad científica, precisa realizar un trabajo sistemático y disciplinado que garantice la validez y fiabilidad de las afirmaciones pretendidas, esto es, debe estar guiada por una metodología adecuada de investigación y por instrumentos teóricos adaptados a las peculiaridades de la investigación requerida.

Aproximación a la fiabilidad

Puesto que estamos en un proceso de evaluación en educación, nos proponemos realizar inferencias sobre conceptos abstractos a partir de indicadores empíricos, más precisamente, relacionar los conocimientos de los alumnos sobre un concepto con sus respuestas a los ítems del cuestionario (Thorndike, 1989). La medida siempre produce un cierto error aleatorio, pero dos medidas del mismo fenómeno sobre un mismo individuo suelen ser consistentes. La fiabilidad es esta tendencia a la consistencia o precisión del instrumento en la población medida. Se define como correlación entre las puntuaciones verdadera y observada (Martínez Arias, 1995).

El *coeficiente de fiabilidad* es un indicador de la fiabilidad teórica de las puntuaciones observadas, en el sentido de proporcionar un valor numérico que indica el *grado de confianza* que podíamos tener en dichas puntuaciones como estimadores de las puntuaciones verdaderas de los sujetos. Este coeficiente de fiabilidad es un valor teórico que debe ser estimado por algún procedimiento empírico, a través de las respuestas de un grupo de sujetos a un conjunto de ítems (Carmines y Zeller, 1979). Entre los diversos procedimientos para el cálculo del estimador del coeficiente de fiabilidad hemos tomado el coeficiente Alfa de Cronbach (que se reduce al de Kuder- Richardson para ítems dicotómicos). Este coeficiente nos refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test. Es la estimación de una *fiabilidad en el acto*. Se acerca la puntuación de una persona a la que se obtenido si tuviésemos un instrumento perfecto de medición (Martínez Arias, 1995).

El valor obtenido con el total de la muestra es de 0,7738, que corresponde a una correlación entre la puntuación observada y la puntuación verdadera de 0,879. Consideramos que el valor es razonable, dado que se trata de un cuestionario piloto que puede ser mejorado. Al calcular separadamente el coeficiente de fiabilidad para ambos grupos obtuvimos un valor de alfa = 0,6043 para el grupo de Psicología (n = 57) y un valor alfa de 0,5604 en el grupo de Matemáticas (n =37). Estos valores

son moderados, como corresponde a un constructo no unidimensional, pero entra en los límites sugeridos por diversos autores; por ejemplo Santisteban (1990) indica, como limite general, 0,50.

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$$

Generalizabilidad

La teoría de la generalizabilidad (Feldt y Brennan, 1991) extiende la teoría clásica de la medición, y permite analizar diferentes fuentes de error en las puntuaciones observadas. El coeficiente de generalizabilidad se define como cociente entre la varianza verdadera en las puntuaciones de la prueba y la varianza observada que es suma de la varianza verdadera más la varianza debida al error aleatorio, mediante la expresión (1).

Según Thorndike (1989), la varianza de error depende de cómo definimos el universo de puntuaciones verdaderas y en el análisis de generalizabilidad se consideran ciertas fuentes como parte de la varianza de error en unas condiciones y otras fuentes en otras. En nuestro caso diferenciaremos dos fuentes para el error aleatorio y calcularemos, por tanto, dos coeficientes: a) la generalizabilidad a los mismos alumnos cuando se varían los enunciados de la misma prueba, que coincide con el coeficiente alfa; por tanto para el grupo de psicólogos es igual a 0,60; b) la generalizabilidad a otros alumnos similares a los del grupo con la misma prueba fue igual a 0,90. Estos resultados indican una alta generalizabilidad de resultados usando el mismo cuestionario.

Aproximación a la validez

Reconocemos que la validación de un cuestionario es un proceso complejo de recogida y documentación de evidencia y entendemos la validez como un concepto que es unitario, ya que sus diferentes formas (validez de constructo, contenido, criterio...) deben considerarse más bien como diferentes maneras de recoger evidencias de una única noción de validez (Martínez Arias, 1995). La validez suele entenderse en relación al uso que se dé al cuestionario y la interpretación de sus puntuaciones. No validamos un test sino una inferencia o interpretación (Osterlind, 1989).

Nosotros hemos tratado de iniciar el estudio de la *validez de contenido* es decir, asegurar que el instrumento recoge una muestra representativa de

los contenidos que se pretenden evaluar o que los ítems son relevantes para representar un universo temático (Carmines y Zeller, 1979). Para ello hemos realizado una planificación cuidadosa de los ítems que se incluirán en el mismo y un estudio de cómo estos ítems pueden contribuir a la medida del constructo subyacente. Para salvar la dificultad de determinar qué es un muestreo adecuado de ítems en el dominio particular, hemos descrito de antemano el dominio, sus dimensiones, facetas y objetivos (Martínez Arias, 1995).

También hemos usado una metodología adecuada para revisar la congruencia entre los ítems y las especificaciones (Osterlind, 1989). El establecimiento de la validez mediante la determinación de la correspondencia entre ítems y objetivos se aplica especialmente a los tests de rendimiento como es el nuestro. Como es usual en este tipo de validación hemos usado el juicio de expertos, definiendo previamente el universo de observaciones admisibles, identificando expertos en el campo, pidiendo a los expertos que emparejen ítems con objetivos y resumiendo la información numéricamente.

El trabajo de construcción del cuestionario no ha finalizado. Somos conscientes de que necesitamos nuevas revisiones y pruebas con muestras más amplias que nos permitan completar el estudio de la validez, así como la mejora de la fiabilidad. Sería también preciso complementar los resultados del cuestionario con entrevistas en profundidad, que proporcionen un conocimiento más profundo de los razonamientos y conocimientos de los estudiantes.

5. REFLEXIONES DESDE EL ENFOQUE DE LA TFS

5.1.Institutiones implicadas en el proceso de evaluación y significados de la probabilidad condicional

El proceso de construcción y prueba de un cuestionario de evaluación descrito nos permite reflexionar sobre la complejidad de la tarea evaluadora y la diversidad de significados involucrados respecto a un mismo objeto matemático. En la descripción aparece claramente la dialéctica *institucional-personal* (Godino, 2003), puesto que la adecuación de los significados personales de los alumnos sólo puede llevarse a cabo desde una institución de referencia. Ahora bien, dicha faceta aparece en relación con diversas instituciones que intervienen en diferentes fases, que representamos esquemáticamente en la Tabla 6.

Tabla 6. Significados y procesos de muestreo en el estudio realizado

Instituciones/ sujetos involucrados	Significado de interés	Instrumento de evaluación	Proceso de muestreo	Significado evaluado
Didáctica / Matemática	Holístico			
Enseñanza (Estadística en Psicología)	Institucional (socio-profesional)	Análisis del contenido de libros de texto recomendados	23 entre 31 Universidades; 18 entre 60 libros	Referencia
Investigación en Educación Estadística	Objetivamente evaluado	Juicio de expertos Pruebas pre-piloto de ítems	9 investigadores muestras de estudiantes	Evaluado
Estudiantes de Psicología	Personal	Cuestionario	Unidades de contenido Items	Declarado

Nuestro interés es evaluar el significado personal que los estudiantes de psicología alcanzan sobre la probabilidad condicional tras un proceso "estándar" de instrucción, pero esta evaluación ha de tener como pauta el significado institucional en la correspondiente institución de enseñanza (estadística en psicología). No olvidamos que este significado es sólo una parte del sistema de prácticas más complejo y global – el significado global u holístico del concepto, del que aquí se aborda tan sólo una parte y que en este trabajo se considera como dado, no es objeto de investigación.

Por otro lado, el instrumento es elaborado desde una institución diferente, que podemos denominar como *investigación en educación estadística*; en esta institución se comparte un cierto significado del objeto probabilidad condicional, sobre qué sería una evaluación objetiva y los criterios para construir un instrumento aceptable (por ejemplo referidos a fiabilidad, validez, etc.). El investigador es un sujeto de dicha institución; por tanto puede introducir elementos subjetivos tanto en la elaboración del instrumento, como en la interpretación de resultados, elección de muestra de estudiantes, etc. Es aquí donde se usa el juicio de expertos – a su vez una práctica dentro de dicha institución- como control de la objetividad de proceso. Tanto esta práctica como otras – la serie de análisis psicométricos efectuados- tienen como finalidad evaluar o investigar el significado personal de una forma objetiva.

5.2.Procesos de muestreo implicados

Para poder comprender la diferencia entre los significados que son objetos del estudio y lo que realmente es posible determinar en la investigación, es importante también reflexionar sobre todo el proceso de

inferencia llevado a cabo, desde la definición operacional de la variable hasta la interpretación dada a las respuestas de los estudiantes. Ello nos permite diferenciar entre lo que queremos evaluar y lo que podemos evaluar, así como hasta qué punto podemos generalizar los resultados de un estudio de evaluación y definir en consecuencia algunos criterios que permitan mejorar la generalizabilidad.

Usualmente en la investigación didáctica somos conscientes de que los alumnos participantes en el estudio constituye una muestra de una población real o potencial, a la que queremos extender nuestras conclusiones. Sin embargo, muestreamos también las tareas, contextos, etc. En concreto en el estudio analizado podemos identificar los siguientes procesos de muestreo:

- El investigador está interesado en determinar el significado institucional para poder precisar su variable: qué se entiende como conocimiento de la probabilidad condicional en una cierta institución de enseñanza. Pero no es posible acceder a las clases que se dan en esta institución (que además podrían potencialmente variar de un curso a otro, incluso para un mismo profesor). Una forma de acercarse al significado de interés es el análisis de libros de texto recomendados, que ni siquiera es completo, pues hay un muestreo de Universidades y de libros. Es innegable que el resultado del estudio es un significado diferente, que sería el significado de referencia del proceso de evaluación, en cuanto en base a él se organiza la construcción del cuestionario e interpretación de las respuestas de los alumnos.
- Una vez fijado el significado de referencia hay infinitos posibles instrumentos de evaluación; incluso infinitos posibles cuestionarios. Podemos variar el tipo y número de ítems, el nivel de formalización de los mismos, su dificultad, su contexto. El investigador trata de construir un instrumento lo más objetivo posible, y para ello recopila diferentes ítems, tomados de investigaciones previas en las que han sido evaluados y han dado resultados probados, para cada una de las unidades de contenido. Pero un investigador puede involuntariamente introducir elementos subjetivos en la elección de los ítems o tareas. El recurso a juicio de expertos trata de crear un *significado compartido* de lo que sería un instrumento de evaluación. Las pruebas de los ítems con estudiantes tratan de asegurar la legibilidad y la idoneidad cognitiva de los mismos. El cuestionario resultante define un significado nuevo, sería el significado evaluado, diferente de los anteriores.
- Finalmente el instrumento se prueba con una muestra de estudiantes. La respuesta que cada uno de ellos proporciona a cada ítem no es la única

que puede dar. Dependiendo del interés, cansancio, concentración y otros factores, sus respuestas reflejan una parte de lo que el estudiante realmente conoce. Sería el significado declarado que es el finalmente accesible al investigador.

5.3.Idoneidad de un cuestionario de evaluación

Pero el interés del estudio no se limita a este significado declarado. El investigador estaría interesado en el significado personal de los alumnos respecto a las tareas propuestas (las respuestas dadas se suponen una muestra representativa de las que darían los mismos estudiantes en la misma prueba en otras ocasiones).

El estudio significativo de los objetos matemáticos debe poner en juego una muestra representativa de las prácticas que constituyen el significado sistémico de los mismos en el seno de un contexto institucional dado (Godino, 1999). Más aún, si las tareas son suficientemente representativas (para evaluar las unidades de contenido definidas), podríamos hacer una inferencia sobre lo que cada alumno de la muestra sería capaz de hacer y decir en otras tareas relacionadas con el concepto. Si las unidades del contenido están bien definidas y representan el concepto de probabilidad condicional, entonces podríamos acercarnos al significado personal de los alumnos de la muestra sobre la probabilidad condicional. Finalmente, los alumnos particulares son una muestra (que suponemos representativa) de otros estudiantes de psicología. Mientras que un profesor se interesa sólo por los alumnos a su cargo, el investigador aspira a obtener conocimiento generalizable sobre las dificultades y capacidades de los estudiantes.

Es claro que la posibilidad de generalizar en cada uno de los pasos descritos depende de la representatividad y la variabilidad de la muestra elegida en cada uno de los procesos de muestreo. Aunque la tarea de conseguir una generalizabilidad completa parece imposible, la investigación didáctica debe aspirar a dar criterios que permitan la construcción adecuada de instrumentos de evaluación o de reinterpretar los criterios clásicos en psicometría. En este sentido, pensamos que podríamos aplicar o extender el concepto de *idoneidad* y sus tipos (Godino, 2003; Godino, Cotreras y Fonts, en revisión) al caso de la evaluación, en el siguiente sentido:

- La *dificultad* de un ítem o tarea daría una medida de su *idoneidad cognitiva*; es decir del grado de representatividad de los significados evaluados respecto a los significados personales.

- La *discriminación* de un ítem valoraría su *idoneidad evaluadora*, un item puede ser adecuado cognitivamente, pero no diferenciar (por ser demasiado fácil) los alumnos que tienen un mayor o menor conocimiento del concepto. Esta idoneidad podría ser un componente de la idoneidad *instruccional*, en cuanto uno de los objetivos de la instrucción es la función evaluadora.
- La *validez de contenido* de un cuestionario indicaría una idoneidad *epistémica*, o grado de representatividad del instrumento en cuanto al significado objeto de evaluación.
- La *fiabilidad* o *generalizabilidad a otros ítems* daría una medida de la estabilidad de la respuesta, es decir sería otro componente de la *idoneidad evaluadora*
- La *validez externa* y *generalizabilidad a otros estudiantes,* sugeriría una *idoneidad generalizadora o externa* en cuanto los resultados se generalizarían a otros estudiantes.

Como conclusión señalamos que el marco teórico nos ha permitido analizar y reflexionar sobre un proceso de investigación – incluso realizado desde una perspectiva muy diferente como es la psicométrica- y reinterpretar desde nuestra perspectiva algunas de sus prácticas y conceptos. El enfoque de la TSF a priori no presupone una metodología única de investigación, sino que puede beneficiarse de múltiples perspectivas a las que a su vez puede enriquecer introduciendo algunos de sus conceptos.

Reconocimientos:

Este trabajo es parte del Proyecto SEJ2004-00789 y Beca FPU: AP2003-5130.

REFERENCIAS

Bar – Hillel, M. (1987). The base rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty.* (pp 39 – 61) Amsterdam: North Holland.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 151– 169.

Bernard, J. M. (1998). Bayesian inference for categorised data. En H. Rouanet et al. (Eds.), *New ways in statistical methodology* (pp. 159 – 226). Berna: Peter Lang.

Carmines, E. G. y Zeller, R. A. (1979). *Reliability and validity assesment.* Sage University Paper.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar.* Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Díaz, C., de la Fuente, I, y Martínez Arias, R. (En prensa). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon.*

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H.J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin.* 99, 3 –19.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. En R. Linn (Ed.), *Educational measurement* (pp. 105-146). Nueva York: McMillan.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle lingüistic factors. *Psychological Research,* 50, 123-129.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 49-95.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1991). *Les enquêtes sociologiques. Théories et practique.* París: Armand Colin.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. (Ponencia invitada). En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 196-212). Universidad de Valladolid.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22, 2/3, 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M, Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V,V, Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). New York: LEGAS.

Godino, J. D., Contreras, A. y Fonts, V. (En revisión). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didáctique des Mathematiques.*

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics* 8, 96-100.

Lecoutre, B. (1996). *Traitement statistique des données experimentales.* París: CISIA.

León, O. G. y Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación.* Madrid: McGraw-Hill.

Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Martínez Arias, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos.* Madrid: Síntesis.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 283-301.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didacique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes.* Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

Millman, J. y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335 – 366). London*:* Macmillan.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* 5, 37-55.

Osterlind, S. J. (1989). *Constructing test items.* Boston: Kluwer.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes.* 40, 255 – 269.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Serrano Angulo. J. (2003). *Iniciación a la estadística bayesiana.* Madrid: La Muralla.

Teigen, K. H., Brun, W. y Frydenlund, R. (1999). Judgments of risk and probability: the role of frequentistic information. *Journal of Behavioral Decision Making*, *12(2),* 123.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada.* Mexico: Limusa.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis.* Londres: Sage.

LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS[2]

Ángel Contreras de la Fuente,
Universidad de Jaén

RESUMEN

Existen numerosos trabajos de investigación que desarrollan una problemática ligada a la noción de signo. Desde la perspectiva vygotskiana hasta la TFS, aparecen diversas interpretaciones que, teniendo algunos puntos de confluencia, presentan aspectos diferentes que condicionan los procesos de investigación ligados a los mismos, aunque en la TFS aparecen una ontología de objetos matemáticos y unos elementos del significado que permiten hacer operativa, sin las ambigüedades frecuentes en estos tipos de enfoques semióticos, la noción de signo y sus ideas asociadas. Pensamos que la operatividad del signo en de cada enfoque teórico nos informa acerca de la mayor o menor pertinencia de su posterior aplicación a la educación matemática. En este trabajo nos proponemos analizar algunos trabajos recientes y relevantes sobre el concepto de signo matemático, tratando de mostrar las posibles aproximaciones entre dichos enfoques, así como los planteamientos unificadores, de complementación y de ampliación que pueden darse a través de la TFS.

SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS AND THE THEORY OF SEMIOTIC FUNCTIONS

ABSTRACT

Many research works develop a problematic linked to the sign notion. From a Vygoskian perspective to the SFT, different interpretations appear which, having common confluence points, present various aspects conditioning the related research processes. However, the FST mathematical objects ontology serves to make operational the notion of sign and associated ideas, without the ambiguities that are frequent in other semiotic approaches. We think it is the operativity of sign in each theoretical approach what informs us about the greater or smaller pertinence in later applications to mathematics education. In this work we analyse some recent and relevant works on the concept of mathematical sign, and show possible approximations among the said approaches. We also show the unifying, complementary and widening approach that SFT makes possible.

[2] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 32-57)

1. INTRODUCCIÓN

Las teorías de Didáctica de las Matemáticas relacionadas con el signo matemático representan hoy un cuerpo de conocimientos de importancia creciente, como así lo demuestran algunos trabajos recientes en revistas relevantes de nuestro campo de conocimiento de la educación matemática, como poe ejemplo –por citar los más recientes– los de Godino y Batanero (1994), Radford (1999), Duval (2000), Hung (2001), Roth y Bowen (2001), Font (2001), Godino (2002), Sáenz-Ludlow (2003), Roth (2004), Berger (2004), Contreras, Luque y Ordóñez (2004), Godino, Batanero y Roa (2004, en prensa), Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2004, en revisión) y Godino, Contreras y Font (2004, en revisión).

Desde las diversas teorizaciones que presentan estos trabajos, el signo constituye, de una forma u otra, el objeto central de estudio. Sin embargo, habiendo diferencias entre los diversos constructos utilizados para la conceptualización del signo, también es cierto que existen aproximaciones entre ellos que vemos necesario destacar, sobre todo porque consideramos que estos enfoques sobre la Educación Matemática, que pueden denominarse semióticos, desarrollados desde perspectivas vygotskianas, culturales, post-vygotskianas,…entran en la problematización de la enseñanza de los objetos matemáticos, analizando fenómenos propios del aula cuya explicación se busca, fundamentalmente, en el uso que se le otorga al signo.

En este trabajo nos proponemos mostrar una evolución del signo, según la perspectiva de distintos autores relevantes en este campo, sin pretender ser exhaustivos y utilizando una bibliografía reciente y relevante –tal como lo muestran las importancia de las revistas elegidas para la fundamentación de la ponencia–, en cuanto a la operatividad del mismo, demostrando que la TFS dispone de unas entidades ontológicas que facilitan los análisis y los desarrollos teóricos en el campo de la semiótica y la ontología en Educación Matemática.

2. LOS SIGNOS SEGÚN DIVERSAS TEORIZACIONES

Radford (1999), al estudiar las relaciones entre cultura y mente, discute las leyes genéticas del desarrollo cultural de Vygotsky como la respuesta que éste da a la cuestión sobre los enlaces entre cultura y sociedad en la constitución de la mente, elaborando el bagaje semiótico del individuo en términos de internalización, a través de los signos, de las actividades que el sujeto efectúa en el plano externo.

En el contexto de los sistemas de significaciones sociales, Radford define la noción de sistemas semióticos culturales (CSS), como *sistemas compuestos por creencias, las cuales generan modelos de construcción de significados a través de actividades y del uso del signo, estructuradas según el modo concreto de existencia de los individuos. (pp. 23-24).*

Todas esas relaciones pueden comprenderse mejor en el gráfico que muestra la figura 1.

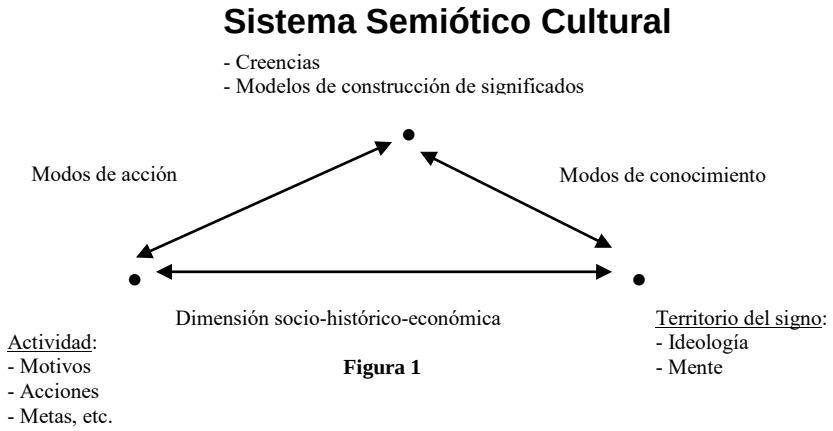


Figura 1

Una de las características del CSS reside en las relaciones que guarda, por una parte, con las ideologías (y el territorio del signo en general) y, por otra, con las actividades individuales. Mientras que con las primeras la relación se establece por medio de los modos de conocimiento (o bien epistemes) entre un grupo cultural y el contenido verdadero de la ideologías, en las segundas la relación se da según los modos de acción en los que las actividades están incluidas.

La naturaleza dialéctica de las relaciones de los enlaces CSS, actividad y uso del signo, mostrados en la figura 1, nos permite el dual del primer gráfico que se muestra en la figura 2. (p. 24).

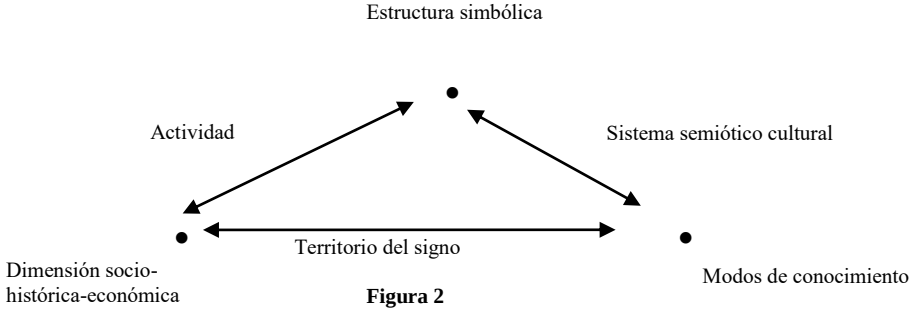


Figura 2

El gráfico dual muestra que tanto el CSS como el territorio del signo y la actividad no son sólo meros puntos terminales de un proceso dinámico, sino que llegan a ser agentes de un proceso completo. Por supuesto, el CSS llega a ser el enlace entre la estructura simbólica y los modos de conocimiento. En términos de desarrollo, los gráficos primero y el dual son siempre alternativos.

Es decir, Radford, por medio del concepto de CSS, intenta dar, desde una aproximación post-vigotskiana, respuesta al problema de la formación social de la mente, mostrando cómo el problema de la internalización, en un sentido vigotskiano, no es un mero mimetismo transferencial de una actividad externa a un plano interno pre-existente, sino que en dicha internalización el signo es el verdadero mediador. Respecto a la TFS, observamos que, al no hacer objetivas unas entidades ontológicas de la actividad matemática manejables, los resultados suelen ser poco explicativos.

Berger (2004) –apoyado en el papel que juega la palabra en la formación de conceptos en el niño, según la teoría de Vygotsky– afirma que los estudiantes aprenden a utilizar el signo matemático para comunicarse y como objeto por medio del cual organiza sus ideas matemáticas, incluso antes de comprender totalmente el significado del signo. A esta utilización se denominada *uso funcional del signo*.

La tesis que formula este investigador es la siguiente: *el uso funcional del signo matemático en un contexto social, permite la construcción de significado personal, el cual es también congruente con el significado cultural del signo. (p. 84).*

Respecto a lo que es el signo, el autor señala: *En el contexto de la Educación Matemática, un signo puede ser un símbolo matemático, una sentencia matemática, una expresión matemática, el nombre de un objeto matemático, y así sucesivamente. En línea con Vygotsky y tal como lo expresa Radford (2000, p. 241), yo veo el signo como dotado de una doble vida. Por una parte, los signos funcionan como instrumentos que permiten al individuo comprometerse en la praxis cognitiva; por otra, son parte de aquellos sistemas que trascienden al individuo y a través de los cuales la realidad social es objetivada. (p. 83).*

La praxis cognitiva ha de entenderse como aquella que toma forma de actividades tales como la imitación, la asociación, la manipulación y la reflexión de los signos por el individuo.

Un signo tiene un significado cultural cuando es congruente con el uso que le da la comunidad matemática. Así por ejemplo, la sentencia matemática:

$d/dx\ x^3=3x^2$, es culturalmente significativo, aunque quizás sentencias como "x^2+1 es verdadero" o "$\int_0^2 f(x)dx = \lim_{2\to\infty} \int_0^2 f(x)dx$", no sean significativas culturalmente.

El término significado personal se refiere al estado en el que un estudiante cree/siente/piensa (tácita o explícitamente) que ha entendido el significado cultural de un objeto. En este contexto, una concepción errónea, por ejemplo, puede ser personalmente significativa aunque su uso no sea culturalmente significativo. Contrariamente, una persona puede no encontrar significativo la definición de un objeto matemático específico, incluso aunque sea culturalmente significativo.

Es decir, Berger interpreta el signo bajo una perspectiva de uso funcional, como organizador de las ideas matemáticas del sujeto. Utiliza los constructos de significado personal y significado cultural, aunque desde una perspectiva cognitiva, coincidentes en la denominación con los de la TFS, aunque con una mayor aportación de éste último enfoque ya que en él se operativiza, de modo pragmático, estas nociones a través de los sistemas de prácticas.

Sáenz-Ludlow (2003), analiza la contribución de Peirce a la semiótica, el cual no conceptualizó el signo como díada en la forma objeto-representación (significado-significante) sino como una tríada en la forma de objeto-representante-interpretante. Es decir, considera el signo como un proceso general de representación en el que el objeto, el representante, y el interpretante del signo juegan un importante papel. *Los signos, en el sentido más amplio, son entidades que sirven de vehículos para poner en funcionamiento el pensamiento original y convencional y facilitar su expresión y personificación.* (p. 182).

A la idea mental u objeto físico que representa el signo, Peirce lo denomina objeto del signo; el interpretante del signo es la idea producida en la mente del interpretador; y el representante de un signo el vehículo mental o material utilizado para representar el objeto (ver figura 3).

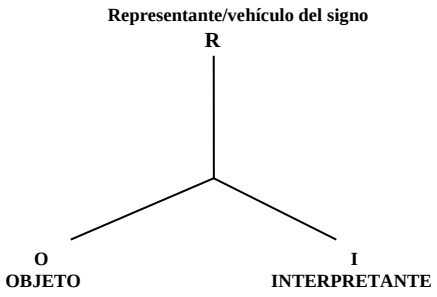


Fig. 3. El signo triádico de Peirce

Un interpretante no debe confundirse con el interpretador. El interpretante no es algún resultado o producto generado por el signo, lo que resulta del signo; sino que personifica la actividad cognitiva del interpretador. Es decir, un signo dirige a alguien, esto es, crea en la mente de la persona un equivalente del signo, o quizás un mayor desarrollo del signo.

La semiosis es, un proceso triádico en el cual un objeto genera un representante, el representante genera un interpretante, y análogamente éste genera un nuevo representante que representa un objeto modificado que determina un interpretante más sofisticado, y así la espiral de signos continua. Por tanto, la semiosis es un proceso indefinido en el cual se generan potencialmente una serie de interpretantes, representantes y objetos.

El concepto de semiosis adquiere un papel operativo en este investigador. El signo tiene una naturaleza triádica inherente a las relaciones diádicas entre esos tres elementos. Tienen relaciones entre objeto y representante; representante e interpretante; y objeto e interpretante. Sin embargo, la naturaleza triádica del signo no puede resolver esas tres relaciones diádicas separadas ya que cuando la relación diádica entre objeto y representante se enfoca, las otras dos relaciones diádicas están también implicadas de una manera sinergética incluso si ellos no llegan a la mente del interpretador de una vez. Peirce llama a esta semiosis, semiosis de relación trirelativa.

En el trabajo de Sáenz-Ludlow (2003), se citan otras interpretaciones del signo, como es el caso de Parmentier (1985) quien considera la dinámica del signo en términos de vectores de determinación y representación (ver Fig. 4). En esta figura, los vectores de dirección opuesta simbolizan la dialéctica entre determinación y representación. El vector de determinación entre O y I es la suma de los vectores de determinación entre O y R, y R y I; y el vector de representación entre I y O es la suma de los vectores de representación entre I y R, y R y O.

El enlace entre los vectores de representación y determinación implica que los tres elementos de la relación del signo no son nunca permanentemente objeto, representante e interpretante, sino que cada uno cambia su papel cuando se realizan futuras determinaciones y representaciones.

De aquí que, cuando uno se centra en uno de los elementos del signo, los otros dos están simultáneamente presentes y sinergéticamente activos. Es decir, en la semiosis, objeto, representante e interpretante no son nunca entidades estáticas y aisladas, por el contrario, están cambiando como

entidades interrelacionadas que llegan a existir como resultado de los procesos de interpretación y representación de los intérpretes.

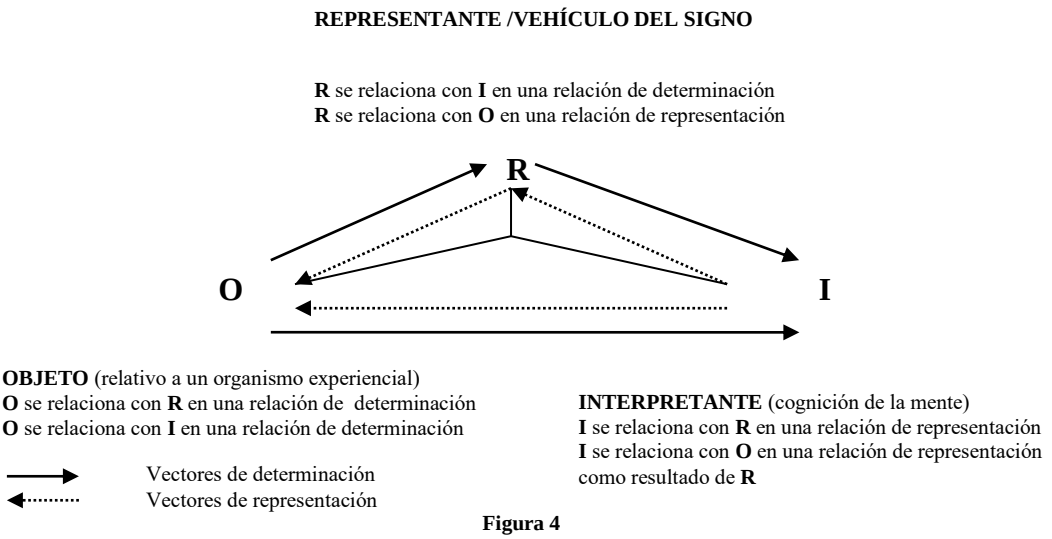


Figura 4

Una vez el objeto inicial determina un representante y un interpretante, el interpretante determina un nuevo representante el cual representa un nuevo objeto que determina un nuevo y más sofisticado interpretante. Cada nuevo interpretante representa un significado más sofisticado y mucho más determinado. La secuencia de tríadas, a saber, objeto – representante - interpretante (O_1,R_1,I_1), representante – objeto - interpretante- (R_2,O_2,I_2), y así sucesivamente, constituye la fuerza de la semiosis. El poder del interpretante para crear un objeto más descontextualizado es lo que Peirce denomina “abstracción hipostática”.

Así, la tríada del signo de Peirce es un movimiento perceptual dinámico y virtual que incluye procesos abiertos de representación y determinación de los que las cadenas de significación emerge. En este proceso, el signo llega a transformarse en pensamiento cuando tiende a desvanecerse haciéndose totalmente transparente a las relaciones de determinación y representación mediadas por él.

Es decir, por parte del interpretador se manifiestan cadenas de significación en la continuidad de los procesos de determinación y representación. Cuando esos procesos del interpretador se comparten con los miembros de un grupo, llegan a contribuir a los procesos de determinación y representación de otros individuos y del grupo como colectividad.

Parmentier interpreta el signo según la tripleta de Peirce –objeto, representante, interpretante–, aunque utilizando el concepto de semiosis en

el que la representación y la determinación le dan un carácter sinergético en un verdadero proceso de semiosis ilimitada.
Sin embargo, con respecto a la TFS consideramos que el constructo función semiótica de ésta, por una parte, le confiere un carácter mucho más pormenorizado al análisis de la actividad matemática y, por otra, permite dar una visión más amplia al carácter relacional de los objetos matemáticos, al abrir la posibilidad de establecer funciones semióticas entre los objetos correspondientes a la ontología que describe.

3. EL SIGNO Y LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Con el objetivo de poder comparar, en algunos aspectos, la teoría de registros con la TFS, se describe a continuación una síntesis de la primera para poder introducir al lector en la misma.
Duval (1996) se sitúa en una aproximación cognitiva del conocimiento y del pensamiento y señala tres características de esa aproximación en contraste con la aproximación epistemológica:
- El conocimiento se estudia en tanto que es la actividad de un ser individual que depende de sus capacidades de memoria y de simbolización, así como de la organización de su sustrato orgánico o psíquico.
- El conocimiento es una actividad que puede tomar formas específicas (representación, razonamiento, anticipación,...) y que se efectúa de manera interna (percepción, imagen mental, creencias, discursos interiores, representaciones que permiten la compilación...) o de manera externa (discursos, grafismos, indicaciones, ...), estos modos de producción pueden conmutarse o pueden interaccionar entre ellos.
- Estas formas específicas de actividad se consideran complejas en tanto que resultan de la coordinación de varios sistemas de operaciones que pueden trabajar de forma independiente.
Duval se separa de la aproximación epistemológica cuando señala: "La aproximación cognitiva se interesa por el funcionamiento del conocimiento bajo el ángulo de los mecanismos y de los procesos que la autorizan como actividad de un ser individual. Es evidentemente un punto de vista diferente de la aproximación epistemológica, la cual considera los conocimientos relativamente a un dominio particular de objetos, a su desarrollo histórico y a los procedimientos de su validación. Pero en relación a esta última, la aproximación cognitiva vuelve a plantearse esta cuestión: *¿qué tipo de funcionamiento pone en práctica los procedimientos y conocimientos específicos de la disciplina científica implicada?*" (p.).

Cuando se considera la adquisición y utilización de los conocimientos matemáticos por los estudiantes, la aproximación cognitiva presenta dos particularidades:

- Es una aproximación diferencial, y no general, del funcionamiento cognitivo, al considerar el funcionamiento cognitivo de la práctica matemática, lo que tiene de específico, diferenciando con otros dominios de conocimiento.
- Es una aproximación que se toma en relación al sujeto individual, y no en relación a un sistema (ya sea el del cerebro o el de una organización institucional). Estudiar el funcionamiento cognitivo en relación al sujeto individual consiste en considerar la consciencia como un nivel de funcionamiento cognitivo específico e irreductible, y en extraer los modos de funcionamiento propios.

Estas dos particularidades conducen a preguntarse:

- ¿Cuáles son las operaciones que se requieren para que un sujeto sea consciente de la validez de un razonamiento producido por él o por otro y por qué percibe la naturaleza del resultado de un conocimiento válido? Estas operaciones no pueden reducirse a la aplicación de reglas de inferencia o de esquemas lógicos.
- ¿Cuáles son las operaciones que se requieren para que un sujeto pueda "ver" en una figura la representación de objetos o de situaciones matemáticas, y para que esta figura pueda funcionar para él, y por tanto sin ninguna sugestión exterior, como una ayuda heurística? Estas operaciones no pueden reducirse ni a los mecanismos o actividades perceptivas ni a los discursos matemáticos que se reducen habitualmente al funcionamiento de una figura en un procedimiento geométrico.
- ¿Cuáles son las operaciones que se requieren para que un sujeto pueda extraer del enunciado de un problema, sea cual sea su formulación, las informaciones pertinentes y organizarlas para efectuar un tratamiento matemático? Estas operaciones no pueden reducirse al conocimiento de los tratamientos matemáticos a efectuar ni a la familiaridad de las situaciones extra-matemáticas evocadas en el enunciado del problema.

3.1. Tipos de representaciones y registros

Duval (2000 y 1995) sostiene que no hay conocimiento sin representación, distinguiendo tres tipos de representaciones: *computacionales*, que son internas, no conscientes y, por tanto, no objetivables, nos indican cómo codifica un sujeto la información que recibe; *mentales*, como evocación de objetos ausentes, conscientes e internas, aunque objetivables; *semióticas*, relativas a un sistema particular de signos y se caracterizan por poder

convertirse en otras representaciones semióticas equivalentes por medio de la conversión, son conscientes y externas.
Respecto la complejo problema de la posible correspondencia entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas, rechaza la correspondencia directa entre ambas, admitiendo una interacción entre las mismas. Es decir, no admite que las representaciones semióticas sean un soporte para las mentales, ya que supondría separar el contenido de la forma, esto es, no admite que haya noesis sin semiosis.
Duval (2000), señala que en toda representación hay que tener en cuenta los aspectos siguientes:

- (a) *El sistema por el cual se produce la representación*, que puede ser un mecanismo físico tal como una máquina, o una organización cerebral en cuanto a la memoria de imágenes visuales, o incluso sistemas semióticos tales como los diversos lenguajes. Ahora bien, el contenido de la representación de un objeto cambia según el sistema de representación usado, lo cual supone que dicho contenido depende de un sistema productivo y no sólo del objeto representado. Así por ejemplo, el contenido de la descripción verbal de una persona para su reconocimiento, no es el mismo según la descripción que se haga de su retrato; así como el contenido de la gráfica de una función no es el mismo que el contenido de su expresión analítica.
Duval postula que el pensamiento humano exige la movilización de muchos sistemas productivos heterogéneos de representación y su coordinación, y pregunta: ¿los procesos de pensamiento exigen de modo especial que los sistemas semióticos sean los principales componentes de la arquitectura cognitiva, la cual permite al individuo entender las Matemáticas? Además, ¿qué es crucial para aprender en Educación Matemática: a_1) tener en cuenta el estado global, espontáneo e individual de las creencias sobre un tema, o, a_2) hacer que los estudiantes sean conscientes de las normas de funcionamiento de los sistemas semióticos productivos que se usan en Matemáticas?

- (b) *La relación entre representación y objeto representado*. Hay dos clases de sistemas productivos de representación: por una parte los mecanismos físicos y organizaciones neuronales, y, por otra, los sistemas semióticos. En el primer caso (b_1) (imágenes físicas y mentales), la relación se basa en la acción de un objeto sobre el sistema (causalidad), y en el segundo (b_2) la relación es solamente denotativa. Además, cuando en Educación Matemática se habla de "imágenes mentales", ¿a qué tipo de relación nos estamos refiriendo?

- (c) *La posibilidad de un acceso al objeto representado,* por medio de representaciones: (c_1) que son como una evocación de aquello que ya ha sido percibido o podría serlo, o, (c_2) acerca de objetos (objetos matemáticos) que no pueden ser percibidos.

- (d) *La razón que hace necesaria la representación utilizada es*: (d_1) principalmente por la comunicación, o, (d_2) por el tratamiento (cálculo o desarrollo discursivo, por ejemplo).

Todo sistema semiótico que permite responder a las tres funciones cognitivas –comunicación o trasmisión, tratamiento y objetivación– constituye un registro de representación. Es decir, un registro se determina en relación a un sistema semiótico que ha de cumplir las tres funciones cognitivas de comunicación, tratamiento y objetivación.

3.2. El signo según la teoría de registros

Muchos de los estudios sobre errores de los estudiantes al hacer matemáticas explican éstos mediante el par (a_1, c_1). Es decir, se analizan como si fueran obstáculos encontrados en el aprendizaje. De esta forma, en la conceptualización triádica de Peirce acerca del signo (Objeto, representante, interpretante), el interpretante se destaca de tal forma que las representaciones son principalmente fenómenos mentales y creencias individuales.

Ahora bien, el progreso en matemáticas ha implicado el desarrollo de muchos sistemas semióticos, de tal modo que cada nuevo sistema semiótico aporta nuevos significados de representación y procesos para el pensamiento matemático. Es decir, desde la dualidad primitiva de modos cognitivos, imagen y lenguaje, los cuales se han unido con la mayoría de receptores sensoriales de la información: vista y oído, ha habido una evolución de los sistemas de representación. Así por ejemplo, primeramente fue la visualización, luego la construcción de figuras planas con instrumentos, después la de las figuras en perspectiva, luego la de las gráficas para "trasladar" curvas a ecuaciones.

Para cualquier objeto matemático podemos tener representaciones diferentes producidas por diferentes sistemas semióticos (a_2, c_2). Por tanto, debemos cambiar la conceptualización triádica de Peirce de la siguiente forma: (Objeto, uno de los variados sistemas semióticos, composición de los mismos).

Pero esa diversidad de sistemas semióticos origina necesariamente problemas importantes de coordinación, tal y como puede observarse en la figura 5.

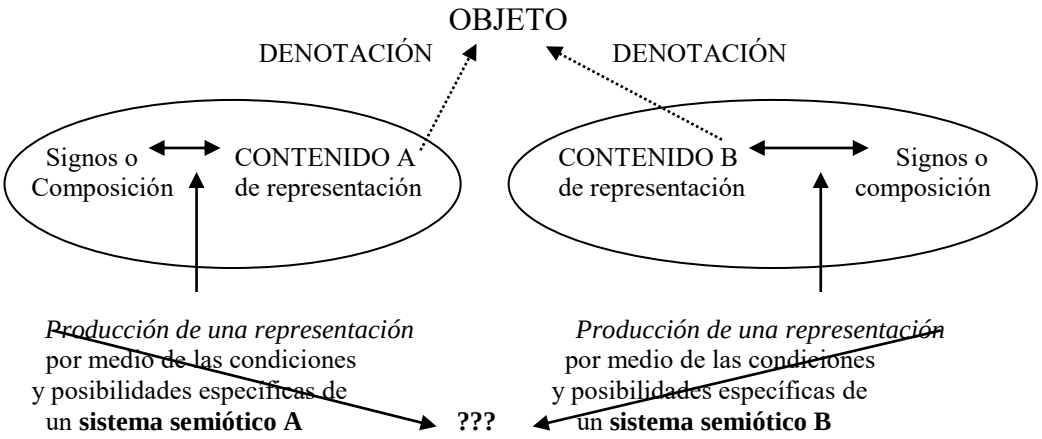


Figura 5. Representación y comprensión para el conocimiento matemático

Duval afirma que es desde esta perspectiva cómo aparecen las causas profundas de los errores, ya que siempre que un sistema semiótico se cambia, el contenido de la representación cambia, mientras que el objeto indicado permanece igual. Pero, a veces los objetos matemáticos no pueden ser identificados con cualquiera de sus representaciones, como ocurre en muchos estudiantes los cuales no pueden discriminar el contenido de la representación y el objeto representado, esto es, para estos sujetos los objetos cambian cuando se cambia la representación.

En estas condiciones, ¿cómo puede un estudiante *aprender a distinguir* un objeto matemático de una representación semiótica particular? Y por tanto, ¿cómo puede un estudiante *aprender a reconocer* un objeto matemático a través de sus posibles representaciones diferentes? En todos los niveles, entre muchos estudiantes, la incapacidad para convertir una representación de un sistema semiótico en una representación del mismo objeto por otro sistema, puede ser observada como si ambas representaciones se refirieran a dos objetos diferentes. En esta incapacidad subyacen las dificultades de trasferencia de conocimiento y también las dificultades para traducir declaraciones verbales de cualquier problema a datos relevantes numéricos o simbólicos para la resolución matemática.

3.3. La problemática de la conversión

La conversión es la transformación de la representación de un objeto por cambio de registro. Se pueden observar dos hechos importantes en todos los niveles:

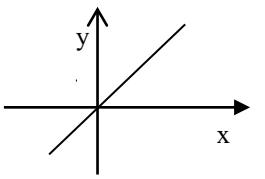
En algunos casos la conversión es obvia e inmediata como si la representación del registro inicial fuera transparente a la representación del registro final. En otras palabras, la conversión se puede ver como un traslado fácil de unidad significante a unidad significante. La conversión es congruente (hay concordancia lógica entre unidades significantes):

Un conjunto de puntos cuya ordenada es mayor que la abscisa
$y > x$

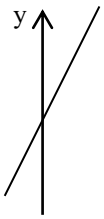
En otros casos, es justo lo contrario. La conversión es no-congruente:

Un conjunto de puntos cuya ordenada y abscisa tienen el mismo signo $x.y > 0$

La no congruencia es un fenómeno crucial para cualquier tarea de conversión. Las dificultades y los obstáculos mentales contienen, a menudo, la incapacidad para facilitar una conversión, o para reconocerla cuando se ha hecho. Pero, lo que es más sorprendente, con respecto a este fenómeno crucial para entender las matemáticas, es su carácter unidireccional. Una conversión puede ser congruente en un camino y no-congruente en el camino contrario. La congruencia o no congruencia están conectadas muy de cerca con la dirección de la conversión. Lo que conduce a sorprendentes, típica y particularmente, contrastes de comportamientos, tal como los de la figura 6 siguiente:



y=x 60% de los estudiantes de 15-16 años
(después de la enseñanza de funciones lineales)



reconocimiento

y=2x 25%

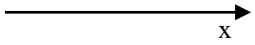


Figura 6

Obviamente, en la dirección contraria, la conversión es muy fácil y no hay más diferencias en cuanto a las ecuaciones.

A niveles más elevados encuentran resultados análogos, como se muestra en la figura 7, en la que se observan los cambios entre los registros tabular y gráfico.

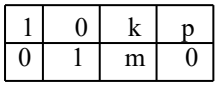
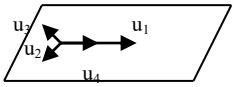
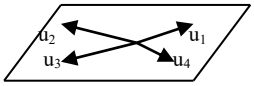
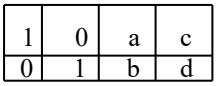
	Registro inicial	Registro final	144 estudiantes
(2D Rep) T → G			.83
G → T			.34

Figura 7. Tarea elemental de conversión (Pavlopoulou 1993, p.84, en Duval, 2000)

Duval señala que pueden efectuarse muchos análisis exactos del carácter congruente o no congruente de la conversión de una representación a otra, los cuales pueden explicar de modo bastante aproximado muchos de los errores, fracasos u obstáculos mentales.

La aparente carencia de correspondencia entre dos contenidos de representaciones del mismo objeto se deriva del hecho de que el contenido de representación no depende del objeto representado sino del sistema de producción activado. Lo que significa no sólo que cada registro facilita algunas posibilidades específicas de procedimiento, sino también que no hace explícitas las mismas propiedades de los objetos como de los otros registros.

Ahora bien, puesto que no hay acceso directo a los objetos aparte de sus representaciones, ¿cómo puede un estudiante aprender a reconocer un objeto matemático a través de sus variadas representaciones posibles cuando sus contenidos son tan diferentes? De hecho, la explicación debe ser buscada a un nivel más profundo.

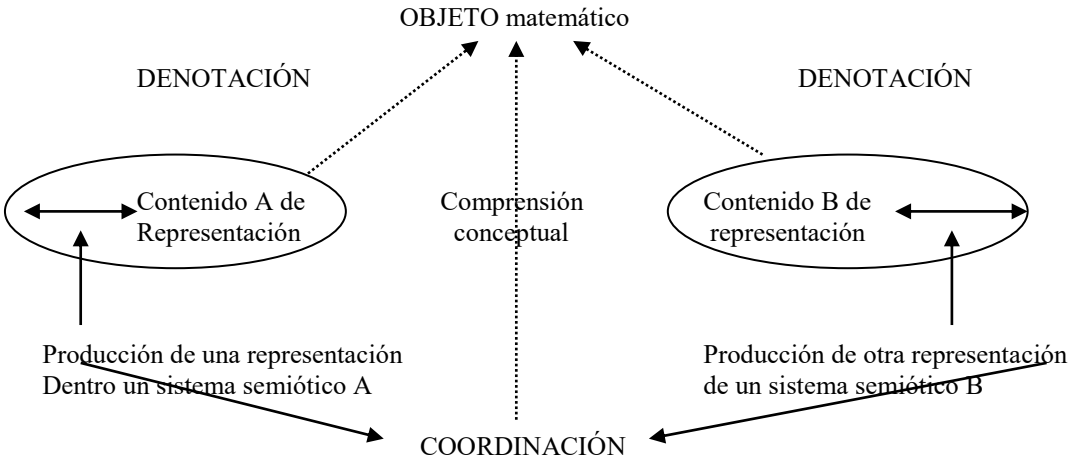


Figura 8. Condiciones cognitivas de la comprensión matemática (ver la figura 5 anterior)

Los fracasos o incluso los obstáculos mentales, cuando la conversión no es congruente revelan una carencia de coordinación entre los registros, aquello que los pone en juego de modo conjunto. Si se observa la figura 8, vemos como la comprensión conceptual es posible cuando tal coordinación se lleva a cabo.

Para la mayoría de los estudiantes, la comprensión en matemáticas se "limita a algunos procesos dentro de registros fuertemente "compartimentalizados"". Aprender matemáticas consiste en el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación.

Por otra parte, dado que la comprensión de las matemáticas requiere una organización compleja que incluye diversos registros y su movilización, el aprendizaje de las matemáticas significa: integrar en su propia arquitectura cognitiva todos los registros necesarios como nuevos sistemas de representación. Es decir, para Duval el aprendizaje de las Matemáticas no consiste, en principio, en una simple construcción aislada de conceptos por los estudiantes, sino en la construcción de la arquitectura cognitiva de un dominio epistemológico.

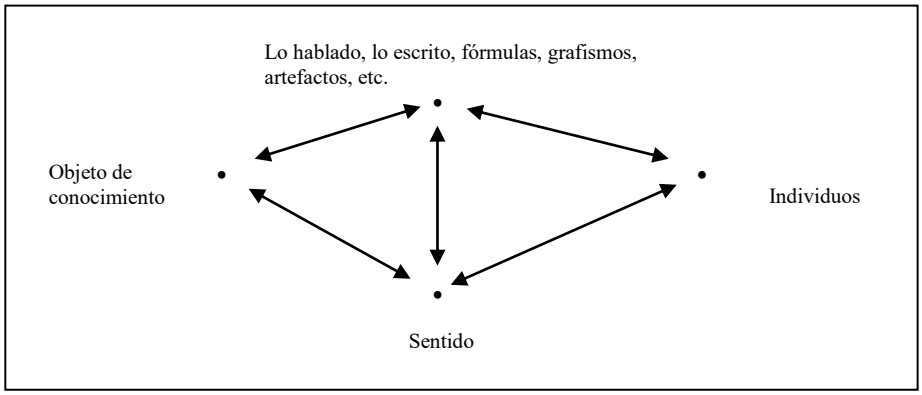
3.4. Crítica a la teoría de registros

Como ha podido observarse, Duval concede a la conversión entre representaciones uno de los papeles básicos en cuanto a la construcción de los procesos de pensamiento matemático: "Por medio de la conversión vamos hacia el "núcleo" del aprendizaje de los problemas matemáticos" (Duval, 2000, p. 67).

Como se señala en Contreras, Luque y Ordóñez (2004), algunos estudios (Radford, 2000 y 2002a) muestran que, salvo en el caso de expertos, en los estudiantes no se da la conversión entendida como comercio entre dos registros, esto es, como paso de un registro semiótico a otro, sino una coordinación de dos o más registros en los que en lugar de conversión más bien hay una intensificación de uno o dos de ellos, quedando los demás activos aunque funcionado con menos intensidad. En segundo lugar, de dichos trabajos puede desprenderse también que lo anterior ocurre porque, en la teoría de los registros de representación semiótica, el registro no tematiza la noción semiótica de sentido. Es decir, se puede hablar de sentido de los signos de un registro determinado y de los sentidos de los signos en otro registro, pero no parece poder hablarse de transformación de los sentidos.

Este cuestionamiento teórico de la conversión conduce a plantearse un interrogante al que hay que dar respuesta: si, por una parte, la realidad del aula nos dice que la coordinación entre conversiones no consiste en transformaciones de tipo lineal de unos registros en otros, y que, en lugar de ésta, se dan usos intensificados de ciertos registros; y si, por otra, las transformaciones entre registros son conflictivas debido al problema de la conservación del sentido, ¿qué podemos decir, entonces, respecto a los cambios entre registros en cuanto al cambio de sentido? Es decir, ¿cómo transformar el sentido entre los registros de representación?

Para poder dar respuesta a la cuestión planteada con el sentido, se define la objetivación como la toma de conciencia de la transformación de un objeto matemático, que está siendo tratado como herramienta en una determinada actividad, en objeto de conocimiento, lo cual, en Matemáticas, se produce mediante la actividad semiótica del sujeto. Un esquema clarificador, propuesto por Radford (2002), es el siguiente:



Esto supone dar al sentido un estatus de mediador, entre el objeto y el conocimiento subjetivo, que se materializa mediante lo hablado, lo escrito, las fórmulas, los grafismos, los artefactos,... Es decir, unas formas culturales de significación.

4. EL SIGNO EN LA TFS

Dada la importancia del signo en los diversos trabajos estudiados, cuya interpretación condiciona los planteamientos didácticos que realizan los investigadores, nos preguntamos, primeramente, por la interpretación del signo que realiza la TFS y, en segundo lugar, qué analogías pueden tener los distintos posicionamientos respecto del mismo.

En la TFS el signo se interpreta como función semiótica con lo que su sentido adquiere una dimensión mucho más amplia que en la teoría de registros. Dado que el objeto matemático puede hacer el papel de referente –paralelogramo es el "cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos e iguales" (es el representante)– o de representante –el paralelogramo como ejemplo de cuadrilátero (es el referente u objeto)–, en la TFS se distingue expresión y contenido y, de esta forma, se facilita que un mismo objeto pueda jugar un papel u otro, sin necesidad de tener que establecer una definición cerrada en la que el objeto tiene un papel estático. Podemos observar el papel relevante que juega el interpretante, tal y como ocurría en los planteamientos de Sáenz-Ludlow y Parmentier.

Lo que añade la TFS, respecto de la interpretación de Sáenz-Ludlow y Parmentier, es el análisis pormenorizado de la actividad matemática, puesto que al considerarse seis entidades primarias –lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones– y las facetas duales asociadas al juego de lenguaje en el que aquéllas participan –personal-institucional; ostensiva-no ostensiva; intensiva-extensiva; elemental-sistémica; expresión contenido–, hace verdaderamente operativo y generalizable el concepto de signo.

Además, la definición de signo de Duval, centrada como se ha podido observar, en los distintos sistemas de representación semiótica, restringe el interpretante a la composición de sistemas de representación diferentes, tal y como se observa en la figura 5. Sin embargo, hay casos en que los representantes están en el mismo registro y entonces se darán tratamientos y no conversiones. Un ejemplo aclaratorio es el siguiente: al decir "un paralelogramo es un cuadrilátero con dos lados opuestos paralelos iguales", el referente (contenido) es el paralelogramo y el representante (expresión) es la propiedad que se enuncia, la cual pertenece al registro discursivo geométrico. Al decir ahora, "un paralelogramo es un cuadrilátero cuyas

diagonales se cortan en sus puntos medios", el referente es el mismo y, sin embargo, el representante es otra propiedad, la cual también pertenece al registro discursivo geométrico.
Por otra parte, los cambios de sentido constituyen un problema sin solución en la teoría de registros tal y como se ha observado anteriormente. En la TFS al considerar el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas que puede realizar una persona. o una institución, para resolver el campo de problemas del cuál ha emergido el objeto matemático, y estar dichas prácticas constituidas por las seis entidades primarias conocidas, el sentido es operativo y deja de estar indefinido.

4.1. Interpretación de las no congruencias

Cuando se aplica la noción de no congruencia en la teoría de registros, se intenta dar explicación a los errores en las respuestas de los estudiantes ante cuestiones matemáticas que se le plantean. Los criterios de no congruencia están relacionados con la correspondencia de unidades significantes, la univocidad semántica terminal y el orden de correspondencia de dichas unidades significantes. Sin embargo, en casos de congruencias entre registros también aparecen errores importantes que la teoría de registros no explica.
La TFS, en cambio, permite un análisis más fino que facilita la explicación de muchos de los errores que muestran los estudiantes en sus respuestas. Varios ejemplos pueden aclararlo.

Ejemplo 1

En el caso del ejemplo (página 6) de transformación de la propiedad *un conjunto de puntos cuya ordenada es mayor que la abscisa* en la expresión algebraica $y > x$, hay un 40% de alumnos que no contestan correctamente, lo cual puede extrañar ante una conversión que, según la teoría de registros, es congruente, pero entonces ¿cuál puede ser la explicación si aquí hay congruencia entre unidades?, ¿cómo explicar la causa profunda de sus errores?
Para que el estudiante pueda efectuar la conversión desde el registro del lenguaje natural al registro algebraico:

Un conjunto de puntos cuya ordenada es $\longrightarrow$ mayor que la abscisa $y > x$,

ha de construirse una red de funciones semióticas como la siguiente:

Una primera que tiene como expresión al concepto: conjunto de todos los puntos del plano, que tiene un carácter intensivo, al ser una clase de objetos; como contenido el sujeto aplica la propiedad "ordenada mayor que la abscisa", cuya faceta también es intensiva.
Siguiendo la semiótica connotativa de Hjelmslev (1943), una segunda función semiótica tiene como expresión la anterior función semiótica; como contenido, un conjunto finito de pares en los que la ordenada es mayor que la abscisa: (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\ldots$ (x_n,y_n), que tiene un carácter extensivo.
Una tercera función semiótica tendría de expresión la anterior; como contenido, una propiedad expresado de la forma: los (x_i,y_i) anteriores cumplen la condición $y_i>x_i$, que tiene carácter extensivo.
Por último, otra función semiótica tiene de expresión lo anterior; como contenido, la propiedad expresada de la forma: $P(x,y)$ / $y>x$, que es claramente intensional.
Esta red de funciones semióticas puede explicar por qué un 40% de estudiantes no encuentra la respuesta adecuada a la cuestión planteada. No es fácil una interpretación adecuada de los pasos a dar en este, aparentemente, fácil problema, la connotatividad que requiere y la consideración de entidades intensionales lo convierten en una actividad no trivial. Sin embargo, sí es cierto que, una vez que el estudiante conoce la respuesta, puede entenderse bien, sobre todo por la existencia de una red simple de funciones semióticas.

Ejemplo 2

En el otro caso, de transformación del *conjunto de puntos cuya ordenada y abscisa tienen el mismo signo*, en la expresión algebraica $x.y > 0$, donde hay un 75% de estudiantes que no contestan correctamente y donde se da una no congruencia, la TFS puede dar respuesta más pormenorizada que el simple hecho de la no congruencia.
Una primera función semiótica tiene como expresión al concepto: conjunto de todos los puntos del plano, el cual está dotado de un carácter intensivo al ser una clase de objetos; como contenido el sujeto aplica utiliza la propiedad "la ordenada y la abscisa tienen el mismo signo", cuya faceta también es intensiva.
Siguiendo la semiótica de Hjelmslev (1943), una segunda función semiótica tiene como expresión la anterior función semiótica; como contenido, un conjunto finito de pares en los que la ordenada tiene el mismo signo que la abscisa: (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\ldots$ (x_n,y_n), que tiene un carácter extensivo.

Una tercera función semiótica tendría de expresión la anterior; como contenido, una propiedad expresado de la forma: signo de x_i = signo de y_i, que tiene carácter extensivo.
El problema viene ahora cuando se intenta pasar del lenguaje natural al algebraico, ya que se requiere un notable esfuerzo en la elaboración de una cadena de funciones semióticas sistémica, como la siguiente:
Por una parte, las funciones semióticas f_1, de expresión signo de x_i = signo de y_i y de contenido, x>0, y, y>0; una segunda f_2, de expresión signo de x_i = signo de y_i, y de contenido, x<0, y, y<0; y, una tercera f_3, de expresión signo de x_i = signo de y_i, y de contenido, x=y=0. Por otra, la función semiótica *g*, de expresión las unión de las funciones semióticas f_1, f_2 y f_3, y de contenido, la expresión: x.y>0.
La dificultad se explica por tratarse de funciones semióticas de carácter sistémico y, por tanto, dotadas de una alta complejidad semiótica.

4.2. La definición del límite de una función

Actualmente, en el currículo del Bachillerato, la definición de límite de una función es totalmente intuitiva, habiéndose desplazado la definición formal (con ε y δ) hacia el primer curso universitario. Las razones hay que buscarlas en la especial dificultad que encierra dicha definición, aunque dependiendo del marco teórico que se utilice puede intentarse dar diferentes razones de tal dificultad. Cuando se analiza el enlace entre la definición intuitiva y la formal bajo la perspectiva de la TFS, veamos cómo la gran complejidad semiótica puede explicar la renuncia a su enseñanza en los niveles de enseñanza preuniversitarios.
Para interpretar la definición de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, en el nivel intuitivo se toman dos sucesiones, una creciente, a la izquierda de x_0, (x_i) que tiende a x_0 y, otra decreciente, a la derecha de x_0, (x_i') que también tiende a x_0, o "se acerca tanto como queramos". En estas condiciones, se han construido otras dos sucesiones f (x_i) y f (x_i') que tienden a *l*, o "se acercan tanto como queramos". El apoyo argumentativo se realiza por medio de la gráfica de la función, aunque, sin clarificar debidamente la "tendencia", o el acercamiento. Por un deslizamiento de la definición correcta –en la que primeramente se toma cualquier entorno de *l* y hay que buscar otro de x_0 cuya imagen esté dentro del primero– la definición queda en el grado de la intuición lo que conduce al estudiante a formularse muchas preguntas sin contestación (¿si observo la gráfica cuánto me permitirá ésta acercarme a x_0 y a *l*?; ¿si me acerco a x_0 por la izquierda, necesariamente me acerco a *l* por la izquierda?; ¿es que podría acercarme a x_0 y, por el contrario, f(x_i) no hacerlo a *l*?; ¿cuánto es mi *deseo* de acercarme?...).

Para poder hacer frente a este conjunto de preguntas sin respuesta lo lógico es dar un definición correcta y plantearse ahora cómo medir esa tendencia, lo cual puede realizarse fijando un ε y un δ, pero para poder efectuar dicha fijación el estudiante ha de realizar una trama de funciones semióticas como la siguiente:

g_1: como expresión la proposición "me acerco a *l* tanto como quiera" y como contenido la proposición "tomamos cualquier entorno de *l*"

g_2: como expresión f y como contenido tomamos $\forall\varepsilon>0$ (genérico) y una sucesión $f(x_i)$ / la diferencia entre los valores de ella y *l* sea $<\varepsilon$. Ahora bien, este contenido es la unión de las dos funciones semióticas siguientes:

g_3: $f(x_i)$ que tiende a *l* por la izquierda $\longrightarrow$ $l - f(x_i) < \varepsilon$,o, $f(x_i) - l < \varepsilon$

g_4: $f(x_i)$ que tiende a *l* por la derecha $\longrightarrow$ $l - f(x_i) < \varepsilon$,o, $f(x_i) - l < \varepsilon$

g_5: la expresión es la unión de los contenidos de h y de k, el contenido es: $\left|f(x_i) - l\right| < \varepsilon$.

El enlace con la variable independiente se realiza por medio de la trama siguiente:

n: como expresión la proposición "me acerco a x_0 tanto como quiera" y como contenido la proposición "podemos tomar un entorno de (x_i)"

p: como expresión n y como contenido tomamos $\exists\delta>0$ y una sucesión (x_i) / la diferencia entre los valores de ella y x_0 sea $<\delta$. Ahora bien, este contenido es la unión de las dos funciones semióticas siguientes:

q: (x_i) que tiende a x_0 por la izquierda $\longrightarrow$ $x_0 - x_i < \delta$

r: (x_i') que tiende a x_0 por la derecha $\longrightarrow$ $x_i - x_0 < \delta$

s: la expresión es la unión de los contenidos de q y de r, el contenido es: $\left|(x_i) - x_0\right| < \delta$.

Una dificultad inherente a la propia definición del límite de una función es que el desarrollo intuitivo sigue una secuencia de desarrollo inversa, en cierto modo, a la de la definición formal. Así, en el primero se parte de las sucesiones (x_i) y se llega a las sucesiones $f(x_i)$, luego lo lógico sería partir de tomar δ y luego tomar ε. Sin embargo, en el segundo, se fija ε primeramente y, en función de él, se calcula δ, ¿por qué utilizar el recíproco?

Esta dificultad, unida a las tramas de funciones semióticas necesarias para la definición del límite de una función muestran una gran complejidad difícil de superar, incluso para el estudiante universitario.

4.2.1. Un interface entre la idea intuitiva del límite de una función y la definición formal

Una fácil consecuencia que se extrae de las reflexiones anteriores es la necesidad de acercarse a la definición del límite de una función por medio de ejemplos en los que se mantenga la coherencia de la definición por entornos. Es decir, partir de la variable dependiente f(x) hasta llegar a la independiente x. Unos ejemplos aclararán esto último:
Si analizamos $\lim_{x\to 2}(x+3)=5$, construimos de un entorno de 5 tomando dos sucesiones de f(x):

x+3	4,9	4,99	4,999	... 5
	5,1	5,01	5,001	... 5

Buscando un entorno de 2, restamos 3 para ver la sucesión que corresponde a la variable dependiente x:

x+3-3 = x	1,9	1,99	1,999	... 2
	2,1	2,01	2,001	... 2

Supongamos ahora que la función de la que se calcula el límite no es tan simple: $\lim_{x\to 2} x^2+3=7$. Tomamos un entorno de 7 con dos sucesiones de f(x):

x^2+3	6,9	6,99	6,999	... 7
	7,1	7,01	7,001	... 7

Buscando un entorno de 2, realizamos las operaciones que se sugieren en el discurso:

x^2+3-3 = x^2	3,9	3,99	3,999	... 4
	4,1	4,01	4,001	... 4

$\sqrt{x^2}$ = x	1,974	1,997	1,9997	... 2
	2,024	2,002	2,0002	... 2

Es decir, el uso del numérico es, quizás, me nos intuitivo que el gráfico, pero nos acerca mucho más a la definición del límite de una función.

4.3. La regla de Barrow

Par el cálculo de áreas comprendidas entre el eje de abscisas, las rectas x=a, x=b y la gráfica de una función dada f(x), los estudiantes aplican la regla de Barrow: *Si f(x) es continua en el compacto [a,b] y F es una función primitiva de f en dicho intervalo (F'(x)=f(x)), entonces se verifica que:* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

En la enseñanza del concepto de integral definida es frecuente recurrir a la interpretación geométrica de la integral como área encerrada por una curva en el primer miembro y al cálculo de la función primitiva, en el segundo. Sin embargo, esta interpretación pude conducir al estudiante al conflicto semiótico de la discordancia dimensional, ya que basarse en estas interpretaciones supone efectuar las funciones semióticas siguientes:

Una función semiótica nos relaciona el primer miembro de la igualdad dada, la $\int f(x)dx$ como expresión con el área encerrada entre las rectas x=a, x=b, el eje de abscisas y la gráfica de la función dada, que hace de contenido.

Una segunda función semiótica relaciona el segundo miembro F(b)-F(a), que hace de expresión, con $F(x)]_a^b$. Otra función semiótica relaciona lo anterior como expresión, con los valores numéricos de F(x), F(b) y F(a). A continuación, otra función semiótica relaciona lo anterior con el contenido F(b)-F(a) como diferencia de ordenadas.

Esta red de funciones semióticas conduce a comparar ambos miembros. Sin embargo, mientras el primer miembro corresponde al área, que es una magnitud bidimensional, el segundo corresponde la diferencia de dos ordenadas, que es una magnitud unidimensional. Bajo esta perspectiva, sería equipar unidades cuadradas con unidades lineales, lo cual es absurdo. Por tanto, ¿cómo hacer frente a tal desajuste de significados?

4.3.1. Un interface entre la interpretación geométrica de la integral definida y la regla de Barrow

Se trata, primeramente, de enunciar el teorema dado con un lenguaje más explícito que el habitual (el cual, aunque se diga expresamente, quizás camufle la relación que hay entre f y F), buscando poner en evidencia dicha relación entre f y f' (relación ya vista en el teorema del valor medio del

Cálculo diferencial). Por tanto, escribiremos la regla de la forma: $\int f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

En segundo lugar, se utiliza una trama de funciones semióticas empleando justamente un camino inverso al anterior. Es decir, se partiría del análisis del segundo miembro, f(b)-f(a), con una primera función semiótica, de expresión dicho segundo miembro y de contenido la igualdad: f(b)-f(a)=$\sum_{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]$, para una partición Δ de [a,b]. Buscando la relación entre f(x) y su derivada, se efectuaría una segunda función semiótica, de expresión la función f(x) continua y derivable y de contenido la tesis del teorema del valor medio: $\exists \xi \in [a,b]$ / $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi)\,(x_i - x_{i-1})$. Otra función semiótica de expresión el último contenido y de contenido la igualdad: f(b)-f(a)=$\sum_{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]$= $f'(\xi)\,(x_i - x_{i-1})$. Por último, una última función semiótica que tendría de expresión el contenido anterior y de contenido el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ de ambos miembros de la igualdad anterior, nos conduciría a la regla de Barrow.

5. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se han revisado distintas perspectivas teóricas con respecto al signo matemático, buscando efectuar ciertas comparaciones con la teoría de las funciones semióticas. Los análisis efectuados nos permiten afirmar que la tríada de Peirce es la más utilizada por los investigadores, aunque a la hora de los análisis didácticos el modo de hacerla operativa es muy diversa.

Radford adopta una postura post-vygtskiana en la que la cultura adquiere un papel central –de aquí el uso del constructo CSS–. Sin embargo, no encontramos en esta teoría la definición de un conjunto de entidades ontológicas de la actividad matemática que pudieran dar una mayor operatividad a los análisis, cuestión que la teoría de las funciones semióticas resuelve de modo satisfactorio mediante las seis entidades primarias y las facetas duales asociadas, completando sus estudios por medio de los constructos función semiótica, conflicto semiótico y configuraciones (en sus distintos modos).

Saénz-Ludlow y Parmentier extienden la noción de signo inspirados en la tríada de Peirce. La definición de semiosis, como un proceso de carácter indefinido, permite establecer una cadena relacional de significados que le da cierta extensión a esta teoría. Sin embrago, a la hora del análisis de la actividad se echa en falta una ontología epistemológica de los objetos matemáticos que se ponen en juego en el desarrollo de la actividad matemática.

Por otra parte, Berger utiliza el signo desde una perspectiva funcional definiendo dos constructos que son muy semejantes a los de la TFS; significado personal y significado cultural, aunque mientras los planteamientos de Berger son de carácter cognitivo, los de la TFS son de tipo ontológico-semiótico donde los aspectos pragmáticos lo dotan de una mayor operatividad didáctica.

Por último, Duval da al signo una mayor operatividad a través de los cambios entre los registros de representación semiótica. Sus definiciones de tratamiento y cambio inter y entre registros, junto a otros constructos, permiten un análisis interesante de la actividad matemática. Sin embargo, como se ha podido comprobar, por medio de los ejemplos tratados, la teorización de la TFS da al signo una mayor amplitud al considerar las relaciones entre cualquier par de objetos matemáticos. Además, al disponer de numerosos elementos de significados –seis entidades primarias y doce facetas duales– para la formación de la función semiótica consideramos que posee fuerte poder explicativo de los fenómenos didácticos del aula.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

REFERENCIAS

BERGER, M. (2004), The functional use of a Mathematical sign, *Educational Studies in Mathematics*, 55, pp. 81-102.

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2004), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

CONTRERAS, A.; LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2004), Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo, *Educación Matemática*, pp. 59-87.

DUVAL, R.: (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Bern: Peter Lang S.A.

DUVAL, R. (1996), Quel cognitif retenir en Didactique des Mathematiques?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16, nº 3, pp. 349-382.

DUVAL, R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education* (tome I), Editors: Taddao Nakahara an Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), pp. 55-69.

FONT, V. (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* 14, pp. 1-35.

GODINO. J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22/2.3, pp. 237-284.

GODINO, J. D., BATANERO, C. Y ROA, R. (2004). A semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educacional Studies in Mathematics* (en prensa).

GODINO, J. D., CONTRERAS, A., Y FONT, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

HUNG, D.W.L. (2001), Conjectured ideas as mediating artefacts for the appropriation of mathematical, meanings, *Journal of Mathematical Behavior*, 20, pp. 247-262.

PARMENTIER, R.J. (1985), Signs' place in medias res: Peirce's concept of semiotic mediation, IN E. Mertz & R.J. Parmentier (Eds.), *Semiotic mediation: socio cultural and psychological perspectives*, (pp. 23-48), Orlando, Academic Press.

RADFORD, L (2002), The Seen, the Spoken end the Griten: a semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22, 2, pp. 14-23.

RADFORD, L. (1999), *On culture and mind: A post-Vygotskian semiotic perspectiva*, Université Laurentienne, Ontario (Canadá), pp. 1-28.

RADFORD, L. (2000), Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*, 42, pp. 237-268.

ROTH, W-M. (2004), What is the meaning of "meaning"? A case study from graphing, *Journal of Mathematical Behavior*, 23, pp. 75-92.

ROTH, W-M. y BOWEN, G.M. (2001), Professionals Read Graphs A Semiotic Analysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 32, Nº 2, pp. 159-194.

SÁENZ-LUDLOW, A. (2003), A collective chain of signification in conceptualizing fractions: a case of a fourth-grade class, *Journal of Mathematical Behavior*, 22, pp. 181-211.

LA DIMENSIÓN DUAL "PERSONAL / INSTITUCIONAL" Y EL PROBLEMA DEL ENCAJE DE LOS OBJETOS PERSONALES DEL PROFESORADO EN LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS[3]

Vicenç Font

Universitat de Barcelona

RESUMEN

Este trabajo tiene como principal objetivo profundizar en la dimensión dual "personal / institucional" con el objetivo de afrontar la problemática que representa el encaje de los objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado en el actual desarrollo de la TFS. Para conseguir este objetivo, se presenta una visión personal de cuál es la situación actual del desarrollo de la TFS, que contempla una propuesta de encaje de los objetos personales del profesorado.

THE DUAL "PERSONAL / INSTITUTIONAL" DIMENSION AND THE PROBLEM OF FITTING PERSONAL OBJECTS IN THE THEORY OF SEMIOTIC FUNCTIONS

ABSTRACT

The main goal in this work is going deeper into the dual personal /institutional dimension to face the problem of fitting the teachers' mathematic and didactic personal objects in the current development of SFT. To achieve this goal, we present a personal view of current development of SFT, where a proposal to fit the teachers' personal objects is presented.

1 PRÁCTICAS

El pragmatismo tiene por objetivo alcanzar una síntesis entre la interpretación del hombre como ser que piensa, que juzga y que comprende, y la interpretación del hombre como ser que actúa, que proyecta, que toma decisiones y que valora. Para tal fin el pragmatismo ha intentado elaborar un único conjunto de conceptos o categorías de interpretación desde la que se pretende superar la reflexión centrada en la relación sujeto-objeto.

[3]Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 58-92)

En la TFS se adopta de entrada un cierto pragmatismo puesto que se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado, a diferencia de otras teorías en las que dicho objeto es quien tiene ese lugar privilegiado.

Dada su importancia, es necesario intentar precisar lo que se entiende por práctica. Una primera definición de práctica, en sentido amplio, es la siguiente: manipulación de ostensivos y del pensamiento que la acompaña. Las prácticas como las que se realizan en una institución escolar tienen un componente público (hay manipulación de ostensivos y, por tanto, observables) y un componente privado (manipulación de representaciones mentales no ostensivas y no observables). Si bien, en teoría, podríamos considerar prácticas que sólo tienen un componente —por ejemplo la manipulación inconsciente de ostensivos, o bien una persona que sólo piensa— lo normal es que dichas prácticas incorporen estos dos componentes. Aunque esta definición de práctica es muy general, cuando la contextualizamos en la actividad matemática permite definir las prácticas matemáticas de la manera siguiente (Godino y Batanero, 1994, p. 334): *"Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas."*.

2 PRÁCTICA VERSUS CONDUCTA

Una vez asumida la centralidad del constructo "práctica" conviene distinguir la práctica de la conducta.

Para la tradición interpretativa, el comportamiento de los seres humanos está principalmente constituido por sus acciones, y es rasgo característico de las acciones el tener un sentido para quienes las realizan y el convertirse en inteligibles para otros sólo por referencia al sentido que les atribuye el actor individual. Observar las acciones de una persona, por tanto, no se reduce a tomar nota de los movimientos físicos visibles del actor, sino que hace falta una interpretación, por parte del observador, del sentido que el actor confiere a su conducta. Es por este motivo que un tipo de comportamiento observable puede constituir toda una serie de acciones y, por eso mismo, las acciones no pueden observarse del mismo modo que los objetos naturales. Sólo pueden ser interpretadas por referencia a los motivos del actor, a sus intenciones o propósitos en el momento de llevar a

cabo la acción. Identificar correctamente esos motivos e intenciones es entender el "significado subjetivo" que la acción tiene para el actor.

Las acciones, a diferencia del comportamiento de casi todos los objetos, siempre incorporan las interpretaciones del actor, y por ese motivo sólo pueden ser entendidas cuando nos hacemos cargo de los significados[4] que el actor les asigna. La afirmación de que las acciones humanas tienen significado implica bastante más que una referencia a las intenciones conscientes de los individuos. Requiere también que se entienda el contexto social dentro del cual adquieren sentido tales intenciones. Las acciones no pueden ser privadas, la mera identificación de una acción como perteneciente a tal o cual especie implica el empleo de reglas de identidad según las cuales pueda decirse de dos acciones que son lo mismo. Tales reglas son necesariamente públicas; si no lo fueran, sería imposible distinguir entre la interpretación correcta de una acción y una interpretación equivocada. Y de esta característica "pública" de las reglas de interpretación se desprende que una acción sólo puede ser identificada correctamente cuando corresponde a alguna descripción que sea públicamente reconocible como correcta.

La interpretación que da el profesor al “sentido de la acción”, es decir, a la relación entre la conducta observable y un estado mental o experiencia privada hipotética del alumno, puede dar pie a interpretaciones de tipo psicológico. Ahora bien, se ha de ir con mucho cuidado con las explicaciones basadas en procesos mentales ocultos, los cuales son considerados la causa de las acciones. Esto es así porque la afirmación de que las acciones humanas tienen sentido implica bastantes más cosas que procesos mentales ocultos en las personas, ya que esta afirmación requiere tener presente el contexto social dentro del cual adquieren sentido estas acciones.

La explicación del sentido de la acción que da el punto de vista interpretativo huye de las explicaciones que pretenden explicar el comportamiento aparente a partir de procesos mentales internos. Por lo tanto, no pretende situarse en la mente del alumno para poder explicar su comportamiento, sino que intenta comprender el sentido de la acción en el contexto social donde se produce.

En algunos trabajos en los que se ha tenido en cuenta, entre otros, el marco teórico de la TFS (Font y Ramos en prensa) se asume de manera implícita el postulado básico de la tradición interpretativa ya que se considera que no

[4] De momento en todo este apartado estamos utilizando los términos “significado” y “sentido” como se utilizan en el lenguaje cotidiano. Más adelante definiremos con precisión lo que entendemos por significado y sentido.

podemos interpretar las conductas observables de los alumnos si no les atribuimos un sentido. Es importante remarcar que en dichos trabajos se considera que hay que utilizar el término "práctica" en el sentido de acción dirigida a un fin y no de conducta. En dichos trabajos se considera que observar las prácticas de los alumnos no se reduce a tomar nota de sus conductas, puesto que es necesaria, por parte del profesor, una interpretación del sentido que da el alumno a esta conducta.

Por tanto, en dichos trabajos se distingue entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que en tanto que acción humana orientada a una finalidad tiene un sentido, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta. En el caso de las prácticas matemáticas su sentido viene determinado por la función que esta práctica desempeña en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

3. OBJETOS PERSONALES

La relación que hay entre las prácticas y los problemas que las suscitan lleva a considerar que lo que hay entre el estímulo —campo de problemas— y la respuesta —sistema de prácticas— no es una caja negra; muy al contrario, es en este lapso donde tiene lugar el proceso nada mecánico de simbolización por el que las experiencias se codifican significativamente, se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan, siguiendo reglas y métodos elaborados al efecto, para dar lugar a objetos matemáticos personales que, según Godino y Batanero (1994, p. 335), son: *"emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas".* Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Es conveniente efectuar algunas matizaciones sobre el objeto personal. En primer lugar, un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos pueden hablar sobre sus objetos personales o, dicho de otra manera, pueden realizar prácticas discursivas sobre los mismos, conduce a una vía de investigación en Didáctica de las Matemáticas de gran relevancia. Por otra parte, un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad que facilita la clase de Matemáticas, de una regla de comportamiento en el sujeto. Es esta última dimensión, que se conoce con la denominación de máxima pragmática, la que se toma en consideración en Godino y Batanero (1994, p. 341) para

definir el significado de un objeto personal O_p: *"Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado."*.

Según esta definición de significado, el objeto personal supone haber establecido una conexión entre acciones potenciales y fines, conexión que es inteligente y, por tanto, está mediada simbólicamente. Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca.

Asimismo conviene observar que, dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. Es obvio, además, que el significado de un objeto personal queda ligado a otros objetos personales y significados, puesto que, en general, en las prácticas intervienen conjuntamente diversos objetos personales.

En la TFS se considera que el significado personal de un objeto matemático se puede entender de la siguiente manera:

$S(O)$ = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica P_i, el sujeto utiliza el objeto O}

En mi opinión, para ser más precisos, en la definición anterior tendríamos que sustituir el objeto *O* por alguna de sus representaciones:

$S(O)$ = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica P_i, el sujeto utiliza alguna representación asociada al objeto O}

El hecho de considerar el objeto personal como un "emergente" y su significado de manera "holística" hace que lo que realmente es relevante, en mi opinión, es la existencia de prácticas (significativas) realizadas por el sujeto en las que interviene alguna representación del objeto. Por tanto, esta forma pragmática de entender el significado postula unas entidades mentales, los objetos personales, que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen a lo largo de una interacción en el marco de una institución escolar.

De lo dicho anteriormente se podría pensar que la relación entre el objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante para su realización se considera una relación de causa-efecto (parte superior de la figura 1) en la que el objeto personal sería la causa eficiente (dicho en

términos aristotélicos). Contrariamente a este punto de vista, en algunos trabajos en los que se ha tenido en cuenta, entre otros, el marco teórico de la TFS (Ramos y Font 2004) se considera más conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha (parte inferior de la figura 1) puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después tiene que decidir que acción es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, ha de mantener la acción desde el inicio hasta el final.

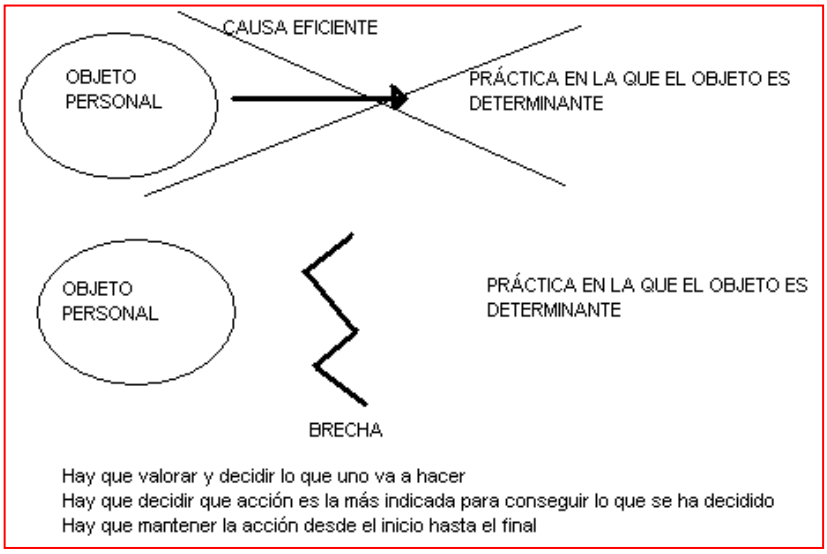


Figura 1

4. OBJETOS INSTITUCIONALES

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por tanto cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría reduccionista. Por este motivo en la TFS (Godino y Batanero 1994) se introducen las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales.

Para Godino y Batanero una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Desde la sociología se suelen considerar las instituciones básicamente desde dos perspectivas. La primera tendría que ver con la configuración de

un conjunto de prácticas y la segunda las entiende como una organización que se compone de un cuerpo directivo, un edificio y unos trabajadores destinada a servir algún fin socialmente reconocido y autorizado. Es evidente que las instituciones escolares encajan claramente en éstas dos maneras de entender las instituciones.

En la TFS interesa sobre todo la primera manera de entender la institución (Godino y Batanero 1994), sin que esto implique no tener en cuenta el otro punto de vista. Esta primera manera de entender la institución permite, por una parte, pensar en varias instituciones en el interior de un centro escolar - por ejemplo la institución "clase de matemáticas de 1º de bachillerato" (Font 2000a) o la institución "Cátedra Introducción a la Matemática" (Font y Ramos en prensa) - y, por otra parte, en instituciones diferentes a las escolares. La segunda manera de entender la institución lleva a considerar que las instituciones que van a interesar sobre todo a la TFS son las instituciones cuyo fin es ocuparse del hombre aprendiendo.

Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, es reconocido como tal objeto por la institución, pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

Con relación al objeto institucional interesa resaltar los siguientes aspectos: (1) Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales. Cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que cuando hablan de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. (2) Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. En Godino y Batanero (1994, p. 340) también se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional O_I: *"Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado"*.

Para la TFS, la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, lo que, obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos.

Para la TFS la relación entre los significados de los objetos personales y los institucionales hay que pensarla básicamente en términos de "ajuste". Se pretende que el significado de los objetos personales se ajuste lo más posible al significado de los objetos institucionales. Esta relación de ajuste es la que subyace (y por tanto posibilita) en "la evaluación de los conocimientos de los alumnos".

El constructivismo psicológico, y en general todas las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas desde el enfoque cognitivo, se han centrado en los objetos personales. En el otro extremo tenemos la antropología cognitiva en la que prima el aspecto institucional y el sujeto se considera un simple "corte institucional". Entre estos dos extremos hay diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica personal-institucional sin olvidar ninguno de los dos polos. Es en este contexto donde se sitúa la TFS[5].

Los comentarios anteriores permiten determinar cuál será el principal objeto de estudio que interesa a la TFS*: el hombre aprendiendo en instituciones escolares algo que es el resultado de una construcción social realizada en diferentes instituciones: las matemáticas.* Se adopta, por tanto, un punto de vista antropológico. También se adopta un principio de tipo recursivo: los objetos personales generan los objetos institucionales, los cuales a su vez generan los objetos personales.

Una pregunta que se puede formular con relación a los objetos personales e institucionales es la siguiente: ¿Dónde se encarnan dichos objetos? (Ramos y Font 2004). Es evidente que a partir de lo que se ha dicho anteriormente los objetos personales y sus significados se encarnan en los alumnos y que los institucionales se encarnan en los profesores. Ahora bien, con esta clasificación se nos presenta el problema de que los objetos matemáticos y didácticos del profesor no se contemplan como objetos diferenciados de los institucionales.

5. TIPOS DE SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES

Para explicar la dialéctica institucional-personal y dar cabida a los objetos personales del profesorado como objetos diferenciados de los

[5] La relación que se establece entre las instituciones y las personas se pueden analizar básicamente desde (1) un punto de vista sistémico, (2) desde el punto de vista de los sujetos y (3) desde el punto de vista de los sistemas y los sujetos (dual). Algunas investigaciones que han tenido en cuenta, entre otros, el marco teórico de la TFS (Font y Ramos en prensa) se posiciona en este punto de vista dual al asumir planteamientos que provienen tanto de la tradición interpretativa como de la sistémica.

institucionales, en el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa, por operatividad, distinguir cuatro tipos, que designamos como significado de referencia, pretendido, implementado y evaluado (Godino 2003, Contreras, Font, Luque y Ordóñez 2004, Font y Ramos en prensa).

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto.

Es importante remarcar que el "significado de referencia" es un constructo que resulta difícil de delimitar ya que en cierta manera está implícito en todo el proceso —en términos metafóricos se puede decir que el significado de referencia juega el mismo papel que "el conjunto universal" en la teoría de conjuntos—. Este significado de referencia es la resultante de diferentes componentes: el significado del objeto en la institución matemática universitaria, la historia de dicho objeto, las orientaciones curriculares, los diferentes libros de texto y materiales que la institución escolar suele utilizar, los objetos matemáticos personales de los profesores que forman la institución, los objetos didácticos personales de los profesores que forman la institución, etc. Todos estos elementos forman un trasfondo a partir del cual el profesor, de acuerdo con el departamento de matemáticas de la institución escolar, elabora el significado pretendido. Algunos de estos componentes resultan fáciles de delimitar -por ejemplo, las orientaciones curriculares- pero otros están presentes de manera muy difusa.

A partir del significado de referencia, el profesor selecciona, ordena, y delimita la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Tendrá para ello en cuenta el tiempo disponible, los conocimientos previos de los estudiantes y los medios instruccionales disponibles. Denominaremos como *significado institucional pretendido* al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional..

Teniendo en cuenta que lo que se planifica no exactamente se pone en práctica —puesto que las interacciones profesor-alumnos y alumnos-

alumnos hacen que se introduzcan nuevos ejemplos, se obvien otros, se aborden nuevas cuestiones...— y con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales, interesa hablar del *significado implementado*, como el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

Un cuarto tipo de significado institucional se pone en juego en los procesos de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado. Lo designamos como *significado institucional evaluado*.

Estos dos últimos tipos de significados institucionales son fáciles de determinar si se tiene una descripción detallada de las clases impartidas. Pero los dos primeros tipos de significado institucional resultan menos nítidos. El significado pretendido resulta difícil de concretar básicamente porque los profesores no suelen dejar mucha constancia de su trabajo de planificación -por ejemplo, la lectura de las actas de los departamentos de los centros escolares resulta una fuente insuficiente para delimitar el proceso que va del significado de referencia al significado pretendido-. En muchos casos, se limitan a seleccionar un libro de texto (o un material) a partir del cual van haciendo modificaciones sobre la marcha para conseguir el significado implementado. Por tanto, en un proceso de estudio "normal" el libro de texto suele ser el significado pretendido. Sólo podemos tener información detallada de este significado pretendido cuando el profesor explica como ha elaborado el material que va a utilizar - por ejemplo, cuando nos situamos en una perspectiva de ingeniería didáctica, o en la de una investigación de estudios de casos, el significado pretendido se suele explicitar en la planificación del "experimento".

El significado pretendido, según la institución considerada, se puede concretar en diferentes documentos: programación, libro de texto, material complementario elaborado por el profesor, etc. Algunos de estos documentos son impersonales en el sentido que son los mismos para todos los miembros de la institución (por ejemplo la programación previa acordada por todos los miembros de la institución, o el libro de texto seleccionado antes de iniciar el proceso de instrucción) mientras que otros son estrictamente personales en el sentido que son elaborados y utilizados por una sola persona (por ejemplo el material elaborado por un profesor) y otros pueden quedar en una situación intermedia (por ejemplo material

elaborado y utilizado sólo por algunos profesores). En lo que sigue limitaremos el uso del término significado pretendido a los documentos escritos previamente al inicio del proceso de instrucción, sean estos impersonales, personales o intermedios.

De lo dicho anteriormente se podría pensar que la relación entre los diferentes tipos de significados se considera una relación de pertenencia (parte superior de la figura 2) en la que cada tipo de significado resulta ser una reducción del anterior. Contrariamente a este punto de vista, en algunos trabajos que han tenido en cuenta, entre otros, el marco teórico de la TFS (Ramos y Font 2004) se considera más conveniente interpretar la relación entre cada tipo de significado en términos de brecha. De esta manera, el paso de un tipo de significado a otro se puede concretar de muchas maneras diferente (parte inferior de la figura 2).

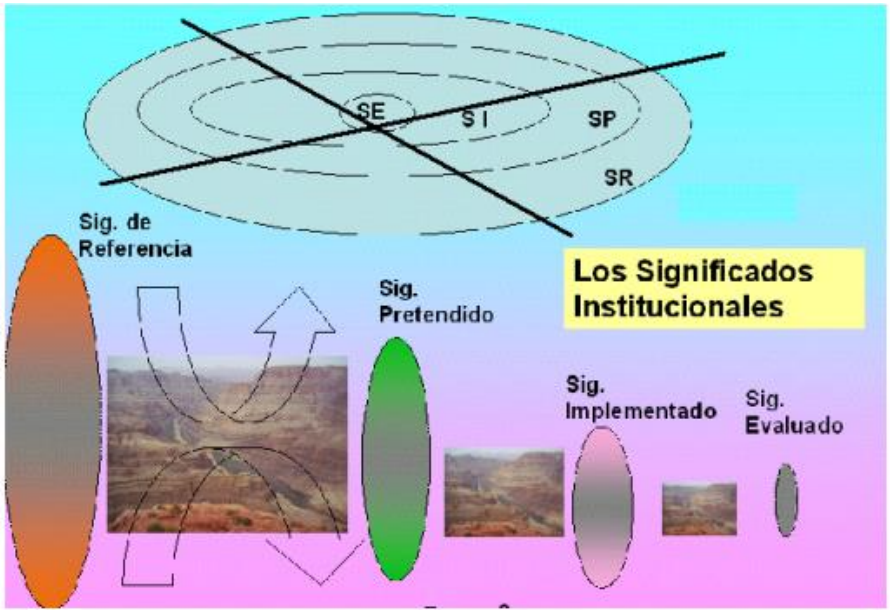


Figura 2

Desde el punto de vista del estudiante, y en un momento dado, cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. El *significado global* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático (contenido o tema); el *declarado* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; finalmente, el *significado personal logrado* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje.

Es importante remarcar que en el significado global pueden influir otras materias además de las matemáticas. Por ejemplo[6], aunque el significado pretendido de la derivada en una institución escolar no contemple la notación incremental y la diferencial, el significado personal declarado de los alumnos suele incorporar prácticas en las que dicha notación se utiliza (Inglada y Font 2003). Este hecho se produce aún en el caso de que no se haya utilizado esta notación en la clase de matemáticas ya que el cociente incremental y el concepto de diferencial se utiliza habitualmente en la clase de física, con lo que ciertas prácticas que utilizan la notación incremental y la diferencial forma parte del significado global del alumno debido al proceso de estudio que han seguido en la clase de física.

Los profesores tienen sus propias opiniones acerca de lo que se debe hacer, su propio modo de ver las cosas. Los profesores comparan de algún modo el significado de sus objetos matemáticos y didácticos con el currículum oficial, lo juzgan, lo piensan y lo valoran. Como fruto de esta evaluación, los profesores planifican las prácticas del significado institucional pretendido y plasman en sus prácticas el significado institucional implementado y el evaluado. Los significados institucionales implementados y evaluados no son una mera ejecución del significado institucional pretendido y, a su vez, este último no es una simple adaptación del currículum oficial. Los significados institucionales pretendidos, implementados y evaluados son el resultado de un proceso en el que no sólo cuenta el currículum oficial sino muchos otros factores entre los cuales se encuentran los significados personales de los objetos matemáticos y didácticos que tienen los profesores. Por este motivo, en algunos trabajos realizados en el marco de la TFS (Ramos y Font 2004) los significados personales de los objetos matemáticos y didácticos de los profesores se consideran parte del significado institucional de referencia.

Los significados institucionales pretendidos, implementados y evaluados, por una parte son impersonales porque se pretende que sean más o menos independientes del profesor encargado del proceso de instrucción y, por la otra, son personalizados por el profesor que los encarna y ejecuta, dado que nadie hace exactamente las mismas cosas de la misma manera. Los profesores imprimen en cierta manera su propio sello al planificar el significado institucional pretendido y al ejecutar el implementado y el evaluado.

El párrafo anterior se ha de matizar resaltando que, a pesar del sello personal de cada miembro de la institución, ésta suele ser bastante

[6] Este ejemplo hay que contextualizarlo en el bachillerato de la Comunidad Autónoma de Catalunya (España).

homogénea con relación al significado pretendido y bastante más heterogénea con respecto a la diversidad de prácticas que conforman el significado implementado. Dicho de otra manera, es más fácil ponerse de acuerdo sobre lo que se tiene que hacer, que hacer todos lo mismo.

De acuerdo con este punto de vista el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores consiste en un conjunto de prácticas discursivas y operativas, algunas de las cuales tratan de cómo debería ser el proceso de instrucción -componentes del significado de referencia- y otras son las que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado. En algunos casos el profesor puede no estar de acuerdo con otras componentes del significado de referencia como, por ejemplo, el currículum oficial de la institución, pero, a pesar de ello, el significado que él pretende, implementa o evalúa puede ser muy parecido al de otro profesor cuya opinión si esté más de acorde con dicho currículum.

El significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores están sumergidos en el flujo de acontecimientos, interrelaciones, relaciones personales, etc. que se producen en el marco de la institución (y también fuera de ella) en la que trabajan. Las prácticas que forman estos significados no se dan en el vacío sino en instituciones vivas que se hallan inmersas también en un entorno cambiante. Por este motivo, el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores no se mantienen por siempre idéntico a sí mismos, muy al contrario cambia y evoluciona . El significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores se adquiere, se desarrolla y evoluciona a lo largo del tiempo.

Los significados de los objetos personales del profesorado son un componente del significado de referencia y son distintos de los significados institucionales pretendidos, implementados y evaluados. Podemos considerar de manera muy esquemática que el paso del significado de referencia al significado pretendido es el resultado de un largo y complejo proceso que empieza cuando el profesor evalúa diferentes elementos del significado de referencia y termina cuando diseña una planificación de prácticas que él cree que se debe hacer. La figura 3 representa el proceso que va del significado de referencia al evaluado, cuando estos se encarnan en un profesor que implementa y evalúa un proceso de instrucción.

El significado de los objetos matemáticos y didácticos del profesorado para un objeto matemático, por ejemplo para el objeto “función”, lo entendemos como el conjunto de prácticas operativas y discursivas que realiza el profesor relacionadas con las funciones y con su enseñanza y aprendizaje.

Este significado se puede descomponer en 1) su significado personal de "función", su significado personal de "aprender función", su significado personal de "enseñar función". A su vez estos significados están relacionados con otros significados entre los que queremos destacar los siguientes: 1) su significado personal de "matemáticas", su significado personal de "aprender", su significado personal de "enseñar".

Con la figura 3 (Ramos y Font 2004) se pretende ilustrar que no hay que pensar en los 4 tipos de significado institucional sólo como una secuencia que empieza en el significado de referencia y termina en el pretendido (secuencia representada por las flechas grandes). Al poner el significado de referencia en la columna de la izquierda se pretende ilustrar que éste siempre está interactuando con los otros tipos de significado (flechas horizontales) y no sólo con el pretendido. A su vez, el significado evaluado puede producir cambios en el significado implementado, por ejemplo como resultado de una evaluación inicial, lo cual se representa por una flecha vertical hacia arriba. Por otra parte, la reflexión sobre el proceso de instrucción (significado implementado y evaluado) puede interactuar con el significado de referencia (por ejemplo, modificando el significado se los objetos personales del profesor o bien los libros de texto), lo cual a su vez puede modificar el significado pretendido.

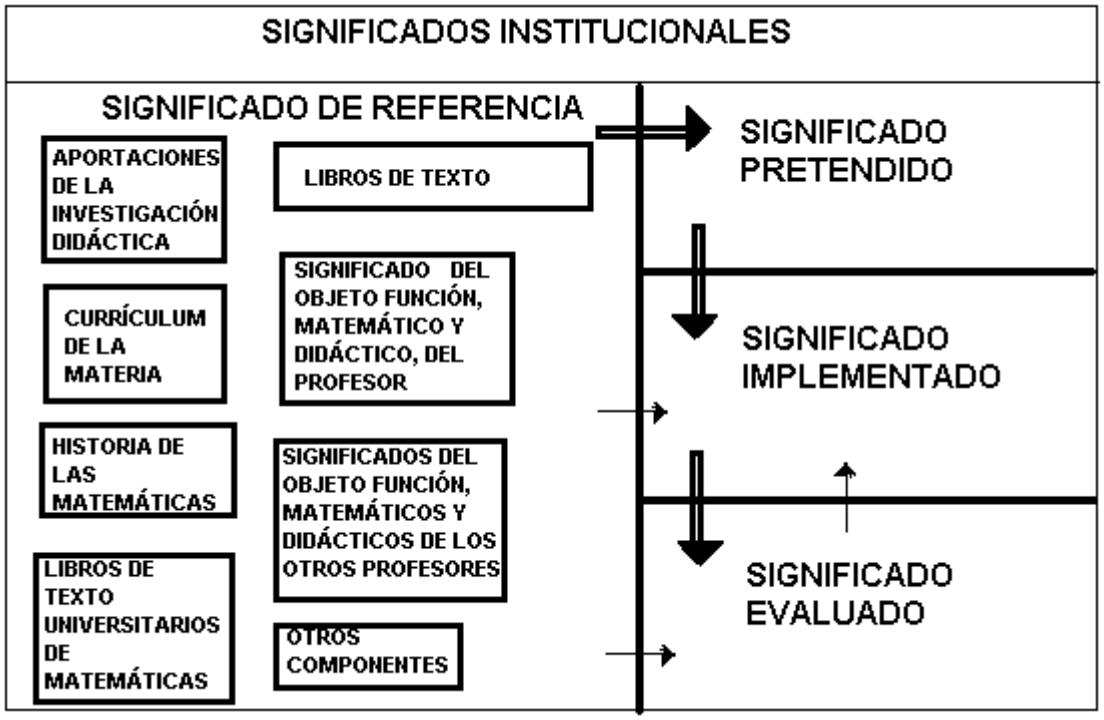


Figura 3

La figura 3 también sirve para ilustrar que si bien conviene distinguir conceptualmente los 4 tipos de significados institucionales, en los procesos

de instrucción reales están mezclados e interactuando constantemente entre ellos.

Uno de los aspectos que permite visualizar la columna de la izquierda de la figura 3 es que *el significado institucional de referencia está distribuido*, no reside ni en una sola persona ni sólo en la institución escolar considerada. Está distribuido entre diferentes personas, instituciones - además de la institución en la que se realiza el proceso de instrucción hay que tener en cuenta otras instituciones de tipo político-administrativo o científico, por ejemplo las instituciones donde de crea el conocimiento matemático- y artefactos simbólicos y físicos, por ejemplo libros de texto o programas informáticos. Hay que tener en cuenta que el impacto de las nuevas tecnologías, por una parte, aumenta la distribución del significado institucional de referencia, pero por otra parte hace más accesible al profesorado el acceso a los lugares donde residen físicamente las diferentes partes de dicho significado.

Otro aspecto que permite destacar la columna de la izquierda de la figura 3 es que *el significado institucional de referencia es holístico* en el sentido de que el sistema de prácticas que lo constituye se analiza, entre otros, desde los siguientes puntos de vista: histórico, epistemológico y didáctico. Esta mirada aporta una perspectiva global sobre los sistemas de prácticas que constituyen el significado de referencia[7].

Tal como hemos dicho anteriormente, se puede producir un conflicto entre el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor y el significado pretendido ya que en la elaboración del significado pretendido intervienen muchos elementos. En primer lugar, la opinión que tiene el profesor de cómo funciona la institución, lo qué él puede esperar de ella, lo que la institución le está pidiendo, los medios con que cuenta para desarrollar su trabajo, etc.

En segundo lugar, la planificación del significado pretendido requiere una serie de interacciones personales con los otros miembros de la institución para llegar a acuerdos consensuados. Estos acuerdos, en lugar de ser el resultado de un consenso conseguido entre todos, pueden ser impuestos por los superiores, por el líder del grupo, etc. sin que sus argumentos convenzan al profesor.

6 SIGNIFICADO Y SENTIDO

[7] En algunos trabajos realizados en el marco de la TFS al significado de referencia también se le llama "holo-significado" (Wilhemi, Lacasta y Godino en prensa y Wilhemi, Godino y Lacasta 2004) o "significado global" (Alvarado y Batanero 2004).

Frege introdujo la diferencia entre sentido y referente de un término. El referente es el objeto nombrado o al cual se hace referencia, mientras que el sentido es la manera de presentación. El ejemplo de la mediatriz (Font 2000a) puede ilustrar la diferencia entre sentido y referente. Podemos definir la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. En cada definición relacionamos el concepto de mediatriz con conceptos diferentes, pero nos estamos refiriendo al mismo referente. Ahora bien, para muchas personas, las dos definiciones pueden tener sentidos distintos porque la manera de presentación (la conexión con otros conceptos) permite considerar que cada una de estas definiciones tiene un referente diferente. Entender que las dos definiciones son equivalentes informa que dos definiciones, el sentido de las cuales se ha fijado de antemano, de manera que pueden referirse a objetos diferentes, se refieren al mismo objeto.

Cada definición hay que entenderla como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A las definiciones-reglas cabe atribuir valores veritativos (verdadero y falso). Por ejemplo, si consideramos la definición que dice que la mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio, dada una perpendicular podemos decir si es o no la mediatriz en función de que pase o no por el punto medio. Ahora bien, de una definición-regla se puede deducir una regla práctica que nos da instrucciones para construir la mediatriz. Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición genera un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, en cada definición de mediatriz relacionamos el objeto definido con objetos diferentes y con procedimientos de construcción diferentes.

Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas intervienen dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho permite distinguir, en algunos trabajos realizados en el marco de la TFS, dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos *sentido* y *significado***.** En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido[8]

[8] En algunos trabajos realizados en el marco de la TFS se utiliza el término "noción" y "modelo" en lugar de "objeto" y "sentido" (Wilhemi, Lacasta y Godino en revisión y Wilhemi, Godino y Lacasta 2004), mientras que en otros, en lugar de utilizar los téminos "significado de referencia" y "sentido" se utilizan los términos "significado global" y "significados parciales" (Alvarado y Batanero 2004).

como un subconjunto del sistema de prácticas (Font y Ramos en prensa, Contreras 2004).

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevas técnicas, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto[9].

Desde esta perspectiva un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado de referencia del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos representativa, una muestra de contextos que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto.

7 COMPRENSIÓN Y COMPETENCIA

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Godino 2000, Font 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la didáctica de las matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos anteriores de la teoría TFS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental.

Desde el punto de pragmático, la "comprensión" o el "saber" un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y

[9] En Font y Peraire (2001) se estudia este proceso para el objeto cisoide.

representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que le son propuestas en el aula. Desde este punto de vista la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que será parcial. Desde esta perspectiva, se han de entender los procesos de enseñanza como la presentación de secuencias de actividades que tienen por objetivo, en el tiempo y con los medios disponibles, la emergencia de objetos matemáticos personales cuyo significado se adecue lo mejor posible al significado pretendido por el profesor.

Desde este punto de vista, diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona. Dicho de otra manera: optar por esta visión pragmática del significado implica focalizar el interés en las prácticas públicas y dejar en segundo plano el interés por los procesos mentales de los alumnos.

El conjunto de prácticas que puede realizar en un momento determinado el alumno es lo que se entiende por significado personal del alumno en este momento. El significado entendido de esta manera se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Un cambio de notación puede activar un sentido diferente, es decir un subconjunto de prácticas, que puede facilitar o dificultar la resolución de la actividad. En la producción de nuevo sentido también juegan un papel importante los procesos analógicos y metafóricos. Generalmente los objetos matemáticos se representan mediante notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos. Cada una de las notaciones ayuda a producir sentido, pero no genera todos los sentidos. Por lo tanto, comprender un objeto matemático, en tanto que uso competente, requiere utilizar diferentes notaciones y convertir (traducir) una representación en otra.

8 FACETAS DUALES

Es obvio que tanto el significado institucional como el personal de un objeto queda ligado a otros objetos y significados, puesto que, en general, en las prácticas intervienen conjuntamente diversos objetos. Este hecho obliga a pensar no en objetos aislados sino en conjuntos relacionados de

objetos. En el plano institucional tendremos una determinada organización de objetos en la que el objeto que es el motivo de nuestro interés tiene un lugar central. Estos conjuntos organizados de objetos son necesarios tanto para justificar como para activar la realización de un determinado conjunto de prácticas que en un momento dado se considera el significado del objeto que centra nuestra atención. Estos conjuntos organizados de objetos institucionales se van generando y modificando con el paso del tiempo y también se van integrando en diferentes teorías matemáticas, puesto que los problemas que son el origen de las prácticas son diferentes con el paso del tiempo.

Dado un objeto matemático institucional, por ejemplo el objeto derivada, por una parte lo podemos entender como un objeto elemental o bien lo podemos entender como una manera de compactar un conjunto de prácticas que sirven para solucionar determinados tipos de problemas (su significado) y un conjunto organizado de objetos matemáticos que sirve para activar y justificar dichas prácticas. Si lo anterior lo consideramos desde la perspectiva personal tendremos un conjunto organizado de objetos matemáticos personales que sirve para activar y justificar las prácticas que realiza el sujeto.

El párrafo anterior es el resultado de considerar un objeto matemática con relación a dos de las facetes duales consideradas en la TFS (la personal / institucional y la elemental / sistémica). En la TFS la noción de juego de lenguaje (Wittgenstein 1983) ocupa un lugar importante. En dicha teoría las entidades matemáticas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino 2002):

- personal - institucional
- ostensiva - no ostensiva
- intensiva – extensiva
- expresión - contenido
- elemental - sistémica

Personal - institucional

Dependiendo de las circunstancias contextuales, o sea, del juego de lenguaje en que nos encontramos, una misma expresión, por ejemplo "límite" puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de los objetos que intervienen en las prácticas que realiza un sujeto individual para resolver una actividad escolar, se entiende que se trata de un objeto personal. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de

texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos se considera fundamental en la TFS y es la que nos ha llevado a definir anteriormente los objetos personales y los institucionales.

Ostensiva - no ostensiva

Los objetos personales y los institucionales hasta ahora se han considerado básicamente como objetos no-ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos tiene también una faceta ostensiva, esto es perceptible, ya que se usan en las prácticas por medio de sus ostensivos asociados.

Mediante el lenguaje ostensivo se "expresan" otros objetos no ostensivos. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). A su vez, las entidades no ostensivas necesitan a éstas entidades ostensivas para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello lo consideramos como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Un caso especial será las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados; la palabra 'mediana', la notación Me, u otro cualquier recurso expresivo puede ser imaginado. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

Extensiva-intensiva / Concreto-Abstracto/ Ejemplar-tipo

En el estudio de las matemáticas estamos siempre interesados por generalizar los problemas, las soluciones que encontramos y el discurso con el que se describen y organizan. No nos conformamos con resolver un problema aislado sino que deseamos resolver tipos de problemas y desarrollar técnicas cada vez más generales. Además, tales soluciones son organizadas y justificadas en estructuras cada vez más globales. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un extensivo, o sea a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema, es decir como intensivo.

Interpretamos la distinción entre extensivo-intensivo (concreto y abstracto) en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el

ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos difuso de objetos). La consideración de un objeto como concreto o abstracto es esencialmente relativa dependiendo del juego de lenguaje en que participen.

Expresión-contenido

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros.

La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Elemental-sistémica

En la TFS se considera que el significado de un objeto es un conjunto de prácticas en las que el objeto en cuestión es un dato esencial. Este punto de vista conlleva que un objeto se pueda considerar como un sólo elemento o bien como un conjunto sistémico de prácticas en las que intervienen este objeto conjuntamente con otros entre los cuales hay determinadas relaciones.

La dialéctica elemental-sistémica conlleva que los objetos (personales o institucionales) tengan que ser considerados como nudos de una red. Por ejemplo, si consideramos el objeto elemental derivada y nos preguntamos por su significado inmediatamente aparecen determinadas prácticas en las que interviene y se relaciona con otros objetos -(límite, velocidad, derivada, función, tangente trigonométrica, rectas, etc.). Estos nuevos objetos a su vez se pueden entender de manera sistémica. De esta manera, tenemos una red de nudos, los cuales a su vez son redes de nudos y así sucesivamente.

9 ENTIDADES PRIMARIAS

Dado un objeto matemático que sea el centro de nuestro interés, resulta que éste forma parte de conjuntos organizados de objetos que activan y justifican un conjunto de prácticas que permiten resolver determinados campos de problemas –para la resolución de los cuales el objeto que centra nuestra atención resulta determinante–, que van evolucionando con el tiempo y se van integrando en teorías más amplias. Este hecho hace que la

forma de presentarse los objetos que centran nuestro interés y sus significados sea una amalgama de objetos, notaciones, problemas y prácticas. Conviene clasificar y distinguir los elementos de esta amalgama.

La faceta ostensiva / no ostensiva lleva a considerar que en la actividad matemática aparecen unos objetos que son los ostensivos asociados a los no ostensivos. Llamaremos lenguaje a este tipo de objetos:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

Estos primeros objetos son la expresión de otros objetos que se pueden considerar como extensivos o como intensivos según el juego de lenguaje que se considere. Este hecho nos lleva a considerar otros dos tipos de objetos:

- *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc.); son las tareas concretas que inducen la actividad matemática.
- *Conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función, etc.)

Estos tres tipos de objetos (notaciones, extensivos e intensivos) se relacionan por medio de funciones semióticas, es decir cada uno de ellos puede jugar el papel de expresión o contenido en una función semiótica.

Dentro de las entidades intensivas además de los conceptos tenemos proposiciones en las que intervienen varios conceptos por lo que consideramos conveniente separar las entidades intensivas en conceptos y propiedades, lo cual nos lleva a considerar el siguiente tipo de entidades:

- *Propiedades* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

Las prácticas matemáticas se realizan dentro de determinados juegos de lenguaje y en ellas intervienen notaciones, extensivos e intensivos que se relacionan entre ellos por medio de funciones semióticas. Si bien en teoría las prácticas se pueden descomponer en elementos más simples, en algunos casos conviene considerarlas como un paquete compacto, lo cual nos lleva a considerar dos nuevos tipos de entidades:

- *Acciones* del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

- *Argumentaciones* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Conviene remarcar que la consideración de una entidad como perteneciente a alguna de estas seis categorías es una cuestión problemática, ya que según el interpretante, la misma entidad será considerada de un tipo o bien de otro diferente

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.

Conviene remarcar que la consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino que es relativa. En nuestra opinión las prácticas se pueden analizar y descomponer en relaciones en las que intervienen entidades más simples, lo cual no quiere decir que creamos que existen unas entidades "elementales" que sean irreducibles. Más bien estamos inclinados a pensar que no hay límite, y que de hecho la descomposición se acaba cuando creemos que ya no es posible o bien que no es necesario continuar la descomposición. Según el juego de lenguaje que consideremos el objeto será primario (elemental) o no (sistémico).

Los componentes y las facetas de la actividad matemática que hemos comentado se ilustran con la figura siguiente (Godino 2002):

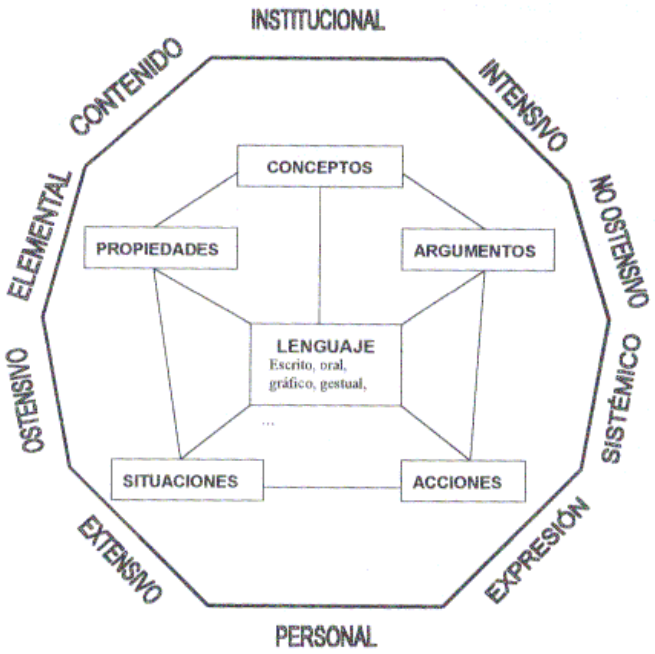


Figura 4

El interior del decágono es el resultado de aplicar las cinco facetas duales a la actividad matemática. Pero hay que considerarlo de manera recurrente,

es decir a cada una de las entidades primarias también le podemos aplicar a su vez las cinco dimensiones duales.

10 CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE REFERENCIA

El hecho de que los conjuntos organizados de objetos institucionales que sirven para activar y justificar las prácticas que permiten resolver determinados problemas -en los que el objeto que centra nuestra atención resulta determinante- se presenten como un conjunto organizado de entidades primarias que van evolucionando con el tiempo y que se van integrando en teorías más amplias lleva a introducir el constructo *configuración epistémica de referencia,* entendida como un conjunto organizado de entidades primarias (lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentos). Por otra parte, puesto que las configuraciones epistémicas van evolucionando con el tiempo, conviene por operatividad considerar una secuencia de configuraciones más simples cuya integración se puede considerar como una macro configuración epistémica de referencia.

Ejemplos de aproximaciones a estas macro configuraciones epistémicas de referencia son las que se pueden hallar en Wilhelmi, Bencomo y Godino (2004) para el objeto función.

11 PRÁCTICAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS

En la tradición europea (Saussure, Hjemslev,..) la relación fundamental del signo es una relación diádica (significante y significado, expresión y contenido, etc.) y en la tradición pragmatista americana (Peirce, Morris, ...) la relación fundamental del signo es una relación triádica en la que interviene el interpretante. Por otra parte, la noción de signo tal como la describe Peirce es un aparejamiento individual entre dos fenómenos asociados que pueden ser físicos o mentales, en cambio el signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales

En la TFS se intenta la integración de estas tradiciones ya que se considera que las prácticas que constituyen la actividad matemática se pueden considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos mentales. Esta manera de considerar la actividad matemática implica contemplarla como una actividad humana más, puesto que la mayoría de las actividades humanas, por no decir todas, se pueden considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos

mentales. Si entendemos las prácticas de esta manera resulta que las prácticas admiten una análisis más fino. En la TFS se postula la hipótesis de trabajo siguiente: las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensivas (dominio de los público) y de las no ostensivas (dominio de lo privado) activadas en las prácticas matemáticas. En la TFS, las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza dentro de un determinado juego de lenguaje.

Hjelmslev en su teoría del lenguaje usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia. También establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra semiótica.

Expresión	Contenido	
Expresión		Contenido

Tabla 1

Eco denomina a la función de signo función semiótica, al señalar que existe función semiótica cuando una expresión y un contenido están en correlación, y ambos elementos se convierten en funtivos de la correlación. Godino y Batanero (1998), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Los objetos inicial y final están constituidos por entidades primarias o conjunto de ellas.

En la TFS las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schutz pasando por Husserl. La interpretación de las funciones semióticas que propone la TFS generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática (Contreras y Font 2002).

12 COMPRENSIÓN Y FUNCIONES SEMIÓTICAS

En el apartado 7 hemos considerado la comprensión básicamente como competencia y no como proceso mental. Se considera que un sujeto

comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza dentro de un determinado juego de lenguaje, permite entender la comprensión también en términos de funciones semióticas (Godino 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido).

Una de las ventajas (Font 2000b) que presenta el uso de las funciones semióticas es que permiten describir con un lenguaje unificado muchos de los procesos que se han estudiado en el campo del pensamiento matemático avanzado y que, en los diferentes trabajos de investigación, están descritos con terminologías diferentes —por ejemplo, para ver como se describen la encapsulación y desencapsulación se puede consultar Font 2000b y para los procesos metafóricos, Acevedo, Font y Giménez 2004; Acevedo, Font y Bolite Frant 2004 —.

13 ANÁLISIS ONTOLÓGICO-SEMIÓTICO DE UN TEXTO MATEMÁTICO

En Godino (2002), se propone una técnica del *análisis ontológico-semiótico* de un texto matemático que consiste básicamente en: 1) su descomposición en unidades, 2) la identificación de las entidades puestas en juego y 3) identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las mismas por parte de los distintos sujetos. Este análisis ontológico-semiótico permite formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos actores en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

Hablaremos de *análisis a priori* cuando dicha técnica se aplica a un texto que registra una actividad matemática que tiene que realizar un sujeto potencial (por ejemplo un libro de texto) y de *análisis a posteriori c*uando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas. En ambos casos se pueden detectar *conflictos semióticos*:

> <<[...] disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución.>> (Godino, 2002, p. 258).

Los análisis a priori permiten formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales —entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido—. Por su parte, los análisis a posteriori permiten determinar los conflictos semióticos realmente producidos y contrastarlos con los detectados a priori. En la TFS, los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados cuando los comparamos con el significado pretendido.

Los dos tipos de análisis comentados también permiten detectar limitaciones en los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados. Nos referimos a las limitaciones originadas por significados institucionales (pretendidos o implementados) poco representativos de los significados referenciales. Estas limitaciones se producen cuando determinadas prácticas representativas del significado de referencia no son contempladas en el significado pretendido o implementado. Por ejemplo, cuando el significado pretendido sólo contempla que el cálculo de la derivada en un punto consiste en la aplicación de una regla de derivación algebraica y en el cálculo del valor de la función en dicho punto pero no contempla otras prácticas. Nos referimos en concreto a argumentaciones de tipo variacional que permiten calcular la derivada como límite de las razones de cambio o bien a argumentaciones de tipo gráfico que permiten calcular la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Según la mayor o menor profundidad del estudio ontológico-semiótico, pueden considerarse otros dos tipos de análisis: uno, más amplio, centrado fundamentalmente en el segundo punto (identificación de las entidades puestas en juego), y otro, más pormenorizado, centrado fundamentalmente en el tercer punto (identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las diferentes entidades y facetas duales por parte de los distintos sujetos) en el que el sujeto pasa a primer plano. El primer tipo de análisis, que podemos denominar “grueso” o “macroscópico”, a pesar de su potencia explicativa, presenta limitaciones importantes y es insuficiente cuando se considera también la cognición de las personas.

El segundo tipo de análisis permite un mayor refinamiento gracias a la introducción de las cinco facetas duales que contempla la TFS, y especialmente por la consideración de las facetas expresión-contenido, intensivo-extensivo y elemental-sistémico.

Para realizar este segundo tipo de análisis ontológico-semiótico que llamaremos microscópico, se descompone el texto en unidades de análisis y se estudian las funciones semióticas establecidas. Dicha descomposición no es única sino que depende del propio investigador, quien debe efectuar la que mejor explique las relaciones dialécticas existentes entre las entidades presentes. Algo similar puede decirse de la descomposición en subunidades. El paso de una subunidad a otra subunidad se describe con las funciones semióticas.

Las aplicaciones más importantes de análisis microscópico se han realizado en el campo del análisis matemático. En Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2004) se realiza este tipo de análisis considerando como expresión o contenido de las funciones semióticas básicamente la faceta extensiva-intensiva de los objetos matemáticos. Para ello se consideran, las siguientes funciones semióticas:

	Extensional	Intensional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

Tabla 2

FS1 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.

FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

FS2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

FS3 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

FS3.1Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.

FS3.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

FS4 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

FS4.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.

FS4.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

Con estas ocho funciones semióticas, cuando tenemos diferentes maneras de representar el mismo objeto se utiliza la función semiótica FS1.2 que relaciona un extensivo con otro extensivo diferente. Ahora bien, el hecho de que las representaciones por una parte son diferentes y por la otra se pueden considerar iguales es un argumento de suficiente entidad que puede llevar a realizar análisis más finos con 18 funciones semióticas en lugar de las 8 que se han comentado anteriormente (se pueden encontrar este tipo de análisis más detallado en Font, 2000b, Contreras y Font 2002 e Inglada y Font 2003).

Las funciones semióticas anteriores no agotan todas las posibilidades de relación entre una expresión y un contenido por lo que puede ser interesante ampliar el catálogo de funciones semióticas. En Godino (2003) se propone una clasificación a partir del plano del contenido y en Godino (2004) se hace la siguiente propuesta:

> A continuación hacemos una primera propuesta; C1, C2 indican los objetos antecedente y consecuente que se ponen en relación.
>
> R1: C1 *representa a* C2
>
> R2: C1 *está asociado con* C2 (para componer un C3)
>
> R3: C1 *es parte de* C2
>
> R4: C1 *es causa/razón de* C2
>
> R5: C1 *diagnostica* C2 (relación inversa de R4)
>
> R6: C1 *es un* C2 (por ejemplo, la relación entre un extensivo y un intensivo)
>
> R7: C1 *es una propiedad/ atributo de* C2 (por ejemplo, la atribución de facetas cognitivas, atributos contextuales, a las entidades primarias)

Como relaciones entre componentes de las configuraciones didácticas definimos las siguientes:

R7: C1 *condiciona* C2

R8: C1 *organiza* C2

Puesto que el catálogo de funciones semióticas puede se muy amplio se plantea el problema de saber cuáles pueden ser las más fructíferas. Con relación a este aspecto, la aplicación al análisis infinitesimal de los tipos de funciones semióticas propuestas en Font (2000b); Contreras y Font (2002); Inglada y Font (2003); Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2004) ha dado resultados relevantes, mientras que las potencialidades de otros tipos de funciones semióticas es un tema que de momento no se ha investigado.

14 ANÁLISIS A POSTERIORI: PROCESOS DE INSTRUCCIÓN, CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS Y CRITERIOS DE IDONEIDAD.

Para poder analizar los procesos de instrucción efectivamente realizados necesitamos textos escritos. Por este motivo, las grabaciones en video de las sesiones de clase correspondientes a un proceso de instrucción conviene que sean transcritas (una posibilidad es seguir la siguiente estructura: en la columna de la izquierda se transcribe tanto el discurso oral del profesor como el de los alumnos, en la columna central se refleja lo que se escribe en la pizarra y en la columna de la derecha se hacen comentarios aclaratorios).

Una vez que tenemos estos textos escritos necesitamos descomponerlos en unidades de análisis. Una posible manera de realizar esta descomposición es tomar como unidad de análisis básica el constructo "configuración didáctica". En Godino, Contreras y Font (en revisión) se considera que una *configuración didáctica* se compone de una configuración epistémica[10], esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción, además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales (libros de texto, ordenadores, material manipulativo, etc.). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación, etc.

La configuración didáctica se concibe como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los

[10] El constructo "configuraciones epistémica" asociada a una configuración didáctica, a pesar de su nombre, es muy diferente al constructo "configuración epistémica de referencia" que ya se ha introducido en el apartado 10.

procesos de instrucción matemática. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. La agrupación en configuraciones didácticas es flexible y queda a criterio del investigador.

El análisis de las configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso de instrucción se facilita si disponemos de algunos modelos teóricos que nos sirvan de referencia. En Godino, Contreras y Font (2004) se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar este papel y que se designan como configuración *magistral*, *adidáctica*, *personal* y *dialógica*. En la figura 5 representamos en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones didácticas teóricas descritos.

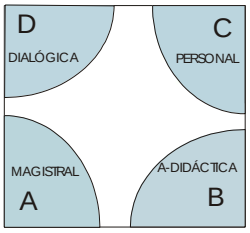


Figura 5

Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen en los procesos de instrucción efectivamente realizados pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. A lo largo de un proceso de instrucción matemática las configuraciones empíricas oscilarán en torno a estos tipos teóricos.

Los análisis a posteriori más amplios (macroscópicos) comentados en el apartado anterior serán análisis realizados sobre un conjunto amplio de configuraciones didácticas, mientras que los análisis más finos (microscópicos) se realizarán fundamentalmente sobre un número muy reducido de estas configuraciones didácticas.

Las nociones teóricas elaboradas por la TFS permiten abordar cuestiones como las siguientes: ¿De qué variables o factores depende la idoneidad de un proceso de estudio matemático? ¿En qué medida es idóneo/eficaz el proceso de estudio observado? ¿Cómo evaluar la idoneidad de un proceso de estudio matemático? , etc.

La TFS considera que la idoneidad global de un proceso de estudio se debe valorar teniendo en cuenta las seis facetas o dimensiones comentadas anteriormente. En el caso de las dimensiones docente y discentes se considera útil articularlas teniendo en cuenta las posibilidades de

identificación de conflictos y de negociación de significados. Resultan, en consecuencia, los cinco criterios de idoneidad siguientes:

- *Idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia.
- *Idoneidad cognitiva* expresa el grado de proximidad de los significados implementados con respecto a los significados personales iniciales de los estudiantes, o de manera equivalente la medida en que el "material de aprendizaje" esté en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.
- *Idoneidad semiótica* tiene en cuenta los conflictos semióticos potenciales y su resolución mediante la negociación de significados.
- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de estudio.
- *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
-

15 OBJETOS PERSONALES DEL PROFESORADO Y CRITERIOS DE IDONEIDAD

Tal como se ha dicho en el apartado 5, el significado de los objetos matemáticos y didácticos del profesorado para un objeto matemático, por ejemplo para el objeto “función”, se entiende como el conjunto de prácticas operativas y discursivas que realiza el profesor relacionadas con las funciones y con su enseñanza y aprendizaje. Este significado se puede descomponer en 1) su significado personal de “función”, su significado personal de “aprender función”, su significado personal de “enseñar función”. A su vez estos significados están relacionados con otros significados entre los que queremos destacar los siguientes: 1) su significado personal de “matemáticas”, su significado personal de “aprender”, su significado personal de “enseñar”.

Desde esta perspectiva, algunas de las prácticas que forman el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores para un determinado objeto matemático tratarán de cómo debería ser el proceso

de instrucción y otras son las que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado.

Los cinco criterios de idoneidad comentados anteriormente son herramientas que pueden ser muy útiles, tanto para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, como para valorar las prácticas que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado (Ramos y Font 2004).

Un aspecto a destacar es que si se considera que el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado son el conjunto de prácticas, operativas y discursivas, que realiza el profesor relacionadas con el objeto matemático en cuestión y con su enseñanza y aprendizaje, es necesario tener en cuenta instrumentos teóricos que permitan analizar la argumentación del profesor.

Otro aspecto a destacar es que la consideración de los criterios de idoneidad está inevitablemente relacionada con el problema del cambio en la institución escolar. En efecto, ante la pregunta ¿Qué hay que hacer cuando los criterios de idoneidad permiten afirmar que el proceso de instrucción no es suficientemente idóneo? La respuesta es: intentar cambiar algún aspecto del proceso de instrucción que permita mejorar su idoneidad y esto lleva, inevitablemente, a la pregunta ¿Cómo se produce el cambio en la institución escolar?. Pregunta de suficiente entidad como para terminar con ella este trabajo.

REFERENCIAS

Acevedo, I. J.; Font, V.y Giménez, J. (2004) Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. In Giménez,, J, Fitzsimons,G, Hahn,C (ed) *Globalisation and mathematics Education*. *CIEAEM 54* (pp. 336-342). Barcelona: Graó.

Acevedo, I. J.; Font, V.y Bolite Frant (2004). Metáforas y funciones semióticas. el caso de la representación gráfica de funciones. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2004) El significado del teorema central del límite: evolución histórica a partir de sus campos de problemas. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004.

Contreras, A. (2004). Los registros de representación semiótica y la teoría de las funciones semióticas. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004.

Contreras, A.y Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (Boletín nº 14), pp. 1-21.

Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. y Ordóñez, L. (2004), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

Font, V. (2000a). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona.

Font, V. (2000b). Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria, *La lettre de la Preuve*, Noviembre/ Diciembre 2000, pp. 1-21.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix,* 19, 33-36.

Font, V.y Peraire, R. (2001) Objetos, prácticas y ostensivos asociados. el caso de la cisoide, *Educación matemática*, 13(2), 55-67

Font, V.y Ramos, A. B. (en prensa). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.

Godino J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: El autor.

Godino J. D. (2004), algunos desarrollos de la teoría de las funciones semióticas: hacia un enfoque unificado de la cognición e instrucción en didáctica de las matemáticas. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J.

Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18.

Ramos, A.B.y Font, V. (2004) Creencias y concepciones del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales *Actas III. Congreso Internacional Docencia Universitaria e Innovación*.

Ramos, A.B.y Font, V. (2004). Análisis de prácticas discursivas del profesorado sobre la contextualización de funciones. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004.

Wilhelmi, M. R.; Bencomo, D. y Godino, J. D. (2004). Criterios para la descripción y valoración de un proceso de instrucción matemática. *VIII Simposio de la SEIEM.*

Wilhelmi, M. R.; Godino, J. D. y Lacasta, E. (2004). Eficacia didáctica de definiciones equivalentes de una noción matemática. El caso del valor absoluto. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004.

Wilhelmi, M. R.; Lacasta, E. y Godino, J. D. (2004). *Configuraciones asociadas a la noción de igualdad de números reales*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.

ALGUNOS DESARROLLOS DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS[11]

Juan D. Godino

Universidad de Granada

RESUMEN

Presentamos una síntesis y estructuración de las nociones teóricas que configuran la Teoría de las Funciones Semióticas mediante la que se trata de articular de manera coherente supuestos antropológicos, ecológicos, sistémicos, ontológicos y semióticos. Las nociones introducidas pueden ser organizadas en torno a tres modelos teóricos: significados sistémicos, funciones semióticas y configuraciones didácticas. De esta manera se dispone de herramientas conceptuales para el estudio de la cognición matemática (institucional y personal), los procesos de interpretación en la interacción didáctica, y la instrucción matemática (proceso de enseñanza y aprendizaje organizados en el seno de los sistemas didácticos). Presentamos, así mismo, algunos nuevos desarrollos de las teorías mencionadas y de los tipos de problemas abordables.

SOME DEVELOPMENTS OF THE THEORY OF SEMIOTIC FUNCTIONS

ABSTRACT

We present a synthesis and structuring of Semiotic Function Theory notions by which we try to articulate in a coherent way anthropological, ecological, systemic, ontological and semiotic assumptions. These notions are organised around three theoretical models: systemic meanings, semiotic functions and didactic configurations. In this way we provide conceptual tools to study (institutional and personal) mathematical cognition and instruction (teaching and learning process within a didactical system). We also present some new developments of the afore mentioned theories and of possible related research problems.

1. UNA PERSPECTIVA TRANSDISCIPLINAR

En este trabajo reflexionamos sobre la naturaleza y alcance del marco teórico que venimos designando como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) y describimos nuevos desarrollos conceptuales y metodológicos relacionados. Sugerimos que la noción de función

[11] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 93-111)

semiótica, que se usa como "emblema" o descriptor de este marco teórico, forma parte de un sistema de nociones que configuran algo más que un enfoque semiótico de la cognición matemática. El poner nombre a los marcos teóricos es necesario para reconocer su existencia y especificidad, pero puede ocultar las filiaciones y conexiones con el sustrato cultural de donde provienen y el papel que pueden desempeñar en el desarrollo de la didáctica de las matemáticas.

El trabajo inicial sobre los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998) se inscribe dentro de la "didáctica fundamental" (Gascón, 1998), y más concretamente del enfoque antropológico (Chevallard, 1992), a cuyo desarrollo contribuye con la noción de "sistema de prácticas personales e institucionales". En un intento por superar planteamientos reduccionistas se postula la dualidad personal – institucional, tanto para los sistemas de prácticas, los objetos emergentes de dichos sistemas y los significados, los cuales son interpretados en términos de sistemas de prácticas. Las nociones de semiometría (caracterización de significados sistémicos) y ecología de significados (relaciones entre significados) suponen la adopción de supuestos aportados por la epistemología ecológica y la teoría de sistemas, entendida ésta en su acepción más general.

Desarrollos más recientes de la TFS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2004; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa) han puesto el énfasis en la elaboración de una ontología matemática explícita (tipos de entidades primarias y facetas cognitivas duales) que sirva de apoyo para analizar los significados sistémicos y los procesos de interpretación que tienen lugar en la actividad matemática y didáctica.

Bajo las siglas TFS hay, por tanto, un esfuerzo por contribuir, desde una posición transdisciplinar (Anes et al. 1994), al desarrollo de un enfoque unificado de los fenómenos didácticos (epistémicos, cognitivos e instruccionales), para lo cual es necesario asumir presupuestos antropológicos, ecológicos, sistémicos, ontológicos y semióticos (Godino, 2003). Dado que nuestra principal aportación se refiere a los aspectos ontológicos y semióticos proponemos designar a esta perspectiva teórica como "enfoque ontosemiótico" (EOS).

2. UN ENFOQUE Y TRES TEORÍAS

Desde el año 1993, en el que se publicó una primera versión de nuestro trabajo sobre los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1993), se han ido proponiendo nuevos

desarrollos, inicialmente centrados en la modelización de los conocimientos matemáticos (institucionales y personales). Recientemente (Godino, Contreras y Font, 2004) hemos abordado la modelización de los procesos de instrucción matemática. En una etapa intermedia se han desarrollado algunas nociones que configuran una semiótica cognitiva para la didáctica de la matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa) mediante la que se pretende describir y explicar los procesos de comunicación e interpretación en la interacción didáctica. En los siguientes apartados indicamos las nociones que componen cada uno de estos tres modelos teóricos (Figura 1) y resaltamos los desarrollos más recientes.

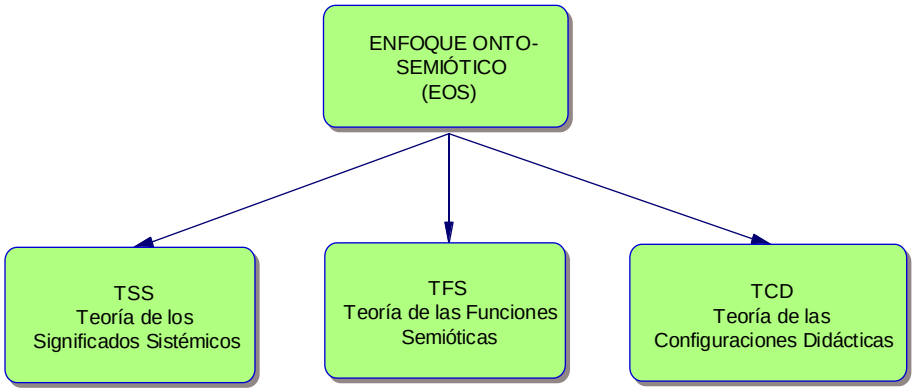


Figura 1: Un enfoque unificado y tres modelos teóricos

2.1. Teoría de los Significados Sistémicos (TSS)

En la tabla 1 listamos las nociones que componen lo que podemos describir como "teoría de los significados sistémicos" y las publicaciones donde se han desarrollado.

Tabla 1: Nociones y fuentes de la TSS

Nociones	*Fuentes* (1)
Campos de problemas Prácticas matemáticas Sistemas de prácticas Objetos emergentes Significados sistémicos Dualidad personal e institucional	Godino y Batanero (1994) Godino y Batanero (1998)
Entidades primarias (elementos del significado)	Godino (2002)
Tipos de significados sistémicos	Godino (2003)

Configuraciones epistémicas y cognitivas Significado global (holo-significado)	Godino, Contreras y Font (2004) Wilhelmi, Lacasta y Godino (2004)

(1) En la monografía Godino (2003) presentamos de manera sistemática todas las nociones indicadas; las referencias incluidas corresponden a las publicaciones originales. Todas estas referencias están disponibles en http://www.ugr.es/local/jgodino (Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática)

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Un análisis más fino de la actividad matemática ha llevado a introducir en diversos trabajos los "elementos del significado", concretados en listados de objetos clasificados según los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones epistémicas" (si se refieren a significados institucionales) o "configuraciones cognitivas" (significados personales), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Interesa atribuir la relatividad de los sistemas de prácticas no sólo respecto de marcos institucionales, sino también respecto de los contextos de uso dentro de una misma institución, o incluso a "juegos de lenguaje" (cualquier fragmento de nuestras prácticas lingüísticas efectivamente realizadas). Este relativismo socio-epistémico-pragmático contrasta con la visión tradicional de los objetos matemáticos como entidades universales y atemporales. La introducción de la noción de "significado global" (u holo-significado), que abarcaría el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso (o una muestra representativa de los mismos), es un intento de resolver el problema del relativismo. Desde un punto de vista formalista es posible identificar una misma estructura en la variedad del sistema de prácticas operatorias y discursivas puestas en juego en los diversos contextos de uso del objeto. Esa estructura formal es "el objeto matemático" - universal y atemporal- con el que trabaja el matemático profesional y al que se refiere Wittgenstein, según nuestra interpretación, cuando define la matemática como la "gramática del lenguaje que usamos para describir determinados aspectos de nuestros mundos".

Cada contexto de uso da lugar a una red de objetos y relaciones que designamos como *configuración epistémica local*. En cierto modo, cada configuración epistémica local "modeliza" un aspecto parcial del significado de la noción correspondiente: la configuración es el sistema modelizador y la noción el objeto modelizado. Parece útil hablar de "modelo" para expresar el tipo de relación que se establece entre una configuración local (o parcial) y la configuración global en la que se concreta el significado global de un objeto o noción matemática. La relación entre una configuración parcial y la configuración global no es simplemente de composición (de parte a todo). En cierto modo cada subconfiguración incorpora aspectos del todo, y desempeña el papel de modelo del todo. Considerar como "modelos" a las configuraciones parciales puede ayudar a tomar conciencia de la metonimia que se pone en juego cuando se confunde el significado de un objeto con alguno de sus sentidos o significados parciales.

En la figura 3 mostramos una red de configuraciones epistémicas de la noción de igualdad de números reales relativas en este caso a distintos contextos de uso internos a la propia matemática (Wilhelmi, Lacasta y Godino, 2004). En este artículo se analizan las relaciones existentes entre estas configuraciones epistémicas, las cuales se sintetizan en la figura 2, y las características del trabajo matemático que se desarrolla con las mismas.

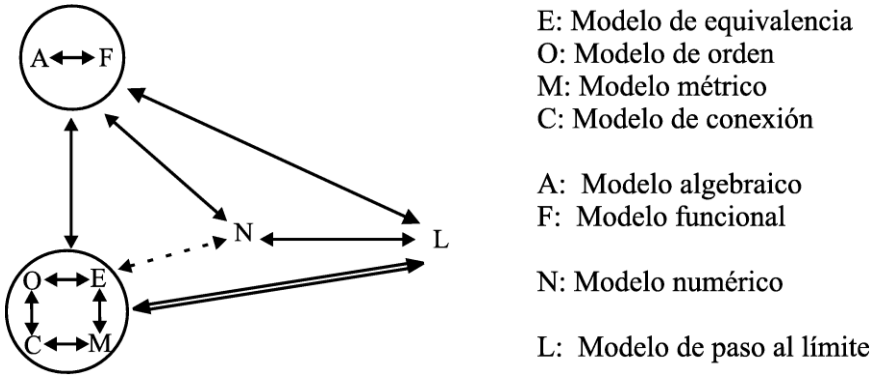


Figura 2: Representación del holo-significado de la noción de igualdad

La longitud de las flechas determina la distancia de los modelos; distancia medida como intervalo de tiempo (dos modelos están próximos si su introducción se puede realizar de manera pertinente dentro de una misma unidad temporal del proceso de estudio) o como intervalo de lugar (dos modelos permanecen próximos en la medida en que son utilizados simultáneamente en una amplia clase de situaciones). Las fechas dobles refieren una interacción dialéctica entre modelos: un modelo se comprende esencialmente por oposición a otro modelo. La interacción, entonces, no es

circunstancial a unas prácticas naturalizadas o a una estructuración cultural del saber, sino que tiene una relación inseparable de los propios modelos. La flecha discontinua determina una relación de naturaleza no esencialmente epistemológica, sino material (instrumentos de cálculo utilizados) o práctica (usos específicos en las instituciones educativas actuales). Por último, el halo que circunda los modelos determina un sistema de modelos que únicamente pueden ser diferenciados por las realizaciones, esto es, por los usos de los modelos, por los contextos donde aparecen.

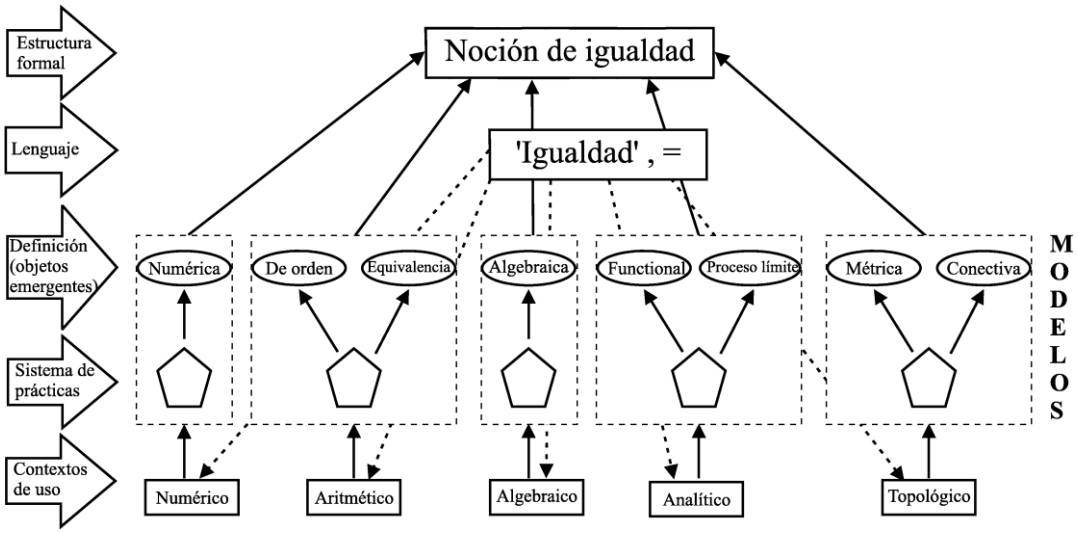


Figura 3: Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales.

En la figura 4 mostramos un ejemplo de configuración epistémica global de la noción de función elaborada a partir de la tesis de Ruiz (1994). La disposición en círculos concéntricos de las distintas configuraciones parciales expresa la progresiva ampliación de los sistemas de prácticas asociados a la noción de función, desde planteamientos implícitos/ intuitivos (proto-matemáticos), hasta la formalización más general mediante la teoría de conjuntos. Este crecimiento no será, en general, uniforme y acumulativo, sino que puede haber cambios radicales en el tránsito de una a otra configuración por la superación de obstáculos y la incorporación de nuevas herramientas conceptuales y metodológicas.

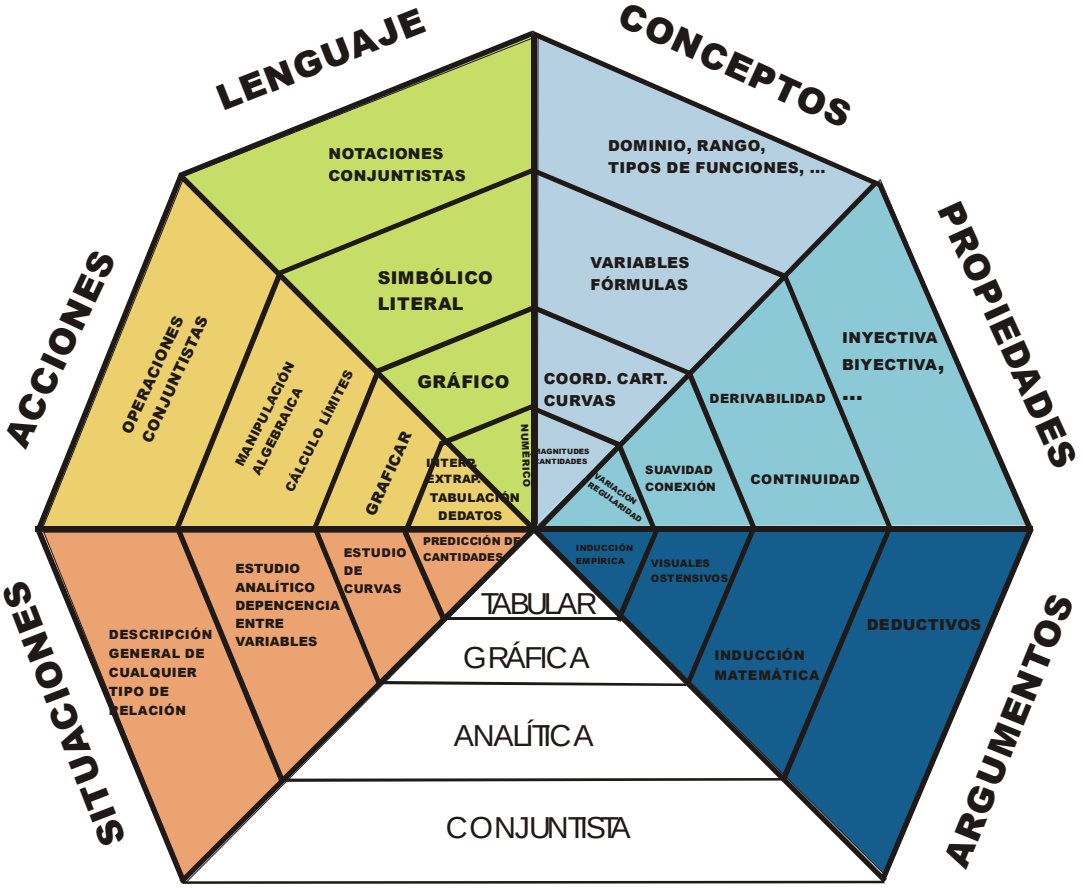


Figura 4: Configuraciones epistémicas de la noción de función

2.2. Teoría de las funciones semióticas (TFS)

En la tabla 2 listamos las nociones que componen lo que podemos describir como "teoría de las funciones semióticas" y las publicaciones donde se han desarrollado.

Tabla 2: Nociones y fuentes de la TFS

Nociones	Fuentes (1)
Facetas cognitivas duales	Godino y Recio (1998)
Función semiótica	Godino (2002)
Significados elementales	Godino, Batanero y Roa (en prensa)
Conocimientos matemáticos como redes de funciones semióticas	Contreras, Font, Luque y Ordóñez (en prensa)
Tipos de conocimientos	
Análisis onto-semiótico	
Conflictos semióticos y sus tipos	

(1) En la monografía Godino (2003) presentamos de manera sistemática todas las nociones indicadas; las referencias incluidas corresponden a las publicaciones originales.

En la aplicación y desarrollo de la TFS destacamos los resultados obtenidos por Contreras, Font y colaboradores en diversos trabajos del campo del análisis matemático (Font, 2000; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa; Inglada y Font, 2003). Mediante una tipología de funciones semióticas basada en el uso de la faceta dual *extensivo-intensivo* están mostrando la complejidad ontosemiótica de distintas nociones analíticas y explicando la presencia de diversos conflictos semióticos derivados de la no distinción de dicha dualidad cognitiva en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es importante clarificar que la noción de función semiótica (dependencia entre un antecedente y un consecuente) no la usamos sólo cuando una entidad lingüística refiere o denota otro objeto (uso representacional). La teoría del lenguaje de Hjemslev (1964) concibe el análisis de los textos como progresión exhaustiva y deductiva de la clase al componente y al componente del componente, y como identificación de las dependencias entre las distintas partes, sus componentes y el texto en su conjunto. Parece necesario progresar en la categorización de los diversos tipos de "dependencias" o relaciones entre objetos que interesa tener en cuenta en el análisis de los textos que reflejan la actividad matemático-didáctica. A continuación hacemos una primera propuesta; C1, C2 indican los objetos antecedente y consecuente que se ponen en relación.

R1: C1 *representa a* C2

R2: C1 *está asociado con* C2 (para componer un C3)

R3: C1 *es parte de* C2

R4: C1 *es causa/razón de* C2

R5: C1 *diagnostica* C2 (relación inversa de R4)

R6: C1 *es un* C2 (por ejemplo, la relación entre un extensivo y un intensivo)

R7: C1 *es una propiedad/ atributo de* C2 (por ejemplo, la atribución de facetas cognitivas, atributos contextuales, a las entidades primarias)

Como relaciones entre componentes de las configuraciones didácticas definimos las siguientes:

R7: C1 *condiciona* C2

R8: C1 *organiza* C2

Las nociones incluidas en los modelos teóricos descritos en las secciones 2.1 y 2.2, Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) y Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), constituyen conjuntamente una respuesta operativa al problema de la significación y representación del conocimiento matemático. En la figura 5 tratamos de sintetizar y articular ambos modelos teóricos.

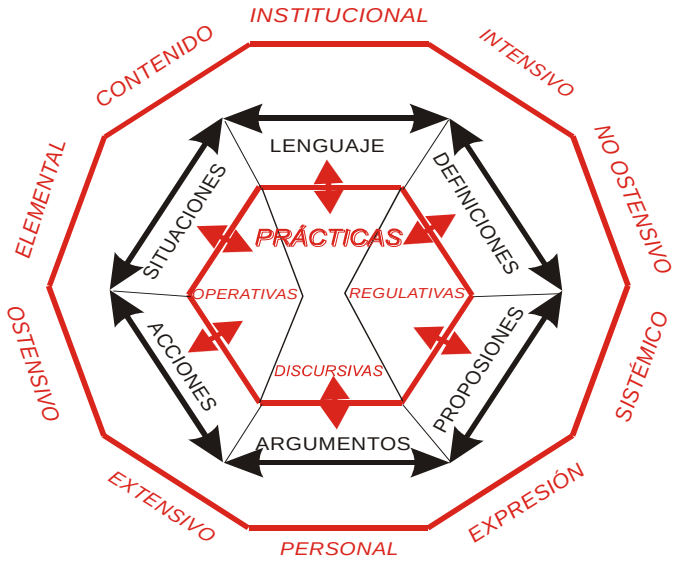


Figura 5: Una ontosemiótica del conocimiento matemático

2.3. Teoría de las Configuraciones Didácticas (TCD)

En tabla 3 listamos las nociones que componen lo que podemos describir como "teoría de las configuraciones didácticas" y las publicaciones donde se han desarrollado.

Tabla 3: Nociones y fuentes de la TCD

Nociones	Fuentes
Modelación estocástica de un proceso de instrucción Configuraciones didácticas (subconfiguraciones, epistémica, docente, discente, cognitiva, mediacional, emocional) Trayectoria didáctica Patrones de interacción Criterios de idoneidad (epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional, emocional)	Godino, Contreras y Font (2004)
Conflictos didácticos (epistémicos, cognitivos e instruccionales)	Bencomo, Wilhelmi y Godino (2004)

Hemos aplicado los criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática a un ejemplo sobre enseñanza de la noción de función a un grupo de estudiantes de primer curso de ingeniería. Hemos definido la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia de un proceso de instrucción en base a su adecuación al proyecto de enseñanza Su indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos. La idoneidad didáctica comprende a su vez tres idoneidades: epistémica, cognitiva e instruccional (esta incluye la semiótica y la mediacional), las cuales son definidas del siguiente modo:

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).
2. *Idoneidad cognitiva*: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos materiales y temporales disponibles.
3. *Idoneidad instruccional*: capacidad de las configuraciones y trayectorias didácticas para que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (*a priori*), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (*a posteriori*), y de resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos materiales y de tiempo disponibles).

En la figura 6 incluimos una red que representa la estructura de una configuración didáctica.

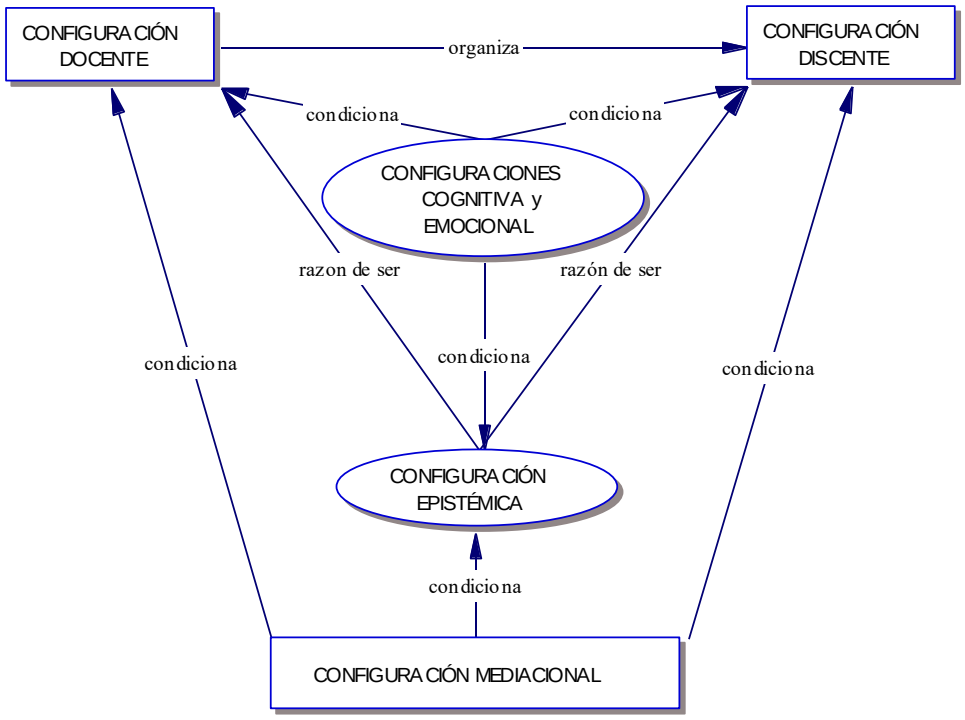


Figura 6: Estructura de una configuración didáctica

3. UN RECURSO INFORMÁTICO PARA EL ANÁLISIS ONTO-SEMIÓTICO: EL PROGRAMA ATLAS/TI

La categorización de objetos matemáticos como instrumento para describir la actividad matemática y didáctica propuestos por la TFS y la TCD muestra la complejidad de los procesos de estudio matemáticos. Un objetivo básico de la investigación en didáctica de las matemáticas consiste en encontrar explicaciones de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basadas en la complejidad de objetos matemáticos y didácticos puestos en juego en los procesos de estudio. De tales explicaciones se derivan criterios de idoneidad de las configuraciones didácticas.

El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática supone un reto metodológico ya que el sistema de objetos y relaciones (funciones semióticas e interacciones didácticas) que produce el análisis detallado de los textos presenta una gran complejidad. La identificación de regularidades y estructura de los sistemas de objetos matemáticos-didácticos es una tarea analítica que no es posible automatizar, por su

carácter cualitativo-interpretativo, pero pensamos que se puede apoyar en el uso de recursos informáticos.

En Wilhelmi, Bencomo y Godino (2004) iniciamos la descripción del uso del programa ATLAS/ti como medio de almacenamiento dinámico del sistema de códigos y familias de códigos que la TFS y la TCD aportan para el análisis ontosemiótico de un texto matemático (o didáctico-matemático). Las bases de datos relacionales que permite construir ATLAS/ti se pueden estructurar de manera que representen la estructura de los conocimientos matemáticos y didácticos puestos en juego en los textos analizados. El editor de redes del programa permite mostrar *vistas parciales* de las redes ontosemióticas construidas en las *unidades hermeneúticas*.

El programa ATLAS/ti (Muhr, 1997) es un software informático que se utiliza como herramienta de ayuda al análisis cualitativo. Con este programa el analista o investigador puede realizar, en un mismo espacio *(la unidad hermenéutica),* tareas que son propias del análisis cualitativo: la segmentación de textos, codificación, o la escritura de comentarios y anotaciones; es decir, todas aquellas tareas que, de no contar con el programa, se realizarían con herramientas como papel, tijeras, marcadores de colores, fotocopias.

Además, este programa permite la elaboración de redes semánticas (*Networks*); es decir, la representación gráfica de los diferentes componentes (segmentos o citas, categorizaciones, comentarios o anotaciones) y de las relaciones que se hayan establecido entre ellos. Los componentes y las relaciones pueden ser modificados, eliminados incluso creados desde las propias representaciones convirtiendo así a los *Networks* en un espacio para desarrollar y refinar el trabajo. Cuando los componentes son conceptos constituyen mapas conceptuales. La adopción del modelo epistemológico y cognitivo propuesto por el EOS nos lleva a hablar de "redes ontosemióticas", en lugar de mapas conceptuales, para expresar la red de objetos y relaciones que reflejan la estructura de los sistemas de prácticas y objetos emergentes.

El programa ATLAS/ti organiza la información que procesa en unidades que denomina, *unidades hermenéuticas (U.H.)*, conjunto de documentos que se pretenden descomponer en segmentos o citas y estudiar el sistema de objetos puestos en juego y relaciones existentes entre ellos. En nuestro caso podemos definir distintos tipos de unidades hermenéuticas según la dimensión o faceta del proceso de estudio que interese en cada caso. El texto o textos puede ser el enunciado y solución de un problema o tarea matemática que se propone como referencia (solución experta, por ejemplo, del profesor) del proceso instrucción. En este caso se hablará de

una U.H. correspondiente a una configuración epistémica (o de una trayectoria epistémica si se analiza una secuencia de problemas). Si la solución corresponde a la respuesta de un sujeto individual hablamos de U.H. de una configuración (resp.trayectoria) cognitiva. Si los textos incluidos en la U.H corresponden a las trascripciones de las interacciones profesor-estudiante, usando unos recursos tecnológicos específicos, hablaremos de U.H de una configuración instruccional.

Las categorías de objetos matemáticos, junto con las facetas duales cognitivas, y los objetos didácticos serán representados como *familias* de códigos, indicando mediante códigos los objetos específicos que se ponen en juego en cada U.H. Las *anotaciones* se usarán para representar los hechos didácticos indicativos de *actos de comprensión* (semiosis y *conflictos semióticos* potenciales o efectivos. Los tipos de actos de semiosis, conflictos y patrones de interacción serán representados como *familias de anotaciones*.

4. DESARROLLO DE LA AGENDA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado formulamos algunas cuestiones de investigación utilizando las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Usamos como ejemplo el área problemática de la formación matemática y didáctica de profesores de educación primaria (proyecto Edumat-Maestros).

4.1. Foco epistémico (TSS y TCD)

En los manuales Edumat-Maestros (Godino, 2004) se define un plan de formación matemática (y didáctica) para los maestros. La definición se hace a nivel de significados pretendidos o planificados (o también, significado curricular).

- ¿En qué medida es idóneo el significado curricular propuesto para la formación matemática (respectivamente, didáctica) de los maestros en las áreas de aritmética, geometría, medida, estocástica, razonamiento algebraico?

La valoración de la idoneidad de unos significados locales necesita la reconstrucción previa de un significado de referencia. En este caso la institución de referencia será la comunidad de expertos en la formación de maestros y los propios maestros en ejercicio.

- ¿Cuáles son las necesidades socio-profesionales de los maestros con relación a los distintos bloques de contenido matemático (respect. didáctico)?
- ¿Qué restricciones cognitivas, temporales, etc. condicionan la implementación del significado curricular programado? ¿Cuáles son las características del significado curricular alcanzable?
- ¿Cuáles son las características de los significados efectivamente implementados en una experiencia particular? ¿Qué factores condicionan la implementación efectiva de unos significados curriculares programados?

Un estudio de este tipo aportará criterios para la elaboración de propuestas curriculares y una metodología para dicha elaboración. Se trata de elaborar una estrategia de desarrollo del currículo de matemáticas (y de didáctica) para cubrir necesidades socio-profesionales específicas.

4.2. Foco cognitivo (TSS y TFS)

La caracterización de los significados personales de los estudiantes de magisterio sobre los distintos bloques de contenidos matemáticos y didácticos (o contenidos específicos como los decimales, etc.), tanto iniciales como finales, mediante pruebas objetivas es un campo prácticamente inexplorado. Sabemos por experiencia que tales significados son inadecuados para el ejercicio profesional competente, pero no por estudios sistemáticos.

La caracterización de trayectorias cognitivas y emocionales de los estudiantes en procesos de instrucción específicos, a fin de valorar los factores condicionantes de la idoneidad cognitiva y emocional de tales procesos, es otra problemática que se debe abordar. Esto requiera elaborar instrumentos de evaluación adecuados (guiones de entrevistas y cuestionarios - previos y posteriores a la realización del proceso)

4.3. Foco instruccional (TFS y TCD)

La búsqueda de criterios de idoneidad instruccional, la identificación de tipos de configuraciones y trayectorias instruccionales idóneas para optimizar el aprendizaje, y la identificación de factores condicionantes de su implementación es un área de investigación que requiere investigación.

En cada uno de los tres escenarios de estudio implementados en el proyecto Edumat-Maestros (aula tradicional, aula de informática, estudio personalizado)

- ¿Qué aprenden los estudiantes que han seguido cada proceso instruccional?
- ¿De qué factores depende el aprendizaje?
- ¿Cómo se podría mejorar la idoneidad del proceso de estudio?
- ¿Cuál es el papel del diálogo-situado y de los momentos de regulación en el aprendizaje matemático?

5. OBSERVACIONES FINALES

La gran complejidad de los problemas que plantea la educación matemática, que debe abordar cuestiones de carácter científico (descriptivo y explicativo), tecnológico (desarrollo de medios de acción) y práctico (toma de decisiones locales eficaces), explica la profusión de enfoques teóricos y metodológicos existentes. Actualmente la didáctica de la matemática puede considerarse una disciplina madura en el sentido sociológico, pero no ocurre igual necesariamente en el sentido teórico y metodológico. No existe un marco establecido de manera general o un consenso relativo a escuelas de pensamiento, paradigmas de investigación, métodos, estándares de verificación y calidad. Aunque hay autores que defienden el uso de una variedad de enfoques y métodos de investigación en didáctica de la matemática, considerando esta situación como beneficiosa para el desarrollo de la disciplina, sin embargo, esta diversidad origina una fuerte confusión entre las diversas comunidades de investigadores, haciendo a menudo improductivos los esfuerzos.

Dado que los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas involucran diversas facetas o dimensiones, parece necesario que su estudio se realice con herramientas conceptuales y metodológicas específicas de cada una de ellas. Son necesarias, entre otras, unas teorías sobre el propio saber matemático como fenómeno sociocultural; otras que ayuden a describir y explicar los fenómenos de cognición individual y teorías sobre el estudio de las matemáticas en las instituciones escolares (enseñanza y aprendizaje). Pero estas teorías parciales tienen que ser articuladas de manera coherente para poder reconocer y analizar las interacciones entre las diversas facetas. Consideramos que el progreso en el campo está supeditado a la elaboración de teorías didácticas de nivel

intermedio que ayuden a superar las limitaciones de visiones demasiado amplias, como el constructivismo, o demasiado estrechas, que se limitan a la descripción de hechos puntuales (grounded theory). El "*enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*" –que asume asimismo supuestos antropológicos, ecológicos y sistémicos- , junto con los tres modelos teóricos descritos en este trabajo, pretende progresar en dicha dirección.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación MCYT-FEDER BS2002-02452.

REFERENCIAS

Anes, J., Astier, A., Bastien, J. Berger, R. et. al. (1994). *Carta de la transdisciplinariedad.* Convento de Arrábida, Noviembre 1994. Disponible en: http://www.filosofia.org/cod/c1994tra.htm

Bencomo, D., Wilhelmi, M. R. y Godino, J. D. (2004). Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*. Castellón: Universitat Jaume I.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (en prensa). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (aceptado).

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria. *La Lettre de la Preuve,* Noviembre-Diciembre 2000, pp. 1-21.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1): 7-33.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Monografía de Investigación para el Concurso a Cátedra de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J. **D**. y Batanero, C. (1993). La notion du signifié dans la didactique des Mathematiques. En M. Artigue y cols (Eds.), *Vingt ans de Didáctique des Mathématiques en France* (pp. 218-224). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). A semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educacional Studies in Mathematics* (aceptado).

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thoughy, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos, 1971.

Inglada, N. y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm

Muhr, T. (1997). *ATLAS/ti*: *Short user's manual. Visual qualitative data. Analysis management model building.* Berlin: Scientific Software Development's.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2004). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en:

http://www.ugr.es/local/jgodino.

Wilhelmi, M. R., Bencomo, D. y Godino, J. D. y (2004). Elaboración de redes ontosemióticas de configuraciones didácticas con Atlas/ti. En, A. J. Cañas, J. D. Novak, F. M. González (Eds.), *Concept Mapas: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping*. (pp. 71-

74, Vol. 2). Pamplona: Dirección de Publicaciones de la Universidad Pública de Navarra.

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.

COMUNICACIONES

RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO GLOBAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[12]

Edson Crisóstomo
Universidad Estatal de Montes Claros, Brasil
Lourdes Ordóñez
IES "Albariza" de Mengíbar, Jaén
Ángel Contreras
Universidad de Jaén
Juan D. Godino
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo tratamos de clarificar el significado de la integral definida desde un marco institucional global que describimos como histórico-epistemológico-didáctico. El significado lo interpretamos como sistema de prácticas las cuales ponen en juego objetos emergentes que son clasificados en seis categorías: situaciones-problemas, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. El sistema de objetos matemáticos se estructura en siete configuraciones epistémicas que designamos como, finita, intuitiva, infinita, primitiva, sumatoria, analítica y generalizada, las cuales son interpretadas como significados parciales de la integral. Esta reconstrucción del significado global de la integral se considera como un primer paso para abordar el análisis de los problemas de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático.

REBUILDING THE GLOBAL MEANING OF DEFINED INTEGRAL FROM THE PERSPECTIVE OF MATHEMATICS EDUCATION

ABSTRACT

In this work we clarify the meaning of defined integral from a global institutional framework that we describe as historical- epistemological- didactical. We interpret meaning as system of practices dealing with emergent objects, which are classified into six categories: problem-situations, actions, language, concepts, properties and

[12] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 112-152)

arguments. This system of mathematical objects is structures in seven epistemic configurations: finite, intuitive, infinite, primitive, summative, analytic and generalised, which are interpreted as partial meaning of integral. This rebuilt of the systemic meaning of integral is the first step to approach the analysis of teaching and learning of this mathematical object.

1. PROBLEMA, ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

La creciente cantidad de investigaciones en didáctica de las matemáticas relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los primeros niveles universitarios ha puesto de manifiesto, no solamente el interés surgido por esta línea de investigación, sino la gran cantidad de problemas educativos que suelen presentarse en dicho proceso (Holton, 2003).

Muchas investigaciones han sido desarrolladas dentro de la línea del "pensamiento matemático avanzado" (Tall, 1991, 1996); además, podemos señalar las aportaciones encontradas en los PME de los últimos cuatro años a través de los trabajos de Bezuidenhout and Olivier (2000); Czarnocha et al. (2001); Rasslan y Tall (2002); Carlson et al. (2003) están centradas en la problemática relativa a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Para Dreyfus y Eisenberg (1990), esto está ligado no solamente con el hecho de que el cálculo es la rama de la matemática avanzada, a la que se dedica una mayor cantidad de tiempo en los estudios científicos-técnicos, sino por el número de problemas no triviales que suelen presentarse en su proceso de aprendizaje. Artigue (1998, 2003) apunta también a la formalización que se requiere en niveles universitarios y que obliga al alumno a romper con el trabajo algebraico ordinario y a reconstruir significados como el de igualdad. Además, consideramos que la significativa presencia del curso de cálculo en los currículos iniciales de distintas carreras universitarias (en las áreas de ciencias exactas y tecnológicas, sociales, biológicas, y de humanidades), y los elevados niveles de fracaso escolar y, consecuentemente, de reprobación y deserción de los estudiantes revelan no solamente la complejidad existente en su estudio, sino la necesidad de desarrollar nuevas investigaciones relativas a la problemática específica del cálculo en la enseñanza universitaria.

Artigue (1991) señaló las dificultades que surgen para los estudiantes en un curso de introducción al cálculo, destacando que en la enseñanza tradicional de dicha disciplina esto se resuelve a través de una excesiva algebrización, resaltando principalmente: el predominio de la manipulación de fórmulas en lugar de las funciones; del cálculo de derivadas en lugar de la teoría de aproximaciones lineales; del cálculo de primitivas en lugar de

la búsqueda de significados para la integral; de algoritmos (o recetas) para calcular ecuaciones diferenciales en lugar de solucionarlas a través de aproximaciones numéricas y gráficas. Por otra parte, en Artigue (1998) se cita el obstáculo de la heterogeneidad de las dimensiones (Schneider, 1988) relacionado con la consideración de la superficie como apilamiento de segmentos, semejante al desarrollado por Cavalieri, que permite determinar igualdades y relaciones de áreas y volúmenes. Pero esta concepción induce procedimientos donde, según la autora:

- ✓ una cierta percepción de las magnitudes se inmiscuye en los cálculos de áreas o de volúmenes de manera inconsciente e indebida; lo que provoca errores la mayoría de las veces;
- ✓ magnitudes de dimensiones distintas se mezclan en el seno de esta percepción (sólidos con superficies o superficies con líneas).

Por tanto, se concluye abusivamente que dos magnitudes son entre ellas como sus indivisibles respectivos, pues son divididas como estos últimos y muestra cómo este conflicto semiótico, que podemos considerar epistemológico, se detecta en los significados personales de los alumnos llevándoles a error en determinadas situaciones.

Nuestro interés se relaciona con una de las dificultades anteriormente señaladas y consiste en la caracterización de los significados institucionales de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. Consideramos que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, como es el caso de la integral definida, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Para caracterizar dichos significados proponemos una revisión histórico-epistemológico-didáctica que nos mostrará las situaciones que dieron origen a cada significado, los conflictos y rupturas que hubo que superar en cada etapa y los diferentes modos de hacer hasta llegar a nuestros días. Entendiendo que “reconocemos en el hecho histórico aquellos puntos neurálgicos que nos permitan conducir nuestra labor educativa y adaptamos ésta al momento histórico presente” (Farfán, 1997 p.3). Este estudio deberá aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen.

Basados en la referida idea, desarrollamos una investigación cuya cuestión central fue:

¿Cómo caracterizar y reconstruir el "significado global" de la integral definida en el marco institucional histórico-epistemológico-didáctico?

Esta cuestión ha sido abordada por investigaciones previas desde distintos puntos de vista, como se detalla en los trabajos de Contreras y cols (2003) y Ordóñez y Contreras (2003), Crisóstomo (2004), entre otros.

En el presente trabajo, trataremos de refinar los estudios previos como forma de acercarnos más detalladamente a las distintas configuraciones epistémicas, que en su totalidad se convertirán en el significado global de la integral definida en la perspectiva de la didáctica de la matemática.

A pesar de que las investigaciones sobre la integral son numerosas consideramos que no hay aún una respuesta única y definitiva sobre la cuestión planteada. Nos parece necesario indagar sobre la evolución y estructuración de los sistemas de prácticas ligados al objeto matemático "integral definida" desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje.

Adoptamos como marco teórico el *enfoque onto-semiótico* para la didáctica de la matemática, propuesto por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2005). En este marco, la clarificación del significado de los objetos matemáticos se propone como una fase previa al planteamiento de cuestiones más específicas sobre la enseñanza y el aprendizaje de dichos objetos.

Godino y Batanero (1994) proponen una noción pragmática, sistémica y relativista del significado de los objetos matemáticos, concretamente, como "el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que se realizan en el seno de una institución I (o por un sujeto individual) ante una cierta clase de problemas matemáticos". Para un mismo campo de problemas, cambiando I podemos encontrar distintas prácticas, y por tanto, distintos significados, pero pueden identificarse en los sistemas de prácticas y objetos emergentes ciertos componentes y relaciones estructurales comunes, lo que explica su designación con el mismo término o expresión matemática (función, derivada, integral definida, etc.)

Desde un punto de vista histórico-epistemológico encontramos que los sistemas de prácticas matemáticas implementadas para resolver un cierto tipo de problemas (por ejemplo, el cálculo de áreas delimitadas por curvas) se van progresivamente ampliando a medida que se afronta la solución de problemas cada vez más generales, y se organizan y justifican las técnicas de solución y se superan las dificultades o limitaciones existentes. Es decir, cada configuración epistémica supone una ruptura epistemológica con las configuraciones anteriores, entendiendo por ruptura epistemológica "cortes, rupturas que conducen, desde la estructura dada, a nuevos haceres provocando la variación de los cuadros de validez, y de tiempo, en que una determinada matemática es adecuada. Rupturas que no se centran por modo exclusivo en el manejo de nuevos objetos matemáticos, sino en una nueva

manera de manejarlos, de plantearlos como problemas; enfoque que conlleva su cohorte de perspectivas epistemológicas y ontológicas distintas y que da paso a otros tipos de hacer, a otras matemáticas" (de Lorenzo 1977, p.37)

En consecuencia, si deseamos tener una perspectiva global del proceso de construcción de significados de un objeto matemático, y del estado final alcanzado en un momento histórico dado, parece necesario definir un marco institucional, desde el cual se elabora la reconstrucción de significados.

En nuestro caso, estamos interesados por los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral definida y, por tanto, por las adaptaciones y reconstrucciones de los significados con fines educativos. El logro de una perspectiva global, necesaria para tomar decisiones racionales en la elaboración de "significados educativos", requiere el concurso de la historia, la epistemología de las matemáticas, entendida ésta desde una perspectiva ampliada (Ernest, 1998; Sierpinska y Lerman, 1996; Chevallard, 1992), y la propia didáctica de la matemática. Este "marco institucional" histórico-epistemológico-didáctico (HED) no coincide con el marco de la institución formada por los "matemáticos profesionales" (institución matemática, en sentido estricto) interesada esencialmente por la producción de nuevas herramientas matemáticas y su fundamentación.

El problema específico que abordaremos en este trabajo, lo centramos en la reconstrucción del *significado global* de la integral definida, referido al marco institucional HED descrito. El sistema de prácticas operativas y discursivas, y el campo de problemas, que componen el significado global del "cálculo integral" y, consecuentemente, de la *integral definida*, se ha generado en un largo proceso evolutivo en el cual es posible identificar diversos subsistemas de prácticas ligados al trabajo de matemáticos creativos, quienes progresivamente, y ante necesidades extra e intramatemáticas se han interesado por generalizar los problemas, las técnicas y su fundamentación teórica.

La reconstrucción del significado global de la integral definida se realizará a partir de la descripción de sus distintos "significados parciales"; en cada caso identificaremos los tipos de situaciones, acciones, lenguajes, conceptos, propiedades, y argumentaciones. Además identificaremos las rupturas epistemológicas y los incrementos epistémicos que los caracterizan.

De esta manera, en la sección 2 describiremos y caracterizaremos los diversos significados parciales que hemos identificado para la integral definida a partir de las siete configuraciones epistémicas. En la sección 3

analizaremos, brevemente, dichos significados parciales de la integral definida; a continuación, en la sección 4, se sintetiza la reconstrucción del significado global de la integral definida resumiendo los principales elementos que constituyen las configuraciones epistémicas que lo componen. Finalmente, concluiremos en la sección 5 con una síntesis e implicaciones de este estudio.

2. SIGNIFICADOS PARCIALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA: LAS CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

> La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje. Un análisis más fino de la actividad matemática ha llevado a introducir en diversos trabajos los "elementos del significado", concretados en un conjunto de objetos clasificados según los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones epistémicas" (asociadas a los significados institucionales) o "configuraciones cognitivas" (asociadas a los significados personales), definidas como las redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos (Godino, Contreras y Font, 2005).

Los sistemas de prácticas, y en consecuencia las configuraciones de objetos emergentes, se pueden estructurar en subsistemas (y subconfiguraciones) cada uno de los cuales constituyen significados parciales del objeto en cuestión.

Estos significados parciales se van generando progresivamente a medida que se amplían los tipos de problemas abordados, su posible reformulación, desarrollándose nuevas prácticas operativas y discursivas. En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas.

Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria. La inclusiva contiene la configuración

anterior y se genera para dar respuestas (por lo menos parciales) a las situaciones preexistentes, aunque se puedan producir (en muchos casos) también en sus ideas fundamentales. La complementariedad está asociada al incremento epistémico que se produce en la transición entre las distintas configuraciones y generalmente es motivada por la necesidad de ampliación teórica de una noción matemática.

Sin embargo, aunque se produzca dicha transición y, consecuentemente, un nuevo significado parcial es generado para una determinada noción matemática, las distintas configuraciones epistémicas suelen coexistir en la actualidad con diversas adaptaciones, manifestándose no solamente en las significados personales de algunos estudiantes y profesores, sino también en los libros de texto y reflejase en los currículos de cálculo. Esta idea es corroborada en distintas investigaciones asociadas a la integral definida (desarrolladas con enfoques cognitivos, epistemológicos e instruccionales) que han sido revisadas y sintetizadas en los trabajos de Crisóstomo (2004) y Ordóñez y Contreras (2003), entre otros.

A través de un estudio histórico-epistemológico-didáctico previamente desarrollado (Contreras et al., 2003; Ordóñez y Contreras. 2003, Crisóstomo, 2004) podemos identificar distintos significados parciales que representan la génesis y evolución histórica del concepto de integral definida, desde la perspectiva de didáctica de la matemática. Dichos significados serán descritos e interpretados a continuación por medio de cada una de las siguientes configuraciones epistémicas: finita (procesos finitos de integración), intuitiva (nociones intuitivas de integración surgidas en el período medieval), infinita (uso explícito y generalizado de los procesos infinitos en la noción de integral definida en una etapa previa a la "creación" del cálculo), primitiva (la integración como primitiva de la diferenciación), sumatoria (integración como suma de elementos infinitesimales), analítica (fundamentación del cálculo como límite de sumas) y generalizada (generalización de la integración para las funciones medibles). En cada configuración, utilizaremos como descriptores los elementos de significado de la Teoría de las Funciones Semióticas anteriormente mencionados. Además, identificaremos los nuevos elementos (incrementos epistémicos) que se añaden progresivamente al abordar nuevos problemas más generales y las rupturas que se generan, por su utilidad en la optimización del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida.

2.1. Configuración Epistémica Finita (CEF)

Esta configuración se refiere a los primeros intentos de "integración" surgidos en la cultura griega y a la extensión de los trabajos de Arquímedes y de la evolución del método de la exhausción hacia procesos cada vez más numéricos.

2.1.1. Breve síntesis del estudio HED

Al desarrollar el estudio de la composición entre los entes geométricos, los griegos pusieron de manifiesto su gran intuición respeto a las nociones del continuo, del infinito matemático y del límite. Sin embargo, dichas nociones se quedaron solamente en un plano implícito y el énfasis se centró en la búsqueda de alternativas que tornaran "innecesarios" los procesos infinitos (que se remontan al período del descubrimiento de los inconmensurables) en la matemática.

Zenón, mediante sus aporías, muestra que estos entes geométricos conducen a conflictos semióticos que deben ser resueltos modificando los significados institucionales. Como consecuencia se separa definitivamente la Geometría de la Aritmética y se acentúa el "horror al infinito" que caracteriza la Matemática de esta época.

En este contexto surge Eudoxo de Cnido, introduciendo el concepto de "tan pequeño como se quiera". Además elimina la imposibilidad de expresar la razón entre dos cantidades inconmensurables definiendo la igualdad de razones (proporciones).

El descubrimiento de los inconmensurables tuvo su origen con los pitagóricos. Pitágoras al observar ciertas relaciones numéricas entre diversos fenómenos naturales, intuyó que el número fuera la esencia de dichos fenómenos. Por lo tanto, se esperaba que la razón entre dos segmentos de recta pudiera ser expresada a través de una razón de dos números naturales, o sea, si la razón entre dos segmentos A y B es la fracción m/n, entonces debe existir un σ, tal que $A = m\sigma$ y $B = n\sigma$.

Sin embargo, a partir de los inconmensurables se quedó explícito que la referida proposición no siempre es verdadera, lo que lleva a la siguiente cuestión: *¿Cómo puede ser el número el fundamento de todos los fenómenos naturales, si dicho número no es suficiente para mostrar al menos la razón de dos segmentos?* (Ávila, 2001, p. 24)

La solución para tal problema, presentada por Eudoxio (480–355 a.C. aproximadamente), consistía en la creación de una teoría de las proporciones que dependía solamente de los números naturales[13]. Dicha teoría puede ser expresada por la definición (de Eudoxio):

[13] La referida teoría está expresada en el Libro V de los Elementos de Euclides.

"Dadas cuatro magnitudes A, B, C y D de la misma naturaleza (segmentos, áreas o volúmenes), se dice que A es a B así como C es a D, si para cualesquiera que sean los números [naturales] m y n, se tiene:

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD;\ nA = mB \Leftrightarrow nC = mD;\ nA < mB \Leftrightarrow nC < mD"$$

(Ávila, 2001, p. 26).

Eudoxio también sugirió, en forma geométrica, uno de los más antiguos teoremas sobre límites, a través de un abordaje considerado irrefutable por los matemáticos y que satisfacía a los mismos propósitos de un proceso infinito. Comenzó con un axioma:

"Se dice que dos magnitudes tienen una razón, una con la otra, si, por producto, una sea capaz de exceder la otra" (Boyer, 1992, p. 4).

Dicha "definición" fue utilizada de manera muy semejante a la empleada por Euclides en el Libro X, 1 (y además por Arquímedes) para demostrar el procedimiento básico en el "método de exhausción", el equivalente griego del cálculo.

El referido método posibilitó enunciar teoremas relativos al área, volumen y centro de gravedad. Además, el método de la exhausción permitió la demostración "tradicionalmente rigurosa" de los referidos teoremas.

Así, una aportación de los griegos muy significativa para la invención de la integración consiste en el *método de "integración"* de Arquímedes. Esto nos permite considerar que la génesis de la integral definida se remonta al período de desarrollo y aplicación de dicho método a la solución de problemas. Las ideas vinculadas al referido método se asemejan a las del cálculo del siglo XVII (relacionadas con una visión atomística del cálculo).

El trabajo que Arquímedes había enviado a Eratóstenes (tratado redescubierto en 1906), no solamente explicitaba cómo llegó a algunos de los resultados, sino que buscaba las respectivas pruebas, "*casi efectuando la integración en muchos casos importantes*" (Boyer, 1992, p.29).

Siguiendo la historia, Papus (320 d.C.) fue el último matemático importante de la antigüedad; a partir del siglo IX, surge el interés por los procedimientos infinitesimales por medio de la extensión de los trabajos de Arquímedes y de la evolución del método de la exhausción hacia procesos cada vez más numéricos. En este sentido, Thabit Ibn Qurra hace revivir los métodos infinitesimales de Arquímedes a través de un proceso equivalente a la determinación de la siguiente integral definida $\int_0^a x^n dx$, con n fraccionario; Ibn Al-Haytham determinó, por primera vez, el volumen del paraboloide de revolución a través de un proceso equivalente a $\int_0^a x^4 dx$.

A continuación, describiremos la *configuración epistémica finita* como el primer *significado parcial* de la integral.

2.1.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

La problemática que se presentaba en la CEF consistía en las "cuadraturas" y "cubaturas" a través de la medida indirecta de magnitudes.

Acciones

Las principales acciones fueron:

- ✓ Identificación de números con medidas de magnitudes discretas;
- ✓ Medición por medio de comparación de magnitudes geométricas.
- ✓ Determinación de resultados equivalentes a las integrales:

$$\int_0^a x^n dx \quad \text{y} \quad \int_0^a x^4 dx$$

Lenguaje

Predominantemente geométrico, aunque también se presenta un lenguaje aritmético-geometrizado.

Conceptos

Aunque en esta configuración los conceptos no estuvieran formalizados, implícitamente se manejaba las nociones del continuo, del infinito matemático y del límite en la determinación de las *cuadraturas* y *cubaturas,* así como del *centro de gravedad.*

Además, merece destacarse la "creación" de la *teoría de las proporciones*, a través de la cual Eudoxio planteó la comparación entre los números naturales como vía para solucionar la *crisis de los inconmensurables*;

Propiedades

Entre las propiedades presentes en esta configuración, resaltamos:

- ✓ Axioma de Arquímedes;
- ✓ Método de la exhausción;
- ✓ Teorema de Eudoxio ("límite");
- ✓ Teorema con resultado equivalente, en lenguaje actual, a que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi.r^3$;
- ✓ Propiedades de las razones.

Argumentos

Basados en la doble reducción al absurdo realizada a través del método de la exhausción.

2.1.3. Algunas consideraciones sobre la CEF

Las *rupturas epistemológicas* se producen a partir de la constatación de la existencia de magnitudes de carácter inconmensurable y para eludir el infinito, se crean los métodos de la exhausción y de las razones entre las magnitudes, con la doble reducción al absurdo.

Como conclusiones de esta configuración, nos parece relevante resaltar las dos diferencias básicas entre el método de la exhausción y la formulación moderna del cálculo; el primero consiste en hacer una demostración de un teorema, mientras que el valor del cálculo moderno está centrado en su eficacia para realizar nuevos descubrimientos cuantitativos. También se destacan dos aspectos relevantes en el origen del cálculo integral: el riguroso método de exhausción anteriormente mencionado (relativamente similar a los conceptos del siglo XIX) y el otro relacionado con el método de Arquímedes (proveniente de una visión atomística asociada a Demócrito) y al cálculo del siglo XVII (Boyer, 1992).

Finalmente, destacamos que aunque la solución presentada por Eudoxio para la crisis de los inconmensurables haya sido genial para su época, ésta contribuyó al retraso del desarrollo de la aritmética y del álgebra por más de un milenio, pues subordinaba estas disciplinas al estudio de la geometría. La "matemática numérica" llegó a Europa solamente en el siglo XIII con los árabes y el desarrollo del álgebra ocurrió tres siglos después, preparando así las bases para el desarrollo de la geometría analítica y del cálculo en el siglo XVII.

2.2. Configuración Epistémica Intuitiva (CEi)

Esta configuración se refiere a los procesos intuitivos de "integración" producidos en el período medieval (a partir de la reanudación de las obras de los griegos) y se caracteriza por el estudio del cambio y del movimiento.

2.2.1. Breve síntesis del estudio HED

En la Edad Media hay una superación del "horror al infinito"de la época griega, por lo que la Escolástica de esta época realiza con frecuencia

especulaciones sobre el infinito (se estudian y utilizan por primera vez series infinitas). Sin embargo, el cambio más importante viene dado por el conjunto de situaciones objeto de estudio.

Después de aproximadamente un milenio de estancamiento, motivado por un cambio de las matemáticas y física, estáticas hacia otras más dinámicas, surgieron problemas esencialmente del campo del cálculo a partir del **estudio del cambio y del movimiento**, lo que produjo el "desarrollo de un cálculo integral intuitivo" por parte de los sacerdotes de las universidades inglesas, francesas e italianas

Tomando como punto de partida la "Física" de Aristóteles y la "Estática" de Arquímedes, abordan el estudio del cambio y el movimiento, que se convierte en el tópico de la especulación filosófica medieval, lo que supone un gran desarrollo de la Cinemática.

Las escuelas de Oxford y París consideran las Matemáticas como instrumento privilegiado del conocimiento de fenómenos naturales. Cuantificaron ciertas cualidades o fenómenos como densidad, calor, velocidad... ayudándose de la idea de que los grados de intensidad podían variar continuamente dentro de ciertos límites, utilizando para ello el concepto de "forma". Se estudian principalmente las variaciones de las intensidades a través del tiempo, que es el prototipo del continuo. En esta línea Oresme (siglo XIV) realiza el mayor progreso teórico de la Edad Media al estudiar la variabilidad cuantitativa desde un punto de vista mucho más geométrico que sus contemporáneos. Estudia diversas formas, principalmente, asociadas a fenómenos de movimiento a través de una representación gráfica que le ayuda a explicar la variación y que llama "figura".

En dicha representación gráfica, la variación de un fenómeno a lo largo del tiempo viene representada por la figura total, es decir, el área. Así, el área bajo una curva era interpretada como distancia, basándose en la idea de área como "suma de todos los incrementos de distancia correspondientes a las velocidades instantáneas".

Oresme era capaz de realizar la integración en los casos de tasa de variación *uniforme* (constante) y *uniformemente disforme* (no constante). El resultado expresado por Oresme, en lenguaje geométrico, era equivalente a afirmar que el área (S) puede ser obtenida por $S = \int_0^t Ktdt = \frac{Kt^2}{2}$.

Bradwardine (siglo XIV) se opuso a toda forma de atomismo, estudió la naturaleza del continuo y afirmó que las magnitudes continuas están constituidas por un número infinito de indivisibles, que no son átomos, sino continuos de la misma especie.

2.2.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

La principal problemática presente en esta configuración epistémica consistía en el estudio del cambio y del movimiento, donde se realizaba un cierto proceso equivalente a la integración en los casos de tasa de variación *uniforme* y *uniformemente disforme*. Además, se estudió los fenómenos físicos de intensidad "medible" (densidad, calor, velocidad,...), la naturaleza del continuo, la distinción aristotélica del continuo actual y potencial, y las series (de forma incipiente).

Acciones

Entre las acciones de la CEI podemos destacar:

- ✓ determinar cuadraturas relacionadas a las tasas de variación (uniforme y uniformemente disforme);
- ✓ introducción de métodos de cubaturas (por ejemplo para determinar el volumen del paraboloide de revolución);
- ✓ evolución del método de la exhausción hacia procesos más numéricos;
- ✓ acercamiento a la representación gráfica de una función;
- ✓ oposición a las formas de atomismo, considerando que la magnitudes son formados por un número infinito de continuos de una misma especie (indivisibles);
- ✓ establecimiento de la distinción aristotélica entre el infinito actual y potencial.

Lenguaje

Geométrico (con utilización de gráficos para ilustrar los ejemplos) y aritmético.

Conceptos

Aunque los conceptos no eran formalmente definidos, se destacaban el uso de las nociones de área, volumen, movimiento, tasa de cambio uniforme y uniformemente variada, forma y latitud de las formas, latitud, longitud, figura, e intensidad.

Propiedades

Pueden ser destacadas algunas, tales como el principio de Oresme, la Ley de Bradwardine, la Ley de Swineshead

Argumentos

Los principales argumentos fueron basados en métodos intuitivos que buscaban mejorar el método de la exhausción en el uso intuitivo del infinito.

2.2.3. Algunas consideraciones sobre la CEi

La principal *ruptura epistemológica* que se produjo se relacionaba con la consideración incipiente de magnitudes continuas compuestas por un número infinito de indivisibles, que son continuos de la misma especie. El *incremento epistémico* se refiere al estudio de los cambios y del movimiento produciendo el pase de una matemática estática para otra esencialmente dinámica.

Resaltamos, por una parte, que al centrar sus estudios en la variación de las *formas* (curvas) y de las *figuras* (áreas) Oresme llegó a resultados de índole infinitesimal que pueden ser considerados actualmente como aspectos diferenciales e integrales. Además, que la utilización del infinito de manera intuitiva contribuyó con el desarrollo de las técnicas infinitesimales del siglo XVII.

Por otra parte, hasta el período medieval no se encontró ningún método o incluso terminología que se relacionara con el concepto de diferenciación, lo que implica que desde el punto de vista histórico, el concepto de integración precedió al de diferenciación en aproximadamente dos milenios.

Lo anterior nos propicia condiciones para ubicar la integral definida en la génesis del cálculo diferencial e integral, pues los *procesos de integración* previamente desarrollados eran relacionados con la aplicación de la integral en la solución de problemas prácticos.

Por último, señalamos que se estudian los métodos de Arquímedes, aunque se separan de éste y buscan métodos que mejoren el de exhausción, al que consideran demasiado pesado. Además se utiliza el infinito de forma intuitiva lo que facilitará el camino al desarrollo de las técnicas infinitesimales del siglo XVII.

2.3. Configuración Epistémica Infinita (CEI)

Esta configuración se caracteriza por el uso explícito y generalizado de los procesos infinitos en la noción de integral definida en una etapa previa a la "creación" del cálculo, o sea, anterior a la segunda mitad del siglo XVII.

2.3.1. Breve síntesis del estudio HED

En la transición desde las tradiciones medievales al renacimiento de la matemática se producían tensiones entre las ideas antiguas y las nuevas. En este proceso de interacción, lo que se buscaba eran caminos que simplificara la integración, evitando las sutilezas lógicas, con las cuales se desarrollaban las demostraciones a través del método de exhausción.

En este sentido, Stevin (1548-1620) tuvo un papel relevante tanto en el desarrollo de la matemática como del cálculo. Su contribución consistió, por una parte, en el uso de las fracciones decimales y, por otra, en los primeros intentos explícitos para desprenderse de las demostraciones rigurosas que eran realizadas al estilo de la geometría de Euclides. Mientras Arquímedes se detiene en el término n-ésimo para añadir un resto, Stevin considera series infinitas (en el sentido escolástico heredado de Aristóteles del infinito potencial).

Así, al utilizar la idea de que la serie puede ser prolongada hasta que la diferencia entre la figura curvilínea y la rectilínea sea tan pequeña como se quiera, la considera suficiente para la demostración del teorema y omite (tomando ciertas precauciones) la doble reducción al absurdo. Además, Valerio (1552-1618) llega más allá al tomar la doble reducción al absurdo como un teorema general que basta citar, sin necesidad de demostración. Esto conlleva al considerable aligeramiento del método de exhausción de las demostraciones desarrolladas en matemática.

La influencia de dichas ideas se puede apreciar, por ejemplo, en la obra de Galileo (1564-1642) que tras dos siglos y medio, llegó a un resultado de integral basado en el mismo tipo de razonamiento que Oresme, cuya visión era similar a la utilizada por Arquímedes en su Método, es decir, un área era formada por una cantidad infinita de líneas geométricas.

Por otra parte, Kepler (1571-1630) introdujo el uso de infinitesimales en el cálculo de áreas. Se entendía por infinitesimales los pequeños elementos que componen las figuras y que conservan sus dimensiones.

Aunque Galileo y Kepler hayan utilizado los métodos de Arquímedes en la solución de problemas, sus procesos de:

> *"integración...fueron eclipsados por un tratado escrito en 1635 por Cavalieri...en este libro los indivisibles o infinitésimos fijos eran aplicados con tanto éxito a problemas de medición de áreas y volúmenes, que su postulado fundamental, que generalmente es nombrado* ***Teorema de Cavalieri****, ha permanecido intacto en los textos elementales hasta los días de hoy"* (Boyer, 1992, p.11).

Así, surge el concepto de los indivisibles en oposición al de infinitesimal desarrollado por Kepler. En este sentido:

> *"Un plano era constituido de un número infinito de rectas paralelas equidistantes, y, un sólido, de un número infinito de planos paralelos. Una recta (o plano) –expresado como "regula"– se mueve paralelamente a sí mismo, generando intersecciones (rectas o planos) en cada una de las figuras (plano o sólido), hasta que dichas figuras coincidan con sus bases. Estas intersecciones (segmentos de recta o secciones planas) constituyen los elementos o indivisibles que componen la totalidad de las figuras"* (Baron, 1985, p. 12).

Dicho de otra manera, lo que se pretendía era comparar, a través de la noción de los indivisibles, las áreas de figuras planas con sus volúmenes. Se debe tener en cuenta, que la relación establecida por medio de la proporcionalidad se restringe a los elementos homólogos de las figuras estudiadas.

La principal contribución de Cavalieri para el cálculo fue el enunciado de un teorema geométrico extremamente útil, que interpretado en lenguaje actual es equivalente a la integral:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$$

y su generalización a través de la integral:

$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, para n racional diferente de -1.

Un resultado equivalente al anteriormente mencionado también había sido encontrado por Torricelli y Roberval a través de distintos procesos. Además ya era conocido por Arquímedes para n = 1 y n = 2; por los árabes para n = 1/2 y n = 4.

Fermat (1601-1665), utiliza un método *uniforme* y *constante* que le permite determinar, por medio de una progresión geométrica, la cuadratura de las parábolas y de las hipérbolas. A partir del conocimiento de la obra de Vieta, intenta plantear los problemas de cuadratura bajo la forma algebraica, lo que dota a sus procedimientos de un carácter más general y le permite desarrollar la faceta algorítmica del análisis infinitesimal. Además, fue el primero en utilizar los infinitamente pequeños aritméticos y no geométricos y, en lugar de hacerlos tender a cero, los hizo cero directamente.

Posteriormente, Pascal (1623-1662) reemplazó los argumentos intuitivos de Cavalieri por razonamientos aritméticos sobre las series, contribuyendo así con el modo sistemático de proceder en los métodos infinitesimales en la segunda mitad del siglo XVII.

Con la invención de la Geometría Analítica (Descartes y Fermat), el cálculo (o análisis infinitesimal) empezó a pasar por un proceso de

aritmetización, surgiendo trabajos, como el de Wallis (1616-1703) desarrollando la idea de integral basada en un "promedio aritmético". Fue Wallis quien llevó a cabo, por ejemplo, una probable demostración de la integral de Kn^2 a través de una nítida aritmetización del "cálculo".

Wallis y Gregory (1638-1675) fueron los responsables por el desarrollo de la tendencia de aritmetización del cálculo a través del uso de las series infinitas. Barrow (1630-1677), como reacción a dicha tendencia, volvió al punto de vista geométrico y al rigor euclidiano y, por medio del triángulo característico desarrolló un método de trazado de tangentes más general que el de Fermat y con métodos similares a los actuales.

Fermat desarrolló un método de integración muy similar a la integral de Riemann; además, su contribución fue decisiva para el desarrollo del "cálculo diferencial". También merecieron destacarse Barrow (con la publicación de una regla de tangentes), René de Sluse y Hudde (con la percepción del rol de los coeficientes y exponentes en la determinación de tangentes y extremos de polinomios), Torricelli y Gregory (con el probable conocimiento de la relación inversa entre los problemas de cuadratura (integral) y los de tangentes (diferencial), y muchos otros.

2.3.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

La problemática fundamental en la CEI consistía en la búsqueda de caminos que simplificara la integración. Con esto, lo que se pretendía era determinar áreas, volúmenes, centro de gravedad, y trazado de tangentes de funciones algebraicas (y de algunas funciones trascendentes).

Acciones

Entre las principales acciones que se presentaron en esta configuración, podemos destacar:

- ✓ determinar cuadraturas de curvas algebraicas de grado superior a dos;
- ✓ determinar la cuadratura de la parábola, hipérbola, cicloide, elipse, senoide, del círculo;
- ✓ hallar el volumen de sólidos de revolución;
- ✓ determinar el centro de gravedad de figuras curvilíneas planas;
- ✓ descomponer la superficie en una infinidad de elementos infinitesimales de misma dimensión;
- ✓ utilización de progresión geométrica para determinar cuadratura;

✓ desarrollar la integración numérica;

✓ determinar tangentes por medio del triángulo característico.

Lenguaje

El lenguaje presente en esta configuración era fundamentalmente geométrico, aunque también se presentaba el lenguaje aritmético y algebraico.

Conceptos

Se utilizaba, principalmente, las "nociones" de cuadratura, cubatura, centro de gravedad, rectificación de arcos, tangente, series infinitas, infinitésimos, indivisibles, infinitamente pequeño, altura promedio, y triángulo característico.

Propiedades

Pueden ser consideradas algunas propiedades, destacándose las relacionadas a:

✓ series infinitas;

✓ método de la exhausción con la omisión de la doble reducción al absurdo;

✓ principio general de equivalencia de los infinitamente pequeños;

✓ método inductivo en la integración de Wallis.

Argumentos

Los principales argumentos fueron el método de la exhausción (omitiéndose la doble reducción al absurdo), por medio del cual se puede aproximar la cantidad deseada a través de la suma parcial de una serie infinita y la intuición basada en el método inductivo.

2.3.3. Algunas consideraciones sobre la CEI

Las *rupturas epistémicas* producidas en dicha configuración se refieren a la consideración de series infinitas, superando la finitud de añadir un resto al término n-ésimo de Arquímedes, usando el “tan pequeño como se quiera”; superación de los infinitos heterogéneos; admisión del infinito actual; generalización de problemas a partir de la utilización de métodos algebraicos; consideración de los “infinitamente pequeños” aritméticos en lugar de los geométricos; uso implícito del grado de los infinitésimos, e intento de sustitución de los métodos intuitivos algebraicos por los geométricos clásicos.

Los *incrementos epistémicos* se refieren, por una parte, a la obtención de nuevos "procesos de integración" basados en las nociones de series infinitas y del "promedio aritmético"; y, por otra parte al conocimiento de la relación inversa entre los procesos de cuadratura y de tangentes (aunque no se consideraba dicha relación como *fundamental*).

No hay dudas de que la unificación y generalización de los resultados previos a la "creación del cálculo" se constituyeron en un considerable avance hacia el desarrollo de sus algoritmos. La integral definida es caracterizada como un proceso de “cuadratura” independiente de la noción de “tangentes”, muy frecuentemente usado en la resolución de problemas antes del siglo XVIII.

2.4. Configuración epistémica primitiva (CEP)

El cambio de los conceptos y lenguaje estáticos de los matemáticos griegos para un análisis de la variabilidad, y la constante búsqueda de la generalización y universalización de las aplicaciones del cálculo proporcionó su *surgimiento*, independientemente, a través de las obras de Newton y de Leibniz.

Esta configuración se caracteriza por la *relación inversa entre la integración y la diferenciación* y se constituye por los *métodos de integración* de Newton, uno de los exponentes en el proceso de "creación" del cálculo como nueva rama de las matemáticas.

2.4.1. Breve síntesis del estudio HED

La universalización del cálculo tuvo como punto de partida los trabajos independientes de Newton y de Leibniz, que no solamente generalizaron la aplicación de los algoritmos a las funciones (racionales, irracionales, algebraicas y transcendentes) y vislumbraron la integración y la diferenciación como procesos inversos, sino porque tomaron conciencia de que sus descubrimientos constituían una nueva y universal rama de las matemáticas.

Los problemas surgidos en la segunda mitad del siglo XVII requerían una matemática mucho más amplia que la anteriormente desarrollada, donde la mayoría de las reglas se aplicaban a problemas que abarcaban polinomios, o que podían ser fácilmente expresados en forma de polinomios.

Influenciado por las obras de Descartes, Fermat, Galileo, Wallis y Barrow, Newton mostró tres significados distintos del cálculo: la

concepción infinitesimal, el método de las fluxiones y el de las primeras y últimas razones. En el primero, significado infinitesimal, operó con cantidades infinitamente pequeñas que denominan momentos y que son equivalentes a los crecimientos infinitesimales de Fermat. Utilizando estos momentos Newton calculó el área bajo la curva cuya ecuación y = f(x) está dada, invirtiendo las operaciones de derivación, es decir, calculando la integral indefinida de f. Newton no adicionó superficies infinitesimales como sus predecesores, sino que tomó la derivada como centro de su desarrollo. Desde 1669, la relación entre las cuadraturas y las derivadas se estableció claramente. Por tanto, privilegió la integral indefinida en detrimento de la definida.

En su libro "La cuadratura de las curvas" (1693), abordó el método de las fluxiones en término de las primeras y últimas razones. Su concepción se basaba en el movimiento, a partir del cual se generaban las magnitudes. Por lo tanto, no hacía referencia ni tampoco utilizaba el concepto de los indivisibles en su teoría. Además, el lenguaje y la simbología que Newton utilizaba se convertían en obstáculos para la comprensión de lo que él de hecho quería expresar en su teoría de la cuadratura de las curvas.

En esa idea de movimiento, las fluxiones se referían a las derivadas, mientras los fluentes a las integrales. Esto es equivalente, en lenguaje moderno, a considerar que si *x*, *y*, *z* son los fluentes, sus fluxiones son, respectivamente $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ (Baron, 1985, p. 33).

Por otra parte, innovó haciendo del uso de las series infinitas un método general y una técnica de integración. Desarrolla las funciones en series infinitas e integra término a término, extendiendo la validez de la integración término a término a las sumas infinitas lo cual sólo se había visto para las sumas finitas.

Así, Newton llegó a cuadraturas originales para su tiempo, como es el caso de la integración de $\left(x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y la integración de algunas funciones trascendentes.

2.4.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

Los problemas surgidos en la segunda mitad del siglo XVII requerían una matemática mucho más amplia que la anteriormente desarrollada, donde la mayoría de las reglas se aplicaban a problemas que abarcaban polinomios, o que podían ser fácilmente expresados en forma de polinomios.

Así, la principal problemática que se presentó en la CEP se refiere a la naturaleza inversa entre la integración y la diferenciación; su formulación fue realizada sobre dos problemas fundamentales desarrollados en el tratado de 1671 sobre fluxiones y enunciados de la forma siguiente:

✓ *dada la relación mutua entre las cantidades fluentes, determinar la relación entre las fluxiones;*

✓ *cuando se enuncia una ecuación que contenga las fluxiones de las cantidades, determinar la relación de las cantidades entre si.* (Baron, 1985, p. 36).

Acciones

Entre las principales acciones de la CEP, destacamos:

- ✓ expresar funciones como series infinitas y calcular el área como inversa de la diferenciación (por primera vez en la historia de la matemática);
- ✓ basar la cuadratura de las curvas en un proceso de movimiento continuo, a través del cual consideraba que eran generadas las "cantidades" de distinta naturaleza;
- ✓ utilizar las series infinitas como un método general y como técnica de integración.

Lenguaje

Aunque hubiera sido considerado el exponente de la "geometría pura", en la CEP se utilizaba un lenguaje simbólico y gráfico en una gran variedad de problemas.

Conceptos

Los principales conceptos utilizados en la CEP fueron: procesos infinitos, series infinitas, cuadratura, tangente, curvatura, fluentes y fluxiones, primeras y últimas razones, cantidades infinitamente pequeñas (*momento*).

Propiedades

Las principales propiedades se relacionan con:

- ✓ la razón entre dos variaciones utilizando la expansión binomial;
- ✓ la relación inversa entre los problemas de tangentes y los de cuadraturas.

Argumentos

Consistía en un proceso de deducción, con generalización de los resultados a partir de las regularidades. Newton también extendió la validez de la integración término a término a las sumas infinitas.

2.4.3. Algunas consideraciones sobre la CEP

El nuevo elemento añadido (*incremento epistémico*) en la CEP fue, concretamente, *el teorema fundamental del cálculo* que estableció la relación inversa entre la diferenciación y la integración.

Inicialmente Newton trataba sistemáticamente todos los problemas referentes a las propiedades de las líneas curvas. Sin embargo, tras el reconocimiento de la naturaleza inversa entre la diferenciación y la integración, y que el proceso de diferenciación era el más sencillo de los dos, elaboró tablas que le posibilitara los resultados directos de dichos procesos, con la finalidad de minimizar los esfuerzos en la búsqueda de identificar las propiedades de las curvas conocidas en su tiempo.

Es indiscutible la importancia de Newton en el desarrollo del cálculo a partir del siglo XVII. Los procesos de integración, inicialmente motivados por la búsqueda de solución a los problemas prácticos, evolucionarían hacia su fundamentación rigurosa. La búsqueda del rigor también ya podía ser notada en la obra de Newton, aunque la simbología que él utilizaba y su propio lenguaje consistían en elementos que dificultaron la comprensión de sus ideas por parte de sus seguidores.

Finalmente, consideramos que es fundamentalmente importante tener en cuenta el papel que deben jugar la simbología y el lenguaje en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo y, concretamente, de la integral. La falta del lenguaje y de la simbología apropiada a cada nivel de aprendizaje puede convertirse en obstáculos en el aprendizaje del cálculo.

2.5. Configuración Epistémica Sumatoria (CES)

Esta configuración se caracteriza por la **integración como suma de elementos infinitesimales**, lo que se produjo a partir de la obra de Leibniz.

2.5.1. Breve síntesis del estudio HED

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) realizó algunos estudios relevantes para la "creación" de su cálculo, entre los cuales destacaremos las secuencias de diferencias, el triángulo característico, la transmutación, la serie para π.

Leibniz inspirado en la lectura de la obra de Pascal sobre el triángulo característico, observó que la búsqueda de la tangente a la curva depende de las razones de las diferencias entre ordenadas y abscisas cuando llegan a

ser infinitamente pequeñas y que la cuadratura depende de la suma de las ordenadas o rectángulos infinitamente finos elevados sobre los intervalos infinitesimales del eje de abscisas. Como problema inverso al de las tangentes identificó el de las cuadraturas.

Relativo al problema de las tangentes, Leibniz consideró el triángulo característico que estará formado por una parte infinitamente pequeña de la tangente y por los dos lados infinitamente pequeños paralelos a las abscisas y ordenadas, lo que permitirá asignar un valor a la relación *dy/dx*, incluso si ambos son arbitrariamente pequeños, al ser proporcional a otro triángulo, De esta manera podrá dar una definición de diferencial *dy* aunque basada en la subtangente. Además, con respecto al triángulo característico Leibniz comentó: *Parece siempre posible asignar triángulos semejantes a este triángulo característico, aunque inasignables o infinitamente pequeños...* (Mnemosyne nº6, p.34)

Leibniz llamó *dy* al crecimiento momentáneo de y. Identificó un arco de curva con un lado de un polígono de una infinidad de lados. Para obtener el área bajo una curva, sumó las áreas de los rectángulos, ya que: *se pueden ignorar los triángulos puesto que son infinitamente pequeños y, por tanto, represento en mi cálculo el área por ∫ydx.* (Mnemosyne nº6, p.36)

Creó una auténtica álgebra de infinitamente pequeños al obtener reglas de cálculo. Todo ello le permitió trabajar con ellos y utilizarlos en múltiples problemas. Adquieren un gran auge debido a su simplicidad, su notación elegante y su formalismo.

El cálculo de diferencias es la operación fundamental del cálculo de Leibniz. La ***sumatoria*** es la operación inversa y, a la vez, se puede, por simple lectura, deducir una tabla de integrales de una tabla de diferenciales. Piensa las áreas y los volúmenes como sumas invirtiendo las operaciones de derivación. Contrariamente a Newton, quien consideró la integral indefinida y calculó las áreas y los volúmenes a partir de su tasa de variación, Leibniz introdujo la integral definida, interpretando las áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros, respectivamente. Estos dos significados de la integral son, por otra parte, los que se conservan en el cálculo integral elemental.

2.5.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

La principal problemática surgida en esta configuración puede ser expresada por la necesidad de formalización y generalización de la

integración a una clase más amplia de problemas y la búsqueda del perfeccionamiento del lenguaje y simbología del cálculo.

Acciones

Entre las principales acciones de esta configuración se destacan:

- ✓ Determinar la cuadratura como dependiente de la suma de ordenadas o rectángulos infinitamente finos, llevados sobre intervalos infinitesimales del eje de abscisas:
- ✓ Establecimiento de las cuadraturas como problema inverso al de las tangentes, a través del *Teorema Fundamental del Cálculo;*
- ✓ uso de la sumatoria como operación inversa del cálculo de diferenciales,
- ✓ elaborar un método formal para el cálculo la suma y diferencia de infinitésimos a partir de la igualdad $\int dy = y$;
- ✓ realización de operaciones con infinitésimos;
- ✓ estudiar las series infinitas, el triangulo harmónico, entre otros aspectos del análisis infinitesimal.
- ✓ desarrollar fórmulas, tales como:

$$dxy = xdy + ydx, d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, dx^n = nx^{n-1}dx$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^1 + \ldots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)};$$

- ✓ desarrollo de la serie $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$;
- ✓ utilización de la *trasmutación* en la cuadratura de la parábola, de las hipérbolas superiores y del círculo;
- ✓ otras técnicas como el uso de coeficientes indeterminados, la determinación de contornos y la integración a través de las fracciones parciales.

Lenguaje

En la CEP se aplicaba un lenguaje simbólico y numérico a una gran variedad de problemas.

El cálculo de Leibniz se desarrollaba hacia el análisis, esencialmente a través de la manipulación de fórmulas.

Conceptos

Los principales conceptos utilizados en la CEP fueron: procesos infinitos, series infinitas, secuencias de diferencias, cuadratura, tangente, curvatura.

Baron (1985) expresó el concepto de integrales o sumas de Leibniz de la siguiente manera:

> *"la suma o integral* $\int ydx$ *es la suma de rectángulos infinitamente pequeños* ydx*; por lo tanto,* $\int ydx$ *es el área de la curva* $y(x)$*. Leibniz aunque no indicaba los intervalos de integración, explicita las constantes de integración"* (p.60).

Propiedades

Las principales propiedades se relacionan con el área bajo la curva (implica en la relación inversa entre los problemas de cuadraturas y los de tangentes). Podemos citar, por ejemplo:

- ✓ Si *dx* y *dy* se toman infinitamente pequeños, los dos puntos de la curva, debe considerarse como que la distancia de uno a otro es inferior a toda cantidad dada;
- ✓ Para obtener el área encerrada por una curva, se pueden sumar las áreas de los rectángulos, puesto que se pueden ignorar los triángulos ya que son infinitamente pequeños.

Argumentos

Consistía en un proceso de deducción, con generalización de los resultados a partir de las regularidades y de la utilización de los infinitésimos.

2.5.3. Algunas consideraciones sobre la CES

El principal elemento añadido en la CEP fue, concretamente, el *Teorema Fundamental del Cálculo* que estableció la relación inversa entre la diferenciación y la integración.

Las *rupturas epistemológicas* que se presentan en la CES son:

- ✓ Contrariamente a Newton, quien considera la integral y calcula las áreas y los volúmenes a partir de la tasa de variación, Leibniz introdujo la integral definida, interpretando dichas áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros.
- ✓ Convierte a los infinitamente pequeños como *actuales* que intervienen de manera explícita en los razonamientos.

- ✓ Los resultados no se expresan sólo de modo geométrico, sino que también están dotados de un simbolismo formal.
- ✓ Invención de algoritmo que dio paso a gran desarrollo del Cálculo.

Los conceptos y el lenguaje (destacándose la simbología) utilizados por Leibniz constituirían aspectos de los más relevantes en el desarrollo posterior del cálculo, aunque eran insatisfactorios en los aspectos que se refieren al "rigor" matemático (Baron, 1985, p.61).

Mientras el cálculo de Newton se había quedado más próximo a la geometría, el de Leibniz se desarrollaba hacia el análisis, con manipulación de fórmulas y poca o ninguna utilización de figuras o interpretación geométrica (Zuin, 2001, p. 34). Para dicha autora, las diferencias básicas entre el cálculo desarrollado por Newton y el de Leibniz pueden ser sintetizadas en la tabla en la continuación:

Newton	Leibniz
Consideraba las variables dependientes del tiempo aplicando el concepto de movimiento.	Entendía las variables como desplazándose en secuencias de valores infinitamente próximos. En su cálculo hay poco uso de conceptos de movimiento.
El concepto cinemático sugiere la velocidad o tasa de cambio de la variable como concepto fundamental: la "fluxión". (La fluxión no era una cantidad pequeña, sino una velocidad finita).	La noción de variable enfatizaba la diferencial como diferencia de dos valores sucesivos en la secuencia. Las variables adquieren nuevos valores continuamente y no por saltos. Las diferencias no podían ser finitas, sino infinitamente pequeñas.
La integral es la "tarea de determinar las cantidades fluentes para fluxiones dadas".	La integral es una sumatoria.
El teorema fundamental está contenido en la definición de la integral.	El teorema fundamental no está contenido en la definición de la integral.

2.6. Configuración Epistémica Analítica (CEA)

A partir del siglo XVIII los conceptos de integral y de integral definida pasaron por un amplio proceso de fundamentación teórica, como sucedió en el cálculo de manera general. Esto implicó su distanciamiento de los factores que motivaron su génesis (ligados a sus aplicaciones a través de procesos más intuitivos y primitivos). Así, su evolución fue históricamente

caracterizada por el proceso de fundamentación teórica, basado en el rigor, precisión de los conceptos y en la constante búsqueda de su generalización a una clase cada vez más amplia de funciones.

2.6.1. Breve síntesis del estudio HED

Entre los matemáticos que contribuyeron al desarrollo del cálculo, tales como Taylor, Mac Laurin, y D′Alembert, los que más se destacaron fueron Euler y Lagrange. Para Euler, el papel de las funciones es preponderante en su obra; el reconocimiento de las funciones como objeto de estudio en matemáticas en lugar de las curvas posibilitó el desarrollo del proceso de *aritmetización del análisis* y su consecuente separación de la geometría. Lagrange desarrolló el cálculo en la perspectiva de eliminar las referencias a diferenciales, infinitesimales y conceptos de límites.

El problema de la fundamentación del cálculo todavía se quedó sin solución en el siglo XVIII. Con las críticas de Berkeley, en 1734, se inició un largo debate y una nueva etapa en la búsqueda de sus fundamentos, lo que se concretó a partir del siglo XIX.

Como se señala en Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986), fue Cauchy el principal artífice de la introducción del rigor en el cálculo infinitesimal, al lograr superar y eludir los aspectos de tipo metafísico. En todo este proceso, el concepto de límite aparece como fundamental para la construcción de los conceptos del análisis matemático. La definición que ha dado de este concepto rompió definitivamente con el significado geométrico que subyacía en el mismo e hizo del límite una noción aritmética. Valiéndose de este concepto y de la variabilidad de la función, clarificó la noción de infinitésimo (que no es más que una sucesión convergente que tiene por límite cero) y también la de derivada de una función continua (al definirla en términos de los límites), aunque las relaciones entre ambas nociones no se tornaron explícitas hasta Dirichlet con el desarrollo de las funciones en series trigonométricas.

Cauchy, retomando el significado de Leibniz sobre la integral definida, el cual tomó las áreas y los volúmenes como suma de rectángulos y cilindros, dio una definición precisa de integral definida, centrándose en sus condiciones de existencia antes de definir las propiedades de la misma.

Tomó, como punto de partida, una función real, continua en un intervalo cerrado $[x_0, X]$. Los elementos $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}, x_n=X$ del intervalo lo subdivide en n subintervalos. Entonces formó la suma:

$$S = (x-x_0)f(x_0) + (x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+ (X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

y demostró que el límite de S, cuando la longitud del mayor subintervalo tiende a cero, existe si f es continua en el intervalo dado. Además, dicho límite sólo depende de la propia función f(x) y de los extremos del intervalo. Precisamente, a este límite es a lo que Cauchy denominó integral definida.

Cauchy tomó la notación de $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, atribuida a Fourier. La integral se extiende a funciones continuas a trozos o con un número finito de puntos de discontinuidad.

Una de las aplicaciones de la integral definida de Cauchy fue la demostración de la fórmula de Taylor.

Fue Weierstrass quien "aritmetizó" el análisis a través de una construcción precisa del número real y de una definición estática del concepto de límite. Con ello depuró la definición de Cauchy pues eliminó la subjetividad del término "se acerca" que sugiere una idea de movimiento y de tiempo.

Riemann al desarrollar una teoría de integración más general que la de Cauchy, representó por medio de las series de Fourier funciones que tienen una infinidad de discontinuidades. Dio un ejemplo de una función acotada con una infinidad numerable de discontinuidades e integrable (según su teoría de integración).

A continuación describiremos los aspectos que consideramos más relevante en el estudio de la integral, particularmente de la integral definida, en dicho período. Esto será concretado a través de la *configuración epistémica analítica*, cuyas ideas y características principales se encuentran en las obras de Cauchy y Riemann. Siguiendo la tradición "euleriana", Cauchy no presentaba gráficos, motivaciones y relegaba a un segundo plan las aplicaciones geométrica del cálculo.

2.6.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

Los principales problemas que se presentaban en cálculo en el siglo XVIII se referían a su falta de fundamentación teórica, lo que implicaría en un cambio introducido en sus conceptos fundamentales. Esto caracterizó una nueva etapa en la historia y desarrollo del cálculo a partir del siglo XVIII, donde no se priorizaba sus aplicaciones, sino los fundamentos rigurosos. En esta configuración se sitúan los procesos de integración de Cauchy-Riemann de manera muy similar a los actuales libros de texto de cálculo.

Acciones

Las principales acciones desarrolladas en la CEA pueden ser sintetizadas por:

- ✓ Desarrollo del proceso de "aritmetización del análisis";
- ✓ refinar y generalizar la teoría de integración de Cauchy a una clase más amplia de funciones;
- ✓ Definición de límite e infinitésimo;
- ✓ Adopción del límite como eje central del proceso de formalización del análisis;
- ✓ Clarificar la noción de derivada;
- ✓ Definición de **integral definida** *como límite de una suma*;
- ✓ Demostración del fórmula de Taylor;
- ✓ Integración de funciones que no son la derivada de ninguna otra o de ciertas funciones que no tienen primitiva para todo intervalo considerado.

Lenguaje

Se caracteriza, predominantemente, por un estilo analítico-funcional en oposición a la visualización geométrica.

Conceptos

Además de los concepto de función y de límite, fundamentales en el cálculo, en la CEA también son presentados los siguientes conceptos: infinitesimal, continuidad, funciones discontinuas, convergencia de series, diferencial, derivada e integral definida. Estos han posibilitado no solamente realizar una rigurosa fundamentación del Teorema Fundamental del Cálculo, sino definir la integral definida, de manera muy similar al que se reproduce actualmente en los libros de texto.

Propiedades

Son enunciadas de manera muy semejante a como se presentan actualmente en los libros de texto de cálculo. Las principales se relacionan con:

- ✓ El Teorema Fundamental del Cálculo;
- ✓ El Teorema del Valor Medio;
- ✓ La relación entre la existencia del límite de la suma y del límite de una función arbitraria;

Argumentos

Los argumentos eran del tipo deductivo, se basaban en el rigor matemático; los enunciados de los teoremas eran más precisos y sus demostraciones más rigurosas.

2.6.3. Algunas consideraciones sobre la CEA

En esta configuración epistémica el principal *incremento* consiste en la *definición rigurosa de los conceptos del cálculo y aritmetización del análisis*.

Las *rupturas epistemológicas* que hemos identificado son relacionadas con la inversión del foco de la matemática estudiada hasta el momento, considerando básica la clarificación de los conceptos utilizados; la aparición del límite como central en el estudio del análisis, y la reducción de las condiciones de integrabilidad.

Es importante resaltar que en la teoría de Cauchy-Riemann, la existencia de una función arbitraria está condicionada a la existencia del límite de una suma. Por lo tanto, se puede integrar funciones que no son derivadas de alguna otra, o incluso funciones que no poseen primitiva para cualquier intervalo considerado. Este nuevo abordaje de la integral (como suma de límite), surgió en un contexto específico de fundamentación teórica y evidenció una crisis en la concepción de la integral como primitiva.

La necesidad de fundamentar teóricamente el cálculo fue inicialmente afrontada por Cauchy que contribuyó no solamente con la fundamentación del cálculo, sino con el desarrollo de definiciones más precisas de los conceptos. Hasta este período se integraban solamente las funciones definidas por una sola expresión analítica explícita (continuas en el sentido de Euler). La introducción de las funciones discontinuas, a través de Riemann, produjo una nueva crisis en la concepción de la integral como primitiva. Riemann exhibió una función *f(x)* para la cual (aunque sea discontinua en una infinidad de puntos en un intervalo dado) su integral no solamente existe, sino también define una función continua *F(x)* que no posee derivada para la infinidad de puntos considerados. Además se interesó por el problema relativo a *¿Qué se entiende por* $\int_a^b f(x)dx$ *?*

Finalmente, nos parece interesante resaltar también que mientras dicha integral se fundamenta a partir del límite de sumas, ha surgido (a partir del trabajo de Robinson, 1966) el "*análisis no estándar*" cuya fundamentación

se produjo a partir de los infinitésimos como elementos del conjunto hiperreal.

2.7. Configuración Epistémica Generalizada (CEG)

En esta configuración situamos los avances en la teoría de la integración que han surgido a partir de la *Teoría de la Medida*, hasta la actualidad.

2.7.1. Breve síntesis del estudio HED

La integral de Riemann constituyó el marco para la entrada de las matemáticas en el mundo de las funciones discontinuas; esto se produjo tras las publicaciones de su memoria (*post mortem)* en 1867 en alemán y en 1873 traducida al francés.

Este hecho propició el desarrollo, simultáneamente independiente en 1875, de distintos trabajos relacionados con las *sumas superiores e inferiores* de la partición de un intervalo (Thomae, Ascoli, Smith, Darboux) para demostrar una condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de una función acotable (Rey Pastor et al., 1969, p. 686).

Darboux (1842-1917), aunque sus principales contribuciones a las matemáticas se realizaron en geometría diferencial, es también reconocido en análisis por su trabajo relacionado con la integral de Riemann. En su *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues* desarrolló un estudio exhaustivo de las funciones discontinuas

En los años 1880 surgieron varias definiciones para caracterizar la integrabilidad de una función usando la idea de "medida". Todo esto conllevó a la necesidad de precisar conceptos adecuados al estudio de la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de funciones. Los primeros conceptos desarrollados en esta dirección fueron los de *contenido* (Stolz, 1881; Cantor, 1884; Harnack, 1885). Sin embargo, algunos de los problemas existentes que motivaron el desarrollo de la teoría de la medida y su utilización en la fundamentación de la integral continuaron sin respuestas tras los referidos conceptos de contenido, destacándose, principalmente: la carencia de relación con la integral definida, falta de aclaración del concepto de área, consideración que siempre existía el área de una región acotada por un gráfico (independientemente de la existencia de la integral de la función que determinaba la región).

En la perspectiva de contribuir con la solución de la problemática anteriormente referida, Peano (1887) observó la estrecha relación entre los conceptos de medida y de integral.

Posteriormente, Jordan (1893) al introducir las ideas de Cantor en el análisis no solamente contribuyó para la aceptación de dichas ideas por la comunidad matemática, sino con la generalización de las teorías de la integración y de la medida de conjuntos; Borel aunque introdujo el concepto de medida para estudiar la representación analítica de funciones, propició las condiciones satisfactorias para que Lebesgue la aplicara en la generalización de la integral de Riemann. En la aplicación de dicha integral surgían como principales insuficiencias la necesidad de hipótesis adicionales para mantener la relación entre primitiva e integral definida, y la convergencia del límite de algunas sucesiones de funciones integrables en un intervalo I (incluso uniformemente acotadas) a una función no integrable en el referido intervalo. Por lo tanto se evidenciaba la dificultad del paso al límite de integrales tomadas en el sentido de Riemann.

2.7.2. Elementos de significado de la TFS

Situaciones

La problemática que caracteriza dicha configuración se refiere al interés de desarrollar una amplia generalización de la teoría de la integración.

Acciones

Entre las principales acciones desarrolladas en esta configuración, podemos citar:

- ✓ demostración de la condición (de Riemann) necesaria y suficiente para la unicidad del límite de las sumas integrables:

> *"Para que una función acotada sea integrable (R) en [a, b], es necesario y suficiente que para cada par de números,* $\omega > 0, \varepsilon > 0$, *exista una partición tal que sea* $< \varepsilon$ *la suma de subintervalos donde la oscilación supera a* ω *"*(Rey Pastor et al., 1969, p. 686);

- ✓ demostración tanto del teorema fundamental del cálculo para funciones integrables en el sentido amplio, como del teorema del valor medio;
- ✓ combinación de la idea de Jordan (centrado en la definición de la integral de Riemann) y las ideas de medida de Borel, para precisar la definición de medida y utilizarla como base de la definición de integral (asociado a los conceptos de supremo e ínfimo de una función).

Lenguaje

Fundamentalmente analítico, basado en lenguaje conjuntista y topológico.

Conceptos

Los conceptos utilizados fueron: conjunto medible, función medible, sumas superiores, sumas inferiores e integración.

La definición de la integral definida, según Lebesgue, se realizó en dos momentos específicos. Inicialmente consistía en la generalización de la idea de área bajo la curva (definición geométrica): *"si f es acotada en [a, b] y positiva, entonces la integral puede definirse como la medida del conjunto E_f de puntos del plano tales que* $0 \le y \le f(x)$, *con* $x \in [a,b]$, *siempre que este conjunto sea medible"* (Sánchez y Valdés, 2004, p. 188). Posteriormente, definió la integral analíticamente mediante la división del conjunto imagen de *f* en particiones cada vez más finas (definición analítica):

> *"así, si para* $x \in [a,b], m \le f \le M$ *y* (a_n) *era una partición de* [*m,M*], *el conjunto* (E_f) *estaba comprendido entre los rectángulos generalizados de base* $E_i = \{x : a_i \le f(x) \le a_{i+1}\}$ *y alturas respectivas* a_i *y* a_{i+1}, *es decir, su medida estaría entre* $\sum a_i m(E_i)$ *y* $\sum a_{i+1} m(E_i)$. *Desde luego, para ello debió suponer que los conjuntos* E_i *eran medibles (o como sería costumbre más tarde, que la función f es medible). La diferencia entre estas dos sumas tendía a cero con la norma de la partición* [*m,M*], *así que podía definirse* $\int_a^b f = \lim \sum a_i m(E_i) = \lim \sum a_{i+1} m(E_i)$*"* (Ibíd., pp. 188-189).

Propiedades

Entre las propiedades de la CEG, destacamos:

- ✓ una función *f(x)* es medible en E (medible y acotado en el eje OX) si el subconjunto de los puntos de E, tal que *f(x)>A* es medible para todo A constante;
- ✓ La integral de Lebesgue de *f(x)* sobre E (equivalente a la integral definida) existe si los extremos inferior y superior de una función acotada medible son iguales; para las funciones no acotadas, la existencia de dicha integral está condicionada a la convergencia de una serie formada a partir de la suma de los infinitos subintervalos del intervalo dado.
- ✓ para las funciones no acotadas, se estructura una serie a partir de las sumas de los subintervalos formados a partir de $(\underline{f}, \overline{f})$, y se aplica la misma definición caso de que dicha serie sea convergente;
- ✓ la función *f* es integrable en el intervalo [a, b] si sus discontinuidades constituyen un conjunto de medida cero;

- ✓ se dice que el conjunto E es medible si sus medidas interior y exterior fueren iguales;
- ✓ $\int_a^b f'(x)dx = f(a) - f(b)$ cuando f es integrable en sentido de Riemann-Darboux;
- ✓ el teorema fundamental del cálculo.

Argumentos

Lebesgue hace una rigurosa y deductiva fundamentación de la integral definida, basada en la teoría de la medida, desarrollada a partir de la teoría de Borel; Darboux fundamentó su integración en la idea de las sumas superiores e inferiores, mientras la demostración de la fórmula de la integral definida se basa en hecho de que

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1})$$

y, del teorema fundamental, en que

$$\sum f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum f'(t_i)(x_i - x_{i-1}),\ con\ t_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

2.7.3. Algunas consideraciones sobre la CEG

En la CEG se añadió la *fundamentación del análisis a partir de la teoría de la medida*.

La definición de Lebesgue fue extendida a las funciones medibles no necesariamente acotadas sobre $(-\infty,+\infty)$ siempre que las series anteriores sean *absolutamente convergentes.* Además, Lebesgue "*demostró que una función acotada era integrable en el sentido Riemann si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tenía medida cero"* (Sánchez y Valdés, 2004, p. 189), lo que le permitió ejemplificar funciones que eran integrables en el sentido Lebesgue, pero que no lo era en el sentido de Riemann, como es el caso de la función de Dirichlet.

El descubrimiento del teorema del paso al límite en la integral fue uno de los principales méritos de Lebesgue y el estudio de la relación entre primitivas e integral definida lo que demandó más esfuerzos. Mientras la integral de Riemann se mostrara muy útil en el marco de las funciones continuas, no era suficiente para solucionar la difícil problemática que se presentaba en el ámbito de las funciones discontinuas.

3. BREVE ANÁLISIS DE LOS DISTINTOS SIGNIFICADOS PARCIALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Este estudio nos ha permitido establecer las configuraciones epistémicas que conforman el significado global de la integral definida y que serán utilizadas como referencia para la elaboración de instrumentos de análisis de los currículos, textos y clases relativos a la faceta instruccional de la integral definida en los niveles de la enseñanza secundaria o universitaria. En lo que se refiere a la enseñanza universitaria, nuestro interés se centra específicamente en analizar y caracterizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida en un curso introductoria de cálculo I desarrollado en la *Licenciatura en Matemática* (en el contexto brasileño).

Para determinar una configuración epistémica nos ha parecido fundamental el tipo de situación problema que se resuelve ya que estimamos que movilizará unos determinados elementos de significados distintivos y por tanto un significado parcial. Además, no diferenciar entre ellos o no movilizarlos en los diferentes momentos que se suceden en la resolución de situaciones-problema complejas, lleva a conflictos semióticos.

Consideramos que la revisión de la literatura especializada y el estudio histórico-epistemológico-didáctico que realizamos sobre el desarrollo del cálculo y, particularmente de la integral definida, nos posibilitó identificar los distintos *significados parciales* que, de manera general, están asociados a la integral definida. Además, nos han permitido constatar la complejidad existente en la evolución de la noción de la integral definida y, consecuentemente, reflexionar sobre posibles dificultades que pueden presentarse en la organización de su proceso de enseñanza y aprendizaje en un primer curso universitario. Todo esto debemos tener en cuenta en las investigaciones que se desarrollan en el campo de la didáctica de la matemática, principalmente en lo que se refiere al proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo en el contexto de formación del profesor de matemáticas.

En las investigaciones asociadas a la integral definida centradas en la epistemología, se destaca el interés de varios autores (Calvo,1997; Sad, 1998; Dubinsky, Czarnocha et al., 2002; etc.) por la (re)construcción de dicha noción matemática. Por otra parte, Turégano (1998) consideró que existen tres concepciones distintas para la integral definida: cuadratura con independencia de tangentes, la integración como inversa de la diferenciación, y la integral como límite de sumas.

Sin embargo, hemos observado que la noción de integral y, particularmente de la integral definida se ha generado y evolucionado, a lo

largo de la historia de las matemáticas, partiendo de sus aplicaciones a la solución de problemas, destacándose los relacionados con la física y la geometría (integración geométrica), pasando por un período de su "creación" donde el énfasis estaba en el cálculo de primitivas; posteriormente llegó a la integración aproximada (a través de métodos numéricos, gráficos y mecánicos) donde se buscaban procesos para encontrar un valor aproximado para la integral definida de funciones cuya primitiva no se podía determinar; en seguida, la integración estuvo enmarcada por su fundamentación con la elaboración de definiciones más precisas basadas en el paso al límite e independientes de la geometría (caracterizadas por la "aritmetización del análisis") y, finalmente llegó a su generalización apoyada en la teoría de la medida. A partir de ahí, caminó, a pasos largos, hacia un elevado grado de generalización y abstracción existentes en la actualidad. Sin embargo, esta amplia generalización y abstracción, aunque sean fundamentales para el desarrollo de varias ramas de las ciencias (como la teoría de la probabilidad, la teoría ergódica, teoría espectral, análisis armónico, etc.)

> "*tiene el inconveniente de que nos hace perder de vista totalmente el punto de partida que está históricamente determinado y, por tanto, cargado de una serie de motivaciones, internas y externas a las matemáticas, por las que se llegó a esta construcción y que en última instancia condicionan su aplicación"* (Sánchez y Valdés, 2004, p. 195).

La complejidad para determinar la integración de las funciones no acotadas tuvo como consecuencia la necesidad de expansión de la integral de Lebesgue por otras teorías más generales. Aunque este estudio no tiene el objetivo de discutir dichas teorías, sintetizaremos algunas de las contribuciones más relevantes en lo que se refiere a la generalización de la teoría de la integración (Sánchez y Valdés, 2004), lo que se concretó a partir de 1912, a partir del estudio de Denjoy y Perron que amplió la teoría de la integración de Lebesgue para solucionar el problema de hallar una función *g a partir de g'* no acotada y, por lo tanto, no necesariamente integrable en el sentido de Lebesgue; también merecen destacarse la noción de integral definida propuesta por Stieltjes, en 1894, basada en el concepto matemático de *distribución de masa positiva;* Riez, en 1909, solucionó el problema de la representación de los funcionales lineales continuos por medio de la integral de Stieltjes; Radon (1913) proporcionó una definición de integral (que incluía las definiciones de Lebesgue y de Stieltjes) apoyada en una función completamente aditiva de conjuntos; Fréchet (1915) señaló en el sentido de la extensión del resultado de Radon para las funciones completamente aditivas definidas en ciertas partes de un conjunto *E*

abstracto, iniciando así, la trayectoria hacia la generalización del análisis abstracto; y, Nikodym que resolvió el problema de la falta de representación de funciones de conjunto mediante integral.

4. SIGNIFICADO GLOBAL DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Consideramos que la descripción global de la integral definida puede realizarse por medio de un proceso (en espiral) de construcción de los significados parciales de dicha noción. El conjunto de dichos significados, descritos por cada una de las configuraciones epistémicas, constituye el significado global de la integral definida. En la tabla 1 resumiremos los principales elementos que componen dicho significado global.

Todo esto tiene implicaciones directas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y particularmente del cálculo en la formación de profesores de matemáticas de nivel secundario y universitario. La planificación y el desarrollo de un proceso de enseñanza del cálculo requieren que el profesor delimite el significado del objeto a ser estudiado, desde las distintas perspectivas que conforman las distintas configuraciones. Por esto, la reconstrucción del significado global de la integral definida, en el marco HED que describimos anteriormente, deberá propiciar criterios para una posterior evaluación de los significados pretendidos e implementados (en las instituciones educativas) y personales (de los estudiantes). Además contribuirá para la caracterización de los criterios de idoneidad del currículo de cálculo en cada nivel educativo.

GENERALI-ZADA	Generalización de la integración	Integración funciones medibles	Analítico Notaciones conjuntista	Suma superior e inferior Integral definida Conjunto; función medible	Teorema del valor medio Teorema fundamental del cálculo	Deducción
ANALÍTICA	Fundamentación del cálculo	Cálculo de la integral definida como límite de una suma	Analítico Algebraico	Función, límite derivada, diferencial Integral	Condición existencia de la integral	Deductiva
SUMATORIA	Relación inversa entre integración y derivación	Suma de rectángulos infinitesimales Método formal de cálculo de suma y diferencia de infinitésimos	Simbólico Numérico	Secuencias de diferencias Curvatura	Fórmulas de cálculo de derivadas	Deductiva
PRIMITIVA	Relación inversa entre integración y derivación	Desarrollo binomial	Fluentes, fluxiones notación	Fluentes, fluxiones	Teorema fundamental del cálculo	Deductivo
INFINITA	Situaciones expresadas con tipos de funciones algebraicas y	Integración numérica	Indivisibles	Infinitésimo Serie; Triángulo característico	Teorema de Cavalieri	Exhausción sin doble reducción

	transcendentes					
INTUITIVA	Estudio del cambio y del movimiento	Tendencia a procesos numéricos	Geométrico y aritmético	Tasa de cambio	Ley de Bradwardine y de Swineshead	Argumentaciones intuitivas para mejora del método de la exhausción
FINITA	Cuadratura Cubatura	Método de exhausción	Geométrico Ordinario	Área, volumen Medida	Axioma de Arquímedes; Fórmulas áreas y volúmenes	Doble reducción al absurdo
	SITUACIONES	ACCIONES	LENGUAJE	CONCEPTOS	PROPIEDADES	ARGUMENTOS

Tabla 1: Configuraciones epistémicas de la integral definida

5. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

El estudio histórico-epistemológico-didáctico que hemos realizado sobre la integral nos permitió identificar y caracterizar las siete configuraciones epistémicas que constituyen los "significados parciales" para la integral definida: finita, intuitiva, infinita, primitiva, sumatoria, analítica y generalizada. Sin embargo, nos parece interesante resaltar que dichas configuraciones pueden ser reagrupadas o descompuestas dando origen a nuevas configuraciones o subconfiguraciones, respectivamente. Esto permitirá adaptarlas, de manera flexible, a las necesidades específicas de cada investigación según su finalidad y el nivel para el cual se destina y su "precisión" en cada caso es fundamental en el momento de establecer sus distintas conexiones y relaciones internas o externas. La red formada por estas configuraciones constituye la concreción del significado global de la integral definida, entendiendo el significado como "sistema de prácticas" y como respuesta a la pregunta "¿Qué es la integral definida?".

Aunque el estudio HED del cálculo que hemos realizado revela que se suele priorizar una de las dos nociones de integral (definida y indefinida) en los distintos períodos del desarrollo del cálculo, ambas han contribuido con la conformación de los significados parciales de la integral definida, una vez que implícita o explícitamente están asociados con la aplicación de la integral a la solución de problemas o por estar directamente ligados a la definición de la integral definida de cada clase de funciones (o problemas), para las cuales dicha definición tiene sentido.

La revisión de la literatura, por otra parte, nos ha ayudado a comprender mejor la problemática existente en las investigaciones desarrolladas en cálculo (en general) y sobre la integral definida (en particular). Además, nos ha propiciado conocer las herramientas y marcos teóricos, que suelen utilizar las distintas investigaciones. Todo esto ha contribuido al refinamiento y desarrollo de nuestro estudio.

La reconstrucción del significado global de la integral definida y la revisión de las investigaciones nos proporcionan un punto de partida para abordar nuevas cuestiones de investigación, como por ejemplo ¿Qué criterios serían necesarios tener en cuenta para valorar la idoneidad socio-profesional de una propuesta curricular sobre la integral para la formación de profesores de educación secundaria?

REFERENCIAS

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (edit.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrcht: Kluwer, A.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2): 231-262.

Artigue, M. (2003), ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? Boletín de la Asociación Venezolana, Vol. X nº 2, pp. 117-134

Ávila, G. (2001). Análise Matemática para a Licenciatura. Sao Paulo: Edgard Blücher Ltda.

Baron, M. (1985). *Curso de história da matemática: origem e desenvolvimento do cálculo.* Trad. Jose R.B. Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, v. 1-5.

Bezuidenhout, J. y Olivier, A. (2000), Students' conceptions of the integral. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2 pp. 2-73, 2-80.

Boyer, C. (1992). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: cálculo,* v.6, trad. Higino H. Domingues. Sao Paulo: Atual.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de maestría. UAB.

Carlson, M. P.; Persson, J. and Smith, N.(2003) Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the Fundamental Theorem of Calculus. Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2 pp. 2-165, 2-172.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1): 73-112.

Contreras, A. y cols (2003). *Análisis de manuales de 1º y 12º de bachillerato LOGSE en institutos de educación secundaria de la provincia de Jaén, en cuanto a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos*. Jaén: Instituto de Estudios Gienneses.

Crisostomo, E. (2004). *Estudio del cálculo en didáctica de la matemática: reconstrucción del significado de referencia de la integral definida.* Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vadakovic, D. (2002). The definite integral: A coordination of two schemas. *Conference: ICTM-2: 2. International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*, Grecia.

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J. (1986) "Une histoire des mathématiques. Routes et dédales" Éditions du Seuil

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2: 27-33.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY.

Farfán, M.R. (1997), Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio, Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J.D.; Contreras, A. y Font, V. (2005) Análisis de procesos de instrucción basados en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,

Holton, D. et al (2003). *The teaching and learning of mathematics of university level: An ICMI study.* Kluwer Dordrecht.

Lorenzo, J. (1977). La Matemática y el problema de su Historia. Editorial Tecnos. Madrid

Mnemosyne nº6, (1993), Mathématiques Approche les Textes Historiques. IREM. Université Paris VII

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En: E. Castro y cols (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp.277-287). Granada: Universidad de Granada.

Rasslan, S. and Tall, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4 pp. 4-89, 4-96.

Rey Pastor, J. et al. (1969). *Análisis Matemático*, 8ed. Buenos Aires: Kapelusz.

Sad, L. (1998). *Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos*. Tesis doctoral. UNESP-Rio Claro, Brasil.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki: una historia del arte y la ciencia del cálculo.* Tres Cantos: Nivola libros y ediciones S.L.

Schneider, M. (1988), *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, Tesis Doctoral, Universidad Católica de Lovaina.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Netherland: Kluwer, A. P.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer, A. P.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. Bishop et al. (eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Netherland: Kluwer, A. P.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en un contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias,* 16 (2): 233-249.

Zuin, E. (2001). Cálculo, uma abordagem histórica, en *Educaçao Matemática: a prática educativa sob o olhar de profesores de cálculo.* Lachini, J. y Laudares, J. (org.). Belo Horizonte: FUMARC.

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN[14]

Antonio Estepa Castro
Universidad de Jaén
Juan Ortega Moya
IES "San Juan de la Cruz" de Ubeda (Jaén)

RESUMEN

En el presente trabajo presentamos el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión: rango, rango intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación, siguiendo el marco teórico de la Teoría de las Funciones Semióticas. El estudio se ha llevado a cabo sobre una muestra de catorce libros de Estadística utilizados en los cursos introductorios de los primeros niveles universitarios. El trabajo finaliza con unas conclusiones útiles para la planificación de la enseñanza y para la investigación sobre el tema.

REFERENCE INSTITUTIONAL MEANING OF SPREAD MEASURES

ABSTRACT

We present the reference institutional meaning of spread measures: range, interquartile range, mean deviation, variance, standard deviation and coefficient of variation, following the FST theoretical framework. This study was carried out on a sample of fourteen textbooks used in University introductory statistics courses. We finish with some conclusions useful for planning teaching and research on the theme.

1. INTRODUCCIÓN

La Estadística y la Probabilidad tienen más presencia en los curricula escolares actuales que en los anteriores. En la educación no universitaria se insertan dentro de las asignaturas de matemáticas. La parte estocástica del curriculum estudia fenómenos aleatorios, caracterizados por la incertidumbre, la dispersión y la variación de los datos, al contrario que los

[14] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 112-152).

demás tópicos matemáticos que estudian fenómenos deterministas, Una de las funciones curriculares de las Matemáticas es su carácter formativo, ofreciendo al estudiante diferentes destrezas intelectuales de aplicación en su vida futura. La Estadística y la Probabilidad tienen una metodología característica y un modo de tratar los problemas específicos, proporcionando al estudiante la posibilidad de pensar estadísticamente. Dentro del pensamiento estadístico la consideración de la variación ocupa un lugar destacado, Wild & Pfannkuch (1999). De los cinco elementos fundamentales del pensamiento estadístico que propone Moore (1990), tres están relacionados con la variación: Omnipresencia de la variación; explicación de la variación; cuantificación de la variación. Por tanto, la cuantificación de la variación, y, en consecuencia, las medidas de dispersión son temas importantes que merecen la atención de la investigación.

El trabajo que presentamos es parte de un proyecto de investigación en curso sobre las medidas de dispersión en Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). Al comienzo del proyecto nos planteamos caracterizar el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión, que presentamos en este trabajo. Esta caracterización consiste en delimitar y fijar lo que se entiende por medidas de dispersión dentro de la Matemática y más concretamente dentro de la Estadística Descriptiva. Este significado nos servirá de referencia para identificar y delimitar los posibles sesgos, carencias, limitaciones que podamos encontrar en el significado pretendido de las medidas de dispersión en la ESO y que estudiaremos en los libros de texto de este nivel de enseñanza.

El marco teórico adoptado ha sido la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), por adecuarse especialmente para el fin de nuestro estudio. En este marco teórico se han realizado muchos trabajos sobre libros de texto, valga como ejemplo Estepa y Sánchez (1998) y Ordóñez y Contreras (2003). Además, la fijación del significado institucional de referencia se ha llevado a cabo en algunos trabajos realizados en el marco de la TFS, podemos citar a título de ejemplo, Vallecillos (1994), Tauber (2001), Cobo (2003).

Comenzamos el trabajo describiendo sucintamente los elementos del marco teórico adoptado, necesarios a nuestro interés. A continuación fijamos los objetivos y referimos algunas investigaciones anteriores relacionadas. Se describe y justifica la elección de la muestra de libros utilizada. Hemos creído conveniente dedicar un apartado a la dispersión y sus medidas, que sirva de introducción al estudio sistémico de los

elementos de significado de las medidas de dispersión con el que se continúa. Finalizamos el trabajo con unas conclusiones.

2. MARCO TEÓRICO

Como hemos dicho anteriormente, el presente trabajo se realiza dentro del marco de la Teoría de las Funciones Semióticas que viene desarrollando el profesor Godino y sus colaboradores desde principio de la década de los noventa y que ha sido compendiada, organizada sistemáticamente y ampliada en la monografía Godino (2003).

La TFS define el significado de un objeto matemático como el sistema de prácticas (operatorias y discursivas) utilizadas en la resolución de problemas matemáticos Godino y Batanero (1994). Si el que resuelve el problema es un individuo se estará hablando de significado personal, si el sistema de prácticas es el adoptado en el seno de una institución estaremos hablando de significado institucional.

En este marco teórico se distinguen cuatro tipos de significados institucionales (Godino 2003): significado de referencia, lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas; significado institucional pretendido son los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) seleccionados, ordenados y delimitados con la intención de iniciar un proceso de estudio del tema matemático en cuestión; significado institucional implementado sistemas de prácticas que efectivamente se desarrollan en el proceso de estudio desarrollado; significado evaluado es el conjunto de tareas y cuestiones que se incluyen en la evaluación de los aprendizajes.

En la investigación didáctica se deben estudiar de modo preferente las relaciones existentes entre los significados institucionales y personales, de aquí la necesidad de fijar en el inicio de la investigación el significado institucional de referencia.

El concepto de significado, como el sistema de prácticas (operatorias y discursivas) que se utilizan en la resolución de problemas matemáticos, tiene un carácter global. En la investigación interesa descomponer este significado en entidades más elementales que se llaman elementos de significado, se distinguen los siguientes, (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa):

> *Situaciones.* Problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, que inducen a la actividad matemática..

Las acciones del sujeto ante tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, procedimientos). Conjunto de operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas de cálculo, estrategias, utilizadas específicamente en la resolución de un campo de problemas, llegan a automatizarse y suelen constituirse en objetos de enseñanza.

Lenguaje. La totalidad de elementos del lenguaje y representaciones usados en la resolución de problemas matemáticos, (términos, formulas, ecuaciones, gráficos, tablas, etc.).

Conceptos, dados mediante definiciones; nociones e ideas matemáticas utilizadas en la práctica matemática. Se puede constatar que algunas veces para un mismo objeto matemático existen diversas definiciones.

Propiedades. Los objetos matemáticos poseen ciertas propiedades o atributos que se refieren a características o, a las condiciones de realización de las acciones. Cada propiedad de un objeto lo relaciona con otros objetos, lo que incrementa su significado. En cada definición se enfatiza unas propiedades respecto a otras. En la planificación de la enseñanza se plantea la cuestión de la selección de definiciones y propiedades que se deben enseñar en un nivel educativo concreto.

Argumentos. Las acciones y los objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que explican, justifican o comprueban las soluciones de los problemas. Aquí se incluyen las demostraciones, validaciones tan usadas en el trabajo matemático.

Estos seis elementos de significado son objetos explícitos de enseñanza, analizando su naturaleza y características tendremos determinado el significado del objeto matemático en cuestión.

3. OBJETIVOS E INVESTIGACIONES ANTERIORES

Cuando se acomete el estudio didáctico de un tema matemático, como es el estudio de los fenómenos didácticos que aparecen en la enseñanza aprendizaje de las medidas de dispersión en la Educación Secundaria Obligatoria, es conveniente al principio, fijar su significado institucional, lo que permitirá tener una referencia epistemológica donde sustentar el resto del trabajo. En consecuencia, el objetivo pretendido es caracterizar el significado institucional de las medidas de dispersión estadística presentado en los libros de Estadística y en los más representativos de los utilizados en los cursos introductorios que se imparten en los primeros niveles universitarios de muchas Diplomaturas y Licenciaturas. Para lograr este objetivo analizaremos los elementos de significado de las medidas de

dispersión detectados en el estudio de los libros de texto universitarios: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentaciones. Los resultados de este estudio nos servirán de referencia para detectar posibles sesgos, limitaciones y carencias en el significado institucional local de las medidas de dispersión en la ESO y de ahí derivar otros estudios evaluativos y de enseñanza.

Los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se desarrollan en diferentes instituciones, donde los objetos matemáticos adoptan significados distintos, dependientes de cada institución. Este trabajo nos permitirá estudiar las relaciones entre los significados institucionales y personales.

Existen investigaciones sobre la variabilidad y las medidas de dispersión, que aunque no estén orientadas al estudio de libros de texto como hacemos aquí, si son, en cierta medida, de interés para este trabajo, porque están orientados a la dispersión. En primer lugar, citaremos tres trabajos que sitúan la dispersión en el contexto estadístico, así Snee, (1990) reconoce que la variación está presente en todo lo que nos rodea y que identificar, caracterizar, cuantificar, controlar y reducir la variación proporciona oportunidad al progreso; Moore (1990) sitúa la variación en el núcleo del pensamiento estadístico, destacando la omnipresencia, cuantificación y explicación de la variación como elementos fundamentales del pensamiento estadístico. Para Wild y Pfannkuch (1999) la consideración de la variación es un tipo fundamental de pensamiento estadístico en el sentido de apreciarla, conocerla, medirla y modelarla con el propósito de predecir, explicar y controlar.

Desde el punto de vista didáctico podemos destacar las siguientes: Reading y Shaughnessey (2000) argumentan que hay menos investigación en la comprensión de los estudiantes de las medidas de de dispersión que en la comprensión de las medidas de tendencia central, debido a que las investigación se ha orientado a los materiales curriculares dirigidos a las medidas centrales. Mediante entrevistas clínicas estudian la comprensión de los estudiantes de la concentración y dispersión en situaciones de muestreo, entre su conclusiones se puede destacar que los estudiantes mejoran con la edad en su habilidad para describir situaciones de muestreo, pero no articulan bien sus respuestas, además sugieren que los estudiantes necesitan más experiencias de situaciones de muestreo para apreciar mejor la variación. Meletiou (2000) realiza su tesis partiendo de la conjetura de que la enseñanza de la estadística sería más efectiva si se ayuda a los estudiantes a construir intuiciones sobre la variación y su relevancia en estadística; hace una evaluación previa de los conocimientos estadísticos de

los estudiantes participantes, que pertenecían a un curso introductorio de estadística en el nivel universitario; a continuación realiza un experimento de enseñanza; entre sus conclusiones podemos destacar la necesidad de poner a los estudiantes frente a auténticos contextos de donde se puedan extraer los conceptos estadísticos y que la enseñanza realizada, con énfasis en la variación, ayudó a los estudiantes a desarrollar su pensamiento estadístico.

Otros trabajos relevantes son los incluidos "The Third International Research Forum On Statistical Reasoning, Thinking and Literacy" celebrado en julio de 2003 en Nebrasca (USA) y dedicado a "Razonamiento sobre variabilidad", entre los que destacamos el de Watson (2003) en el que se estudian las definiciones, gráficos y generación de datos con cierta variabilidad que dan los estudiantes como respuestas a las preguntas de un cuestionario. Existen también trabajos dedicados al papel de la variación en cursos introductorios de estadística (Ballman, 1997), o bien trabajos sobre la problemática de enseñanza de alguna medida de tendencia central (Hart, 1984).

4. MUESTRA

Para delimitar la muestra de libros que analizaremos con el fin de obtener el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión, en primer lugar, a través de Internet, visitamos los sitios Web de departamentos de estadística de las universidades españolas, donde buscamos programas de asignaturas de estadística de los primeros cursos universitarios, en los que se incluyen las medidas de dispersión. Tomamos 19 programas, uno por universidad. La bibliografía recomendada en cada uno de los programas, la recopilamos en un fichero que ordenamos alfabéticamente, obteniendo, por repetición, la frecuencia con que aparecían los distintos manuales recomendados. En principio tomamos los que aparecían con máxima frecuencia. Descartamos algunos porque aunque los libros se referían a cursos universitarios de introducción a la estadística, el tema que nos ocupa, medidas de dispersión, no estaba muy bien tratado y el motivo de su inclusión en la bibliografía recomendada era por otros temas del programa.

Hemos incluido algunos otros que consideramos que podrían aportar algo al objetivo de nuestro estudio, por diversos motivos (ser un clásico dentro del genero, número de ediciones, ser citado aunque la edición sea relativamente antigua o la experiencia de los autores). En concreto los libros utilizados son: Batanero y cols. (1988), Calot, (1970), Guilford y Fruchter (1984), Hopkins, et al. (1997), Martín-Guzmán, M. P. y Martín

Pliego, F. J. (1985), Montiel, et al. (2002), Moore (1998), Nortes Checa (1977), Peña, (2001), Peña, y Romo, (1997), Quesada, et al. (2002), Ríos, (1977), Sánchez Carrión, (1995), Sánchez Crespo, J. L. y García España, E. (1961).

5. LA DISPERSIÓN Y SUS MEDIDAS

La dispersión es evocada en la literatura consultada con diversos vocablos. Está muy extendido en el idioma inglés el uso de los términos "variability", "variation", "dispersion" y "spread"; todos ellos usados como sinónimos, aunque hemos observado algún intento reciente por diferenciales (Bakker, 2003). Para este autor "variability" se utiliza para el fenómeno general de ser variable y "variation" para describir o cuantificar la variabilidad, con el mismo sentido que "dispersion" que es una característica de la distribución de un conjunto de datos.

Al traducir estos términos al castellano, algunos textos como Hopkins, Hopkins y Glass (1997, p. 53), Moore (1995, p. 37) mantienen el vocablo "variabilidad" junto a "dispersión" y, así mismo, hablan de la "variación" (Moore, 1995, p. 38).

Podemos decir, sin creer equivocarnos que el uso indistinto de "variabilidad", "dispersión" y "variación" es también una constante en la literatura en español. No puede, por tanto, extrañarnos que para cuantificar la "variabilidad" se hable con términos tales como "coeficiente de variación", "medidas de variabilidad" o bien, "medidas de dispersión".

El uso de la palabra "variabilidad" parece ser que está cobrando preferencia en las últimas décadas, principalmente en la literatura en inglés. Quizás, con ello se pretenda hablar de la "variabilidad" como una característica "intrínseca" a cada distribución de datos, con un significado descriptivo propio, desligado de los promedios.

En los textos revisados, hemos observado que se habla de la dispersión en un doble sentido:

a) Dispersión intrínseca, es decir, entre un dato considerado individualmente y todos los demás, sin referencia a ningún promedio, *"las medidas de variabilidad cuantifican el grado de dispersión o la extensión de las diferencias individuales evidenciadas en la distribución"* (Hopkins, Hopkins y Glass (1997, p. 53)

b) Dispersión respecto a un número (dispersión referencial), generalmente respecto a una medida de tendencia central, *"a la*

mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su síntesis, se le llama dispersión o variabilidad" (Matin Guzman y Martin Pliego, 1985, p. 57).

Los dos sentidos de la dispersión se suelen encontrar simultáneamente en algunos libros, donde dan una definición como la siguiente: *"Las medidas de dispersión nos indican la concentración de los valores de la variable entre sí, o bien alrededor de un promedio"*, Sánchez Crespo y García España (1961, p. 40).

En alguno de los textos revisados se resalta la idea de que los rangos son medidas de dispersión sin referencia a los promedios, *"estas dos medidas contempladas* (rangos) *no hacen referencia específica a ningún promedio",* (Matin Guzman y Martin Pliego, 1985, p. 59).

En Peña (2001) la dispersión intrínseca entre los datos se relaciona con la dispersión referencial en la propuesta del siguiente ejercicio "*Demostrar que la varianza puede calcularse mediante* $\frac{\sum\sum(x_i - x_j)^2}{2n^2}$", (Peña, 2001, p. 86). En este ejercicio se pide la demostración de que la varianza se puede calcular a partir de la suma de las diferencias al cuadrado de los datos tomados dos a dos (dispersión intrínseca).

Se refiere a la relación: $2\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\sum\sum(x_i - x_j)^2$, siendo n el número total de datos, cuya demostración se puede consultar en Sánchez Crespo y García España (1961, p. 66 y 67).

Algunos libros de la muestra (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985; Montiel et al., 2002) agrupan las medidas de dispersión en dos tipos: medidas de dispersión absolutas (rango o recorrido, recorrido intercuartílico, desviación media respecto a la media aritmética, desviación media respecto a la mediana, varianza, desviación típica) y medidas de dispersión relativas (coeficiente de apertura, recorrido relativo, coeficiente de variación de Pearson, índice de dispersión respecto a la mediana, recorrido intercuartílico relativo o razón intercuartil, coeficiente de variación mediano).

En el estudio sobre el significado institucional de referencia que realizaremos a continuación se ha utilizado la muestra de libros que hemos descrito más arriba. El resultado obtenido no es el significado incluido en un solo libro en concreto, sino que es el compendio de todos ellos, con ello queremos fijar el significado que a nivel universitario se da a las medidas de dispersión y que nos servirá de referencia al estudio del significado local de las medidas de dispersión en la Educación Secundaria Obligatoria que

realizaremos, con el fin de caracterizar el significado de las medidas de dispersión antes de iniciar su estudio en una muestra de Estudiantes de ESO que tenemos intención de acometer. En consecuencia, las medidas de dispersión que estudiaremos con detalle son las que se incluyen en el curriculum de la ESO, que son: rango, rango intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.

6. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO DE LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN

6.1. Situaciones (problemas)

Las medidas de dispersión, y la dispersión en sí misma, aparecen en todo problema estadístico. Para Peña (2001) algunos problemas que resuelve la estadística son: Descripción de datos, análisis de muestras, contraste de hipótesis, medición de relaciones y predicción. En todos ellos aparecen, de alguna manera, la dispersión y sus medidas.

No es objetivo de esta sección estudiar todos los problemas en que aparecen las medidas de dispersión, sino que de acuerdo con el marco teórico y el objetivo pretendido en este estudio, delimitaremos los campos de problemas a aquellos, de cuya resolución, pueden emerger las medidas de dispersión que estamos considerando y, que encontramos en los curricula de estadística descriptiva. A continuación exponemos y comentamos los que hemos encontrado.

S1. Encontrar el error máximo de un conjunto o subconjunto de observaciones.

Históricamente es el primer problema que aparece. En el siglo II a. C. el astrónomo griego Hiparco estimó la máxima variación de la duración de un año tomando la mitad del rango de sus observaciones. En este tipo de situaciones no se tiene en cuenta ningún promedio.

El recorrido muestra la variación total de los datos. Depende solo de las observaciones máxima y mínima, que podrían ser observaciones atípicas. Podríamos mejorar nuestra descripción de la dispersión fijándonos también en la dispersión del 50% de los valores centrales de nuestros datos (Moore, 1998, p. 28)

S2. Dar un índice de dispersión que complete la información obtenida con una medida de tendencia central

La media y la mediana proporcionan dos medidas distintas del centro de una distribución. Caracterizar una distribución solo con una medida de su centro puede ser engañoso. …. La descripción numérica útil más simple de una distribución consiste en una medida de centro y una medida de

(dispersión referencial). Las medidas de tendencia central, media, mediana y moda, se suelen utilizar para reducir los datos a un solo valor que los represente y que se toma como resumen de todos ellos.

Pero solamente la medida de tendencia central no da una información completa sobre la distribución de los datos que estemos estudiando, es necesario acompañarla de una medida que nos indique la separación de los datos de esa medida de tendencia central, lo que nos lo proporciona una medida de dispersión. Es decir, dos medidas, una de tendencia central y otra de dispersión describen mejor un conjunto de datos que solamente una medida de tendencia central. Aparecen aquí reminiscencias de los esfuerzos realizados por inminentes estadísticos y matemáticos para tratar de modelizar las "distribuciones de errores" mediante un parámetro central y otro parámetro de escala. La necesidad de medir la "bondad" de cualquier estimación del valor central lleva aparejada la consideración de la dispersión (Hald, 1998, p. 34).

> *Si deseamos obtener una cuantía de la variabilidad desde un punto de vista adimensional, con objeto de poder comparar diferentes variables entre sí o diferentes poblaciones con respecto a una misma variable, tendremos que recurrir a medidas de dispersión relativas como el coeficiente de variación, el intervalo intercuartílico relativo y el*

S3. Comparar la dispersión de dos o más distribuciones medidas en la misma magnitud y unidad. Muchas veces es necesario comparar la homogeneidad de dos conjuntos de datos, si su distribución es más o menos dispersa. Para lograr este objetivo no basta con comparar solamente las medidas de tendencia central que creamos apropiadas, ya que se puede dar el caso de que las dos medias, modas o medianas sean iguales o muy cercanas y, sin embargo, los dos conjuntos de datos no tengan una dispersión similar.

Por consiguiente, para comparar conjuntos de datos de una manera simple se debe comparar una medida de tendencia central de cada uno de los conjuntos de datos que nos indique si hay diferencia en la tendencia central de los datos y además una medida de dispersión que nos indique si hay diferencia en la separación de los datos respecto a esa medida de tendencia central.

S4. Comparar la dispersión de dos o más distribuciones medidas en distintas magnitudes. Otras veces es necesario comparar conjuntos de datos medidos en distintas unidades de una misma magnitud o, incluso, en distintas magnitudes. Para lograr este objetivo es necesario encontrar un índice que no tenga en cuenta las unidades de medida. Entre las medidas de dispersión que estamos estudiando la que cumple este requisito es el coeficiente de variación de Pearson, que nos dice las veces que la desviación típica contiene a la media aritmética.

S5. Detectar e interpretar valores atípicos. Algunas veces antes de realizar los análisis estadísticos es de interés detectar los valores atípicos procedentes de errores en la recogida de datos o debidos a causas no aleatorias, ya que se ha comprobado que suele haber entre un uno a tres por ciento llegando a veces hasta el cinco por ciento. Los datos atípicos se suelen detectar en representaciones gráficas (histogramas, gráfico de barras, gráfico del tallo y hojas), pero también existen criterios no gráficos como los tres siguientes: (Peña, 2001, 72-73)

a) Se consideran valores atípicos los que están alejados de la media más de tres desviaciones típicas, ya que según la desigualdad de Tchebychev en el intervalo de la media, más menos tres desviaciones típicas, están al menos el 89% de los datos. Este criterio tiene la dificultad de que los valores atípicos influyen en la media y la desviación típica y algunas veces puede que no sean identificados con este criterio.

b) Otro criterio más efectivo es utilizar medidas de centralización y dispersión que estén poco afectadas por los valores atípicos, como la mediana y la Meda. El criterio es el siguiente: Se considera probable valor atípico los que difieren más de cuatro veces y media de la Meda. Este criterio no tienen en cuenta la posible asimetría de la distribución.

c) Un criterio que tiene en cuenta la posible asimetría es el que considera posible valor atípico el que no pertenece al intervalo: $(Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1) < x_i < Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$, siendo Q_1 , Q_3 el primer y tercer cuartel, respectivamente.

Este tipo de problema lo hemos encontrado en Peña (2001).

S6. Comparar la posición relativa de datos en diferentes distribuciones. En estas situaciones vamos a comparar valores concretos dentro de una misma distribución mediante la posición que ocupan respecto al centro

de la misma. De nuevo tenemos un uso de la dispersión dentro de la propia distribución en la que se ha originado. Se trata encontrar unos valores (atípicos o no) de interés e interpretarlos en términos de dispersión. Ofrecemos un ejemplo tomado de Quesada y cols. (2002).

S7. Generar datos con ciertos requisitos sobre su variabilidad. Es el problema inverso para la dispersión. El problema directo consistiría en detectarla, medirla y modelizarla (Snee, 1990) en conjuntos de datos. Sin embargo, generar datos a partir de modelos o condiciones preestablecidas de variabilidad se presenta con frecuencia en diversos contextos. Por ejemplo, Reading y Shaughnessy (2000) y Serrano y otros (2001) consideran acertadamente este problema al plantear a los alumnos tareas para generar series de datos de modelos binomiales. Serrano, Batanero y Cañizares (1999) también proponen este problema para modelos de Poisson. El problema inverso podría catalogarse dentro de lo que Snee describe como 'control' de la variación aunque también podría considerarse como una capacidad en relación con la percepción de la variabilidad (Kareev, y cols, 2002).

6.2. Las acciones del sujeto ante tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, procedimientos, estrategias)

En el marco teórico de nuestra investigación, las prácticas, tareas o actividades de matematización, tanto a nivel institucional como personal, constituyen un elemento de significado esencial ya que su realización evidencia la presencia de los objetos matemáticos. Es difícil hacer un catálogo de todas las actividades relacionadas con la dispersión que hemos encontrado en los textos revisados. Algunas actividades son bastante simples, como por ejemplo "*calcular una medida de dispersión para una serie de datos sin tabular*" (Nortes Checa, p. 130, ejercicio 4.1); sin embargo, otras tareas son más complejas y requieren poner en juego conocimientos sobre gráficos,

Se ha efectuado un examen a un grupo de alumnos, en una determinada materia. El examen constaba de dos pruebas, llamadas A y B. De la información obtenida se han hecho los siguientes cálculos:

$\bar{x}_A = 15{,}5;\ .\ \bar{x}_B = 75;\ \sigma_A = 2{,}5;\ \sigma_B = 30{,}6.$

Los alumnos números 1 y 2 han obtenido:

$x_{1,A} = 16{,}7;\ .$

$x_{2,A} = 14;\ x_{1,B} = 77{,}5;\ x_{2,B} = 82{,}4.$

Conviértase las notas de cada alumno en una nota global y dígase cual de los dos alumnos supera en puntuación al otro. (Quesada y cols., 2002, p. 43).

propiedades, cálculos, etc. lo cual complica su clasificación. Tal es el caso de la actividad propuesta por Quesada, Isidoro y López (2002, p. 61, ejercicio 1.17) cuando piden "*comparar la dispersión de dos distribuciones de datos*" pero una de ellas viene dada por la gráfica de su función de distribución y la otra mediante una serie numérica.

A continuación enunciamos las actividades que hemos encontrado, conscientes de que algunas de ellas pueden prestarse a la crítica:

A1. *Calcular medidas de dispersión de una serie de datos (sin tabular).*

Lo más frecuente es que se pida la varianza o la desviación típica, pero puede referirse a cualquier otra medida o a varias de ellas simultáneamente. Ejercicios de este tipo son habituales a nivel de la ESO. Encontramos prácticas de esta clase en Batanero, Godino y Estepa (1988, ejercicios 4.16 y 4.17), Rios (1977, p. 43), Nortes Checa (1977, p. 130, ejercicio 4.1).

A2. *Calcular medidas de dispersión de datos aislados tabulados (no agrupados).*

Esta tarea requiere manejar fórmulas de las medidas de dispersión donde intervienen las frecuencias. La encontramos en Nortes Checa (1977, p. 115, ejemplo 4).

En Quesada, Isidoro y López (2002, p. 68, ejercicio 1.2) aparece propuesta una versión compleja de esta actividad donde la tabla de datos incluye la consideración simultánea de las frecuencias absolutas no acumuladas, las frecuencias absolutas acumuladas y los porcentajes, todo lo cual requiere que los estudiantes conozcan las definiciones de estas frecuencias y sus relaciones mutuas.

A3. *Calcular las medidas de dispersión de datos tabulados agrupados en intervalos.*

Con respecto a los cálculos anteriores, añade la dificultad de determinar las marcas de clase de los intervalos, algunos de ellos con extremos no definidos. Calot (1970, p. 118, ejercicio 2) propone calcular las características de dispersión de la distribución de salarios de empleados que han trabajado todo el año con el mismo patrón aportando datos agrupados en intervalos pero con las clases primera y última indefinidas.

A4. *Calcular medidas de dispersión con calculadora y/o computador.*

Son bastantes los autores y docentes que se preocupan por que los estudiantes utilicen la potencia de cálculo que proporcionan las calculadoras de bolsillo (Casio fx-80, etc) y las computadoras con programas como Excel, StatGraphics o SPSS. Para ello, incluyen en

sus textos o docencia tareas como "*c) Ahora introduce los datos en la calculadora y halla la media y la desviación típica*" (Moore, 1998, p. 47, ejercicio 1.29.c)

A5. *Calcular medidas de dispersión de datos transformados (Métodos de cálculo abreviados).*

La transformación de los datos mediante un cambio de origen o de escala facilita su manipulación y, hasta la llegada de las calculadoras, se ha considerado un conocimiento importante para resumir datos estadísticos. Hoy día los computadores ocultan al alumnado las dificultades que puede conllevar trabajar con los datos directamente, pero sigue siendo esencial que el alumno conozca los cambios que sufren las medidas de dispersión tras una transformación de los datos. Los libros de ediciones más antiguas como Calot (1970, p. 82), Nortes Checa (1977, p. 111, ejemplo 6), Sánchez-Crespo y García España (1961, pp. 65 y 66) exponen detalladamente como realizar esta tarea.

A6. *Calcular medidas de dispersión de datos presentados gráficamente (en histogramas, diagramas de barras, polígonos de frecuencias relativas o acumuladas, de gráficos de la caja, etc.).*

Los gráficos son esenciales en Estadística - "vale más una imagen que míl palabras" – y Moore (, 1988, p. 46) insiste reiteradamente en la representación gráfica de los datos - "*REPRESENTA SIEMPRE TUS DATOS GRÁFICAMENTE*" – Peña y Romo (1997, p. 63, ejercicio 4.12.e) proponen el cálculo de medidas de dispersión a partir de un histograma y en Quesada, Isidoro y López (2002, p. 61, ejercicio 1.17) ya se ha mencionado la obtención de medidas de dispersión a partir de la gráfica de la función de distribución.

A7. *Calcular la dispersión de datos separados en subpoblaciones (Cálculo ponderado de la dispersión).*

Esta actividad es de bastante complejidad y sólo la hemos encontrado en los textos desarrollada teóricamente. Puede verse en Nortes Checa (1977, p. 112), Calot (1970, p. 107) y en Peña y Romo (1997, p. 62, ejercicio 4.7.b) aunque éste último la propone a modo de investigación personal para los alumnos.

A8. *Calcular medidas de dispersión sin los datos* (*a partir de información basada en propiedades, definiciones, fórmulas, etc.).*

Estos ejercicios son prácticamente inexistentes a nivel de la enseñanza secundaria, exceptuado el cálculo de la desviación típica a partir de la varianza o viceversa. También cabe incluir aquí el cálculo

del coeficiente de variación de Pearson cuando se dan al alumno sólo la media y la desviación típica. En los libros universitarios es más frecuente encontrarlos. En Quesada, Isidoro y López (2002, p. 69, ejercicio 1.4) se propone la siguiente pregunta: "*Sea* $\{x_i, i = 1,.....,40\}$ *una variable estadística cuya distribución de frecuencias es simétrica. Se sabe que* $\sum_i (x_i - 11)^2 = 1040$ *y que* $\sum_i |x_i - a|$ *es mínima cuando a = 10. Se pide: a) ..... b) ..... c) Hallar el coeficiente de variación de Pearson.*"

A9. *Realizar cálculos inversos con medidas de dispersión.*

El uso inverso de las fórmulas es de complejidad elevada pues requiere gran destreza para realizar manipulaciones algebraicas. Debido a esto, esta tarea está prácticamente desterrada de la ESO. Sin embargo, hemos de considerarla pues Hopkins y otros (1997, p. 66) la menciona expresamente y propone ejercicios donde se pide el total ($\sum X$), la suma de cuadrados SC ($\sum X^2$) o la suma de las desviaciones cuadráticas respecto a la media ($\sum (X_i - \bar{X})^2$), cuya importancia hemos de reconocer en otras actividades como análisis de la varianza, por ejemplo.

A10. *Calcular e interpretar el intervalo* $(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma)$ *y el porcentaje de datos que contiene.*

Es fundamental en la interpretación y en la investigación de la variabilidad de las distribuciones empíricas o teóricas que los alumnos reconozcan la importancia del intervalo de Chebychev. Por ejemplo, ello preparará su formación para estimar el error de muestreo de la media. Peña y Romo (1997) tratan extensamente esta tarea tanto teóricamente (p. 54) como en su aplicación práctica (p. 61. ejerc. 4.1.a)

A11. *Representar gráficos que contengan información sobre dispersión (ej. gráficos de la caja, histogramas, etc).*

La construcción y lectura de gráficos ha sido ampliamente estudiada en la literatura de investigación en didáctica de la matemática. Belén Cobo (2003, p. 129) aporta una revisión bastante actualizada de la importancia de los gráficos en la estadística. También en Watson y Kelly (2003, p. 19) se incluye un protocolo sobre construcción de gráficas para investigar los niveles de comprensión de la variabilidad de datos atmosféricos por los alumnos. En general, podría considerarse dentro de esta actividad la generación por parte del alumno de otros tipos de elementos ostensivos, tales como símbolos, expresiones algebraicas, etc. Probablemente, los diagramas de barras, histogramas, polígonos de

frecuencias o los gráficos de caja con bigotes sean los que más fácilmente puedan ser manejados por los alumnos. Algunos, como el gráfico de la caja, se pueden incluso utilizar en tareas del tipo A1 o A12. Moore (1998, p. 49, ejerc. 1.33), Peña y Romo (1997, p. 79, ejercicio 5.3.b) y Montiel-Rius-Barón (2002, p. 96, ejemplo 4.3) se interesan por estas tareas.

A12. *Tipificar datos.*

La tipificación como tal permite expresar los datos en unidades de dispersión. Creemos, por tanto, que constituye un conocimiento importante en la comprensión de la variabilidad. Tauber ((2001, p. 130) incluye la tipificación como elemento de significado actuativo para la distribución normal. Quesada (2002, p. 43) y Peña y Romo (1997, p. 96, ejerc. 6.4) proponen actividades sobre tipificación.

6.3. Lenguaje

En la actividad matemática se necesita una serie de elementos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) para resolver problemas, generalizar y comunicar las soluciones y modos de resolución, que según el marco teórico adoptado, se constituyen en sistemas de representación e instrumentos de la actividad matemática.

Este tipo de elementos que intervienen el tema que nos ocupa los podemos agrupar en las siguientes categorías:

L1. Palabras y expresiones verbales

Muchas son los términos y expresiones verbales que se utilizan en relación a las medidas de dispersión que nos ocupa, conscientes de la dificultad de ser exhaustivos, relacionamos las siguientes: C*oeficiente de dispersión, desviación, desviaciones en valor absoluto, desviación media, desviación media respecto a la media, desviación típica, desviación standard, dispersión, dispersión absoluta, error, grado de dispersión, gráfico de la caja, más representativo, menos representativo, medidas de dispersión, medidas de dispersión absolutas, medidas de dispersión relativas, promedio de las desviaciones, rango, rango intercuartílico, recorrido, recorrido intercuartílico, representatividad, representatividad de la media, separación de cada valor respecto a la media, suma de cuadrados, valor representativo, variabilidad, varianza.*

Pinn (1990) distingue en la clase de matemáticas entre el "inglés corriente" y el "inglés matemático", siendo el primero el inglés usado en la

comunicación ordinaria y el segundo el inglés usado en el discurso matemático. Cuando se utiliza una expresión en sentido matemático y se interpreta en el sentido ordinario, puede dar lugar a diferentes interpretaciones, causando confusión. Este mismo fenómeno ocurre en el idioma castellano, en el vocabulario matemático en general y en el estadístico en particular. Así encontramos palabras cuyo significado es el mismo en el lenguaje ordinario y en matemáticas (dispersión); palabras con distinto significado en el lenguaje corriente y en el matemático (media) o bien palabras que solamente tienen un significado matemático (histograma). Si no se precisa el uso que se esta haciendo de la expresión puede dar lugar a interpretaciones erróneas y en consecuencia a confusión.

L2. Notaciones y fórmulas

Pinn (1990) distingue cuatro tipos de símbolos matemáticos: logogramas (signos inventados en especial para referirse a conceptos totales: >, <, %, + , -, ...); pictogramas (iconos estilizados en los que el símbolo está muy relacionado con el significado: □, °, ∠, ⊥, ...); símbolos de puntuación y símbolos alfabéticos. Esta clasificación de las notaciones y símbolos es muy atomista. Nos interesa más el significado conjunto de los símbolos y notaciones utilizados como se expresa a continuación.

Rango o recorrido

$Re = x_{máx} - x_{mín}$, (Montiel y cols., 2002, p. 80)

R = máx (x) – mín(x), (Quesada y cols., 2002, p. 24).

Recorrido intercuartílico

RIC = Tercer cuartil – Primer cuartil, (Sánchez Carrión, 1995, p. 81)

$R_I = P_{3/4} – P_{1/4}$, donde $P_{3/4}$ designa el tercer cuartil (Quesada, 2002, p. 24)

$R_I = C_3 – C_1$ (Martín Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 38)

Recorrido intercuartílico = $Q_3 – Q_1$ (Montiel y cols. 2002, p. 81

Desviación media

- Desviaciones respecto a un valor central cualquiera, P $D=\sum_{i=1}^{n}(x_i-P)\frac{n_i}{N}$, (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, figura 4.3, p. 59).
- $Dm=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-\bar{x}|$, para datos tomados individualmente; para tomados de una tabla de frecuencias, tenemos $Dm=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}|x_i-\bar{x}|n_i$, (Montiel y otros, 2002, p. 81).
- $D_{\bar{x}}=\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|\frac{n_i}{N}$, (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, figura 4.3, p. 60).
- $e_{\bar{x}}=\sum_{i=1}^{k}f_i|x_i-\bar{x}|$, (Calot, 1970. p. 80)

Varianza

- $S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\frac{n_i}{N}$, (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, figura 4.3, p. 63).
- $s^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$
- $s^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$, (Moore, 1995, p. 43)
- V(X) (Calot, 1970, p. 81)
- $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$, para datos no agrupados. Para datos agrupados se utiliza la siguiente fórmula, $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 n_i$. Una fórmula equivalente pero más operativa es , $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\bar{x}^2$ para datos no agrupados y para datos agrupados $S^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}n_i x_i^2-\bar{x}^2$, (Montiel y cols., 2002, p. 82-83)

- $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$, (Nortes, 1977, p. 107).

Desviación típica

- $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|^2}$, (Calot, 1970. p. 80)

- $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \dfrac{n_i}{N}}$, (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, figura 4.3, p. 63).

- $s = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, para datos sin agrupar y para datos agrupados se utiliza la fórmula $s = \sqrt{\sum (x_j - \bar{x})^2 \, fr(x_j)}$, (Peña, 2001, p. 62)

- $s = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$, (Moore, 1995, p. 43)

- $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}}$, (Quesada, 2002, p. 23)

- $s_x = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}}$, (Peña y Romo, 1997, p. 53)

- $s_{ax+b} = |a| s_x$, (Peña y Romo, 1997, p. 54)

Coeficiente de variación

- $CV = \sigma / \bar{x}$, (Calot, 1970, p. 85)

- $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$, (Peña, 2001, p. 65)
- $CV_x = \frac{s_x}{|\bar{x}|}$ (Peña y Romo, 1997, p. 56)

Otras

- Desigualdad de Tchebychev $fr(|x_i - \bar{x}| \geq ks) \geq \frac{1}{k^2}$, (Peña, 2001, p. 64)

Aunque la relación anterior es amplia, no podemos asegurar que no se haya omitido alguna. En esta relación se puede observar la diversidad de notaciones y símbolos que se utilizan en el estudio de las medidas elementales de dispersión, algunas veces distintas notaciones para expresar el mismo concepto, todo esto puede dificultar su estudio.

L3. Tablas

En todos los libros existen las tablas utilizadas con más frecuencia en Estadística Descriptiva y que se utilizan en el estudio de las medidas de dispersión, estas tablas son: tablas de frecuencias (absolutas, relativas, acumuladas) con datos agrupados y sin agrupar; tablas para facilitar los cálculos de las medidas de dispersión. Estas últimas además de los datos (x_i) y las frecuencias (f_i) suelen tener columnas que designan cálculos parciales de las fórmulas como: $|x_i - \bar{x}|, f_i|x_i - \bar{x}|, \ (x_i - \bar{x}), (x_i - \bar{x})^2, \ f_i(x_i - \bar{x})^2, x_i^2, f_i x_i^2$.

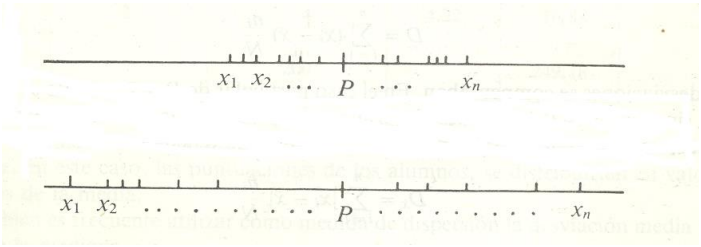
También suelen aparecer en los libros el conjunto de datos brutos ordenados o sin ordenar, sobre el que se van a realizar los cálculos.

L4. Gráficos

Los gráficos utilizados en los libros son los usados comúnmente en estadística descriptiva: pictogramas, gráfico de barras, gráfico de puntos, gráfico de sectores, gráfico del tallo y hojas, histograma, polígono de frecuencias, gráfico de frecuencias acumuladas, polígono acumulativo de frecuencias, gráfico de la caja. Estos gráficos se suelen utilizar para describir un conjunto de datos o bien para comparar distribuciones de

datos, en este último caso algunos se construyen dobles como por ejemplo el gráfico de barras o el gráfico del tronco (back to back). Este es el uso más común que se suele hacer en los libros de los gráficos estadísticos. También se utilizan para argumentar sobre la dispersión y sus medidas.

Algunos libros suelen utilizar gráficos geométricos para que el lector tome conciencia de la necesidad de utilizar una medida de dispersión para apreciar la representatividad de un promedio P de un conjunto de datos. Así Martin-Guzman y Martin Pliego (1985, figura 4.3, p. 59) utiliza el gráfico lineal de la derecha, y se pregunta en qué distribución es más representativo P; argumenta que en la primera por estar los datos más próximos a P. Por esto es necesario medir la dispersión de los datos respecto a un promedio P. En consecuencia, este gráfico se ha utilizado para justificar la necesidad de las medidas de dispersión.



6.4. Conceptos (definiciones)

En el desarrollo de los temas que encontramos en los libros de matemáticas una práctica que aparece algunas veces es definir los conceptos matemáticos por su algoritmo de cálculo. En lugar de fijar con claridad, exactitud y precisión su significado o naturaleza, mediante una descripción verbal, suelen presentar una fórmula o un procedimiento para calcularlos. Por ejemplo, en la definición de máximo común divisor, en lugar de encontrar la definición de este concepto que sería de la siguiente forma:

> *el máximo común divisor de unos números dados es el máximo número que divide a todos ellos simultáneamente.*

se suelen encontrar definiciones del tipo:

> *el máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes elevados a los menores exponentes,*

es decir, su procedimiento de cálculo una vez descompuestos los números en sus factores primos.

A este tipo de definiciones las podemos llamar definiciones algorítmicas.

Este fenómeno también ocurre con los conceptos estadísticos que nos ocupan, donde hemos encontrado definiciones algorítmicas de las medidas de dispersión que estamos estudiando: rango, rango intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica, coeficiente de variación. A continuación veremos algunos ejemplos de ellas.

El hecho de existir definiciones algorítmicas no quiere decir que no existan definiciones que fijen con claridad, exactitud y precisión su significado o naturaleza, mediante una descripción verbal. En muchos de los libros suelen aparecer los dos tipos de definiciones.

A continuación relacionamos las definiciones encontradas, comenzando por la de dispersión.

Rango o recorrido

D1. *El rango o recorrido de una variables es la diferencia entre su valor máximo y mínimo.* Esta definición es de tipo algorítmica. El rango es la medida de dispersión más elemental, ya que nos dice la "longitud" de la distribución de los valores de los datos.

> *Se define el recorrido de una variable estadística como la diferencia entre su valor máximo y su valor mínimo*
>
> ***R = máx(x) – mín(x).***
>
> (Quesada y cols., 2002, pp. 24).

Entre sus ventajas podemos citar la facilidad de cálculo y que viene expresado en la misma unidad de medida que los datos. Entre sus inconvenientes podemos citar que no se utiliza en su cálculo todos los datos, en consecuencia poca información nos da sobre los valores intermedios, además se puede ver afectado por los valores atípicos, (Montiel y otros, 2002). Por estas limitaciones su utilización es escasa.

Desviación media

En algunos textos se estudian las desviaciones absolutas respecto a un valor central. Así, Calot (1970) llama desviación absoluta a la tendencia central a los valores absolutos de la diferencia de cada valor con la media o la mediana $|x_i - C|$, donde C es la media o la mediana. Según que las desviaciones sean respecto a la mediana o a la media y según se considere la mediana o la media de la serie de desviaciones se obtendrán los índices de dispersión:

- la desviación mediana o desviación probable que es la mediana de la serie de las desviaciones a la mediana. El 50% de las observaciones están en el intervalo formado por la mediana más menos una desviación probable.
- La desviación absoluta media respecto a la mediana es la media de las desviaciones a la mediana. Tiene la propiedad de ser la menor desviación absoluta media, es decir,
  $e_M = \sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - M| = \min_a \left[\sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - a| \right]$, donde *a* puede ser la media o la mediana (M)
- La desviación absoluta media respecto a la media es la media de las desviaciones a la media, es decir, $e_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|$

Según Calot (1970) estos índices de dispersión se utilizan menos que la desviación típica debido a su complicación algebraica. Además entre la desviación absoluta media respecto a la mediana, la desviación absoluta media respecto a la media y la desviación típica existe la relación $e_M \leq e_{\bar{x}} \leq \sigma$.

La desviación absoluta media respecto a la media, o más abreviadamente desviación media es la que estudiaremos con mayor detalle, por ser la única que se incluye en el curriculum de la ESO.

D2. *La desviación media es el promedio de las desviaciones absolutas de los datos respecto a la media aritmética.* Este objeto matemático se deriva de la primera idea natural que surge cuando queremos medir la dispersión de un conjunto de datos respecto a la media. En primer lugar, se piensa en calcular todas las desviaciones de los datos a la media y, entonces, calcular la media de las diferencias obtenidas. La suma de las diferencias es cero, ya que, como las diferencias son positivas y negativas se compensan unas con otras al sumarlas para calcular la media, en consecuencia, para evitar esto, se toman los valores absolutos de las diferencias y se calcula su media, obteniendo la desviación media.

> *La desviación media (respecto a la media aritmética) es la media aritmética de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de la variable y le media aritmética.* (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, pp. 60) .

Varianza

D3. *La varianza es la media aritmética de las diferencias al cuadrado de los datos respecto a su media aritmética*. Esta definición suele partir de la idea siguiente: para medir la dispersión de un conjunto de datos, la forma más natural sería calcular el promedio de las desviaciones respecto a la media aritmética, pero ya hemos visto que al sumar estas desviaciones se compensan las positivas con las negativas. Una manera de superar esto, es elevar al cuadrado las diferencias de los valores a su media aritmética, como las diferencias al cuadrado son todas positivas, ahora no se anulan y podemos calcular su media aritmética. A esta media aritmética se le llama varianza.

> *La varianza S^2, se define como la media de las diferencias cuadráticas de N puntuaciones en relación a su media aritmética, es decir*
>
> $$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$
>
> (Montiel y cols., 2002, pp. 82).

D4. *La varianza es el cuadrado de la desviación típica.* Las definiciones de desviación típica y varianza están estrechamente relacionadas. Si el texto comienza con el estudio de la varianza, la definición que utiliza es una de las anteriores. Si el texto comienza estudiando la desviación típica da una definición de esta y a continuación suele definir la varianza como el cuadrado de la desviación típica.

> *Su cuadrado* (de la desviación típica) *se denomina varianza* (Peña, 2001, 62)

D5. *La varianza como la diferencia entre el momento de segundo orden respecto al origen y el de primer orden elevado al cuadrado es igual al momento.* Esta definición en la que se utilizan momentos no aparecen en los libros de texto de la Educación Secundaria

> *La varianza es igual al momento de segundo orden respecto al origen menos el de primer orden elevado al cuadrado.* (Martín Guzmán y Martín Pliego, 1982, p. 64)

Desviación típica

D6. *Definición como la raíz cuadrada de la varianza*. La varianza y desviación típica van unidas en los textos. Cuando se ha estudiado primero la varianza, se suele definir la desviación típica como la raíz cuadrada positiva de la varianza. En este caso se suele argumentar, que las unidades de la varianza están al cuadrado y, que para obtener un valor expresado en las mismas unidades que los datos, se suele extraer la raíz cuadrada positiva de la varianza, denominada desviación típica, que ya viene expresada en las mismas unidades que los datos.

> *Se define la desviación típica o estándar S como* $S=\sqrt{S^2}$ (Montiel y otros, 2002, pp. 83).

D7. *Definición algorítmica.* Se da la fórmula de cálculo. Esto dificulta la comprensión, ya que el lector debe realizar la interpretación de la fórmula.

> *La desviación típica se suele definir como:*
>
> $$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_i f_i(x_i-a)^2}{\sum_i f_i}}$$
>
> *donde a es un promedio cualquiera. De todas las desviaciones típicas la mínima es para* $a=x$. (Nortes Checa, 1977, pp. 112)

Coeficiente de variación de Pearson

D8. *El coeficiente de variación de Pearson es el cociente entre la desviación típica y la media aritmética.* También llamado, en algunos textos simplemente coeficiente de variación, surge de la necesidad de

> *El coeficiente de variación de Pearson se define como la relación por cociente entre la desviación típica y la media aritmética.* (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, pp. 71)

comparar conjuntos de datos que están expresados en diferentes magnitudes o en diferentes unidades. Nos indica las veces que la desviación típica contiene a la media aritmética. En consecuencia, cuanto mayor sea el coeficiente de variación mayor será la desviación típica y la media no representará bien a todos los valores. Esta definición es de tipo algorítmico.

D9. *Expresión del coeficiente de variación en porcentajes*. En este caso el coeficiente de variación se define como el porcentaje que representa el valor de la desviación típica respecto al valor de la media aritmética, facilitando las comparaciones.

> *El coeficiente de variación de Pearson viene dado por la expresión:*
>
> $$CV_{Pearson} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$$
>
> (Quesada y cols., 2002, p. 35)

Rango intercuartílico

D10. *Diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil*. Nos indica la longitud del intervalo en el que están contenidos el 50 por ciento de los valores centrales.

> *Llamamos recorrido intercuartílico a la diferencia existente entre el trecer cuartil y el primer cuartil:* $R_I = C_3 - C_1$
>
> (Martín Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 59)

D11. *Dispersión del 50% de los valores centrales* (Moore, 1998, p. 38)

6.5. Propiedades

Según Calot (1970, pp. 55-56) algunas propiedades deseables para una característica de tendencia central o dispersión, que el estadístico Yule definió son las siguientes:

a) Definirse de manera objetiva: dos personas diferentes deben llegar al mismo resultado numérico, lo que excluye las estimaciones gráficas y conduce a expresiones algébricas.

b) Usar todas las observaciones y no algunas de ellas solamente: si se hace variar una de las observaciones, la característica considerada debe reflejar esta variación.

c) Tener un significado concreto: la interpretación de la característica debe ser sencilla e inmediata.

d) Ser sencilla de calcular

e) Prestarse fácilmente al cálculo algébrico

f) Ser poco sensible a las fluctuaciones muestrales

No es posible que una característica responda a las seis condiciones simultáneamente, ya que algunas son más o menos contradictorias como la b) y la f).

Cobo (2003) analiza las propiedades de las medidas de posición central media, mediana y moda desde tres puntos de vista: como el resultado de un cálculo, como operador que una distribución asigna un número y como un resumen estadístico o parámetro que caracteriza una distribución. Estos tres puntos de vista son validos para el análisis de las propiedades de las medidas de dispersión que estamos estudiando. En consecuencia distinguiremos tres tipos de propiedades: numéricas, algebraicas y estadísticas.

Propiedades numéricas.

P1. En el cálculo de la desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación intervienen todos los valores que toma la variable. Por el contrario, en el cálculo del rangos no intervienen todos los datos (Calot, 1970).

P2. La modificación de algunos datos y añadir o eliminar algunos datos producen cambios en la desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación, sin embargo pueden no influir en el rangos, salvo que se modifique el máximo o el mínimo. Es consecuencia de la anterior.

P3. "Todo índice de variabilidad es esencialmente no negativo" (Montiel y otros, 2002, p. 89). Son siempre positivos los rangos, el coeficiente de variación, la varianza, la desviación típica y la desviación media. El coeficiente de variación resulta positivo, pues aunque la media fuese negativa se toma el valor absoluto de la misma, $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$, (Peña, 2001, p. 65).

P4. Si los cálculos se realizan con datos agrupados, existirán ligeras diferencias en todas las medidas de dispersión a los resultados

obtenidos si los cálculos se realizan sin agrupar los datos (Guilford y Fruchter, 1984).

Propiedades algebraicas

Son las propiedades que se obtienen al considerar el cálculo de estas medidas como una operación dentro del conjunto donde la variable toma los valores.

P5. Todas las medidas de dispersión son independientes del orden en que se obtengan los datos. No hemos encontrado esta propiedad expresada explícitamente en los textos estudiados. Sin embargo, en el estudio de la variabilidad es frecuente que los alumnos den resultados diferentes según el orden en que se obtienen los datos, lo cual pone de manifiesto la importancia de esta propiedad, según hemos observado en nuestra práctica docente.

P6. Cuando se aplica a los datos (x_i) una transformación lineal y se obtiene un conjunto de datos transformados (y_i) de la siguiente manera $y_i = ax_i + b$. Queda multiplicado por a los rangos. Queda multiplicado por $|a|$ la desviación típica y la desviación media. La varianza queda multiplicada por a^2. b no afecta a los rangos, desviación media, varianza y desviación típica, pero si afecta al coeficiente de variación. En esta propiedad hemos sintetizado una serie de propiedades que aparecen en los libros estudiados en los que cada una de ellas es una parte de la que hemos dado nosotros, por ejemplo: a la desviación típica no le afectan los cambios de origen y si le afectan los cambios de escala, siendo S' = aS, (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 67), o bien el coeficiente de variación no es invariante a los cambios de origen (Martín Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 71)

P7. Los rangos, la desviación media y la desviación típica se miden en las mismas unidades que los datos. La varianza se mide en unidades cuadradas de los datos. El coeficiente de variación es adimensional, no tiene unidad de medida, lo que facilita la comparación entre distintas variables y unidades de medida. En esta propiedad hemos sintetizado una serie de propiedades que aparecen en los libros estudiados y cada una de ellas es una parte de la anterior, por ejemplo: *"Un inconveniente de la varianza al ser utilizada como medida de dispersión respecto a la media, es que no viene expresada en la misma unidad de medida que esta"*, (Batanero y cols. 1988, pp. 4-17).

P8. El algoritmo de cálculo de la desviación media, al incluir un valor absoluto, no tiene buenas propiedades algébricas, sin embargo la

varianza y la desviación típica tiene mejores propiedades algébricas, en consecuencia, los distintos desarrollos estadísticos han utilizado más la varianza y la desviación típica (por ejemplo, Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 69).

P9. Si denominamos desviaciones cuadráticas medias a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones con respecto a un valor cualquiera, podemos decir que la varianza es la menor de ellas, (Sánchez Crespo y García España, 1961, p. 66). En realidad, se puede considerar que cada medida de dispersión es el óptimo respecto a algún criterio de bondad ligado a la búsqueda del valor central. Así, la varianza minimiza la media cuadrática de las desviaciones, la desviación media minimiza la media de las desviaciones absolutas respecto a la mediana, el rango minimiza la mayor desviación posible. Plantear la búsqueda de los valores centrales mediante la aplicación de un criterio de bondad puede ser una técnica que aún no se haya aplicado en las propuestas didácticas sobre la dispersión y que posiblemente mejoraría su comprensión por parte del alumnado. Así por ejemplo, no es lo mismo buscar los datos mayor y menor y restarlos que indagar sobre el valor central que minimice la máxima desviación respecto a él.

P10. Como la varianza es invariante a los cambios de origen se tiene la siguiente propiedad: La varianza de *n* datos está acotada superiormente, cumpliéndose, $s^2 \leq \frac{d^2}{4} - a^2$, siendo *d* el rango o recorrido y *a* la media aritmética que se obtendría al cambiar el origen al punto medio del recorrido. En Sánchez Crespo y García España, (1961, pp. 67-68) se demuestra esta propiedad.

P11. Igualmente, al ser invariante la varianza a los cambios de origen, se cumple la siguiente propiedad: la varianza de *n* datos está acotada inferiormente, cumpliéndose $s^2 \geq \frac{d^2}{2n} + \frac{2}{n-2}a^2$, $n>2$, siendo *d* el rango o recorrido, *n* el número de datos y *a* la media aritmética que se obtendría al cambiar el origen al punto medio del recorrido. En Sánchez Crespo y García España, (1961, pp. 68-69) se demuestra esta propiedad.

P12. La desviación típica está acotada superior e inferiormente. Es una consecuencia inmediata de las dos anteriores.

P13. Si la media vale cero no existe el coeficiente de variación. No estaría definido.

Propiedades estadísticas

P14. Un mayor valor de las medidas de dispersión: rango, rango intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica, y coeficiente de variación significa mayor dispersión. Hemos resumido en una sola, cada una de cinco propiedades, una por cada medida, como la siguiente: *"A medida que las observaciones están más dispersas respecto a su media, s* (desviación típica) *se hace mayor"*, (Moore, 1998, p. 45)

P15. El rango o recorrido es más sensible a los valores extremos que la desviación típica, su cálculo es rápido, ya que no necesita de todos los datos, (Calot, 1970, p. 87).

P16. Generalmente, si el rango es grande existirá necesidad de agrupar los datos en intervalos de clase (Hopkins et al., 1997, p. 61)

P17. El rango es aplicable solo en algunos casos como en las variables distribuidas uniformemente (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 59)

P18. Si no se recomienda la media como medida de tendencia central, tampoco se debe recomendar la desviación típica y la varianza como medidas de dispersión. Esto es especialmente cierto en las distribuciones asimétricas, (Moore, 1998, p. 46).

P19. Para cualquier distribución se cumple la desigualdad de Tchebychev, $fr(|x_i - \bar{x}| \geq ks) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, que nos dice que al menos el $100\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\%$ de las observaciones están entre la media y k veces la desviación típica, es decir la media más menos dos desviaciones típicas contienen al menos el 75% de los datos, la media más menos tres desviaciones típicas contienen al menos el 89% de los datos, ... Esta propiedad de un conjunto de datos, en la que tiene un papel destacado la desviación, precisa el uso conjunto de la media y de la desviación típica para dar información de los datos. Un punto a destacar en esta desigualdad es su validez para cualquier distribución de datos, cualquiera que sea su grado de simetría o forma, (Peña, 2001, pp. 63-64).

P20. El doble de la varianza es igual a la media de las desviaciones cuadráticas de cada elemento a todos los demás de la distribución, incluido él mismo. En (Sánchez Crespo y García España, 1961, pp. 66-67) se demuestra esta propiedad.

P21. Las medidas de dispersión son mayores o iguales a cero. Valen cero cuando todos los datos son iguales, en este caso no hay dispersión. Conforme la dispersión crece, el valor de las medidas de dispersión aumenta. *"Todas ellas son valores mayores o iguales a cero, indicando un valor 0 la ausencia de dispersión",* (Batanero y cols., 1988, pp. 4.15).

P22. La desviación típica está fuertemente influenciada por los valores extremos. Unas pocas observaciones atípicas pueden hacer que la desviación típica sea muy grande (Moore, 1998, p. 45).

P23. Conforme aumenta el tamaño de la muestra el rango tiende a incrementarse, ya que solamente depende de dos valores el máximo y el mínimo. Por el contrario, el resto de las medidas de dispersión tienden a estabilizarse, alrededor de sus parámetros correspondientes (Hopkins et al., 1997)

6.6. Argumentos

Los problemas, conceptos, propiedades, algoritmos y representaciones se suelen relacionar mediante argumentaciones y razonamientos que se realizan en el discurso dentro de la actividad matemática.

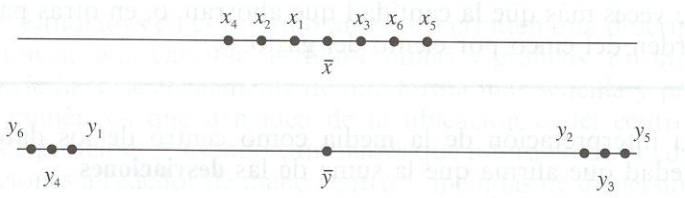
V1. *Argumentos basados en propiedades de los números y las operaciones*. Este tipo de argumentos lo podemos ver en estos dos ejemplos, uno de las propiedades de los números y otro de las operaciones: *"La varianza nunca puede ser negativa. Al ser una suma de cuadrados ha de ser positiva (o nula en caso extremo, si todas las observaciones de la variable coinciden)* $S^2 \geq 0$*"* (Montiel y cols., 2002, p. 84), o bien este ejemplo referido a las operaciones *"Hemos de hacer notar que en la desviación típica tienen más influencia las desviaciones de los valores muy extremos que en la desviación media, ya que estas desviaciones, en la primera medida, están previamente elevadas al cuadrado",* Martín Guzmán y Martín Pliego (1985, p. 66).

V2. *Argumentos apoyados en ostensivos.* Este tipo de argumentos se apoyan en algún ostensivo, los más utilizados son los gráficos, las tablas y las fórmulas.

En los textos estudiados, obviamente los gráficos y tablas más utilizados son los estadísticos. Estos textos algunas veces remiten a un gráfico estadístico o a una tabla para argumentar sobre alguna

característica de las medidas de dispersión o de la dispersión en sí misma.

Otras veces se utilizan gráficos no estadísticos. En este caso, utilizan argumentos que llaman la atención sobre algunos elementos del gráfico, que por sí solos, o en relación con otros elementos, nos pueden transmitir un mensaje de comprensión más rápida y clara, que si el argumento se hiciera solamente utilizando palabras. Peña y Romo (1997, pp. 51-52) utilizan el gráfico de la derecha para argumentar que los dos conjuntos de datos del gráfico son muy distintos aunque tienen la misma media, como puede verse fácilmente (el subrayado es nuestro) la diferencia no está en rasgos como la simetría (ambos son razonablemente simétricos, sino en la concentración o dispersión alrededor de la media. Este ejemplo pone de manifiesto la conveniencia de complementar la media (medida de posición) con un valor numérico que exprese la idea de variabilidad de los datos alrededor de la media. Como puede apreciarse se utiliza el gráfico para apoyar la argumentación.



En cuanto a las fórmulas, se puede observar en el siguiente ejemplo "*Obsérvese la inutilidad de este coeficiente* (coeficiente de variación) *cuando la media es próxima a cero, por el valor tan desmesurado que toma"* Batanero y cols. (1988, 4,18).

V3. *Argumentos con ejemplos, contraejemplos y comprobación de propiedades discutidas o demostradas con anterioridad*. También entrarían en esta categoría los contraejemplos. En la figura 1 damos un ejemplo tomado de Peña y Romo (1997, p. 55).

Ejemplo 4.4.

La Figura 4.4 es el diagrama de tallos y hojas para las calificaciones del grupo 1 que aparecía en la Figura 3.15 del capítulo anterior. La media de estos datos es 4,29 y su desviación típica es 1,97. La regla de Chebychev afirma que, al menos, el

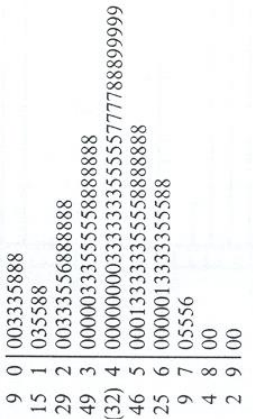


Figura 4.4. *Diagrama de tallos y hojas de las calificaciones del grupo 1 de la variable NOTAS.*

75 por 100 de las observaciones dista menos de dos desviaciones típicas de la media, es decir, en este caso, al menos 96 datos deben estar entre $\bar{x} - 2s_x = 0{,}35$ y $\bar{x} + 2s_x = 8{,}23$; contando en el diagrama, se comprueba que hay 120 observaciones en esa situación, lo que confirma el resultado de Chebychev.

Figura 1

V4. *Argumentos verbales deductivos que aplican propiedades de las medidas de dispersión estudiadas.* Un ejemplo es el siguiente: Para estudiar el grado de homogeneidad de las empresas españolas y americanas, se calcula el coeficiente de variación de las empresas españolas (0,103) y el coeficiente de variación de las empresas americanas (0,13) y finaliza con el párrafo siguiente, *"De la comparación entre los coeficientes de variación resulta que las empresas españolas (0,103<0,13) son más homogéneas que las americanas"* (Marín Guzmán y Martín Pliego (1985, p. 72)

V5. *Argumentos algebraicos deductivos*. Son los más utilizados en Matemáticas, parte de unas premisas para, mediante un proceso de razonamiento, llegar a una conclusión. Algunas veces se utilizan cadenas de igualdades o desigualdades para validar o refutar una afirmación establecida. Como en el siguiente:

El coeficiente de variación no es invariable ante cambios de origen. Es decir, si los resultados de una medida le sumamos una cantidad positiva a>0 para tener Y = X + a, entonces $CV_Y < CV_X$ *, ya que la desviación típica no es sensible ante cambios de origen, pero sí la media* $CV_Y = \frac{S_Y}{\bar{y}} = \frac{S_X}{\bar{x}+a} < \frac{S_X}{\bar{x}} = CV_X$ (Montiel y cols. 2002, pp. 90)

7. CONCLUSIONES

En las páginas anteriores hemos analizado el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión rango, rango intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación obtenido del análisis de una muestra de libros de Estadística Descriptiva, clásicos de esta materia (Sánchez Crespo, y García España, 1961; Calot, 1970) o bien orientados a la enseñanza de la Estadística en los primeros cursos universitarios en diferentes carreras. Con este trabajo hemos obtenido el significado que se le da en la universidad y en Estadística a las medidas de dispersión. Este significado nos servirá de referencia para identificar y delimitar los posibles sesgos, carencias, limitaciones que podamos encontrar en el significado pretendido de las medidas de dispersión en la ESO y que estudiaremos en los libros de texto de este nivel de enseñanza.

Por otra parte, creemos que se puede apreciar la riqueza del estudio epistémico realizado, de donde se desprende la utilidad que puede tener para todos aquellos docentes que quieran planificar una enseñanza o investigación sobre este tema.

Aunque tradicionalmente, en el sistema de enseñanza, las medidas de dispersión se han considerado un tema sin dificultades para enseñarlo y aprenderlo, del análisis efectuado, podemos destacar, su enorme complejidad, en cuanto al número y variedad de elementos que concurren en este tema.

En primer lugar, en el estudio de las situaciones hemos encontrado siete tipos que dan sentido (Vergnaud, 1990) a las medidas de dispersión en si mismas.

Las acciones pedidas a los estudiantes para resolver las distintas situaciones encontradas, algoritmos y procedimientos, también son variadas, destacando que algunos conceptos se definen por la fórmula de cálculo y, cuando esto ocurre, se corre el peligro de quedarse en eso, en un procedimiento de cálculo que oculta su entidad más rica y profunda.

En la variedad de lenguaje, notaciones y representaciones que hemos encontrado, podemos destacar la diversidad notacional que puede añadir dificultad al aprendizaje del tema. .

Hemos encontrado una rica variedad de definiciones, donde podemos destacar las que se manifiestan mediante una fórmula de cálculo. Este tipo de definiciones, por regla general suelen ser difíciles de comprender en toda su dimensión, ya que dejan al lector la interpretación de dichas fórmulas.

De acuerdo con Cobo (2003), hemos considerado tres tipos de propiedades de las medidas de dispersión: numéricas, algebraicas y estadísticas. Dado el carácter tan destacado que tienen las propiedades de los objetos matemáticos, en el trabajo matemático, del número de propiedades encontrado, se vuelve a inferir, de nuevo, la complejidad del tema que nos ocupa.

Por último, todos los anteriores elementos de significado se suelen relacionar mediante los diversos tipos de argumentaciones que hemos encontrado.

En resumen, podemos decir que el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión: rango, rango intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación es rico, variado y complejo, siendo necesaria una toma de conciencia de la diversidad de elementos que lo componen para poder realizar una planificación de la enseñanza o una investigación sobre ellas.

Reconocimientos:

Este trabajo se realiza dentro de los proyectos de investigación MYCT-FEDER: BSO2003-06331/PSCE , y, MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC

REFERENCIAS

Ballman, K. (1997). Greater Emphasis on Variation in an Introductory Statistics Course. *Journal of Statistics Education* v.5, n.2 (http://www.amstat.org/publications/jse/v5n2/ballman.html).

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1988). *Curso de Estadística aplicada basado en el uso de ordenadores.* Jaén: Los autores.

Calot, G. (1970). *Curso de Estadística Descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Estepa, A. y Sánchez, F. T. (1.998). Correlation and regression in secondary school text books. En: Pereira-Mendoza, L., Seu, L., Wee, T. y Wong, W.-K. (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching of Statistics* (vol. 2, pp. 671-676). Voorburg (The Netherlands): ISI Permanent Office.

Godino J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics.*

Guilford, J. P. & Fruchter, B. (1984). *Estadística Aplicada a la Psicología y la Educación*. México: McGraw Hill.

Hald, A. (1998). *A History of Probability & Statistics and Their Applications. From 1750 to 1930.*. New York: John Wiley &Sons.

Hart, A. E. (1984). How Should We Teach the Standard Deviation? *Teaching Statistics,* 6(1), pp. 24-27. Caja 7, 35

Hopkins, K. D.; Hopkins, B. R. & Glass, G. V. (1997). *Estadística básica para las Ciencias Sociales y del Comportamiento*. México: Pearson Ecuación.

Kareev, Y.; Arnon, S. & Horwitz-Zeliger, R. (2002). On the Misperception of Variability. *Journal of Experimental Psychology: General,* 131(2), pp. 287-297.

Lindley, D. (1978). The Analysis of Experimental Data: The appreciation of Tea and Wine. *Teaching Statistics,* 15(1), pp. 22-25.

Martín-Guzmán, M. P. y Martín Pliego, F. J. (1985). *Curso básico de Estadística Económica*. Madrid: Editorial AC.

Meletiou, M, M, (2000). Developing Students' Conceptions of Variation: An Untapped Well in Statistical Reasoning. Ph. D. The University of Texas at Austin.

Montiel, A. M.: Rius, F. & Barón, F. J. (2002). *Elementos básicos de Estadística Económica y Empresarial*. Madrid: Prentice may

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.). On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy. Washinton, D. C.: National Academy Press.

Moore, D. S. (1998). *Estadística aplicada básica*. Barcelona: Antoni Bosh editor S. A.

Nortes Checa, A. (1977). *Estadística Teórica y Aplicada*. Burgos: Editorial Santiago Rodríguez.

Ordoñez, L. y Contreras, A. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. Em E. Castro (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 277-287). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Peña, D. (2001). *Fundamentos de Estadística*. Madrid: Alianza Editorial.

Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para las Ciencias Sociales*. Madrid: McGraw-Hill.

Pingel, L. A. (1993). *Variability – Does the standard deviation always measure it adequately?*. Teaching Statistics. Vol. 15. nº 3.

Pinn; D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Editorial Morata S. A.

Quesada, V.; Isidoro, A. y López, L. A. (2002). *Curso y ejercicios de Estadística*. Madrid: Alambra Longman.

Reading, C. & Shaughnessy, M. (2000). *Student perceptions of variation in a sampling situation*. En T. Nakahar y M. Koyama (Eds.). Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. vol 4, pp. 4-89/4-96. Hiroshima. Japón.

Ríos, S. (1977). *Iniciación a la Estadística*. Madrid: Ediciones ICE

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Sánchez Carrión, F. J. (1995). *Manual de análisis de datos*. Madrid: Alianza Editorial.

Sánchez Crespo, J. L. y García España, E. (1961). *Estadística Descriptiva*. Madrid: Instituto Nacional de Estadística.

Serrano, L., Batanero, C., Cañizares, Mª. J. (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon*, nº 43-44.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J., Cañizares, Mª. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, nº 36.

Snee, R. D. (1990). Statistical Thinking and Its Contributions to Total Quality. *The American Statistician,* 44(2), pp. 116-121.

Tauber, L. M. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10(2-3), pp. 133-170.

Watson, J. M. y B. A. Kelly (2003) Developing Intuitions about Variation: The Weather. *Actas del SRTL3*. Lincoln, Nebraska. USA.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review,* 67(3), pp. 223-263.

ANÁLISIS DE LAS DEFINICIONES DE *DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y FUNCIÓN DERIVADA DE UNA FUNCIÓN* DE LOS LIBROS DE TEXTO DEL BACHILLERATO-LOGSE DE CATALUNYA APLICANDO LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS[15]

Neus Inglada

IES "Ernest Lluch i Martí" (Barcelona)

Vicenç Font

Universitat de Barcelona

1. INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación se inscribe dentro de la Teoría de las Funciones Semióticas (a partir de ahora TFS) (Godino y Batanero, 1994, 1998; Font, 2000a; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2001; Godino, 2002). De acuerdo con este modelo, hemos analizado las tramas de funciones semióticas que intervienen en las definiciones de ***derivada de una función en un punto*** *y* de ***función derivada de una función*** presentadas en los libros de texto de Bachillerato de Catalunya, con la finalidad de encontrar algunas de las causas de las dificultades que tienen los alumnos para trabajar con los libros de texto y poder hacer propuestas de cara a la elaboración de este tipo de manuales.

2. MARCO TEÓRICO

Nuestra investigación se inscribe dentro de la TFS. Este marco teórico permite dos tipos de análisis: uno, más amplio, ligado a la organización de contenidos, y otro, más pormenorizado, en el que el sujeto pasa a primer plano. El primer tipo de análisis consiste en determinar los procedimientos que ha de dominar el alumno como resultado del proceso de instrucción, los contenidos que se han de introducir para justificarlos, las representaciones ostensivas que implican, los problemas dónde se aplican, etc. A pesar de su potencia explicativa, este tipo de análisis que podemos denominar "grueso" o "macroscópico" presenta limitaciones importantes y son insuficientes cuando se considera también el pensamiento de las personas. La TFS ha elaborado un instrumento teórico: las funciones

[15] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 191-203)

semióticas, que permiten realizar un análisis más "fino" en el que se contempla el pensamiento de los individuos.

2.1 Análisis macroscópico de libros de texto

Para determinar, a través del análisis de los libros de texto más habituales, el significado institucional de la derivada que se quiere enseñar en las instituciones de Bachillerato de Catalunya hemos tenido en cuenta primero los siguientes aspectos generales: el número de páginas y el número de unidades, la modulación de los contenidos y su distribución por cursos, trimestres y unidades, la estructura de la unidad, la ubicación de las actividades, el uso de recursos informáticos y su mayor o menor aproximación al modelo constructivista.

Para analizar las prácticas contempladas en las unidades de derivadas con más detalle (análisis macroscópico) hemos utilizado los esquemas que se proponen en Font (2000a y 2000b)[1].

En concreto hemos estudiado primero cuáles de las siguientes técnicas de cálculo de la función derivada se usan en los diferentes libros de texto

¿Cómo se calcula f'(x)?

- Directamente
  1) Utilizando límites. Calcular $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  2) Gráficamente
     - 2.1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes
     - 2.2) Hallar f'(x) a partir de la condición anterior
  3) Por aproximación
     - 3.1) Dibujar la gráfica de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para un valor de h muy pequeño.
     - 3.2) Considerar que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$
     - 3.3) Hallar la expresión de f'(x) a partir la gráfica de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Indirectamente: 4) Utilizando las reglas de derivación

Figura 1

Para que estas prácticas resulten comprensibles a los alumnos, es necesario relacionarlas con otro sistema de prácticas que permita calcular la derivada de una función en un punto, así como con un sistema de objetos institucionales que las justifiquen. De todo esto, se desprende la necesidad de estudiar también cuáles son las técnicas de cálculo de la derivada en un punto contempladas en los libros de texto analizados. En concreto hemos

estudiado si los libros de texto consideran algunas de las siguientes técnicas de cálculo de la derivada en un punto:

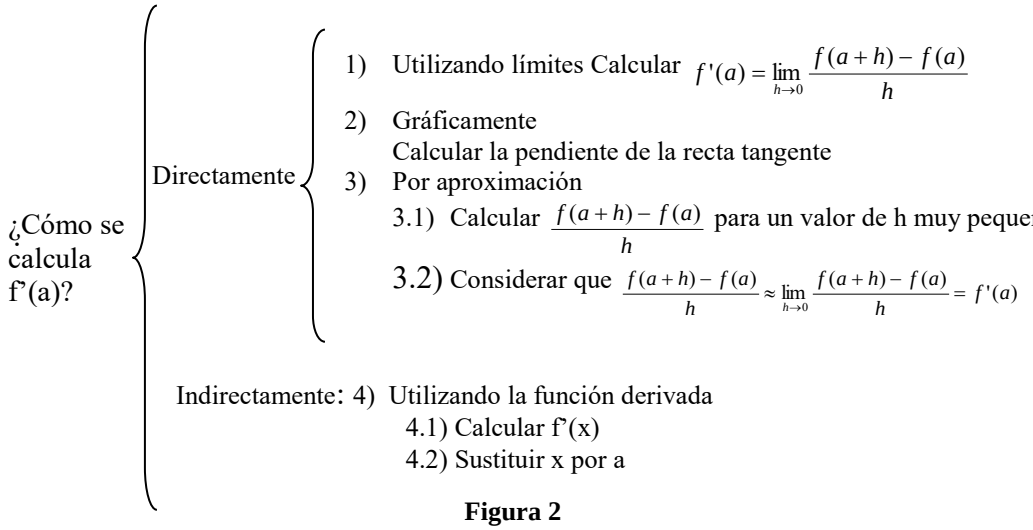


Figura 2

Para que estas prácticas sean comprensibles, los alumnos necesitan un conjunto complejo de objetos institucionales no ostensivos (pendiente, tasa de variación media, recta tangente, derivada en un punto, función derivada, etc.), así como de un conjunto de ostensivos asociados. Este conjunto de no-ostensivos y de ostensivos asociado ha de estar disponible para ser activado durante la realización de dichas prácticas.

El análisis de los libros de texto más habituales en la Comunidad Autónoma de Catalunya nos permite afirmar que la mayoría utiliza sólo dos técnicas para el cálculo de la función derivada: el cálculo directo por límites y el cálculo indirecto por reglas de derivación y dos para el cálculo de la derivada en un punto: el cálculo directo por límites y el cálculo indirecto por substitución en la función derivada. De manera marginal pueden aparecer técnicas gráficas o técnicas de aproximación utilizando recursos tecnológicos.

2.2. Análisis microscópico de libros de texto

Para constatar algunos de los conflictos semióticos más relevantes que un análisis a priori permite detectar en los libros de texto hemos utilizado el análisis microscópico que permite las funciones semióticas. En concreto hemos utilizado la técnica y la notación que se propone en Font (2000a) y en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2002). Para el proceso de análisis, y dado que nos ha resultado operativo, se considerará como expresión o contenido sólamente la faceta extensiva-intensiva del lenguaje

matemático y, además, se destacará el carácter notacional que, en ocasiones, tiene dicho lenguaje. Según lo anterior, se considerarán las siguientes funciones semióticas:

	Extensional	Intensional	Notacional
Extensional	FS1	FS2	FS3
Intensional	FS4	FS5	FS6
Notacional	FS7	FS8	FS9

Tabla 1

FS1 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.

FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

FS2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

FS3 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra notacional.

FS3.1 Esta función semiótica relaciona un objeto con una entidad notacional.

FS3.2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con un símbolo que no la representa.

FS4 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

FS4.1 Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.

FS4.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

FS5 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

FS5.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.

FS5.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

FS6 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con un símbolo.

FS6.1 Esta función semiótica relaciona una clase con la notación que la representa.

FS6.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un símbolo que no la representa.

FS7 Esta función semiótica relaciona el símbolo con una entidad extensional.

FS7.1 Esta función semiótica relaciona el notacional con el objeto que representa.

FS7.2 Esta función semiótica relaciona el símbolo con un objeto que no representa.

FS8 Esta función semiótica relaciona el símbolo con una entidad intensional.

FS8.1 Esta función semiótica relaciona el notacional con la clase que representa

FS8.2 Esta función semiótica relaciona el símbolo con una clase que no representa.

FS9 Esta función semiótica relaciona una notación con otra notación.

FS9.1 Esta función semiótica cambia la notación de un objeto/clase por otra equivalente.

FS9.2 Esta función semiótica relaciona una notación con otra que no es equivalente.

Los análisis semióticos pormenorizados que se proponen en la TFS permiten poner de manifiesto posibles conflictos semióticos (Contreras, 2002), esto es, la posible disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos —persona o institución— en interacción comunicativa. Entre estos conflictos semióticos destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto.

3. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de la investigación era responder a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las tramas de funciones semióticas asociadas a las definiciones de *derivada de una función en un punto* y *función derivada de una función* presentadas en los libros de texto dirigidos a los alumnos de la materia de modalidad "Matemáticas" del bachillerato-LOGSE en Catalunya?

Este objetivo se concreta en las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las tramas de funciones semióticas asociadas a las definiciones de *derivada de una función en un punto y* de *función derivada de una función* presentadas en los libros de texto de Bachillerato?
2. ¿Qué nos dice la trama de funciones semióticas sobre la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje propuesto en el libro de texto?
3. ¿Qué nos dice la trama de funciones semióticas sobre la concepción epistemológica del autor del libro de texto?
4. ¿Cuáles son algunas de las causas de las dificultades que tienen los alumnos para trabajar con los libros de texto?
5. ¿Cómo se pueden mejorar los libros de texto?

4. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Hemos considerado las definiciones de ***derivada de una función en un punto y la de función derivada de una función*** que proponen cinco de las editoriales más usadas por los alumnos de matemáticas del Bachillerato-LOGSE en Catalunya: Editorial Barcanova, Editorial Castellnou, Editorial Mc Graw Hill, Editorial Santillana y Editorial Casals

En primer lugar hemos analizado brevemente la trayectoria didáctica de cada una de las editoriales atendiendo a los siguientes aspectos generales: el número de páginas y el número de unidades didácticas, la modulación de los contenidos y su distribución por cursos, trimestres y unidades, la estructura de la unidad, la ubicación de las actividades (al final de la unidad, al final de los apartados o intercaladas con las explicaciones), el uso de recursos informáticos y su mayor o menor aproximación al modelo constructivista. Y en particular hemos estudiado como presentan el tema de las derivadas.

En segundo lugar hemos analizado semióticamente las definiciones de ***derivada de una función en un punto*** y la de ***función derivada de una función*** propuestas por las editoriales antes mencionadas, aplicando el análisis microscópico que acabamos de describir. Para Ello hemos usado técnicas similares a las que se muestran en INGLADA, N.; FONT, V. (2003). Este segundo tipo de análisis nos ha permitido obtener algunas conclusiones interesantes que enumeramos en el siguiente apartado.

4. CONCLUSIONES

- El análisis de los libros de texto más habituales en la Comunidad Autónoma de Catalunya nos permite afirmar que la mayoría utiliza sólo dos técnicas para el cálculo de la función derivada: el cálculo directo por límites y el cálculo indirecto por reglas de derivación y dos para el cálculo de la derivada en un punto: el cálculo directo por límites y el cálculo indirecto por substitución en la función derivada. De manera marginal pueden aparecer técnicas gráficas o técnicas de aproximación utilizando recursos tecnológicos.

- A priori, la definición de derivada de una función en un punto que encontramos en la mayoría de editoriales no propicia conflictos semióticos remarcables. Aunque el exceso de formalismo de la editorial Barcanova puede provocar problemas y la falta de cuidado en la elección de la notación usada de la editorial Santillana puede complicar mucho la comprensión del texto. En particular queremos destacar que el conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto está muy relacionado con determinados usos de la notación incremental. Este conflicto semiótico está presente de manera marginal en las clases de matemáticas de Bachillerato del estado español, debido a que la notación incremental y la diferencial suelen tener un papel muy secundario en los libros de texto de matemáticas, pero está presente en el significado global de los alumnos por el uso que se hace de estas notaciones en las clases de Física. Este hecho nos lleva a suponer que este conflicto semiótico potencial puede tener una gran importancia en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas cuando los profesores que enseñan matemáticas sean profesores que tengan una formación inicial de ciencias o de ingeniería, o bien en aquellos países en los que la formación inicial de los profesores de matemáticas sea interdisciplinar tal como se muestra en un estudio con profesores de Colombia (Badillo 2003).

- Todos los libros de texto de Bachillerato introducen la definición de *función derivada* de manera que implica la interpretación de $f'(x)$ como $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Dejar esta interpretación a cargo del alumno puede propiciar un grave conflicto semiótico. Algunos libros, como los de las editoriales Castellnou y Mc Graw Hill sí que lo afrontan. Previamente a la definición proponen actividades para que el alumno construya la función

derivada de una función sencilla. Pero los autores de la mayoría de editoriales parece que no són conscientes de este problema y no lo abordan.

Y por lo tanto una conclusión recomendable cuando se elabora un libro de texto es que esto se trabaje con una secuencia previa que facilite el salto.

- En ninguna de las editoriales analizadas se aborda el paso de la derivada de una función dada a la clase de las derivadas de todas las funciones derivables. Este conflicto semiótico es menos importante que el que acabamos de comentar, en el sentido de que inmediatamente, una vez introducida la función derivada se ponen diversos ejemplos de diferentes funciones derivadas. Como se hacen muchos cálculos de funciones derivadas creemos que el alumno no tendrá ningún problema conceptual con esto. Pero de hecho este conflicto tampoco se afronta. No se hace ningún comentario. En cualquier caso, como la secuencia continua trabajando muchos cálculos de funciones derivadas, esta omisión sería menos grave que la primera.

  Sería interesante hacer un estudio de editoriales que afronten este paso.

- Algunos de los conflictos semióticos detectados están relacionados con la confusión entre derivada en un punto y función derivada. Quizá el hecho de que los dos conceptos reciban el mismo nombre contribuye a ello.

- El análisis semiótico nos muestra que el proceso que ha de hacer un alumno para "comprender" los libros de texto es mucho más complejo de lo que parece a priori.
- En todas las editoriales analizadas hemos observado que se hacen generalizaciones a partir de un solo ejemplo en lugar de poner unos cuantos y de sus características comunes hacer una generalización.

- Hemos constatado la existencia de dos tendencias muy generales. Por un lado estarían los libros de carácter más tradicional y, por otro, los libros influidos por tendencias asociadas al proceso de reforma de la educación secundaria, como pueden ser el "constructivismo" y el movimiento de les concepciones alternativas de los alumnos. Esta segmentación editorial reflejaría una hipotética segmentación del profesorado.

Como consecuencia se plantearía la necesidad de poner a punto instrumentos de análisis que permitan a los docentes valorar objetivamente los materiales curriculares que se encuentran a su disposición. En este sentido sugerimos que las funciones semióticas pueden suponer una contribución relevante. Estos constructos pueden servir como herramientas de análisis de los libros de texto. Los resultados de estos análisis permitirán que los docentes seleccionen el manual que más se ajuste a sus necesidades, criterios y posicionamientos.

Notas finales

1

En Font (2000a) se describen los componentes (prácticas, notaciones, objetos, etc.) del significado a priori de la derivada y la trayectoria didáctica que lo convierte en significado a posteriori. La institución era en este caso, una clase de 1º de Bachillerato LOGSE (modalidad de ciencias y tecnología) de un Instituto de Educación Secundaria de la Comunitat Autònoma de Catalunya.

2.

Los libros de texto que se citan son:

ARIAS, J.M.; MAZA, I.(1998): 1 Matemàtiques Batxillerat. Humanitats i C. Socials. Editorial Casals, S.A. Barcelona.

ARIAS, J.M.; MAZA, I.(1998): 2 Matemàtiques Batxillerat. C. Naturalesa i Salut-Tecnologia.Editorial Casals, S.A. Barcelona.

BESORA, J.; JANÉ, A.; GUITERAS, J.M. (1998). *Matemàtiques Batxillerat. Crèdits 1,2 i 3.* Madrid: Mc Graw Hill.

BESORA, J.; JANÉ, A.; GUITERAS, J.M. (1998). *Matemàtiques Batxillerat. Crèdits 4 5 i 6.* Madrid: Mc Graw Hill.

BLANCO, JI.; BUSQUETS, O.; CASTAÑER, C.; VICENS, F.(1999): Matemàtiques Batxillerat 1. Modalitat Ciències de la naturalesa i de la salut. Modalitat Tecnologia. Editorial Barcanova, S.A. Barcelona.

BLANCO, JI.; BUSQUETS, O.; CASTAÑER, C.; VICENS, F.(1999): Matemàtiques Batxillerat 2. Modalitat Ciències de la naturalesa i de la salut. Modalitat Tecnologia. Editorial Barcanova, S.A. Barcelona.

BUJOSA, J.M; CAÑADILLA, J.L.; FARGAS, M.; FONT, V. (1998). *Matemàtiques 1*. Barcelona: Castellnou

BUJOSA, J.M; CAÑADILLA, J.L.; FARGAS, M.; FONT, V. (1998). *Matemàtiques 2*. Barcelona: Castellnou

NEGRO, A.; BENEDICTO, C.; MARTÍNEZ, M. PONCELA, J.M. (1999). *Matemàtiques I.* Barcelona: Santillana.

NEGRO, A.; BENEDICTO, C.; MARTÍNEZ, M. PONCELA, J.M. (1999). *Matemàtiques II.* Barcelona: Santillana.

REFERENCIAS

AZCÁRATE, C..; CASADEVALL, M.; CASELLES, E.; BOSCH, D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid. Síntesis.

BADILLO, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas en ejercicio de Colombia*. Tesis doctoral en curso. Universitat Autònoma de Barcelona

BOS, H.J.M., 1984. Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 69-123). Grattan-Guinness (comp.). Madrid, Alianza Universidad.

CHEVALLARD, Y. (1985): La Transposition Didactique - Du Savoir Savant au Savoir Enseigné, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L. (2001), Un análisis semiótico de la noción de límite de una función, *V Simposio del Seminario Español de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Almería, pp. 217-218. [URL: http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Almeria/Actas_Almeria.pdf]

CONTRERAS, A. (2002), *Aplicación de la teoría de las funciones semióticas (TFS) a la Didáctica del Análisis,* I Seminari d'investigació en didàctica de les matemátiques aplicacions a la didáctica de l'anàlisi infinitesimal, Barcelona, pp. 1-21.

CONTRERAS, A.; FONT, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Congreso del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (España), pp. 1-21.

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L. (en prensa): Algunas aplicaciones de la teoría de les funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*.

DUBINSKY , E.: (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Dordrecht. Kluwer A. P.

DUBINSKY , E; Schwingendorf, K.E.; MATHEWS, D.M. (1995): Mathematics course. Ed Mc Graw Hill. EE.UU.

DUBINSKY, E.: (1996) Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática, 8, 3, pp. 25-41.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et penseé humaine. Berna: Peter Lang S.A.

DUVAL, R. (1996): Quel cognitif retenir en Didactique des Mathematiques?. Publicat a Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 16, nº 3, pp. 349-382.

DUVAL, R. (2000): Basic Issues for research in Mathematics Education, Plenary Address, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Tomo I, Editors: Tadao Nakahara and Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), pp. 55, 69.

ECO, U. (1976): Tratado de semiótica general. Barcelona. Ed Lumen. 1991 (edición usada)

ERNEST, P. (1993): Mathematical activity and rhetoric: A social constructivist account. En I. Hirabasash, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (Eds.), Proceedings of Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. II-238-245). University of Tsukuba. Japan.

FONT, V. (2000a): Procidements per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques, aplicacions a les derivades, tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona.

FONT, V. (2000b): Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno, Uno, 25, pp. 21-40.

FONT, V. (2000c): Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria, *La lettre de la Preuve*, pp. 1-21. [URL: http://www.didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Font/Font00.pdf]

FONT, V. (2001a): Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola, Revista EMA, vol. 6, nº 2, pp. 180-200.

FONT, V. (2001b): Representation in Mathematics Education. Philosophy of Mathematics Education, 14, pp. 1-35.

FONT, V. (2001c): Processos mentals versus competència. Publicat a Biaix, 18, pp. 33-36.

GARCÍA ARMENTEROS, M. ; CONTRERAS, A. (2001a): Análisis semiótico del objecte matemático circunferencia, Memoria presentada por el doctorando Manuel García Armenteros para la evaluación del Curso de Doctorado: (Dr. Godino), Universidad de Granada.

GARCÍA BLANCO, M. ; LLINARES, S. (1994): Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. Publicat a Suma, nº 18, pp. 13-23.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14(3), pp. 325-355.

GODINO, J. D. (1996): Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig i A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

GODINO, J. D. i BATANERO, C. (1997): 'Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education'. En A. Sierpinska i J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as a research domain: The search of an identity. Dordrecht: Kluwer, A. P.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1998), Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*, Guimaraes (Portugal).

GODINO, J.D. (1998): Un modelo semiòtico para la actividad i la institución matemàtica. Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica. Granada.

GODINO, J.D. (1999): Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de la matemática. En T. Ortega (Ed.), Actas del III Simposio de la SEIEM (pp.196-212).Valladolid.

GODINO, J.D. (2001a): Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en Didáctica de les Matemáticas, Ponencia presentada en la XVI Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de les Matemáticas (SI-IDM) (Grupo DMDC, SEIEM), celebrado en Huesca, pp. 1-15.

GODINO, J.D. (2001b): Análisis semiótico i didáctico de procesos de instrucción matemática, Documento interno, Departamento de Didáctica de les Matemáticas, Universidad de Granada, pp. 1-34.

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22 (2/3) (en prensa).

HJELMSLEV, L. (1974): Prolegómenos a una Teoría del Lenguaje. Ed. Gredos. Madrid (original 1943).

INGLADA, N.; FONT, V. (2002). Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. Le cas des dérivées des fonctions élémentaires. Publicado en A challenge for mathematics education: To reconcile commonalities and differences. Un défi pour l'éducation mathématique: Réconcilier le commun et le diverse. CIEAEM 54. Ed. Graó. Barcelona 2004.

INGLADA, N.; FONT, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental XIX JORNADAS DEL SI-IDM, Córdoba. Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática (SEIEM).

[URL: http://www.ugr.es/%7ejgodino/siidm/cordoba_2003/IngladaFont.pdf]

KAPUT, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.), Problems of repre-sentation in the teaching and learning of mathematics (pp. 159-195). Hillsdale N.J.: Erlbaum A.P.

KAPUT, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), Radical con-structivism in mathematics education (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer A. P.

LAKOFF, G., NÚÑEZ, R. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

LUQUE, L. i CONTRERAS, A. (2001b): Una aproximación al análisis semiótico del límite de una función en un punto, Memoria presentada por el doctorando Lorenzo Luque Cañada para la evaluación del Curso de Doctorado: (Dr. Godino), Universidad de Granada.

ORDÓÑEZ, L.; CONTRERAS, A. (2001c): Un acercamiento al estudio semiótico de la integral definida, Memoria presentada por doctoranda Lourdes Ordóñez Cañada para la evaluación del Curso de Doctorado: (Dr. Godino), Universidad de Granada.

ORDÓÑEZ, L.; CONTRERAS, A.; GARCÍA, M.; LUQUE, L., (2002), Significado institucional de la Integral, *X Congreso Thales sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, El Ejido (Almería, España), pp. 1-11.

ROMERO, I. ; RICO, L. (1999): Representación i comprensión del concepto de número real. Una experiencia en secundaria, Revista EMA, 4 (2), pp. 117-151.

SAUSSURE, F. (1916): Curs de lingüística general. Ed. 62. Barcelona 1990 (edició usada).

SHELL CENTER FOR MATHEMATICS EDUCATION (1990): El lenguaje de las funciones y las gráficas, Madrid. MEC.

TALL,D. (1992):L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. Publicat a CORNU,B. (ed.). L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. Paris. Presses Universitaires de France,pp.161-182.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS AL NÚMERO PI[16]

Patricia Konic
Universidad de Río Cuarto (Argentina)
Juan D. Godino
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo, después de presentar una perspectiva sintética del desarrollo histórico del número PI, describimos algunas configuraciones epistémicas ligadas a problemas históricos sobre PI que pueden ser de interés para la educación matemática en primaria y secundaria. En particular consideramos los problemas referidos en la Biblia sobre el cálculo de la longitud de la circunferencia y el incluido en el Papiro de Rhind sobre la cuadratura del círculo.

EPISTEMIC CONFIGURATIONS ASSOCIATED TO THE NUMBER PI

ABSTRACT

After presenting a synthetic perspective of the historical development of PI, we describe some epistemic configurations linked to PI historical problems that might be of interest to primary and secondary school mathematics. In particular we consider the problems about computing the circumference length described in the Bible and about the circle quadrature described in the Rhind Papyre.

1. SIGNIFICACIÓN CULTURAL Y MATEMÁTICA DEL NÚMERO PI

El número PI es sin duda un objeto matemático que ha llamado la atención a muchos matemáticos de primera fila de todos los tiempos, de tal manera que su desarrollo ha acompañado de manera importante a una parte sustancial de las matemáticas.

[16] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 204-217)

PI es uno de los pocos conceptos matemáticos cuya mención evoca una respuesta de reconocimiento e interés incluso en personas que no están profesionalmente implicadas en el tema. Basta mirar en Internet y encontramos multitud de páginas webs con información, historias y curiosidades, incluso sociedades de amigos de PI.

El número PI ha formado parte de la cultura humana durante más de 25 siglos y su cálculo es el único tema que desde la época más antigua continúa siendo de interés para la investigación matemática actual. El seguimiento del desarrollo del número PI a lo largo de más de dos mil años supone un hilo a través de la historia de las matemáticas que recorre la geometría, el análisis, el álgebra y la teoría de números. "Constituye un tema que proporciona a los matemáticos ejemplos de muchas técnicas actuales, así como un sentido palpable de su desarrollo histórico" (Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p. v). Una revisión de los 70 trabajos incluidos en el "libro fuente" sobre PI de Berggren, Borwein y Borwein (1997) nos muestra de manera patente la significación cultural y matemática de este objeto matemático.

Las cuestiones generales que nos planteamos en nuestro proyecto de investigación son, ¿Cuál es el papel que desempeña actualmente el número PI en la educación matemática de los niveles pre-universitarios? ¿Qué aspectos de PI se estudian en dichos niveles? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona? ¿Qué cambios se podrían hacer en los currículos de la enseñanza secundaria para aprovechar las posibilidades educativas de PI?

Antes de abordar estas cuestiones es necesario adentrarnos en el "significado de PI" desde una perspectiva global que tenga en cuenta las distintas situaciones-problemas que han determinado su emergencia, las técnicas desarrolladas para cada problema, su crecimiento, así como las nociones y propiedades matemáticas que se han ido construyendo progresivamente.

Para hacer esa reconstrucción histórico-epistemológica del "significado global de PI" vamos a utilizar algunas nociones teóricas del enfoque "onto-semiótico" sobre los conocimientos matemáticos desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, 2003; Godino, Contreras y Font, 2004).

En este trabajo incluimos resultados preliminares de un estudio más amplio de la problemática descrita sobre PI, en proceso de elaboración como tesis de maestría en la Universidad de Río Cuarto (Argentina). En particular hacemos una síntesis del desarrollo histórico de PI (apartado 2)

con el objetivo de identificar las principales "configuraciones epistémicas" en que se puede estructurar el significado global de PI (apartado 3); por razones de espacio incluimos la descripción de las dos configuraciones epistémicas menos complejas relativas a la cuadratura del círculo por los egipcios y la medida de la longitud de la circunferencia por los hebreos de la época de la Biblia.

En el último apartado incluimos algunas reflexiones sobre las implicaciones educativas de nuestro estudio, principalmente referidas a la elaboración de instrumentos de observación y análisis de propuestas curriculares sobre la enseñanza y aprendizaje de PI en el contexto educativo argentino.

2. BREVE PERSPECTIVA HISTÓRICA DE PI

El libro de Berggren, Borwein y Borwein (1997) clasifica las fuentes sobre PI en tres etapas: el período anterior a Newton; de Newton a Hilbert y el Siglo XX. Además distingue tres componentes - la investigación primaria, la historia y la exégesis – y dos temas principales – la transcendencia y el cálculo de PI.

2.1. El período pre-Newtoniano

Se disponen de fuentes documentales correspondientes a Egipto, Grecia, China y a la tradición árabe medieval.

Papiro de Rhind

Varios problemas propuestos en el Papiro de Rhind (aproximadamente 1650 a.C.) implican encontrar el área de un círculo. Aproximaron el área del círculo por la de un cuadrado cuyo lado es (8/9) del diámetro del círculo. Si consideramos que la fórmula Egipcia para hallar el área del círculo es correcta, o sea, $\pi d^2/4 = (8d/9)^2$, se llega a $\pi = 256/81 = (4/3)^4 = 3.1605$, que no es una estimación demasiado mala para aquella época.

PI en los tiempos de la Biblia

En el antiguo Oriente se tomaba como valor aproximado de PI = 3, posiblemente mediante medición directa de la circunferencia tomando el diámetro como unidad de medida. Esto equivale a aproximar la circunferencia por el perímetro de un hexágono regular inscrito. En efecto, si tomamos un hexágono regular inscrito a un círculo de radio R, como el lado del hexágono regular es igual a R, su perímetro será 6R; si dividimos

dicho perímetro por el diámetro 2R, obtenemos 3 como razón entre el perímetro y el diámetro.

Arquímedes

El trabajo antiguo más significativo es el de Arquímedes de Siracusa (277-212 a.C.) que sobrevivió bajo el título de "Sobre la medición del círculo" y dominó el tema del número PI hasta el advenimiento del cálculo.

La obra de Arquímedes está compuesta por tres proposiciones que en lenguaje actual se resumirían en las siguientes:

a) $A = r \cdot p / 2$, donde A designa el área de un círculo, r el radio y p su perímetro.

b) $A / r^2 = p / 2r$, relaciones estas independientes del círculo tomado.

c) $3d + 10/71\ d < p < 3d + 1/7\ d$

Para esta última Arquímedes calcula las longitudes de polígonos regulares, inscripto y circunscrito a un círculo. Parte de un hexágono regular circunscrito, luego dobla sucesivamente el número de lados del polígono regular circunscrito considerado. De este modo obtiene aumentos cada vez más precisos y se detiene en el polígono de 96 lados lo que le permite alcanzar el límite 3 + 1/7. Cabe destacar que Arquímedes es explícito con respecto a π, pues da dos valores (múltiplos fraccionarios del diámetro) entre los cuales el perímetro del círculo está comprendido. Es decir que no solo aporta una " buena" aproximación, sino que además provee un encuadramiento, esto es una precisión sobre el valor de la aproximación. Pero además su prueba es un método que permite, por iteración, obtener valores aproximados tan buenos como deseados.

2.2. De Newton a Hilbert

Este periodo incluye los trabajos más significativos sobre PI. Por un lado, aparece un enfoque analítico del tema. Mientras los métodos de cálculo aproximados son perfeccionados, con el desarrollo del análisis infinitesimal se produce una verdadera revolución del enfoque por el empleo de sumas y productos infinitos, la utilización de funciones trigonométricas y hasta la de fracciones continuas. Por otra parte, se prueba la irracionalidad de PI y luego la transcendencia.

Vieta, en 1593, aporta la primera expresión explícita de π, utilizando un número infinito de operaciones. Su partida también es desde el punto de vista geométrico, manteniendo la consideración de polígonos regulares

inscritos de 4, 8, 16, ... lados, y utilizando las áreas, llega a un producto infinito para el valor de $2/\pi$:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}.....}}$$

En 1650, **Wallis** muestra un producto infinito con una convergencia muy lenta, pero con la particularidad que solo hace aparecer enteros:

$$\frac{3x3x5x5x7x7x9x9x11x11x13x13}{2x4x4x6x6x8x8x10x10x12x12x14}x\sqrt{1\frac{1}{13}}$$

$$\frac{3x3x5x5x7x7x9x9x11x11x13x13}{2x4x4x6x6x8x8x10x10x12x12x14}x\sqrt{1\frac{1}{14}}$$

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.....}{2.4.4.6.6.8.....}$$

Este proceso lo obtiene efectuando una cuadratura de $\sqrt{1-x^2}$ **,** basada a su vez en la fórmula del binomio de Newton, la cuadratura de curvas algebraicas $(1- x^2)^k$ y un principio de inducción sobre la forma de las expresiones algebraicas.

Por otra parte, Leibniz obtiene π como la suma de una serie, esto es:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...$$

Leibniz, 1673. Califica su fórmula de *cuadratura aritmética*, además se dedica a poner en evidencia la armonía de algunas series de números sin dar explicaciones sobre la verdadera razón de su resultado. Su método llamado el método de la *metamorfosis*, es explicado en una de sus cartas del siguiente modo: El área bajo una curva es recortada en triángulos infinitesimales (Figura 1), cada uno de ellos tiene un área igual a la mitad del área de ciertos rectángulos infinitesimales, los que ocupan el área bajo otra curva, curva que fácilmente puede ser cuadrada. Si esta técnica es aplicada a ciertos casos particulares, aporta cuadraturas conocidas, y en el caso particular del círculo permite obtener una expresión de π.

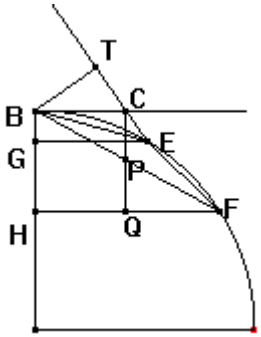


Figura 1

Buffón, 1760. Introdujo una nueva rama de esta teoría, es decir, estudiar los problemas probabilísticos basados en consideraciones geométricas. Entonces propone el siguiente problema: considerar un plano horizontal dividido en regiones por un haz de rectas paralelas equidistantes, sobre el que se lanza al azar una aguja de grosor despreciable. La probabilidad de que la aguja corte a una de las rectas paralelas es calculada por Buffón como $\frac{2l}{\pi d}$, donde d es la distancia común entre las paralelas y l la longitud de la aguja con l < d. Esta es una ocasión para obtener a π de un modo estadístico. Si llamamos N al número de lanzamientos y N' al número de casos favorables, el cociente: $\frac{N}{N'}$ se aproximará a dicha probabilidad a medida que N aumente. Por lo que si se tira una aguja un número grande de veces se podrá escribir: $\frac{2}{\pi} \cong \frac{N'}{N}$,

de donde se deduce que: $\pi \cong \frac{2N}{N'}$.

Utilización de las series

Euler, 1779. Se interesa en el crecimiento de la convergencia de la serie de Leibniz. Por ello es que utiliza un valor particular:

Tan π/6 = $1/\sqrt{3}$, mas aún, considera dos series juntas reemplazando la fórmula:

π/4 = Arctan 1, por π/4 = Arctan (1/2) + Arctan(1/3)

Newton en su *Tratado de las Fluxiones*, a propósito de la cuadratura de una porción de círculo de ecuación y = $\sqrt{x - x^2}$

Determinó una fórmula que comienza así:

$$\pi/24 = \sqrt{3}/32 + 2/3.2^3 - 1/5.2^5 - 1/28.2^7 - 1/72.2^9 - .....$$

cuya convergencia resulta mejor. Lo cual permite incrementar considerablemente el número de decimales calculados de π . Así, Abraham Sharp duplica la eficacia, no obstante es John Machin quien hace verdaderamente progresar el cálculo con la fórmula:

$$\pi/4 = \text{Arctan}(1/5) + \text{Arctan}(1/239)$$

Esta fórmula le permite obtener 100 decimales en 1706.

Euler es uno de los primeros autores cuyo lenguaje y formulaciones resultan similares a los actuales. Partiendo de :

$$\text{Arct x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

Y considerando que, $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$

Obtiene:

$$\pi = 2\sqrt{3}\ (1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - .... + \frac{(-1)^n}{(2n+1).3^n} + ...)$$

y retomando la relación $\text{Arctan } 1 = \text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3)$

Euler obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1).2^{2n+1}} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1).3^{2n+1}}$$

Con una convergencia aún mejor.

Investigaciones teóricas, como la prueba de la irracionalidad de π, su trascendencia y las innumerables proezas técnicas y algorítmicas para obtener cada vez más decimales constituyen la esencia de esta etapa. A la búsqueda de nuevos decimales se superponen luego investigaciones teóricas relativas a la naturaleza de π.

Lambert prueba en 1761 la irracionalidad de π, a partir de un desarrollo en fracción continua generalizada para la tangente de x, de donde deduce que tan x es irracional siendo x racional; en consecuencia π/4 es irracional ya que tan π/4 = 1 no lo es. Legendre utiliza el mismo desarrollo en 1794 para mostrar que π^2 no es racional.

La trascendencia de π fue demostrado por **Lindemann** en 1882, retomando los métodos utilizados por Hermite para demostrar la trascendencia de e.

2.3. El siglo XX

Este siglo se caracteriza por desarrollos analíticos de mayor sofisticación y la era del cálculo computacional. Esto contribuye sustancialmente a la búsqueda de cada vez mayor cantidad de decimales de π.

Ramanujan, 1913. Es el mas destacado representante de la época porque realiza numerosas y muy buenos aproximaciones de π a través de valores singulares de integrales elípticas.

En cuanto a los trabajos en el orden computacional, cabe destacar a Reitwiesner, Metrópolis y Neuwman quienes en 1949 lograron el cálculo de 2037 cifras con el ordenador ENIAC. En el método utilizado se hizo uso de la arcotangente. De allí en adelante numerosos son los trabajos realizados en el intento de desafiar el logro del mayor número de decimales de π.

3. UNA RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO GLOBAL DE PI

El estudio histórico realizado, presentado aquí de manera sintética, tiene un interés relevante para la educación matemática, como se pone de manifiesto en el ICMI Study sobre "History in Mathematics Education" (Fauvel y Maanen, 2000). Esto es así porque nos pone en contacto con los problemas originales que motivaron las nociones y técnicas matemáticas, lo que puede ser una fuente de inspiración para los investigadores y profesores de matemáticas y de motivación para los estudiantes.

En el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática (Godino, 2003) se propone como entrada a los estudios didácticos el análisis de los significados de los objetos matemáticos, entendidos tales significados como "sistemas de prácticas puestas en juego para solución de situaciones-problemas", relativos a marcos institucionales específicos. La referencia a situaciones-problemas y la relatividad institucional lleva a este enfoque teórico a valorar de manera especial el análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, y más concretamente onto-semiótico, así como también a las fuentes documentales actuales. Este enfoque requiere que nos interesemos no sólo por los problemas, sino también por las técnicas, los lenguajes, las entidades conceptuales, proposicionales y argumentativas puestas en juego en cada momento y circunstancia. De esta manera podemos reconstruir el "significado global" de un objeto matemático, así como los "significados

parciales" que lo componen, y estar en condiciones de adoptar decisiones curriculares e instruccionales racionales sobre la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo.

En Godino, Contreras y Font (2004) se ha introducido la noción de *configuración epistémica* como el sistema de objetos y relaciones emergentes puestos en juego en la solución de un problema matemático. Esta noción trata de hacer operativos los "sistemas de prácticas", al fijar la atención en los objetos emergentes, concretados en enunciados, procedimientos, notaciones, definiciones, atributos, argumentos y en las relaciones que se establecen entre dichos objetos. Estas configuraciones epistémicas puntuales, al ser articuladas con otras, producirán configuraciones progresivamente más complejas, en las cuales se concretará el significado global de la noción u objeto matemático estudiado.

En esta sección vamos a aplicar estas nociones al número PI.

Teniendo en cuenta el estudio histórico realizado hemos llegado a la conclusión que los tipos de problemas en los cuales ha emergido el número PI se pueden resumir de la siguiente manera.

- La cuadratura del círculo realizada en el antiguo Egipto, como se describe en el Papiro de Rhind.
- La medida directa de la longitud de la circunferencia por los hebreos del tiempo de la Biblia.
- La cuadratura del círculo y medida de la longitud de la circunferencia mediante las aproximaciones geométricas de Arquímedes.
- Cálculo de PI mediante desarrollos en serie.
- Cálculo de PI con probabilidades geométricas.
- Demostración de la irracionalidad de PI.
- Demostración de la trascendencia de PI.

El estudio de las configuraciones epistémicas ligadas a cada una de estas situaciones-problemas, y la reconstrucción de la red de objetos y relaciones que concreta el significado global de PI, está siendo realizado en un trabajo más extenso. Por razones de espacio presentaremos a continuación solamente el análisis de las dos primeras configuraciones, las cuales por presentar menor complejidad pueden ser usadas en la educación primaria y primeros cursos de secundaria.

3.1. La cuadratura del círculo en el antiguo Egipto

El problema 50 que encontramos en el Papiro de Rhind se enuncia y resuelve del siguiente modo (Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.1):

Problema 50: "Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es su área?

La solución que se describe es:

"Resta 1/9 del diámetro, esto es, 1; el resto es 8. Multiplica 8 veces 8; resulta 64. Por tanto contiene 64 setat de tierra.

En estos problemas el área del círculo se iguala a la de un cuadrado cuyo lado es (8/9) del diámetro del círculo.

No se sabe cómo pudieron llegar a esta fórmula para hallar la "cuadratura del círculo", pero un pequeño diagrama geométrico (Fig. 2a) que acompañaba al problema 48 ofrece una posible clave (Eves, 1969; reproducido en Berggren, Borwein y Borwein, 1997, p.402).

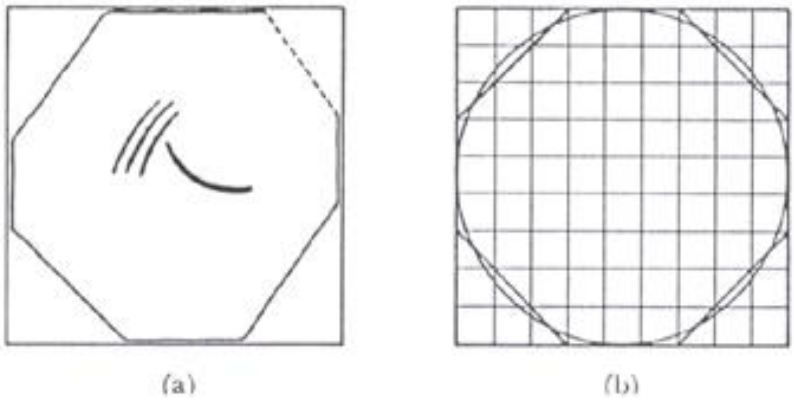


Figura 2

El diagrama sugiere que al cuadrado se le han cortado las cuatro esquinas a una distancia 1/3 del lado. Si la figura se dibuja con cuidado y se inscribe un círculo se observa que el área del círculo inscrito se ajusta bastante bien mediante el área de la figura octogonal obtenida (Figura 2b). Si el diámetro del círculo se toma como 9, también será 9 el lado del cuadrado, por tanto el octógono tendrá de área: 81 - 4(9/2) = 63, y el lado del cuadrado de igual área que el circulo será $\sqrt{63}$ que, a su vez se puede aproximar por $\sqrt{64}$, o sea, 8.

Por consiguiente, el lado de un cuadrado equivalente es aproximadamente los 8/9 del diámetro del círculo dado.

En la figura 3 presentamos de manera esquemática la configuración epistémica asociada al problema de la cuadratura del círculo según la conjetura sugerida por Eves (1969) y reformulada por nosotros.

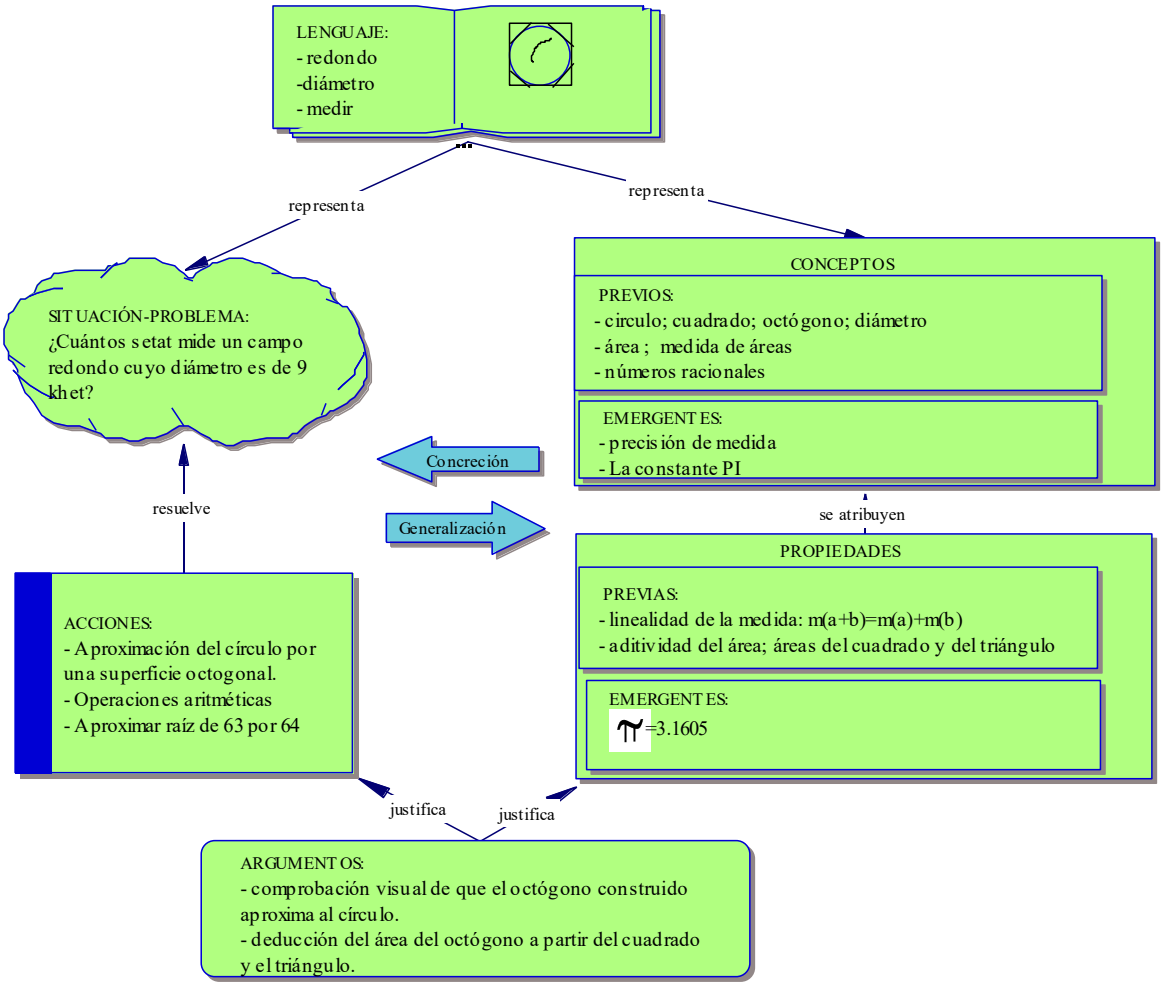


Figura 3: Configuración epistémica de la cuadratura del círculo

3.2. Medida directa de la longitud de la circunferencia

En el Antiguo Testamento, II Crónicas 4:2 y en I Reyes 7:28 (Eves, 1969) encontramos la siguiente descripción en la que se relaciona la longitud de la circunferencia y el diámetro:

> *"Luego él hizo el Mar en forma de fuente, que tenía primero diez codos, perfectamente circular; tenía una altura de cinco codos y un cordel de treinta codos medía el contorno".*

Interpretamos que esta descripción sugiere un procedimiento de medida directa del la longitud de la circunferencia rodeando cuerpos redondos con cuerdas de longitud el diámetro. La figura 4 resume la correspondiente configuración epistémica.

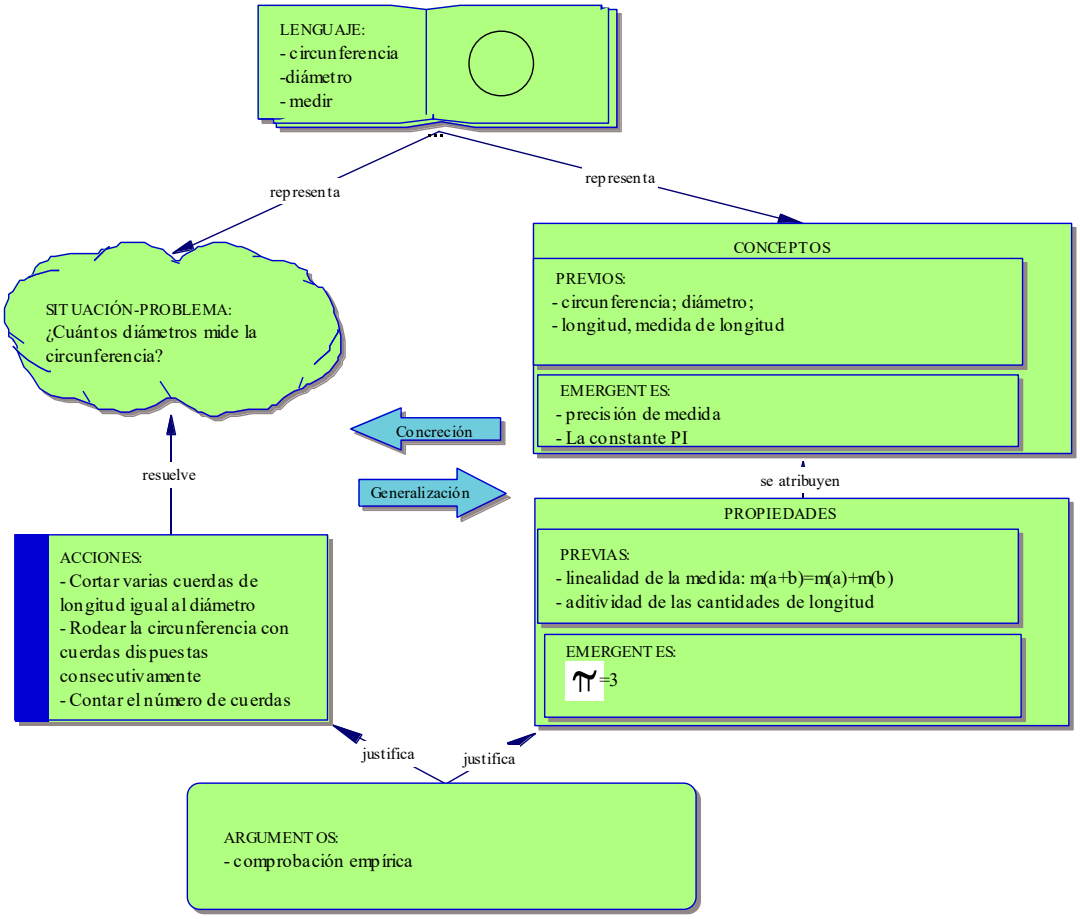


Figura 4: Configuración epistémica de la medida de la longitud de la circunferencia con el diámetro

Con la estructura de los esquemas precedentes podemos identificar la *praxis*, descrita por la situación-problema y las acciones que permiten una solución al mismo. Dicha praxis, posibilita poner en descubierto los elementos que la generalizan, es decir los conceptos y propiedades que se le atribuyen, los que asumen el rol de justificantes conceptuales de la técnica utilizada (*logos*). Por otra parte en la base de ambas componentes se ubican los argumentos que sustentan tanto las acciones como los conceptos. El *lenguaje* actúa como expresión y representante de los elementos de significado que componen la trama de los objetos emergentes que se intenta representar en la configuración.

Importa destacar que la distinción realizada para los conceptos y propiedades en previos y emergentes, aporta un dato distintivo que puede colaborar en el análisis de la idoneidad tanto de un diseño curricular, como de una trayectoria instruccional.

4. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos resaltado el interés del estudio de la historia de las matemáticas dentro del enfoque onto-semiótico de la cognición matemática. El objetivo pretendido con dicho estudio es triple:

- Realizar una reconstrucción del significado global del objeto matemático, con vistas a tener información de los tipos de situaciones-problemas y sistemas de prácticas en que se pone en juego el objeto.
- Realizar análisis pormenorizados de las configuraciones epistémicas puntuales en las que se concretan los significados parciales del objeto.
- Identificar obstáculos epistemológicos y conflictos potenciales en los procesos de estudio de las configuraciones y la implementación de trayectorias epistémicas.

Las dos configuraciones descritas en este trabajo, la medida directa de la circunferencia que presumiblemente aplicaron los hebreos, y la cuadratura del círculo mediante un octógono parcialmente inscrito hecha por los egipcios, permiten poner a los alumnos, incluso de educación primaria, ante retos matemáticos de gran interés formativo. El resto de las configuraciones mencionadas, dadas su complejidad, pueden ser tenidas en cuenta en propuestas curriculares de educación secundaria y en cursos universitarios.

REFERENCIAS

Berggren, L., Borwein, J. y Borwein, P. (Eds) (1997). *PI: A source book.* New York: Springer.

Chabert, J. L. y cols (Eds) (1994). *Histoire d' algorithmes*. Berlin: Springer.

Eves, H. W. (1969). *In mathematical circles: A selection of mathematical stories and anecdotes*. Boston: PWS Publishing Company.

Fauvel, J. y Maanen, J. Van (Eds.) (2000). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Monografía de Investigación para el Concurso a Cátedra de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperable en,

http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

LOS ESTUDIANTES, LAS INSTITUCIONES Y EL PROGRAMA MATHEMÁTICA[17]

Manuela Ortega Carpio
Universidad de Jaén
Ángel Contreras de la Fuente
Universidad de Jaén

1. INTRODUCCIÓN

En un trabajo anterior (Ortega y Contreras, 2003), por medio de un análisis a priori, se detectaron las restricciones de enseñanza ligadas al uso del programa MATHEMÁTICA, así como los fenómenos didácticos emergentes de la utilización del útil informático. Asimismo, se identificaron los niveles de uso de dicho programa. Todo ello, según la implementación de dicho instrumento informático en las clases prácticas –de las que estamos interesados en los temas correspondientes al Cálculo Infinitesimal– de un curso de primero de LADE de la Universidad de Jaén, en un grupo de 30 estudiantes y durante 15 horas de clase, de las que sólo 6 de ellas corresponden a los tres temas de Cálculo, aunque los alumnos tienen acceso al citado programa en otras horas libres.

El marco teórico adoptado es el de la TFS (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordóñez –en prensa–; Godino, Contreras y Font –en prensa–), dado que se postula que tanto los objetos matemáticos como los tecnológicos emergen fruto de la actividad de la resolución de problemas, mediada por las herramientas semióticas disponibles en los contextos institucionales y en un ambiente de trabajo propio de la intersubjetividad.

Con el objetivo de la continuidad con el trabajo anterior y buscando nuevos desarrollos, en esta Comunicación se aborda el análisis del significado institucional de las actividades prácticas con ordenador, según las entidades y las facetas duales, además de los aspectos relacionados con los polos del estudiante y del profesor, buscando entrar en la problemática de lo que Trouche (2002) denomina génesis instrumental individual (en el caso de los

[17] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 218-227)

estudiantes) y de las orquestaciones instrumentales (en el caso de los profesores).

2. RELACIONES QUE LOS ESTUDIANTES MANTIENEN CON EL ENTORNO INFORMÁTICO

Teniendo en cuenta la experiencia acumulada de los investigadores con el uso de entornos informáticos, tanto con el programa MATHEMATICA como con otros, por ejemplo LOGO, y teniendo en cuenta las aportaciones de Trouche (2002) y el marco teçorico de la TFS, mediante un análisis a priori se pueden extraer varias tipologías en el comportamiento de los alumnos cuando usan los ordenadores.

2.1. Tipologías unidimensionales

Corresponden a aquellas que están relacionadas con una única dimensión de la génesis instrumental. Entre ellas tendremos:

2.1.1. El modo de aprendizaje

Reflexionando sobre el tipo de aprendizaje que realizan los estudiantes cuando utilizan el programa, distinguimos los siguientes perfiles:

- El *novel*, que sólo toma contacto con la situación-problema planteada, aunque lo hace sin ningún tipo de dirección, sin consultar el modo de uso del programa, no tiene aún información del profesor. Por tanto, no efectúa acciones significativas y utiliza un lenguaje rudimentario, lógicamente no tiene posibilidad de entrar en la parte discursiva de las prácticas. Es decir, en la configuración discente la función del estudiante se reduce a la ejercitación.

- El *habilidoso*, quien una vez puesto en contacto con la situación-problema, busca sus propios recursos para localizar el lenguaje adecuado, entrando en contacto con los conceptos, proposiciones y argumentaciones mediante la transposición didáctica de sus propios apuntes. Por tanto, busca información fuera de toda fuente institucional (el profesor). Suelen ser personas habilidosas que utilizan el ensayo y error como método de trabajo en su progreso. Es decir, en la configuración discente las funciones del estudiante están muy centradas en las de exploración, formulación y validación.

- El *interactivo*, que utiliza al profesor en un mínimo porcentaje y en uno mayor la interactividad con la situación-problema. La información imprescindible la toma directamente de la institución, aunque los

desarrollos posteriores, sobre los discursivos, suelen adquirirlos por iniciativa propia. Es decir, en la configuración discente las funciones del estudiante están centradas en las de aceptación, exploración, formulación y validación, aunque también en la de demanda de información.

- El *adiestrado*, que utiliza con frecuencia al profesor para entrar y avanzar en la resolución de la situación-problema. No carece de iniciativa y tiene cierta interactividad, aunque la fuente básica de información y ayuda es el profesor. Es decir, en la configuración discente las funciones del estudiante están centradas en las de aceptación, recepción, demanda y ejercitación.

2.1.2. La relación del estudiante con respecto a las matemáticas y a las tecnologías informáticas

En un principio, el perfil del estudiante con respecto al uso del programa viene condicionado con sus propias creencias respecto a las matemáticas y a la tecnología informática, teniendo en cuenta que el uso del programa los libera de una carga rutinaria y pesada. A pesar de todo, cada alumno privilegia la utilización de un lenguaje u otro y esto condiciona sus desarrollos posteriores. Los perfiles que pueden distinguirse son los siguientes:

- El *gráfico*, cuando para formular y validar conjeturas acerca de la solución de la situación-problema utiliza el lenguaje gráfico con el ordenador fundamentalmente

- El *analítico*, cuando para formular y validar conjeturas acerca de la solución de la situación-problema utiliza el lenguaje analítico con el ordenador fundamentalmente

- El *mixto*, cuando, utiliza diversos lenguajes de formulación y validación de conjeturas.

2.2. Tipología multidimensional

En este caso se tienen en cuenta diversas dimensiones en el comportamiento de los alumnos, más allá que aquellas dimensiones que utilizan de forma privilegiada, tales como los conocimientos puestos en práctica, las interacciones estudiante-estudiante, estudiante-profesor y estudiante-ordenador.

Atendiendo a los comportamientos de los estudiantes, se tiene:

- El *formalista*, como fuentes de información fundamentales para abordar la situación-problema utiliza las referencias disponibles (libros, apuntes); para

efectuar sus acciones usa la interpretación; como método de argumentación, la analogía.

- El *lógico*, como fuentes de información fundamentales para abordar la situación-problema utiliza el papel y el lápiz; para efectuar sus acciones usa la inferencia; como método de argumentación, la demostración.

- El *laborioso*, como fuentes de información fundamentales para abordar la situación-problema utiliza el ordenador; para efectuar sus acciones usa la investigación; como método de argumentación, la acumulación.

- El *experimentador*, como fuentes de información fundamentales para abordar la situación-problema utiliza todos los posibles; para efectuar sus acciones usa la comparación; como método de argumentación, la confrontación.

3. RELACIONES QUE LAS INSTITUCIONES MANTIENEN CON EL ENTORNO INFORMÁTICO

Cuando se consideran las relaciones sociales del entorno informático, aparecen unos procesos de formación explícitos, de cara a los estudiantes, reveladores de la responsabilidad escolar. La institución escolar engloba tanto al profesor de la clase como al didacta y al experto en informática, esto es, un conjunto de profesionales indispensables para constituir lo que Chevallard[18] denomina sistema de explotación didáctica y para poder asegurar la integración de los útiles informáticos en la clase.

Ahora bien, ¿cuál es la puesta en escena pertinente de todas estas componentes? Trouche denomina orquestación instrumental al dispositivo, parte inseparable del sistema de explotación didáctico, que la institución escolar organiza con el objetivo de orientar la acción instrumentada de los estudiantes. Esta orquestación instrumental tiene cuatro componentes:

- el conjunto de los sujetos que intervienen en todo el proceso;

- un conjunto de objetivos relativos a la realización de un tipo de tareas o a la disposición del entorno de trabajo;

- una configuración didáctica, constituido por el material disponible y su modo de implantación;

[18] La introducción de un objeto técnico en el proceso de enseñanza supone un trabajo complejo de implementación didáctica. Utiliza una metáfora informática para distinguir tres niveles cuya interacción es esencial: a) el hardware didáctico, correspondiente al medio técnico y su modo de empleo; b) el software didáctico, las secuencias de enseñanza en sí mismas; c) el sistema de explotación didáctico, nivel esencial que permite sacar partido a los recursos potenciales del medio didáctico, asegurando la coordinación y la integración de los primeros niveles.

- un conjunto de modos de explotación de esta configuración.

La configuración didáctica y sus modos de explotación producen las trazas de la actividad, esto es, los resultados de dicha actividad que son observables por otras personas que participan en la misma.

Las orquestaciones instrumentales pueden desarrollarse según tres niveles:

- como *programas de primer nivel*, que corresponden al concepto de uso directo de los comandos del programa como útil para resolver alguna situación-problema.

- como *programas de segundo nivel*, que corresponden a modos de acción que utilizan programas de primer nivel.

- como *programas de tercer nivel*, que corresponde a un uso en el que se exige un desarrollo cognitivo y social capaz de plantear situaciones de simulación y de originar métodos reflexivos de auto-análisis de la actividad propia o colectiva.

4. LA ORGANIZACIÓN INSTRUMENTAL EN EL USO DEL PROGRAMA MATHEMATICA

En este apartado analizaremos la organización instrumental actual correspondiente a la implementación del programa MATHEMATICA en el primer curso universitario de titulaciones de la Universidad de Jaén. Las componentes son las siguientes:

A) Los sujetos implicados en el estudio corresponden a los primeros cursos de la licenciatura de Administración y Dirección de Empresas, de la diplomatura de Ciencias Empresariales y de la diplomatura de Ingeniería Técnica de Informática de Gestión. Estos alumnos realizan prácticas en sus asignaturas, a lo largo de 1,5 o 3 créditos de clases presenciales.

B) Los objetivos que se persiguen en la realización de las prácticas con el programa son:

- Familiarizar a los estudiantes con un entorno informático, usando éste como útil para la resolución de problemas, cuya solución sólo es posible por medio de dicho entorno.

- Profundizar, a través de las prácticas con ordenador, en la comprensión de los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral de una función.

- Que los estudiantes efectúen las transferencias pertinentes de las prácticas con ordenador hacia unos significados más completas en las prácticas sin ordenador, buscando la mejora de estas últimas.

C) La estructura general del dispositivo o configuración didáctica consiste en la aplicación del citado programa informático, el cuál se ha implantado en un aula de ordenadores donde los alumnos trabajan individualmente con el asesoramiento del profesor.

D) Los modos de explotación posibles son diversos:

- Como simple calculadora de tipo numérico, aunque con la particularidad de que, además de poderse acceder a más funciones que en la calculadora habitual, da opción de trabajar con la precisión que se quiera, incluso infinita.

- Para el cálculo numérico, usando un paquete de subrutinas que lo permiten, tales como la integración numérica, la minimización de funciones, la programación lineal..., las cuales se encuentran implementadas.

- Como una potente calculadora simbólica, al permitir trabajar con expresiones simbólicas, facilitando el cálculo simbólico con límites, derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales.

- Como paquete gráfico, permitiendo dibujar en dos y tres dimensiones.

5. ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LA ACTIVIDAD INSTITUCIONAL

El análisis se efectuará sobre las prácticas realizadas en la institución de las tres asignaturas citadas teniendo en cuenta las seis entidades primarias de la actividad matemática: situaciones-problema, lenguaje, acciones, conceptos, proposiciones y argumentaciones. Nos centraremos en las prácticas realizadas con los conceptos de límite, continuidad y derivada. Cada unidad de análisis será el ejercicio correspondiente.

Límite y continuidad de funciones reales

El primer ejercicio consiste en el cálculo de seis límites funcionales: dos laterales, otro finito y tres límites en el infinito, los cuales se efectúan directamente mediante las sentencias correspondientes a la calculadora simbólica. Es decir, no aparece una verdadera situación-problema; el lenguaje es analítico; las acciones, de cálculo, son efectuadas por el propio programa; el concepto de límite está ausente; no se aplican proposiciones; por último, no se realiza ningún tipo de argumentación. Es decir, todo

queda en el lenguaje simbólico del programa, donde las matemáticas están presentes en el aspecto notacional.

El segundo ejercicio consiste en una función definida a trozos de la que se pide el estudio de su continuidad. Aparecen dos puntos a estudiar y, por tanto, el ejercicio consiste en aplicar el concepto de continuidad y calcular los límites asociados. Por tanto, no aparece una verdadera situación-problema; el lenguaje es analítico; las acciones, de cálculo, son efectuadas por el propio programa; hay que aplicar el concepto de continuidad y de límite lateral; no se aplican proposiciones; por último, no se realiza ningún tipo de argumentación.

En el tercer y último ejercicio se pide al estudiante que verifique las hipótesis de un teorema matemático. Esto es, la situación-problema corresponde a la verificación de las hipótesis de un teorema; el lenguaje es analítico; las acciones se refieren al cálculo de límites laterales; el concepto implícito que aparece es el de continuidad y límite lateral; la proposición corresponde al teorema de Bolzano; la argumentación corresponde a la verificación, o no, de la continuidad en un punto.

Derivación de funciones reales

El primer ejercicio consiste en el cálculo de las derivadas de dos funciones: una logarítmica y la otra exponencial, las cuales se efectúan directamente mediante las sentencias correspondientes a la calculadora simbólica. Es decir, no aparece una verdadera situación-problema; el lenguaje es analítico; las acciones, de cálculo, son efectuadas por el propio programa; el concepto de derivada está presente en el aspecto notacional; no se aplican proposiciones; por último, no se realiza ningún tipo de argumentación. Es decir, se trata de un ejercicio donde las matemáticas están presentes en el aspecto notacional.

El segundo ejercicio consiste en el cálculo de la primera y segunda derivadas de una función de cierta complejidad, así como la simplificación de las mismas: una logarítmica y la otra exponencial, las cuales se efectúan directamente mediante las sentencias correspondientes a la calculadora simbólica. Además, la simplificación también está disponible en el programa. Es decir, no aparece una verdadera situación-problema; el lenguaje es analítico; las acciones, de cálculo, son efectuadas por el propio programa; el concepto de derivada está presente en el aspecto notacional; no se aplican proposiciones; por último, no se realiza ningún tipo de argumentación. Es decir, se trata de un ejercicio donde las matemáticas están presentes en el aspecto notacional.

El tercer ejercicio consiste en una función definida a trozos de la que se pide el estudio de su derivabilidad. Aparecen un punto a estudiar y, por tanto, el ejercicio corresponde a la aplicación del concepto de derivabilidad, por medio de la continuidad, y calcular los límites asociados. No aparece una verdadera situación-problema; el lenguaje es analítico; las acciones, de cálculo, son efectuadas por el propio programa; hay que aplicar el concepto de derivabilidad, de continuidad y de límite lateral; no se aplican proposiciones; por último, no se realiza ningún tipo de argumentación.

Como podemos observar la orquestación instrumental corresponde a programas de primer nivel, en el que el programa es utilizado como calculadora simbólica, esto es, como útil para el cálculo.

6. CONCLUSIONES

Del estudio realizado, podemos extraer algunas conclusiones de interés. Primeramente, que el análisis a priori nos indica que los estudiantes muestran unos perfiles en sus conductas muy ricas y variadas que habría que fomentar por medio de las situaciones-problema que se le planteen.

En segundo lugar, el análisis semiótico de la actividad matemática efectuado ha puesto en evidencia que el sistema de explotación didáctica de la institución analizada se centra en los aspectos simbólicos. Sería deseable disponer de sistemas en los que los objetos matemáticos fueran movilizados por los estudiantes en las prácticas con ordenador. En general, tal y como se platean actualmente, las clases prácticas son una continuidad, aunque dotas de una mayor potencia de cálculo, de las que se realizan con lápiz y papel.

Es necesario el uso de orquestaciones instrumentales de segundo y tercer nivel capaces de facilitar el aprovechamiento del entorno informático, elaborando los comandos apropiados de cara a las situaciones a utilizar. Además, hay que fomentar los cambios de lenguajes, buscando la emergencia de los objetos matemáticos por medio de las prácticas. Ejemplos como los de Artigue (2002), Lagrange (2002) y Trouche (2002) pueden ayudar a la elaboración de estos planteamientos. Como indican Kendal, Stacey y Pierce (2002), los programas informáticos deben ser utilizados para ayudar a los estudiantes a comprender las matemáticas, además de su imprescindible uso funcional.

Reconocimientos:

Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto de Investigación MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. (2002), L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leÇons de quelques ingénieries didactiques, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Éditions, pp. 277-349.

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2004), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

GODINO, J. D. Y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14 (3): 325-355.

GODINO. J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22/2.3, pp. 237-284.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2004). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).

KENDAL, M. ; STACEY, K. y PIERCE, R. (2002), L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Éditions, pp. 117-149.

LAGRANGE, J-B. (2002), Etudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques ?, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Éditions, pp. 151-185.

ORTEGA, M, y CONTRERAS, A., (2003), El objeto tecnológico MATHEMATICA en la enseñanza del Análisis, ¿es sólo un amplificador cognitivo?, *XIX Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba, pp. 1-16.

TROUCHE, L. (2002), Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un*

instrument du travail informatique: un problème didactique, La Pensée Sauvage, Éditions, pp. 243-275.

EFICACIA DIDÁCTICA DE DEFINICIONES EQUIVALENTES DE UNA NOCIÓN MATEMÁTICA

EL CASO DEL VALOR ABSOLUTO[19]

Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra
Juan D. Godino
Universidad de Granada
Eduardo Lacasta
**Universidad Pública de Navarra, España*

RESUMEN

En muchas ocasiones un objeto matemático puede ser introducido por un conjunto de definiciones equivalentes. Una cuestión fundamental consiste en determinar la eficacia didáctica de las técnicas asociadas a estas definiciones para la resolución de una clase de problemas; eficacia que se valora teniendo en cuenta las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional de los procesos de estudio abordables. La búsqueda de respuestas a esta cuestión implica, en particular, el análisis de las relaciones que se establecen entre los elementos operatorios y discursivos, junto con los objetos emergentes de los sistemas de prácticas relativos a los distintos contextos de uso. Para ejemplificar este proceso, en este artículo estudiamos la eficacia didáctica de diferentes técnicas asociadas a distintas definiciones de valor absoluto.

DIDACTIC EFFECTIVENESS OF EQUIVALENT DEFINITIONS OF A MATHEMATICAL NOTION. THE CASE OF ABSOLUTE VALUE

ABSTRACT

Very often, a mathematical object can be introduced by a set of equivalent definitions. A fundamental question is determining the didactic effectiveness of the techniques associated to these definitions to solve a problem class. This effectiveness is assessed from the epistemic, cognitive and instructional dimensions of the accessible study processes. A response to this question involves the analysis of the relationships that are established between the operative and discursive elements, linked to the emergent object

[19] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 228-244)

of the system of practices related to different use contexts. As an example, we study the didactic effectiveness of different techniques associated to various definitions of absolute value.

1. EQUIVALENCIA MATEMÁTICA *VS.* EQUIVALENCIA DIDÁCTICA DE DEFINICIONES

Una de las metas de la enseñanza de las matemáticas debería ser encauzar más tempranamente los hábitos de pensamiento cotidiano hacia el modo del pensar técnico-científico, como medio de salvar los conflictos entre la estructura (formal) de las matemáticas y el progreso cognitivo. El proceso de definición de objetos matemáticos representa "more than anything else the conflict between the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and the cognitive processes of concept acquisition" (Vinner, 1991, p.65). Este hecho justifica el gran número de investigaciones en didáctica de las matemáticas cuyo tema es la definición matemática (Linchevsky, Vinner & Karsenty, 1992; Mariotti & Fischbein, 1997; De Villiers, 1998; Winicki-Landman & Leikin, 2000; etc.). Nosotros estamos interesados en justificar que la equivalencia matemática de dos definiciones de un mismo objeto no implica la equivalencia epistémica, cognitiva o instruccional, esto es, la equivalencia didáctica.

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, una cuestión fundamental consiste en determinar la *eficacia didáctica* de las técnicas de resolución asociadas a una definición matemática; eficacia que se valora teniendo en cuenta las dimensiones *epistémica* (campo de aplicabilidad de las técnicas y objetos matemáticos involucrados), *cognitiva* (eficacia y coste en el uso de las técnicas por los individuos) e *instruccional* (cantidad de recursos materiales y de tiempo necesarios para su enseñanza). De esta forma, con la expresión *eficacia didáctica* nos referimos a la articulación de estas eficacias parciales en un proyecto educativo.

Con relación a una noción matemática es preciso: 1) determinar definiciones matemáticamente equivalentes de dicha noción; 2) describir las relaciones que se establecen entre estas definiciones; 3) construir un referente explícito para la noción definida que contemple la complejidad de objetos y significados que constituyen las definiciones equivalentes asociadas a esa noción en los diferentes contextos de uso; y 4) valorar la eficacia didáctica de las técnicas asociadas a las distintas definiciones matemáticas. Un estudio de este tipo se puede realizar para no importa qué noción matemática; sin embargo, las decisiones didácticas concretas son consustanciales a cada noción matemática. Nos proponemos en este artículo identificar definiciones matemáticamente equivalentes de la noción de valor absoluto y discutir su equivalencia o su diversidad desde un punto

de vista cognitivo e instruccional. Para ello respondemos a las siguientes cuestiones:

- ¿Existe una técnica que minimice el coste cognitivo de uso e instruccional de recursos, que maximice la eficacia de los individuos en el campo de problemas específico y que facilite la adaptación a nuevos problemas?
- ¿Es posible clasificar las técnicas por su *amplitud o generalidad* (campo de aplicabilidad), por su *implicación mutua* (una técnica puede obtenerse de manera deductiva de otra) o por su *papel dentro de las prácticas institucionales* (sociales, culturales, convencionales)?

Para responder a estas preguntas es necesario, en primera instancia, determinar la naturaleza de la noción de valor absoluto y aceptar la complejidad de objetos y significados que hacen explícitamente referencia a ella. En la sección 2 se muestra un conjunto de investigaciones cuyo objetivo es la comprensión de las dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de la noción de valor absoluto (NVA). De estas investigaciones se deduce la complejidad ontológica y semiótica de la NVA, pero ninguna de ellas aborda el problema que surge al intentar integrar los significados atribuidos a dicha noción en los diferentes contextos de uso. En la sección 4 explicitamos una estructuración de los modelos y significados asociados a la NVA y describimos su significado "global". Antes, en la sección 3, introducimos las distintas definiciones de la NVA y, apoyándonos en el cálculo de las soluciones de una ecuación lineal con valor absoluto, indicamos cómo estas definiciones condicionan las prácticas matemáticas. En la sección 5 mostramos una experimentación cuyo objetivo es analizar, desde un punto de vista cognitivo, el poder heurístico de dos de los diferentes modelos de valor absoluto indentificados. En la sección 6 resaltamos algunas implicaciones micro y macrodidácticas y, por último, en la sección 7, realizamos una breve síntesis y resaltamos algunas conclusiones teóricas.

2. NATURALEZA DE LA NOCIÓN DE VALOR ABSOLUTO

La enseñanza y el aprendizaje de la NVA son problemáticos. Prueba de ello es la cantidad y heterogeneidad de investigaciones que se han desarrollado. Gagatsis y Thomaidis (1994), después de mostrar una sucinta antropología del saber "valor absoluto", determinan los procesos adaptativos del saber en la institución escolar griega e interpretan los errores de los estudiantes en términos de *obstáculos epistemológicos* (ligados al estudio histórico) y *didácticos* (relacionados con los procesos de transposición).

Desde una perspectiva profesional, Arcidiacono (1983) justifica una instrucción de la NVA basada en el análisis gráfico en el plano cartesiano de funciones lineales a trozos y Horak (1994) establece que las calculadoras gráficas representan un instrumento más eficaz que el lápiz y papel para llevar a cabo esta enseñanza.

Por otro lado, Chiarugi, Fracassina & Furinghetti (1990) realizan un estudio de la dimensión cognitiva de diferentes grupos de estudiantes enfrentados a la resolución de problemas que involucran a la NVA. El estudio determina la necesidad de investigaciones que permitan superar los errores y falsas concepciones (*misconceptions*). Por su parte, Perrin-Glorian (1995) establece ciertas directrices para la institucionalización del saber "NVA" en los contextos aritmético y algebraico; así argumenta la función central de las decisiones didácticas del profesor en la construcción de la NVA, que deben tener en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes y deben resaltar el papel instrumental de la NVA.

Todas estas investigaciones consideran implícitamente que la naturaleza de la NVA es transparente. Desde una perspectiva ontológico y semiótica de la cognición e instrucción matemáticas (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa) es necesario teorizar la noción de significado en didáctica. Esta teorización se realiza mediante la noción de función semiótica y una ontología matemática asociada. Se parte de los elementos del discurso tecnológico (nociones, proposiciones, argumentos, etc.) y se concluye que su naturaleza es inescindible de los sistemas de prácticas y contextos de uso correspondientes.

Godino (2002) identifica el "sistema de prácticas" con el contenido que una institución asigna a un objeto matemático. La descripción del significado de referencia de un objeto se presenta como un listado de objetos clasificados en seis categorías: problemas, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentos. Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) razonan en qué forma esta descripción del sistema de prácticas es insuficiente para la descripción de los significados institucionales de referencia y, para salvar esas deficiencias, introducen las nociones teóricas de *modelo* y de *holo-significado* de una noción matemática. Estas nociones nos permitirán estructurar en un complejo coherente las distintas definiciones de la NVA y la descripción del significado de la NVA como "totalidad", extrayendo algunas conclusiones de orden macro y micro didáctico.

3. DEFINICIONES DE LA NOCIÓN DE VALOR ABSOLUTO

En esta sección introducimos algunas definiciones de la NVA asociadas a diferentes contextos de uso e indicamos someramente cómo estas definiciones, como objetos emergentes de los distintos subsistemas de prácticas, condicionan las reglas operatorias y discursivas.

En el contexto aritmético, la NVA representa una regla que "deja los números positivos invariantes y pasa los números negativos a positivos".

> "The absolute value of x, denoted by $|x|$, is defined as follows:
>
> $$|x| = x \text{ if } x > 0; \quad |x| = -x \text{ if } x < 0; \quad |0| = 0$$
>
> Thus, the absolute value of a positive number or zero is equal to the number itself. The absolute value of a negative number is the corresponding positive number, since the negative of a negative number is positive […] We see from the definition that the absolute value of a number is either a positive number or zero; that is, it is nonnegative." (Leithold, 1968, p.10).

El valor absoluto dota al conjunto de los números reales de una métrica; la distancia de un número real x al origen 0 queda definida por la relación: $d(x; 0)=|x|$.

> "Intuitively, the absolute value of *a* represents the distance between 0 and *a*, but in fact we will *define* the idea of 'distance' in terms of the 'absolute value', which in turn was defined in terms of the ordering." (Ross, 1980, p.16).

En el contexto geométrico, el valor absoluto puede ser comprendido vectorialmente como el módulo de un vector unidimensional ($|x| = |\vec{r}|$). Más aún, este hecho puede ser generalizado como una propiedad que se deriva de la naturaleza "ordenada" y "completa" de **R**.

> "An *ordered vector space* is a real vector space E equipped with an order relation satisfying the following two conditions: 1) if $u \geq v$, then $u + w \geq v + w$ for all $w \in E$; 2) if $u \geq v$, then $\alpha u \geq \alpha v$ for all $\alpha \geq 0$ […] A *vector lattice* E is an ordered vector space with the additional property that for every two vectors $u, v \in E$, the supremum $(u \vee v)$ and the infimum $u \wedge v$ exist in E […] If E is a vector lattice and $u \in E$, then we define: $u^+ = u \vee 0$, $u^- = (-u) \vee 0$, and $|u| = u \vee (-u)$. The element u^+ is called the positive part, u^- the negative part, and $|u|$ the absolute value of u." (Aliprantis & Burkinshaw, 1998, p.66–67).

De esta forma, la definición clásica de valor absoluto, como noción básica para la fundamentación del análisis matemático es reformulada en

ocasiones en términos de la función máximo: $|x| = \text{máx}\{x; -x\}$. En este mismo contexto, en muchas ocasiones, la NVA es ser introducida mediante una función a trozos en **Q** y, por extensión, en **R**.

> "For any rational number q: $|q| = \begin{cases} q & \text{si} \quad q \geq 0 \\ -q & \text{si} \quad q < 0 \end{cases}$ […] We extend the definition of 'absolute value' from **Q** to **R** […] $|x|$ equal x if $x \geq 0$, and $-x$ if $x < 0$." (Truss, 1997, pp.70–102).

Por último, es fácil demostrar que : $|x| = +\sqrt{x^2}$ (Mollin, 1998, p.47).

Las definiciones anteriores son matemáticamente equivalentes, pero su uso condiciona la actividad matemática: no involucran los mismos objetos matemáticos en la resolución de un mismo problema. Por ejemplo, sea la ecuación lineal con valor absoluto $|x - 2| = 1$, su resolución en un contexto aritmético supone un razonamiento del estilo: "el valor absoluto de un número es 1, entonces este número es 1 o –1; ¿qué número, al restarle 2, da 1?, ¿qué número, al restarle 2, da –1?". La formalización de este método puede hacerse de la siguiente forma:

$$|x-2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Sin embargo, la demostración analítica, según la definición función compuesta, se realiza de la siguiente forma:

$$|x-2| = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

A continuación, en la sección 4.1, mostraremos la complejidad onto-semiótica de la NVA, que se deduce de la diversidad de contextos de uso, de las definiciones asociadas a éstos y de las prácticas operatorias y discursivas que estas definiciones condicionan y, en la sección 4.2, apoyándonos en la noción teórica de *holo-significado* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004), organizaremos los modelos de valor absoluto, mostrando las relaciones que se establecen entre éstos.

4. COMPLEJIDAD ONTO-SEMIÓTICA DEL VALOR ABSOLUTO

4.1. ESTRUCTURACIÓN DE DEFINICIONES, MODELOS Y SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE VALOR ABSOLUTO

El matemático profesional identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos y prácticas (operatorias y discursivas); estructura que considera como "el objeto matemático". Esta estructura formal representa la referencia implícita en la resolución de tipos de problemas asociados a la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes en los distintos contextos de uso. La figura 1 muestra esquemáticamente la diversidad de objetos asociados a la NVA. Cada definición representa un objeto emergente de un sistema de prácticas en un determinado contexto de uso. Ninguna definición puede ser privilegiada *a priori*. Cada binomio "objeto emergente - sistema de prácticas" determinan un *modelo* de la NVA. El modelo es pues una forma coherente de estructurar los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas relativas a los mismos y los objetos emergentes de tales prácticas; constituyendo una red o *configuración epistémica local* (asociada a un contexto de uso específico).

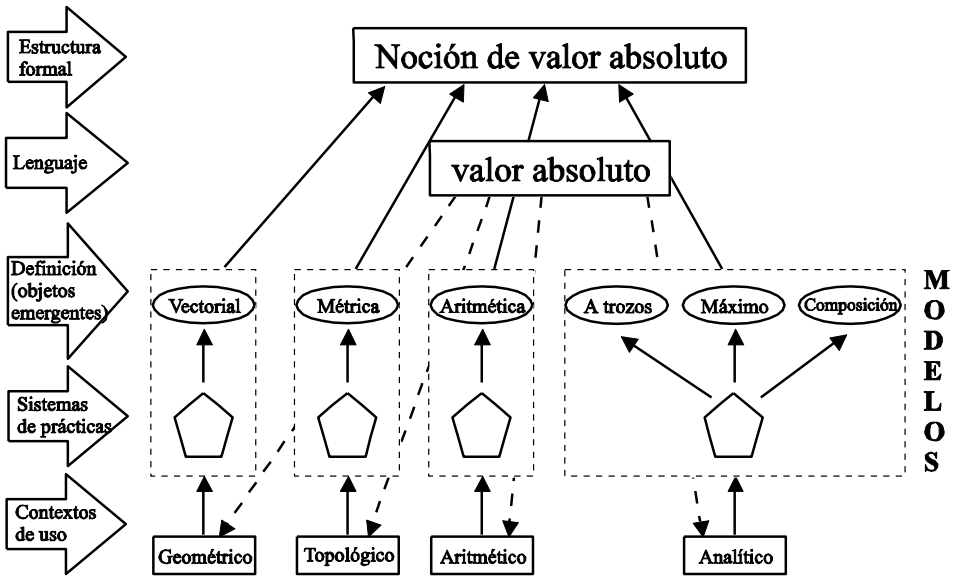


Figura 1. Estructuración de los modelos y significados asociados al valor absoluto.

4.2. HOLO-SIGNIFICADO DE LA NOCIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Desde el punto de vista estrictamente *formal y oficial* (Brown, 1998), se acepta que la definición de un objeto matemático constituye su significado. La descripción del sistema de modelos y significados asociados a una noción se obtiene por el enunciado y demostración de un teorema de caracterización: privilegio de una de definición y justificación de la equivalencia (matemática) del resto de definiciones.

Los datos empíricos aportados por Leikin & Winicki-Landman (2000) permiten afirmar que la equivalencia de definiciones matemáticas no puede

valorarse únicamente desde el punto de vista epistemológico, es necesario tener en cuenta las dimensiones *cognitiva* (¿qué estrategias de acción genera cada una de las definiciones?), *instruccional* (¿qué definición es más adecuada dentro de un proyecto determinado de enseñanza?) y *didáctica* (¿qué relación se establece entre los significados personal aprendido e institucional pretendido?). El *holo-significado* (Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2004) resulta de la coordinación del significado atribuido a los modelos asociados a la noción de igualdad y a las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen (figura 2).

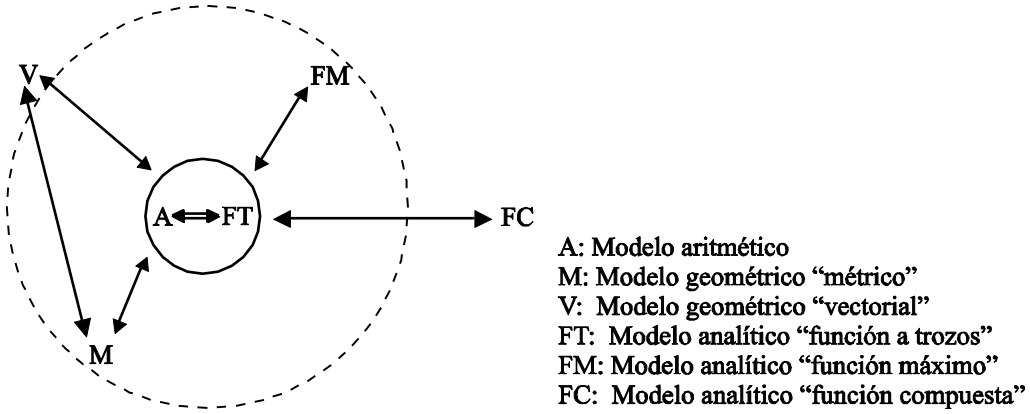


Figura 2. Representación del holo-significado de la noción de valor absoluto.

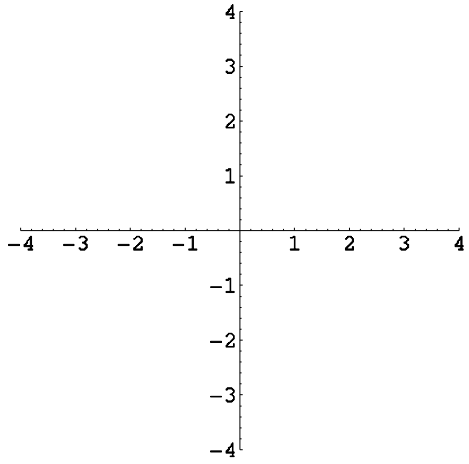
Las flechas en la figura 2 representan relaciones entre los diferentes modelos y la distancia obedece a la interacción entre los mismos. Por ejemplo, la relación que se establece entre los modelos analíticos "función a trozos" y "función máximo" puede ser comprendida como las acciones para la obtención de la gráfica valor absoluto, los vínculos con otros problemas "afines", etc.; la distancia entre la "función a trozos" y "función compuesta ($f(x) = +\sqrt{x^2}$)" representa la dificultad de reconocimiento de la noción valor absoluto dada por la función compuesta *f* y por la ausencia de una transposición didáctica que permita gestionar la equivalencia de ambas definiciones.

5. EFICACIA COGNITIVA DE LOS MODELOS ARITMÉTICO Y "FUNCIÓN A TROZOS" DEL VALOR ABSOLUTO

Como hemos comentado anteriormente, desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, una cuestión fundamental consiste en determinar la *eficacia didáctica* de un proceso matemático de resolución de problemas. En esta sección nos planteamos analizar la dimensión *cognitiva*

(eficacia y coste en el uso de las técnicas por los individuos) de las técnicas de resolución asociadas a las definiciones "aritmética" y "función a trozos". Para ello nos apoyamos en un estudio experimental de un grupo de 55 estudiantes (futuros profesores) resolviendo un conjunto de ejercicios elementales que precisan de la NVA (tabla 1).

1. Complete, siempre que se pueda, las siguientes igualdades:
   $|-2| =$ $\quad |2| =$ $\quad |0| =$ $\quad |\sqrt{-2}| =$
   $|\sqrt{2}| =$ $\quad |-\sqrt{2}| =$ $\quad |2-\sqrt{2}| =$ $\quad |\sqrt{2}-2| =$
2. Indique, siempre que se pueda, los números que habría que poner en sustitución de los puntos suspensivos para que la expresiones siguientes sean correctas:
   $|\ldots - 2| = 1$; $\quad |\ldots + 2| = 1$; $\quad |\ldots - 2| = 0$; $\quad |(\ldots)^2 - 4| = 0$;
   $|(\ldots)^2 + 4| = 0$; $\quad |(\ldots)^2 - 1| = 1$; $\quad |(\ldots)^2 - 3| = 1$
3. Represente gráficamente, en el plano cartesiano que se muestra, la función $f(x) = |x+1|$.



4. Sea a es un número real. Complete, siempre que se pueda, las siguientes igualdades:
   $|-a| =$ $\quad |a| =$ $\quad |a-2| =$
   $|-a-2| =$ $\quad |2-a| =$ $\quad |a+2| =$

Tabla 1. Cuestionario.

5.1. MODELO PREDOMINANTE Y EFICACIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Genéricamente, afirmamos que una persona comprende la NVA si es capaz de discriminar sus diferentes modelos asociados, de estructurar dichos modelos en un todo complejo y coherente y de afrontar las necesidades operativas y discursivas con relación a la NVA en los diferentes contextos de uso.

Formalmente, una definición es reducible a los axiomas; sin embargo, en un proceso de estudio, la definición representa una formalización de una noción *pertinente* (permite una interpretación consistente de un problema) u *operativa* (condiciona una acción útil). El único medio de discriminar el significado atribuido por un individuo a un objeto es por intermedio de una

situación o un conjunto de problemas que puedan ser resueltos mediante el uso de distintos modelos capaces de generar acciones pertinentes y útiles, que, sin embargo, obedezcan a leyes "económicas" distintas.

La experimentación realizada nos ha permitido discriminar a los estudiantes según el modelo de valor absoluto asociado a las prácticas operatorias y discursivas con relación a los problemas propuestos (que determina un determinado nivel de eficacia). Para poder clasificar a los estudiantes, es necesario poner en relación una colección de tareas y determinar (con un nivel de aproximación) las tareas que permiten asegurar la realización de otras tareas.

5.2. ANÁLISIS DE UN CUESTIONARIO

El objetivo principal de la experimentación es apoyar empíricamente la tesis según la cual los modelos "aritmético" y "función a trozos" asociados a la NVA están extremadamente próximos (ver sección 4.2). El análisis de los significados institucionales determina criterios de selección de las variables para el estudio *impli-cativo* y *jerárquico* (Gras, 1996). En la tabla 1 se muestra el sistema de variables.

Variable	Descripción	**Nº de respuestas**
v1	$\lvert \pm\sqrt{2} \rvert = \sqrt{2}$ (sin aproximación numérica)	47
v2	$\lvert \pm\sqrt{2} \rvert \approx 1{,}41$ (con aproximación numérica)	20
v3	$\lvert \sqrt{-2} \rvert =$ no $\exists$ (no tiene sentido en **R**)	16
v4	$\lvert 2-\sqrt{2} \rvert \approx 0{,}59$ (con aproximación numérica)	30
v5	$\lvert 2-\sqrt{2} \rvert = 2-\sqrt{2}$ (sin aproximación numérica)	17
v6	$\lvert \sqrt{2}-2 \rvert = 2-\sqrt{2} \approx 0{,}59$ (sin o con aproximación numérica)	30
v7	Dos soluciones en $\lvert \ldots -2 \rvert = 1$ o en $\lvert \ldots +2 \rvert = 1$	21
v8	Determinación de las dos soluciones de $\lvert (\ldots)^2 - 4 \rvert = 0$	26
v9	$\lvert (\ldots)^2 + 4 \rvert = 0$ no tiene solución	24
v10	Solución de $\lvert (\ldots)^2 - 1 \rvert = 1$: 0	29
v11	Solución de $\lvert (\ldots)^2 - 1 \rvert = 1$: 0 y $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ o $\pm\sqrt{2}$	9
v12	Al menos dos soluciones para $\lvert (\ldots)^2 - 3 \rvert = 1$	25
v13	Construyen el gráfico y dan la fórmula correctamente	28
v14	Construyen el gráfico y dan la fórmula incorrectamente	15
v15	Al menos 4 apartados correctos del ejercicio 4	14
v16	Promedio en el curso ≥ 14 (sobre 20)	17

Tabla 1. Conjunto reducido de variables reducido.

Análisis implicativo

El objetivo es saber si, en la muestra, el hecho de haber respondido correctamente una pregunta implica estadísticamente la respuesta a otra

pregunta. En particular, es admisible esperar que todo individuo que es capaz de realizar una tarea más compleja que otra (y que la generaliza en cierta forma), entonces también será capaz de realizar la segunda. Sin embargo, no siempre esto es así; en muchas circunstancias es necesario contrastar ciertas hipótesis de jerarquía de realización de tareas. En la figura 3 se muestra un gráfico con niveles de implicación 99%, 95%, 90% y 80%.

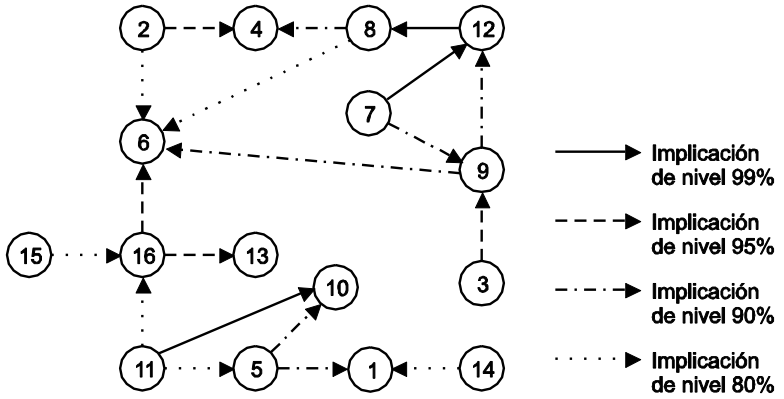


Figura 3. Implicaciones de nivel 99%, 95%, 90% y 80%.

A continuación, comentamos algunas de estas implicaciones:

- *Implicación al* 99%. Las implicaciones que se observan están en relación con la resolución de ecuaciones. Un grupo de estudiantes es estable en la resolución de ecuaciones: realizan de manera rutinaria la búsqueda de raíces de una ecuación (lineal y cuadrática) con valor absoluto.
- *Implicación al* 95%.
  - v2 $\rightarrow$ v4: Mayoritariamente, los estudiantes que han dado una aproximación para $|\sqrt{2}|$, también establecen que $|2-\sqrt{2}| \approx 0{,}59$. Una posible interpretación puede darse en términos de la dicotomía concreto-abstracto: el modelo aritmético de valor absoluto es comprendido como una regla que opera sobre los "números", esto es, números "en escritura decimal".
  - v3 $\rightarrow$ v9: El contrato didáctico asumido por la gran mayoría de los estudiantes establece la existencia de solución para todo problema; su función es determinarla (la sentencia "siempre que se pueda" es obviada por estos estudiantes). De esta manera, la relación "v3 $\rightarrow$ v9" distingue un grupo de estudiantes que separa acción y significado.
  - v16 $\rightarrow$ v6 y v16 $\rightarrow$ v13. Los estudiantes que tienen un comportamiento "bueno" en el curso operan en su mayoría

"simbólicamente" el valor absoluto ($|\sqrt{2}-2|=2-\sqrt{2}$) y comprenden analítica y gráficamente la función $f(x) = |x + 1|$.

Análisis jerárquico

En los anteriores párrafos nos hemos ocupado en determinar y analizar las relaciones de las variables 2 a 2. Una cuestión más amplia que puede plantearse es si el haber respondido correctamente a un conjunto de preguntas conlleva (de manera preferente) la respuesta correcta en otro conjunto de preguntas. El análisis jerárquico, definido a partir de las cohesiones entre clases, permite describir de manera más "dinámica" las relaciones implicativas entre clases de preguntas y, por lo tanto, constituye una respuesta a la pregunta formulada. A partir de los datos experimentales se establece que los clases más significativas son: v7 $\rightarrow$ v12 $\rightarrow$ v8 $\rightarrow$ v6 y v15 $\rightarrow$ v16 $\rightarrow$ v13.

¿Qué individuos contribuyen a la formación de cada una de las clases? El análisis de la tabla general de contribución alumno por alumno revela que los estudiantes que más contribuyen a ambas clases son aquellos que realizan las tareas de forma simbólica y que son capaces de aplicar de forma sistemática y eficaz el modelo función a trozos.

Breve discusión

El cuestionario ha puesto en relación dos modelos de la NVA: el modelo aritmético y el modelo analítico "función a trozos". La emergencia de uno u otro modelo condiciona la realización de las tareas propuestas en el cuestionario (tabla 1), al menos para la muestra considerada. De hecho, a pesar de que a priori (matemáticamente) los tres primeros ejercicios pueden ser resueltos "por aplicación sistemática de la regla asociada al modelo aritmético", lo cierto es que los estudiantes que únicamente cuentan con este modelo encuentran serios problemas en la resolución de las tareas. Limitándonos a los tres primeros ejercicios, puede afirmarse que se prefiere el modelo analítico por su mayor poder heurístico, a pesar de que "en principio" ambos modelos permiten la resolución "completa" de los ejercicios.

Los estudiantes con el modelo "función a trozos" son capaces de utilizar simbólicamente el valor absoluto y de sistematizar el uso del modelo aritmético. Sin embargo, los estudiantes que disponen únicamente del modelo aritmético asocian la NVA con la acción algorítmica:

$$[a \in \mathbf{R} \rightarrow \text{expresión decimal de } a \rightarrow \text{signo}(a)] \rightarrow |a|$$

6. IMPLICACIONES MACRO Y MICRO DIDÁCTICAS

Las dificultades cognitivas (Chiarugi, Fracassina & Furinghetti, 1990) y la incapacidad de la institución escolar de confeccionar un currículo pertinente para la introducción y desarrollo de la NVA (Perrin-Glorian, 1995; Gagatsis y Thomaidis, 1994) ha conducido a una enseñanza meramente técnica fundamentada en el modelo aritmético (como regla que "quita el signo menos"). El modelo aritmético de la NVA constituye un obstáculo didáctico que restringe, en muchos casos, el significado personal a un mero juego de símbolos. Este obstáculo se manifiesta de distintas formas; por ejemplo: $|a| = a$ y $|-a| = a$, para todo $a \in \mathbf{R}$; $|\sqrt{2} - 2| = \sqrt{2} + 2$, etc.

Implicaciones macrodidácticas

La introducción del valor absoluto en el contexto aritmético representa una decisión desafortunada en las instituciones escolares actuales: supone la implementación en el currículo de la noción "valor absoluto" por razones meramente culturales. Sin embargo, la estructura curricular no está preparada actualmente para abordar con garantías el estudio de la noción en un contexto exclusivamente aritmético. Sería conveniente la expulsión "temporal" de la noción. Temporal, bien hasta que se confeccionara una transposición didáctica pertinente, bien hasta que los estudiantes iniciaran el estudio de la teoría de funciones, central con relación a la noción valor absoluto (Arcidiacono, 1983; Horak, 1994).

Esta decisión didáctica "drástica" supone, por un lado, la aceptación por parte de la institución escolar de la existencia de una transposición didáctica no pertinente con relación a la noción de valor absoluto y, por otro lado, su incapacidad para producir una *de-transposición* (Antibi y Brousseau, 2000) *viable* (costo de recursos materiales y temporales admisible), *reproducible* (estabilidad institucional con relación a la disponibilidad de recursos) y *fiable* (los significados personales aprendidos son representativos de los significados institucionales pretendidos).

Implicaciones microdidácticas

Desde el punto de vista del aprendizaje, los modelos asociados a una noción matemática están jerarquizados. La estructuración de los modelos se realiza en términos de "dominio" de éstos en el currículo. Es necesario que el modelo dominante participe de una forma clara y específica en el primer encuentro con la noción. Para la NVA, el modelo "función a trozos", utilizando la representación gráfica de la función en el plano cartesiano y utilizando las prácticas discursivas propias de la teoría de funciones.

De esta manera, es necesario establecer una ingeniería didáctica para el desarrollo del objeto "valor absoluto" (entendido como sistema). Esta

ingeniería tendrá que articular el análisis epistemológico con las restricciones metodológicas y de tiempo dentro de cada institución concreta. Con relación a la NVA, el objetivo consiste en establecer un sistema de prácticas que posibilite la interacción explícita del modelo aritmético con el resto de modelos y, muy en particular, con el modelo analítico.

7. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La noción de holo-significado de una noción matemática posibilita la descripción de ésta como una configuración epistémica que toma en consideración tanto los elementos praxémicos como discursivos de la actividad matemática. Asimismo, posibilita un instrumento de control y valoración de los sistemas de prácticas implementados y una respuesta observable (y, en cierta forma, cuantificable) para el análisis de los significados personales. De forma más precisa:

- La noción de holo-significado (red de modelos) representa la estructuración del conocimiento objetivado y puede ser utilizada para determinar el grado de representatividad de un sistema de prácticas implementado con relación al significado institucional pretendido.
- Las nociones de modelo y holo-significado proporcionan una respuesta a las preguntas: ¿qué es una noción matemática? ¿qué es conocer dicha noción?; en particular, ¿qué es la NVA? ¿qué quiere decir conocer la NVA?

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de los proyectos: Resolución Nº 1.109/2003 de 13-octubre de la UPNA y MCYT-FEDER BSO2002-02452.

REFERENCIAS

Aliprantis C. D., Burkinshaw O. (1999). *Principles of Real Analysis*, 3rd edition. San Diego, CA: Academic Press.

Antibi, A. y Brousseau, G. (2000). La dé-transposition de connaissances scolaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1): 7–40.

Arcidiacono, M. J. (1983). A visual approach to absolute value. *The Mathematics Teacher*, 76(3): 197–201.

Brown, J. R. (1998). What is a definition? *Foundations of Science*, 1: 111–132.

Chiarugi, I., Fracassina, G. y Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behing the notion of absolut value. *Proceedings of PME* 14 (México), Vol. 3: 231–238.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of PME* 22 (Stellenbosch, South Africa), Vol. 2: 248–255.

Gagatsis, A. y Thomaidis, I. (1994). Un étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (eds.), *Vingt ans de didactique de mathematiques en France*. (pp. 343–348). Grenoble, FRA: La Pensée Sauvage.

Godino, J. D., Batanero, M. C. y Roa, R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*.

Godino, J. D (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3): 237–284.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1998). Clarifyng the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp.177–195). Dordrecht: Kluwer.

Leithold, L. (1968). *The calculus with analytic geometry*. New York: Harper & Row.

Horak, V.M. (1994). Investigating absolute-value equations with the graphing calculator. *The Mathematics Teacher*, 87(1): 9–11.

Leikin, R. y Winicki-Landman, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 2. *For the Learning of Mathematics*, 20(2): 24–29.

Linchevsky, L., Vinner, S. y Karsenty, R. (1992 July). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. *Proceedings of PME* 16 (Durham, NH), Vol. 2: 48–55.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34: 219–248.

Mollin, R. A. (1998). *Fundamental number theory with applications*. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Perrin-Glorian, M-J. (1995). The absolute value in secondary school. A case study of "Institutionalisation" process. *Proceedings of PME* 19 (Recife, Brazil), Vol. 2: 74–81.

Ross K. A. (1980), *Elementary analysis: the theory of calculus*. New York: Springer-Verlag, 2000.

Truss, J. K. (1997). *Foundations of mathematical analysis*. Oxford: Oxford University Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Avanced mathematical thincking* (pp.65–81). Dordrecht, HOL: Kluwer.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2004). Configuraciones asociadas a la noción de igualdad de números reales. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada. [URL: Http://www.ugr.es/local/jgodino/funciones-semioticas]

Winicki-Landman, G. y Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1): 17–21.

EL SIGNIFICADO DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE: EVOLUCIÓN HISTÓRICA A PARTIR DE SUS CAMPOS DE PROBLEMAS[1]

Hugo Alvarado
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile
Carmen Batanero
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo se analiza la evolución histórica del teorema central del límite, desde la perspectiva de la TFS con el fin de identificar los campos de problemas que lo originaron. La finalidad es mostrar la evolución de sus diferentes significados, iniciar la reconstrucción de su significado global y comprender las dificultades encontradas, que pueden posteriormente reproducirse en el aprendizaje de los estudiantes.

MEANING OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM: HISTORIC EVOLUTION FROM ITS PROBLEMS FIELDS

ABSTRACT

We analyse the historic evolution of central limit theorem, from the SFT perspective, with the aim of identifying the problems fields in its origin. We show the evolution of its different meanings, start reconstructing its global meaning with the aim of understanding the difficulties of this process, which might be reproduced in the students' learning.

1. INTRODUCCIÓN

En ocasiones, los profesores asumimos sin cuestionarnos los enunciados matemáticos, de manera que llegan a los estudiantes como un producto acabado. En estos casos, nuestras exposiciones en el aula no muestran los conflictos del proceso histórico creativo ni la forma en que han llegado a construirse los conceptos y proposiciones importantes.

En este trabajo iniciamos un estudio histórico sobre el teorema central del límite (TCL), desde la perspectiva del marco teórico de la TFS

[1] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 245-265)

(Godino, 2003), en donde se consideran los objetos matemáticos como emergentes de la actividad de resolución de campos de problemas. Es parte de un trabajo más amplio que pensamos completar y está orientado a diseñar y evaluar procesos de estudio del TCL para estudiantes de ingeniería. Se inscribe en una línea de investigación llevada a cabo en la Universidad de Granada sobre significado y comprensión de conceptos estadísticos en entornos tecnológicos el que ya se han realizado otros trabajos, también basados en el mismo marco teórico (por ejemplo, Tauber, 2001).

En el marco teórico considerado, las matemáticas se asumen como una actividad humana implicada en la solución de cierta clase de situaciones problemáticas de la cual emergen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos y se pretende elaborar un modelo de los procesos de comprensión de las matemáticas que tenga en cuenta los factores institucionales y socioculturales implicados en los mismos, además de los psicológicos (Godino y Batanero, 1994; 1998). Dicho marco nos parece especialmente adecuado, en cuanto permite resaltar el significado específico de los conceptos estadísticos inducido por la tecnología, los conflictos semióticos potenciales y los criterios de idoneidad de los procesos de estudio diseñados.

Partiremos principalmente de los trabajos de Fisher (2000), Mether (2003), Xiuyu (2003), que completamos con otros trabajos sobre historia de la estadística y reanalizamos desde el marco teórico. Nos centramos, precisamente en la identificación de los campos de problemas asociados al TCL y de su evolución histórica, desde su primera forma simple cuando la teoría de la probabilidad todavía no había sido considerada parte de la matemática hasta llegar a la etapa actual, resaltando las prácticas matemáticas que llevaron a la solución de los mismos, así como la contribución por diferentes matemáticos.

La finalidad principal es iniciar la reconstrucción del significado global del TCL, que sirva como base para el diseño de procesos de estudio e instrumentos de evaluación. Asimismo, el conocimiento de la historia del TCL puede ser un recurso para los profesores, contribuyendo a enriquecer su actividad docente en el aula, favoreciendo la comprensión de los diversos campos de problemas asociados al teorema y mostrando algunas dificultades que pueden también estar presentes en nuestros estudiantes.

2. EL TCL Y SU IMPORTANCIA EN ESTADÍSTICA

El Teorema Central del Límite es fundamental en la enseñanza universitaria, especialmente en las carreras de ingenierías y ciencias, donde es un instrumento que se utiliza a diario en situaciones cotidianas y profesionales. En la actualidad conocemos como Teorema (o teoremas) central del límite a una serie de resultados acerca del comportamiento de la distribución de la suma (o media) de variables aleatorias, que en forma simplificada establece: "*la suma de un gran número de variables aleatorias independientes tiende a seguir de manera asintótica una distribución normal, siempre que determinadas condiciones queden satisfechas*" (Wisniewski yVelasco, 2001, pp. 211).

Pero en el marco de la teoría de las funciones semióticas (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino, 2003), el significado de un objeto matemático no se considera único, ni estable en el tiempo y se diferencia entre el *significado institucional* de un objeto matemático, que es compartido dentro de una institución (por ejemplo educativa o de estadísticos profesionales) y el *significado personal* adquirido por cada miembro de la institución. Los autores presentan el objeto matemático como un emergente de un sistema de prácticas ligadas a la evolución de *campos de problemas* específicos ligados al objeto. Las prácticas sociales dependerán de la institución (por tanto del momento histórico). Tanto los campos de problemas como las prácticas son *elementos del significado* (Godino, 2002) de un objeto matemático y contribuyen a caracterizarlo, además de otros elementos, como los procedimientos ligados a la resolución de problemas, el lenguaje, conceptos y propiedades y argumentos.

La mayor parte de aplicaciones actuales de la estadística en la ciencia y la ingeniería, se basan en obtención de conclusiones sobre una población, a partir de los datos disponibles de una muestra (inferencia estadística). La comprensión del TCL, es fundamental en los procedimientos inferenciales de estimación puntual de parámetros, estimación por intervalos de confianza y prueba de hipótesis, cuando no se conoce la distribución exacta del estadístico en el muestreo, ya que permite determinar las *distribuciones asintóticas* de la media y otros parámetros.

Mediante el TCL podemos también obtener distribuciones aproximadas de otras distribuciones clásicas, tales como la Binomial, Poisson, Chi-Cuadrado, mediante la consideración de la *suma de variables aleatorias*, ya que el teorema se cumple, independientemente de la distribución de partida de la población. Esto explica también que muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta

aplicación y que se hayan desarrollado muchos métodos basados en dicha distribución.

Finalmente, desde el punto de vista didáctico el teorema reúne *elementos diversos* cuya comprensión debe adquirir el estudiante antes de abordarlo, tales como: variable aleatoria, distribución normal, muestra aleatoria, estadístico, distribuciones muestrales, lo que hace rico y complejo su estudio.

3. DESARROLLO HISTÓRICO

Desde el punto de vista histórico, el TCL es uno de los resultados más notables de la teoría estadística, debido al esfuerzo sostenido de varios matemáticos destacados, que fue establecido por primera vez en 1738 por Abraham De Moivre, bajo condiciones muy restringidas. A principios del siglo XIX, Laplace lo formuló de manera más general; pero hasta 1901 no se pudo establecer por Liapounov en condiciones generales ni proporcionar una demostración rigurosa, empleando herramientas matemáticas sofisticadas.

En lo que sigue analizamos este desarrollo. Las notaciones que usamos en adelante son las siguientes:

$X_1, X_2, \ldots$: variables aleatorias (v.a.);

v. a. i.i.d. : v. a. independientes e idénticamente distribuidas;

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: suma de n variables aleatorias;

$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$: suma de *n* varianzas, donde X_i tiene varianza $\sigma_i^2 < \infty$;

$\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right)$: función característica de *X*;

$X \approx B(n, p)$: la v.a. *X* tiene distribución binomial de parámetros *n* y *p*;

$N(\mu, \sigma)$: distribución normal de media μ y desviación típica σ;

$E(X_i)$: la esperanza o media de la v. a. X_i;

3.1. Ideas precursoras

El origen del TCL surge de la necesidad de encontrar fórmulas de cálculo para la distribución Binomial y otras distribuciones discretas, en las que intervienen los términos factoriales. Un problema es que, al aumentar el valor de *n* estos términos crecen muy rápidamente, por lo que el cálculo de las probabilidades de los valores de la variable en las distribuciones exactas es demasiado laborioso, incluso hoy día. Mucho antes de la aparición de los

ordenadores, este problema llevó a distintos matemáticos a tratar de encontrar valores aproximados de estas probabilidades para valores de *n* grandes y a estudiar las condiciones en que estas aproximaciones podrían utilizarse con un error acotado. Estos estudios inician el interés hacia los teoremas de límite y dan origen al primer campo de problemas relacionados con el mismo:

CP1: ¿En qué condiciones y mediante qué funciones o distribuciones de probabilidad pueden aproximarse otras distribuciones, cuando aumentamos progresivamente el valor de ciertos parámetros de las mismas, y, en particular, tamaño de una muestra?

Un problema particular dentro de este campo sería la búsqueda de una aproximación de la distribución binomial $B(n,p)$ para valores de *n* grandes. Según Xiuyu (2003), Abraham De Moivre (1667-1754) publicó comentarios sobre este tópico en 1730 en su "Miscellanea Analytica" y publica la solución en su "Doctrine of Chances" (1733), donde mostró en notación moderna, el siguiente resultado:

Sean $X \approx B(n,p)$, $P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, *entonces, para valores grandes de n, X sigue una distribución aproximadamente normal* $N(\mu,\sigma)$ *de media* $\mu = n\,p$ *y desviación típica* $\sigma = \sqrt{npq}$ *; es decir la variable* $Z = \dfrac{x-np}{\sqrt{npq}}$ *sigue una distribución normal N (0,1).*

De Moivre investigó los límites de la distribución binomial cuando el número de ensayos aumenta, encontrando una relación con la función e^{-X^2}, pero no lo relaciona con la distribución normal. Intentó determinar, para valores grandes del número de ensayos *n*, la probabilidad de ocurrencia del valor central $\frac{n}{2}$ (n es el total de ensayos), aproximandola a la expresión $\frac{2}{(K\sqrt{n})} \cdot \frac{1}{2n}$. James Stirling descubrió que *K* es igual a $\sqrt{2\pi}$.

3.2. Suma de variables aleatorias discretas identicamente distribuidas con media y varianzas finitas

Puesto que la distribución binomial *B (n,p)* puede considerarse como la suma de variables aleatorias idénticamente distribuidas *B (1, p)* o variables de Bernoulli, la demostración que la distribución binomial se aproximaba mediante la distribución normal es un caso particular de lo que sería posteriormente el teorema central del limite. La suma de variables aleatorias independientes fue estudiada para diferentes distribuciones

particulares de errores desde 1776, y daría lugar a un segundo campo de problemas:

CP2: Encontrar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas (o de la media de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas).

Un primer caso de este problema sería aquél en que las variables fueran uniformes discretas (CP2.1). El trabajo probabilístico de Laplace sobre la suma de variables aleatorias jugó un rol importante en lo que sería posteriormente el TCL. En un artículo publicado en 1776, estuvo trabajando en calcular distribuciones de probabilidad de la suma de ángulos de inclinación de meteoros. Afrontó el problema de la desviación entre la media aritmética de los datos (obtenido con errores observacionales) y los valores teóricos, suponiendo que todos estos ángulos distribuidos aleatoriamente siguen una distribución rectangular entre 0º y 90º. Puesto que la distribución de la media es equivalente a la de la suma (excepto un factor constante, que es el valor *n* por el que se divide), el problema se centró en hallar la distribución de la suma de los datos, todos los cuales tienen la misma distribución y son independientes. Debido a la considerable magnitud de dichas desviaciones, no fue capaz de representar un cálculo exacto y así necesitó de una aproximación (Fisher, 2000). Fue en el proceso de encontrarla, que Laplace eventualmente vino a formular la primera versión del TCL.

La distribución de la media aritmética había sido estudiada por muchas distribuciones de rango finito, por ejemplo, para una variable aleatoria discreta uniformemente distribuida entre los enteros *–a* y *a*, con resultados de fórmulas complicadas (véase Xiuyu, 2003, pág. 5). Laplace logró una aproximación más simple para $P(S_n = 0)$ en 1785, usando la función característica para calcularla (S_n es la suma de los *n* posibles errores) y llegando a la siguiente aproximación:

$$P(S_n = 0) \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi n a(a+1)}}$$

Laplace generalizó en el año 1809, el trabajo de De Moivre referido a la distribución binomial a la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas con media y varianza finita (CP2.2). Podemos ver en Feller (1975, pp. 191) una extensión de la aproximación a la binomial general con $p \neq 1/2$; en la cual el procedimiento de cálculo es más complicado. En 1810, publicó una memoria, donde estableció y probó más formalmente la siguiente versión del TCL:

Sea X una variable aleatoria valorada entera que toma valores enteros $\{-a,...,0,...a\}$ *con probabilidad* $P(X=x)=\left(\frac{x}{2a}\right)$, *entonces para una muestra n grande, la suma* $S_n=\sum_i^n X_i$ *está distribuida aproximadamente en forma normal* $N(\mu,\sigma)$ de media $n\mu$ y desviación típica $\sqrt{n}\,\sigma$ siendo μ,σ *la media y desviación típica de la distribución de partida.*

Laplace dio una demostración "rigurosa" para el caso *discreto* del TCL usando la función característica $\varphi(t)=E\left(e^{itX}\right)$ que desarrolla en serie de potencias hasta el segundo término e invierte para hallar a qué distribución corresponde (técnica de la probabilidad inversa). La idea principal de su demostración puede encontrarse en Fisher (2000). Laplace intentó argumentar dos generalizaciones, no logrando demostraciones rigurosas:

- Debido a que la distribución límite es independiente de *a* (sólo depende de *a* a través de la media y la varianza), el resultado es válido también para una *distribución discreta con rango infinito*, en el caso de que existan los momentos finitos (Podemos considerar este otro caso particular del campo de problemas CP2.3).
- Los resultados también se cumplen para *variables aleatorias con distribución continua y acotada*. Consideraremos éste un nuevo campo de problemas (CP4) ya que se introducen nuevos conceptos como el de variable continua, función de densidad, etc. y se utilizan nuevas herramientas, tal como la integral.

Gauss derivó en 1809 la función de densidad normal $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ en su trabajo "Teoría motus corporum celestium". Su descubrimiento estuvo abierto a muchas críticas, sin embargo tuvo un impacto grande en Laplace. Stigler (1986) sugiere que no hay indicios que Laplace haya pensado en que esta función pudiese representar una función de densidad para una distribución de probabilidad, sino que encontró el trabajo de Gauss de 1810 y se basó en el mismo.

3.3. Suma de variables no idénticamente distribuidas y variables continuas

Contribución de Poisson

De todos los que aportaron al TCL en el siglo XIX, la contribución más decisiva fue la de Siméon Denis Poisson, quien publicó dos artículos

(1824 y 1829) donde discutió el TCL. La idea de Poisson fue que todos los procedimientos en el mundo físico están gobernados por leyes matemáticas claras. En este espíritu, intentó suministrar un análisis matemático más exacto al teorema de Laplace. Las contribuciones de Poisson al TCL fue doble (Fisher, 2000):

- Mejoró y generalizó la demostración de Laplace. Comienza estableciendo una demostración del TCL para variables independientes distribuidas idénticamente; primero para una suma de éstas y luego para una combinación lineal de ellas. Luego generalizó su demostración a la *suma de variables aleatorias con distribuciones diferentes* (CP3). En esta generalización, la demostración considera las variables continuas, que da origen a otro campo de problemas (CP4).
- Discutió la validez del TCL, principalmente dando algunos contraejemplos, en el TCL no se cumple para la distribución de Cauchy. De este modo inicia un nuevo campo de problemas, esta vez estrictamente matemático que consistirá en *encontrar condiciones suficientes y necesarias para su validez* (CP6).

En 1824, Poisson da una demostración más rigurosa para una *variable continua* (de este modo sembró la semilla para el concepto de variables aleatorias). Los resultados generales de la última parte del artículo pueden ser resumidos de la siguiente forma (Mether, 2003):

Sean $X_1,...,X_n$ *variables aleatorias independientes con funciones de densidad que desaparecen más allá del intervalo fijo [a , b]. Si la función característica está acotada para valores entre 0 y 1, entonces* $X_1+...+X_n$ *se distribuye aproximadamente como una normal* $N(\mu,\sigma)$*, siendo* $\mu=\sum E(X_i)$ *y* $\sigma^2=\sum E(X_i)$*. Esta aproximación es mejor cuando n es grande y los valores del intervalo donde se calcula la aproximación se aproximan a la media (Fisher, 2000).*

Parece que el propósito principal del TCL para Poisson fue ser una herramienta en el cálculo de probabilidades clásicas, más que ser un teorema matemático en sí mismo. Por lo tanto, Poisson no formuló explícitamente alguna condición para el TCL. Parece claro desde su demostración y ejemplos, que él asumió que las varianzas de las componentes de la suma están acotadas para que la varianza de la suma sea de orden *n*. Aunque no indica explícitamente esta idea, sin embargo, discutió unos pocos contraejemplos donde el TCL no se cumple. Uno de

estos ejemplos es la llamada variable distribuida- Cauchy donde la densidad de probabilidad toma la siguiente forma:

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, que no puede aproximarse mediante una distribución normal.

Contribución de Dirichlet y Bessel

Dirichlet y Bessel siguieron principalmente los pasos de Laplace y Poisson, pero introdujeron el llamado "factor de discontinuidad" en la demostración, que les permitió establecer el resultado de Poisson para valores arbitrarios de *n*. Ellos siguieron caminos diferentes para lograr la demostración, pero la regla es la misma. Bessel además hizo hincapié en que Poisson usó el mismo factor de discontinuidad, aunque en una forma ligeramente diferente, cuando estableció la fórmula para *n=1*.

CP5: Encontrar estimaciones para el error cometido en las aproximaciones de las sumas de variables aleatorias mediante la distribución normal

Dirichlet fue el primero en intentar estimar el error de la aproximación, aunque no fue muy afortunado y su técnica fue diferente de la moderna. Dirichlet antes había estimado los errores para otras aproximaciones no probabilísticas, y mostró que estas mismas técnicas pueden ser aplicadas para la teoría de probabilidad tan bien como lo habían sido para la matemática pura.

Contribución de Cauchy

Cauchy fue uno de los primeros matemáticos que consideró seriamente la teoría de probabilidad como matemática pura. Su demostración del TCL sigue una línea diferente comparada con las demostraciones previas. Cauchy en su demostración usó la función característica para variables independientes e idénticamente distribuidas $X_1, X_2, ..., X_n$ con función de densidad simétrica y de rango finito. Siguió la línea de la demostración de Poisson pero consideró la distribución de la función $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ aproximada asintóticamente a la distribución normal de media cero y varianza $\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i$, bajo la condición que la función lineal es el mejor estimador lineal insesgado de un parámetro, es decir, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Primero estableció una cota superior para la diferencia entre el valor exacto y la aproximación y luego especificó condiciones para esta cota cuando tiende a cero (Hald, 1998).

3.4. Distribuciones con rango infinito

Con la demostración de Cauchy finalizó el llamado primer período (1810-1853) del TCL. La demostración presentada en este período fue insatisfactoria en tres aspectos (Hald, 1998):

- El teorema sólo fue probado para distribuciones de rango finito.
- No se explicitaron las condiciones, en términos de los momentos, bajo el cual el teorema se cumple.
- La razón de convergencia para el teorema no fue estudiada.

Estos problemas fueron eventualmente resueltos por matemáticos rusos, entre 1870 y 1910, usando dos soluciones: el "método de los momentos (Chebyshev y Markov) y la función característica (Liapounov). Nos centraremos en los probabilistas Chebyshev, Markov y Liapounov, reconocidos en el grupo de la escuela de San Petersburgo, aunque otros matemáticos rusos como Nekrosov y Sleshinsky se implicaron en el trabajo con el mismo problema (Seneta, 1984).

Contribución de Chebyshev y Markov

El artículo de Chebyshev en 1887, usualmente es considerado el primer intento (no conseguido) de demostración rigurosa del TCL. En él estableció lo siguiente (Seneta, 1984):

Sean $X_1, X_2, X_3, ...,$ *variables aleatorias independientes con densidad de probabilidad dada. Si*

i) $E(X_i) = 0 \quad \forall i$ *, la media de estas variables es cero y*

ii) $\left|E(X_i^k)\right| \leq C \quad \forall i, \ k \geq 2$ *los momentos de orden superior a dos están acotados;*

Entonces cuando $n \to \infty$ *la distribución de la suma es aproximadamente normal* $N(\mu, \sigma)$, siendo $\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *y* $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$.

Chebyshev usó el "método de los momentos", tempranamente desarrollado por él y simplificado y completado más tarde por Markov, quien también completó la demostración de Chebyshev del TCL en 1898. Markov estableció que: "se necesita añadir condiciones para que el teorema se cumpla". Primero propuso la condición de que la suma de varianzas está

uniformemente acotada lejos de 0. Después reemplazó la condición con la de que las esperanzas $E\left(X_n^2\right)$ estén acotadas cuando *n* tienda a infinito.

Después de la demostración dada por Liapounov del TCL utilizando la función característica en 1901, Markov intentó lograr el mismo nivel de generalidad con el método de los momentos. Lo logró en 1913 cuando dio una demostración rigurosa del TCL bajo la condición de Liapounov usando el método de los momentos.

Teorema de Liapounov

La demostración de Liapounov, publicada en 1901, es considerada la primera demostración rigurosa del TCL. Demos una mirada al teorema establecido por Liapounov (Uspensky, 1937):

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ *variables aleatorias independientes con las siguientes propiedades:*

$E(X_i) = 0 \quad \forall i$ y $E\left|X_i\right|^k \leq \infty \quad \forall i, \quad k \geq 2$, *entonces usando el teorema de continuidad y unicidad de la función característica concluyó que la distribución de la suma es aproximadamente normal.*

La demostración de Liapounov sigue la idea de Laplace usando la función característica e introduce un ***lema fundamental*** que es la clave a la simplicidad y rigurosidad de su demostración:

Sea S_n *una variable que depende del entero n, con media o y varianza 1. Si la función característica de la variable* S_n *converge uniformemente a la función característica de la distribución normal en algún intervalo finito, entonces la función distribución de la variable* S_n *tiende uniformemente a la distribución normal.*

Liapounov no separó explícitamente este lema fundamental en su demostración, en la que está contenido implícitamente. Este lema fue usado por Linderberg y Lévy en su mejora del TCL (Uspensky,1937).

Podemos observar que en este período se trabajó el TCL bajo el supuesto sólo de variables independientes, a diferencia del primer período cuyo supuesto fue demostrar el teorema para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. En particular, una aplicación de la demostración del TCL dada por Liapounov al caso de variables independientes e idénticamente distribuidas es la siguiente:

Sean $X_1, X_2, X_3, ...,$ *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita* μ *y varianza* $0 < \sigma^2 < \infty$, *entonces*

$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \to N(0,1)$ *cuando* $n \to \infty$.

La demostración de este teorema utiliza la función característica y la expansión de Taylor (Ver Xiuyu, 2003, pág. 14, Parzen, 1987, pág. 474. También ver Meyer, 1992, pág. 260 donde se demuestra mediante la función generadora de momentos).

3.5. Estudio de condiciones necesarias y suficientes para el teorema (CP6)

El tercer y último capítulo en la historia del TCL de 1920 a 1937, comienza con la demostración de Linderberg y las demostraciones de Lévy y Féller que añadieron condiciones necesarias al teorema.

La Condición de Linderberg

El 1922, Linderberg publicó una demostración elemental que fue la base de los trabajos de Lévy y Feller sobre el mismo problema, del teorema siguiente (Cam, 1986):

*Teorema (**Condición de Linderberg**)*

Sean X_i *variables aleatorias independientes con esperanza* $E(X_i) = 0$ *y varianza* σ_i^2 *finitas. Si los momentos de tercer orden están acotados, entonces la distribución de la suma se aproxima a la distribución normal.*

La condición anterior, es conocida como de Linderberg y su formulación matemática se puede ver en textos de teoría de la probabilidad (Shiryayev (1984, pág.326, Loève 1976, pág. 274), usualmente usando la función característica. Linderberg usó una simple aproximación sin considerar la función característica. En su demostración, encontró una cota para el $\sup_X |F(x) - \Phi(x)|$, donde $\Phi(x)$ es la distribución de probabilidad normal, en términos del tercer momento. El método de demostración de Linderberg no se usó en toda la primera mitad del siglo XX, hasta que el TCL comenzó a ser estudiado para espacios de dimensión infinita, donde es fácilmente transferible por cuanto no usa la función característica. Actualmente es usada en muchos casos donde la convergencia a la distribución normal es considerada con variables distribuidas no idénticamente y su fuerza está principalmente en que puede ser aplicado en

un contexto muy general y considera la razón de convergencia en el teorema límite.

Cabe señalar que el método de Linderberg no dio un orden óptimo de la razón de convergencia, en el caso de sumandos de valores reales independientes e idénticamente distribuida con tercer momento finito para el orden *n* (Paulauskas, 1999). Linderberg dio entonces una demostración rigurosa para la condición *suficiente* del TCL, pero no probó la condición *necesaria*. Esta carencia fue particularmente remediada por Lévy y Féller en 1935 y 1937. Por otro lado, Poisson muestra, alrededor del año 1824, que la aproximación a la distribución normal no siempre se cumple para variables independientes arbitrarias.

Teorema de Feller

Feller en un artículo publicado en 1935 da las condiciones necesaria y suficiente para el TCL, pero el resultado es algo limitado. Feller consideró, en la convergencia normal de la suma, una secuencia infinita X_i de variables aleatorias independientes y usó los segundos momentos finitos para cambiar orígenes y escala de valores de las sumas consecutivas de la forma $\frac{1}{a_n}(\sum X_i - c_n)$, a fin de evitar que se extiendan hacia valores infinitos. Luego dio las condiciones de restricción para cada variable x_k/a_n que tiende a cero en probabilidad. Puesto que Feller puso esta restricción, y porque sólo trató la suma de variables normales, su solución no puede ser considerada la solución final al TCL. Este teorema de Feller es frecuentemente llamado el Teorema de Linderberg-Feller, al usar la condición de Linderberg. La demostración puede verse en Shiryayev (1984, pág. 332) y está basada en la estimación de las colas de las varianzas en términos del comportamiento de la función característica en el origen.

Contribución de Lévy

Lévy probó la condición de Linderberg en 1925 usando la función característica, considerando esta demostración superior a la de Linderberg, (Cam, 1986). Lévy trató en primer lugar el nuevo caso de segundos momentos infinitos y de primeros momentos finitos o infinitos (CP2.3, que Laplace intento argumentar sin éxito). Publicó algunos artículos relacionados con el TCL entre los años 1925 y 1930, usando principalmente la función característica en su demostración. Después de 1930, evitó usar la función característica. En su artículo de 1935, presentado sólo unos pocos meses después de Feller, y a pesar que trató el

mismo problema, ambos autores negaron tener algún contacto previo (Cam, 1986). Establece las siguientes ideas:

- Dio las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas normales a la distribución normal.
- También dio las condiciones necesarias y suficientes para el caso general de sumas independientes.
- Por último, intentó dar las condiciones necesarias y suficientes para variables dependientes, de procesos estocásticos, caso Martingalas. Consideramos este caso el último campo de problemas (CP7) en la historia del TCL.

En este último, Lévy tuvo algunos problemas con la demostración para el caso martingalas, que no fue completamente satisfactoria y que no sustenta una prueba de rigurosidad. Su demostración de condición necesaria y suficiente para el caso general de variables independientes fue correcta, pero se basó en un lema hipotético, que no había sido probado todavía (como la demostración de Feller). El **lema** es el siguiente:

"Si la suma S = X + Y de dos variables aleatorias independientes (X e Y) tiene una distribución normal, entonces también lo son X e Y".

El año siguiente 1936, Crámer probó el lema (como un teorema) y éste fue establecido, mostrando la validez del uso de sumas normales y los teoremas de Lévy y Feller donde generalmente se aplica. En 1937, Feller y Lévy refinaron la demostración, después de usar el resultado de Crámer. El TCL fue así probado con las condiciones necesarias y suficientes (Cam, 1986) y se llega al final del desarrollo.

3.6. Resumen del estudio histórico

En las secciones anteriores se ha mostrado el interés de matemáticos y estadísticos prestigiosos en el TCL, uno de los más importante teoremas en estadística matemática y teoría de la probabilidad. Su formulación final establece que si se cumplen algunas condiciones, entonces la *distribución de la media aritmética* de un número de variables aleatorias independientes se aproxima a la distribución normal según el número de variables crece indefinidamente. Es decir, independientemente de la distribución actual de las variables, a medida que crece el número de sumandos, la suma de éstas

pueden ser tratadas como una distribución normal. En la Tabla1 se presenta un resumen cronológico de la evolución del Teorema Central del Límite, a partir de sus campos de problemas, las herramientas utilizadas y resultados obtenidos en cada paso.

Tabla 1. Desarrollo histórico del TCL

Sgnificados históricos	**Campo de problema**	**Métodos de solución (procedimientos y conceptos previos)**	**Resultados (Conceptos y propiedades)**
1713-1733 Aproximación de distribuciones	CP1: Aproximación de ciertas distribuciones (e.g. binomial) para valores grandes de sus parámetros	Aproximación de n! Paso al límite en sucesiones	Teorema de Bernoulli (De Moivre)
1785-1809 Suma de v.a. iid discretas	CP2: Suma de v.a. discretas independientes e idénticamente distribuidas	Distribución de la suma de v. a. Independencia y regla del producto Inversión de la función característica (Laplace) Desarrollo en serie	CP2.1. v.a. uniforme discreta (Laplace) CP2.2. v.a. discretas i.i.d., media y varianza acotadas (Laplace) Densidad normal (Inicio de estudio de teoría de los errores por Gauss y Laplace)
1810-1853 Suma de v.a. independientes	CP3: Suma v.a. discretas independientes no idénticamente distribuidas. CP4: Suma v.a. continuas	Cálculo de probabilidades mediante función de densidad Integración Introducción del factor de discontinuidad de Dirichlet (Bessel) Acotación de la diferencia y búsqueda de condiciones para que la cota tienda a cero (Cauchy) límite Teorema de la función inversa (Cauchy)	Generalización a v.a. independientes e idénticamente distribuida, para la suma y una combinación lineal (Poisson). V.a. independientes no i.d. (Poisson) V.a. continuas i.i.d. con densidad simétrica y rango finito (Cauchy) Búsqueda de casos donde no se cumple (Poisson)
1854-1919 Suma de v.a. cualesquiera, incluso dependientes	CP5: Estimaciones del error de aproximación CP6: Condiciones de validez del teorema	Método de los momentos (Chebychev y Markov) Lema de Liapounov (convergencia en f. característica) Continuidad de la f. característica (Liapounov) Función generadora	*Variables aleatorias con rango infinito* Comienzo de la demostración rigurosa del teorema (Chebychev) Condición necesaria para el teorema de Chebyshev (Markov) Liapounov demostró el TCL con la función característica Demostración rigurosa del teorema bajo la condición de Liapounov (Markov)

1920-1937 Suma de variables aleatorias en ciertas condiciones	CP7: Suma de variables aleatorias dependientes	Espacios Euclídeos y de Hilbert Razón de convergencia Sucesiones infinitas de v.a. Martingalas Convergencia en distribución	Condiciones necesarias y suficientes TCL aplicado a valores euclideanos, para vectores aleatorios y espacio de Hilbert (Linderberg) Prueba de la condición de Linderberg usando la función característica (Lévy) CP2.3. TCL para v.a. con rango infinito (Lévy) Condición necesaria y suficiente del TCL con resultado limitado (Feller) Prueba del lema (Cramer) Refinamiento de demostración (Feller-Levy)

Hemos seguido de cerca la historia del TCL, identificando diferentes campos de problemas, que podemos resumir en la forma siguiente:

CP1: Aproximación de la distribución binomial para valores grandes de n

CP2: Distribución de la suma de variables aleatorias discretas idénticamente distribuidas

- *CP2.1. Variables con distribución uniforme discreta*
- *CP2.2. Variables discretas acotadas*
- *CP2.3. Variables discretas no acotadas*

CP3. Distribución de la suma de variables aleatorias no idénticamente distribuidas

CP4. Distribución de la suma de variables aleatorias continuas

- *CP4.1. Variables acotadas*
- *CP4.2. Variables con momentos acotados*

CP5. Estimación del error de aproximación en el TCL

CP6. Búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para el TCL

CP7. Distribución de la suma de variables aleatorias dependientes.

Comenzamos discutiendo los primeros campos de problemas, que parten de problemas prácticos, por ejemplo, la necesidad de aproximar la distribución de la suma de errores y la búsqueda de aproximaciones para la suma de variables aleatorias. Seguimos el razonamiento de Laplace, quien dio una primera formulación limitada del TCL, que varios autores trataron posteriormente de generalizar, originando campos de problemas cada vez más abstractos y ligados al método deductivo, propio de la matemática.

Poisson dio ejemplos de distribuciones que no pueden ser aproximadas por el TCL y mejora la demostración para el caso continuo. Dirichlet y Bessel introducen el factor de discontinuidad probaron el teorema de Poisson para un caso general, y Cauchy define la primera cota superior para la diferencia entre la distribución de la suma y la distribución normal. Después de esta primera etapa, los matemáticos rusos consiguieron la primera demostración rigurosa del TCL; primero Chebyshev y Markov con el método de los momentos; después, Liapounov usando la condición que lleva su nombre y la función característica. Linderberg finalizó la búsqueda de la condición suficiente, Feller y Lévy hallaron la condición necesaria para el TCL que fue rigurosamente demostrada por Cramer, llegando a la versión actual del TCL. La condición de Linderberg ha sido mejorada (Cam, 1986) y se han obtenido las condiciones necesaria y suficiente para varias variables dependientes, pero los principios básicos de Linderberg, Lévy y Feller aún permanecen.

Aunque este resumen es aún provisional, en el sentido que podemos completarlo con la descripción del lenguaje y argumentos utilizados en cada periodo, nos muestra ya un esbozo de la evolución del significado del TCL, que comienza simplemente como una herramienta de cálculo aproximado de distribuciones para ciertos valores grandes de sus parámetros y continúa como suma de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas. Progresivamente su significado se amplía, hasta el punto de aplicarse a variables aleatorias discretas y continuas, independientes o no, idénticamente distribuidas o no. Por un periodo parece tener validez general, hasta que se llegan a encontrar las condiciones necesarias y suficientes de su validez (restringiendo, por tanto su significado).

El estudio realizado destaca también las distintas herramientas matemáticas empleadas, algunas de ellas de gran complejidad (como función característica, convergencia en distribución o en función característica, martingalas o espacios de Hilbert). Asimismo nos muestra algunas dificultades en el desarrollo del TCL, que podrían ser compartidas por los estudiantes:

- Aceptar que una distribución discreta (por ejemplo la binomial) puede llegar a aproximarse mediante una distribución continua. Esto requiere pasar de considerar valores aislados de la variable a valores continuos y de la idea de función de probabilidad a la de función de densidad de probabilidad. El mismo De Moivre, aunque halla la aproximación, no relaciona la fórmula obtenida con la distribución normal, en el sentido de considerar la función obtenida (curva normal) con la función de densidad

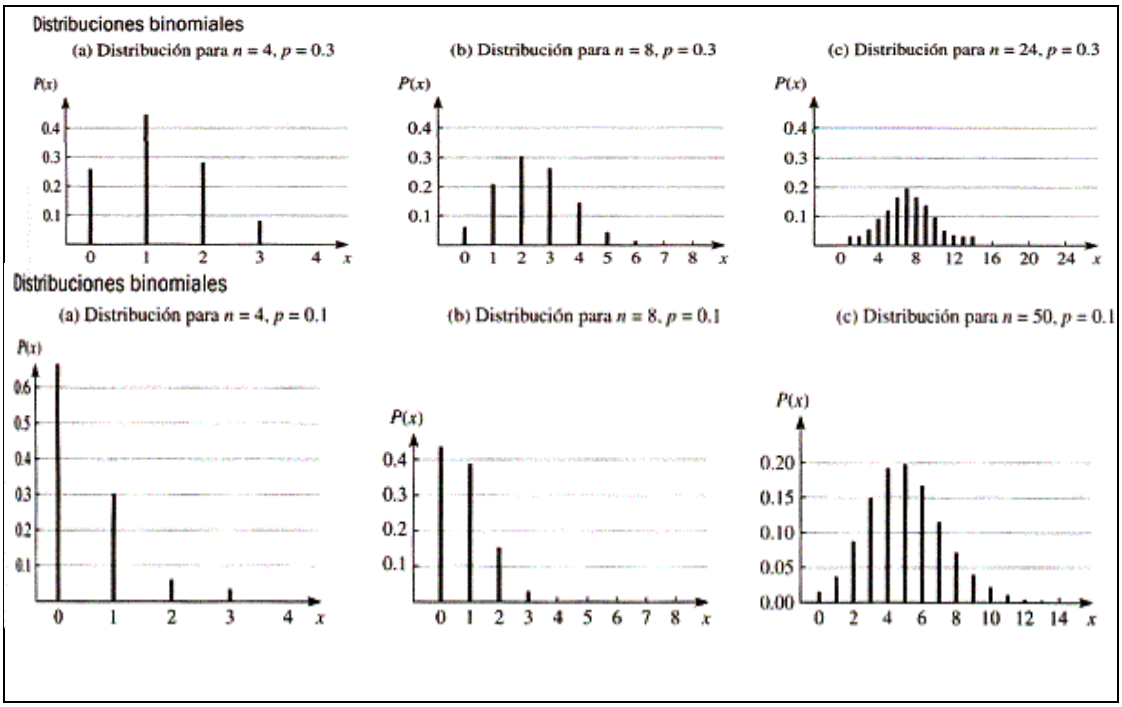
de una variable aleatoria (que sería el límite de la sucesión correspondiente de v.a. binomiales). Usualmente en las clases de probabilidad enseñamos a los alumnos a diferenciar entre variables discretas y continuas, como si la naturaleza de las variables fuese real, más que un modelo matemático que aplicamos para comprender una situación. Esta drástica división puede provocar *conflictos semióticos* en los alumnos, al entender que el límite de una sucesión (en este caso convergencia en distribución) de elementos de un conjunto (en este caso distribuciones discretas) ha de ser un elemento del mismo conjunto (lo que no se cumple en el TCL).

- Aceptar las sucesivas generalizaciones del TCL. Esto no ha sido sencillo y ha requerido numerosos pasos: de la distribución binomial a la uniforme discreta, de esta a variables independientes idénticamente distribuidas discretas, etc. Hoy día mostramos el TCL con total generalidad, pero la comprensión de esta generalidad de aplicación podría requerir un tiempo de maduración. Es decir el estudio ha procedido ejemplar a ejemplar, comprobando que el TCL se cumple en cada uno de ellos y sólo bastante más tarde se ha pasado a estudiar el tipo general (teoremas de límite generalizado).
- Comprender que el TCL también se aplica cuando las variables no son idénticamente distribuidas o no son independientes. La demostración posterior de estos casos sugiere que pueda ser más difícil o menos inmediato buscar ejemplos de aplicación. La suma de v.a. i.i.d. es natural en el contexto del cálculo de la media en el muestreo, al ampliar el tamaño de muestra. La suma de v.a. generales también se presenta en muchas circunstancias, cuando una magnitud puede ser explicada como la suma de un número grande de factores (por ejemplo, en muchas magnitudes biológicas), pero la determinación de estos factores, ni la consideración de la variable como suma de ellos no es tan evidente.
- Pensar que se puede aplicar el TCL en cualquier condición. La generalización progresiva lleva a pensar que el TCL tiene una validez general, y que sólo falta su demostración. Cauchy fue el primero que encontró algunos contraejemplos y el estudio de las condiciones necesarias y suficientes fue largo. Esto es un problema general de validez del razonamiento inductivo, donde la validez de una proposición para una serie de casos particulares no muestra la validez general. Los alumnos podrían presentar las mismas dificultades o confundir las condiciones necesarias con las suficientes.

4. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y LA INVESTIGACIÓN

La historia del teorema como recurso didáctico nos da una perspectiva global que permite conocer la aparición de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes, y por tanto podría facilitar al profesor la comprensión del proceso de aprendizaje de los alumnos. La abstracción de los campos de problemas presentados y el aparato analítico utilizado en su solución plantea la pregunta de si es posible enseñar este teorema a los alumnos, debido a la gran complejidad de su aparato analítico.
Actualmente es posible mostrar intuitivamente el TCL en sus diversas formulaciones usando la simulación y graficación . Por ejemplo, para el caso de la aproximación de De Moivre los alumnos podrían utilizar algún software estadístico para representar gráficamente la distribución *B (n,p)* para distintos valores de sus parámetros *n* y *p*.

Figura 1: Aproximación de De Moivre



Por ejemplo, en la figura 1 se muestran valores para *p = 0.3 con n = 4, 8, 24 y para p = 0.1 con n = 4, 8 y 50.* Estas gráficas sugieren intuitivamente la convergencia que podría ser posteriormente justificada en forma analítica a los alumnos con suficiente base de cálculo. Similarmente es sencillo generar muestras aleatorias y estudiar la distribución empírica de las medias muestrales usando software estadístico, que puede

descargarse de Internet. Un ejemplo es el desarrollado por delMas, Garfield. y Chance, (1999), quienes también proporcionan actividades orientadas al estudio de las distribuciones muestrales. Las evidencias empíricas del grado de comprensión de los estudiantes son, sin embargo muy limitadas, lo que sugiere el interés de continuar esta línea de investigación.

Este estudio, desde la perspectiva de las TFS, debe estar basado en el análisis del significado de referencia. El estudio histórico realizado nos permite comenzar a reconstruir el significado global del concepto, en el que, además de su dimensión matemática, tendríamos que incluir las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva y será la base para el posterior diseño de la enseñanza del tema.

REFERENCIAS

DelMas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students´ statistical reasoning. *Journal of Statistic Education*, 7, 3. On line:

[http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n3/delmas.cfm]

Feller, W. (1975). *Introducción a la teoría de la probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa.

Fisher, H. (2000). *The central limit theorem from Laplace to Cauchy: Changes in stochastic objetives and in analytical methods*. On line:

[http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/didmath/seite/1850.pdf].

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: El autor.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics from 1750 a 1930*. New York: John Wiley.

Loève, M. (1976). *Teoría de la Probabilidad*. Madrid: Tecnos.

Mether, M. (2003). The history of the central limit theorem. *Sovelletun Matematiikan erikoistyöt*, Mat-2.108. On line: [http://www.sal.tkk.fi/Opinnot/Mat-2.108/pdf-files/emet03.pdf].

Meyer, P. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadística*. Segunda edición. México: Addison-Wesley.

Parzen, E. (1987). *Teoría moderna de probabilidades y sus aplicaciones*. Quinta edición. México: Limusa.

Paulauskas, V. (1999). J.W. Linderberg and the central limit theorem. *Statistics, registries and research- experiences from Finland*, (pp. 111-112). Helsinki: Statisticsl Findland.

Seneta, E. (1984). The central limit problem and linear least squares in prerevolutionary Russia: The background. *Mathematical Scientis*t 9, 37-77.

Shiryayev, A. N. (1984). *Probability*. New York: Springer.

Stigler, S. M. (1986). *The history of statistics the measurement of uncertainty before 1900*. Cambridge, MA: Belkap Press of Harvard University Press.

Tauber, L. (2001). *Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Uspensky, J. V. (1937). *Introduction to mathematical probability*. New York: McGraw-Hill.

Wisniewski, P. y Velasco, G. (2001). *Problemario de probabilidad*. México: Thompson.

Xiuyu, J. (2003). Historical development of Central Limit Theorem. On line:

[http://www.stat.rice.edu/~blairc/seminar/Files/julieTalk.pdf].

USO DE REPRESENTACIONES DE LOS CONCEPTOS DE FUNCION Y DERIVADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS POR RESOLUTORES EXPERTOS[2]

Ramiro Ávila Godoy

Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora, México

RESUMEN

En este trabajo se reportan los resultados de una investigación encaminada a indagar sobre la manera en que resolutores expertos proceden al resolver problemas de Cálculo no rutinarios. El interés estaba centrado, especialmente, en determinar el uso que dichos resolutores hacen de las diversas representaciones (gráfica, analítica, numérica y verbal) en las diversas etapas de resolución del problema, desde la etapa de análisis de la situación, hasta la de formulación de la solución, pasando por las de diseño e instrumentación de la estrategia de solución. El análisis del proceso de solución de los problemas utilizados en la investigación se hizo con base en la Teoría de las Funciones Semióticas de Juan D. Godino.

USE OF REPRESENTATIONS OF THE FUNCTION AND DERIVATIVE CONCEPTS IN SOLVING NON ROUTINE PROBLEMS BY EXPERT PROBLEM SOLVERS

ABSTRACT

We present results from a research oriented to enquire expert solvers' strategies to solve non routine calculus problems. The focus was the use of various representations (graphical, analytical, numerical and verbal representation) at the different stages in the solving process, since the analysis of the situation, to the formulation of the solution, going through the design and instrumentation of the solving strategy. The analysis is based on the Semiotic Functions Theory.

1. INTRODUCCIÓN

Es incuestionable que uno de los propósitos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes sean capaces de utilizar, cada vez de mejor manera, los conceptos, algoritmos, teoremas y métodos de la disciplina para analizar, interpretar y resolver problemas en

[2] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 266-295)

diferentes campos de aplicación y en la matemática misma. Sin embargo, lograr este propósito resulta difícil en la mayoría de los casos; sobre todo, tratándose de problemas no rutinarios; esto es, tratándose de problemas en los cuales la aplicación de los conocimientos requiere, además de un buen dominio de los mismos, creatividad; es decir, ingenio para utilizar de manera apropiada dichos conocimientos (conceptos, algoritmos, teoremas y métodos).

Lo anterior ha sido puesto de manifiesto en numerosas investigaciones realizadas por diversos investigadores desde hace varios años en, prácticamente, cualquier campo de la matemática y, en particular, en el Cálculo, respecto al cual, Artigue (1998) dice: "...si bien se puede enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica, algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas..." (p. 97)

El propósito fundamental de diseñar estrategias de enseñanza más eficaces, esto es, estrategias que mejoren la calidad de los aprendizajes de los estudiantes, entendido esto como el incremento de los niveles de éxito al tratar de resolver problemas, ha dado lugar a la realización de una gran diversidad de investigaciones. Sobre esta cuestión, Michele Artigue, en el trabajo citado, dice:

"...la evidencia de los problemas encontrados y la insatisfacción que generaban, han tenido dos efectos notorios. De un lado se han convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en este campo. De hecho, la mayoría de las investigaciones didácticas de la enseñanza superior se han concentrado en el campo conceptual del Cálculo, tal y como lo demuestra el contenido de la obra 'Advanced Mathematical Thinking' (Tall, 1991)" (p. 98)

La investigación, que aquí reportamos, se ubica entre las que tienen ese propósito y, por ende, busca incidir en el mejoramiento de la enseñanza del Cálculo; y surgió de nuestro deseo de conocer la manera en que proceden las personas que tienen éxito cuando resuelven problemas aplicando sus conocimientos de matemáticas bajo la consideración de que, conocer cómo proceden, es necesario o, al menos muy conveniente, si queremos diseñar nuevas y mejores alternativas de enseñanza de las matemáticas.

A este respecto Santos Trigo (1997) dice: “un aspecto esencial en el entendimiento de cómo el individuo resuelve problemas ha sido el observar, codificar y analizar los procesos utilizados por los expertos de determinada área al resolver problemas” (p. 58); y más adelante agrega: “En la observación sistemática del comportamiento del experto es importante considerar métodos en donde se observe con detalle el proceso que utiliza.” (p. 59).

Por su parte, Schoenfeld (1987) considera que no solamente es importante discutir las estrategias generales (las identificadas por Polya), sino también las subestrategias que cada una de ellas genera.

La presente investigación se inicia con la formulación de la siguiente pregunta:

¿Qué es lo que permite a algunas personas tener éxito en la resolución de problemas utilizando sus conocimientos de matemáticas?

Esta pregunta dio pie a la formulación de una serie de conjeturas derivadas de ciertas consideraciones paradigmáticas. Por ejemplo: el asumir que las significaciones de los objetos matemáticos que tienen los individuos, se expresan y utilizan por medio de sus diversas representaciones, entre las que destacan las representaciones gráfica, numérica y analítica, nos llevó a preguntarnos sobre la manera en que dichas representaciones son utilizadas por los sujetos que resuelven con éxito problemas no rutinarios, lo que a su vez nos condujo a otras preguntas, tales como *¿qué papel juegan las representaciones gráficas en la elaboración de las estrategias de solución? ¿Y en la ejecución de dicha estrategia?* De igual manera nos llevó a preguntarnos por el papel de las otras representaciones. Todos estos cuestionamientos dieron lugar, en su momento, a la formulación del siguiente *problema de investigación*:

> ¿De qué manera usan las representaciones (gráfica, numérica y analítica) de los conceptos de “función” y “derivada de una función” en el análisis y resolución de problemas de matemáticas no rutinarios, las personas que tienen éxito al resolverlos?

Este problema se desglosó, a su vez, en una serie de interrogantes más específicas, entre las que destacan:

a) *¿Qué papel juegan las representaciones en la etapa de análisis y comprensión de la información?*
b) *¿Qué papel tienen en el diseño de la estrategia de solución?*

c) *Y en la ejecución y evaluación de lo planeado, ¿Qué papel juegan las representaciones?*

d) *En la formulación de la solución ¿Cómo se usan las representaciones?*

Sobre el papel de las representaciones en los procesos de pensamiento, Vicenç Font hace referencia a ellas diciendo:[3]

"En el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas se han realizado muchas investigaciones para precisar el término "representación" y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos (Brown 1996 y 1997; Kaput 1987, 1991 y 1992; Janvier 1987; Duval 1995; Romero y Rico 1999). La mayoría están de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas influye en el tipo de comprensión que genera el alumno, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar. La terminología que normalmente se usa en este tipo de investigación proviene de la lingüística, de la fenomenología y de la semiótica. En la terminología que ha generado la lingüística, las representaciones serían los significantes que están en lugar de los significados, es decir, los sistemas matemáticos de signos que se utilizan para representar los contenidos matemáticos. En semiótica se utilizan los términos "expresión" y "contenido" de un signo (o función semiótica). Cuando una persona interpreta o comprende un signo, actúa el par expresión/contenido, o sea, la expresión remite a un contenido. La función semiótica se puede considerar una función que a una expresión le hace corresponder un contenido".

2. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

La formulación del problema, las preguntas de investigación, el diseño metodológico y la interpretación de la información obtenida al desarrollar la investigación, tienen sentido a partir de una serie de consideraciones que constituyen el marco teórico en el que se basa y fundamenta el diseño y desarrollo de la investigación que aquí se reporta.

[3] "Representation in Mathematics Education. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35. http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm

Dichas consideraciones corresponden, fundamentalmente, a la Teoría de las Funciones Semióticas de Juan D. Godino, las cuales presentamos a continuación:

En primer término queremos establecer que percibimos a la matemática, al menos de las siguientes tres maneras: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado; y concebimos cada una de las tres maneras, como aspectos constituyentes de la misma.

Nuestra concepción de la matemática como actividad de resolución de problemas está determinada por nuestra concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos, lo mismo que por nuestra concepción sobre el origen y desarrollo de dichos objetos.

Asumimos que el origen y desarrollo de los objetos matemáticos y, como consecuencia, su naturaleza, son pragmáticos; lo cual significa que asumimos que tales objetos surgen y evolucionan a partir de situaciones problémicas; que son situaciones en las que un individuo se propone realizar una tarea o contestar una pregunta para lo que no tiene suficientes elementos y por lo cual no está, en ese momento, en condiciones de llevar a cabo la tarea planteada o de contestar la pregunta formulada.

La pretensión del individuo, de resolver la situación problémica, provoca en él, un *estado psicológico de conflicto cognitivo*, que denominamos *estado problémico* y que corresponde a lo que queremos decir cuando, coloquialmente, expresamos que el individuo *tiene un problema.* Este estado psicológico se caracteriza por el hecho de que el individuo quiere resolver el problema surgido al tratar de realizar la tarea planteada o de contestar la pregunta formulada y, en primera instancia, no puede. Esta contradicción lo activa intelectualmente para que ponga en juego sus conocimientos previos constituidos por sistemas conceptuales y esquemas para la acción; para interaccionar con la situación problémica tratando de interpretarla y resolverla.

Al interaccionar con la situación problémica, el sujeto realiza una serie de actividades cognitivas de muy diversa índole, algunas de las cuales son ostensibles (observables), como por ejemplo: *hacer un diagrama, efectuar una operación, comunicar una idea*, etc., otras son acciones interiorizadas no ostensibles tales como *hacer comparaciones, analogías, deducciones, inducciones, conjeturas, generalizaciones*, entre otras muchas. Todas estas actividades están encaminadas, en un primer momento, a tratar de entender la situación, en un segundo momento, a tratar de formular una estrategia de acción para resolver el conflicto, en un

tercer momento, a llevar a cabo las acciones planeadas para dar respuesta a lo pedido y, en un cuarto momento, a formular la respuesta al problema. Estas acciones dan lugar al enriquecimiento del significado de los objetos mentales puestos en juego en la interacción y, como consecuencia, a la evolución de dichos objetos o al surgimiento de nuevos objetos derivados de los previamente construidos.

El conjunto de actividades que realiza el individuo tratando de resolver el problema, constituye *un sistema de prácticas* que, cuando corresponden a un sujeto, se denomina *sistema de prácticas personales.* Una práctica específica se dice que es *significativa* o que tiene sentido, si para ese individuo, esa práctica desempeña una función en la consecución del objetivo de resolver el problema.

La razón por la cual es necesario hablar de prácticas significativas es porque no toda actividad realizada, al tratar de resolver un problema, resulta eficaz. Algunas de ellas constituyen intentos fallidos, procedimientos erróneos que luego se desechan.

De los sistemas de prácticas significativas que un individuo utiliza para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, emergen los *objetos matemáticos*. *Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados personales que ese individuo tiene de tales objetos matemáticos*.

Un conjunto de individuos que comparten el uso de un conjunto de prácticas significativas prototípicas y las utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas constituyen una *institución* y por ello, a tal conjunto de prácticas se le denomina *sistema de prácticas institucionales*. Tales sistemas de prácticas constituyen los *significados institucionales* de los objetos matemáticos que emergen de dichos sistemas de prácticas; los cuales se denominan *objetos institucionales*.

Estos objetos institucionales constituyen el sistema de referencia de la enseñanza; es decir, tanto en el diseño curricular como en la planeación de la enseñanza, lo que se hace es decidir cuáles serán los sistemas de prácticas que se promoverán respecto a un conjunto de objetos matemáticos para que los estudiantes los conozcan y aprendan a utilizarlos para resolver una serie de problemas relativos a un cierto tipo de situaciones problémicas.

Al llevar a cabo estas tareas de diseño curricular y de planeación de la enseñanza, se asume, consciente o inconscientemente, que esos sistemas de prácticas elegidos permitirán a los estudiantes construir los significados

apropiados de los objetos matemáticos para tener éxito en el análisis, en la interpretación y en la resolución de los problemas que se les presentan al tratar de realizar las tareas o contestar las preguntas que se plantean en las situaciones problémicas de las que se partió para decidir los contenidos matemáticos, objeto de estudio. Sin embargo, hay evidencias suficientes de que esto no sucede; es decir hay evidencias de que los significados de los objetos matemáticos construidos por los estudiantes a partir de las prácticas elegidas, no les permiten tener el éxito esperado en la resolución de problemas.

Este hecho ha sido determinante en el surgimiento y desarrollo de Matemática Educativa como disciplina, de tal manera que muchos investigadores caracterizan las investigaciones en Matemática Educativa diciendo que dichas investigaciones se refieren a algún aspecto relacionado con el significado que los estudiantes asignan a los términos y símbolos matemáticos, al igual que a los conceptos y proposiciones; en particular pretenden explicar la manera en que dichos significados se forman y evolucionan como resultado de la enseñanza.

Para efectos de investigación sobre el significado de los objetos matemáticos, tomando en cuenta que éstos los concebimos como sistemas de prácticas, es necesario descomponer estos sistemas de prácticas en entidades más elementales que constituyen los elementos del significado. Es decir, el significado de un objeto matemático está constituido por un conjunto de prácticas significativas; sin embargo, al realizar una tarea específica, en un determinado momento se está realizando una práctica particular que constituye una componente del sistema de prácticas y, por tanto, es sólo un elemento del significado. Teniendo presente esto, pueden identificarse, al menos seis componentes del sistema de prácticas que, en consecuencia, constituyen elementos del significado. Estos elementos son: las situaciones problémicas, el lenguaje, las acciones, los conceptos, las proposiciones y las argumentaciones.

Las situaciones problémicas forman parte del significado de los objetos matemáticos en tanto que de ellas emergen y son ellas las que le dan sentido y es en su análisis y solución donde se utilizan.

De la misma manera, para referirnos a un objeto matemático, al usarlo para analizar o resolver un problema, lo mismo que al comunicarlo a otra o a otras personas, es necesario utilizar diversos *elementos del lenguaje* tales como términos, expresiones, notaciones, gráficas, tablas de datos, entre otros; de tal manera que tales elementos lingüísticos son también componentes del significado del objeto matemático de referencia.

Otro elemento que forma parte del significado del objeto matemático son *las acciones* que el sujeto realiza sobre los signos con que lo representa, al tratar de resolver un problema. Estas acciones las realiza el sujeto en las diversas etapas del proceso de resolución del problema, como son: el análisis de la situación problémica, el diseño de estrategias, la ejecución de algoritmos, la realización de cálculos, las transformaciones de expresiones simbólicas, etc. Todas estas acciones son manifestaciones del significado del objeto matemático.

Al realizar las acciones que el sujeto decide para resolver un problema matemático, utiliza una serie de *conceptos* conocidos previamente y que están íntimamente relacionados con los objetos matemáticos en uso. Tales conceptos también son elementos del significado de dichos objetos.

La elección de las acciones que habrá de realizar para resolver un problema matemático, está basada en alguna o algunas de las propiedades que el sujeto conoce de los objetos matemáticos y que por ello, forman parte también del significado de dichos objetos.

Por último, también son elementos del significado del objeto matemático las argumentaciones que se hacen para justificar las acciones realizadas para resolver el problema en cuestión y para probar que el problema ha sido resuelto. Dichas argumentaciones ponen de manifiesto las relaciones entre los diversos componentes del significado y, por ende, que todos ellos lo constituyen.

La investigación sobre los significados que un sujeto tiene de los objetos matemáticos que usa en la resolución de problemas, requiere interpretar las diversas actuaciones que realiza el sujeto al estar resolviendo un problema específico. El proceso de resolución de un problema por parte de un sujeto, inicia con el análisis de la situación en la que se plantea la tarea o pregunta problémica tratando de entenderla, continúa con el diseño de una estrategia de solución, después con la instrumentación de la estrategia diseñada, adecuándola cuantas veces es necesario y, finalmente, cuando el problema ha sido resuelto, procede a formulación de la respuesta y a su comunicación. Para llevar a cabo este proceso, el individuo hace uso de diversos elementos del lenguaje (signos en general) para representar objetos matemáticos que utiliza en el desarrollo del mismo para resolver el problema y cuyo significado es lo que queremos investigar.

Reconociendo que los signos (palabras, símbolos, otros objetos) son los representantes de los objetos matemáticos que utiliza el sujeto en la resolución del problema, la investigación consiste en determinar la

significación del objeto representado con dicho signo, lo cual se pretende hacer analizando las diversas actuaciones que el sujeto tiene sobre el signo en los diversos momentos del proceso. Para llevar a cabo esta tarea recurriremos al modelo semiótico que propone Juan D. Godino para describir la cognición matemática y en el que el concepto de función semiótica, constituye el concepto fundamental de dicho modelo.

La función semiótica es concebida (al menos metafóricamente) como una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos: el de los signos (elementos ostensivos) y el de los significados (elementos no ostensivos); de tal manera que su uso en la investigación implica determinar la manera en que dichos elementos están relacionados; asumiendo que la regla de correspondencia que los relaciona, se pone de manifiesto en los diversos usos que se hace del signo en las diversas etapas del proceso de resolución del problema; reconociendo, además, que la interpretación del significado del objeto matemático requiere tener presente que en un mismo problema, el objeto matemático puede ser representado con diversos signos y que el significado de dicho objeto está constituido por diversos elementos que fueron descritos en párrafos antecedentes.

Las consideraciones expuestas nos permiten establecer que el significado que un sujeto tiene de un objeto matemático particular, está determinado por el número de funciones semióticas en las que interviene el objeto, que dicho sujeto puede establecer al abordar un cierto tipo de problemas.

3. LA PLANEACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Tomando en cuenta las consideraciones teóricas expuestas, para tratar de dar respuesta al problema de investigación, decidimos elaborar un cuestionario con problemas matemáticos (esto es, con problemas en los que la situación problémica se refiere a un objeto matemático) que cumplieran las condiciones establecidas en el problema de investigación; esto es, que fueran no rutinarios y que pudieran resolverse utilizando los conceptos de función y derivada; y aplicarlos a un grupo de profesores universitarios con formación profesional en Matemáticas, con varios años de experiencia docente dedicados a la enseñanza del Cálculo o del Álgebra y que fueran considerados buenos profesores por los estudiantes. El número de profesores a los que, finalmente, se les aplicó el cuestionario fue treinta y dos, de los cuales, veinticuatro enseñan fundamentalmente Cálculo y ocho, enseñan fundamentalmente Álgebra. La mayoría de los profesores involucrados en esta investigación tienen estudios de posgrado en

Matemáticas o en Matemática Educativa. Al menos dos de ellos tienen doctorado en Matemáticas.

Los criterios utilizados para considerar no rutinarios a los problemas fueron los siguientes:

a) Que no fueran problemas de los que, en los textos, se usan como ejercicios.
b) Que el uso de los conceptos de función y derivada para resolver el problema requiriera transformar el problema inicial.
c) Que aún después de transformado el problema inicial, el diseño de una estrategia de solución utilizando los conceptos de referencia, requiriera ingenio.
d) Que los estudiantes promedio de los cursos de Cálculo no tuvieran éxito al tratar de resolverlos.

Con base en estos criterios se seleccionaron los siguientes cinco problemas para constituir el cuestionario. Los tres primeros problemas se redactaron, de tal manera que pudieran evocar más los métodos del Álgebra que los del Cálculo; para esto se evitó utilizar los términos función y derivada y a cambio, hablar de ecuaciones y desigualdades. Los dos últimos se refieren explícitamente a funciones y en su redacción se utilizan tanto el término función como el término derivada. La versión que se presentó a los profesores que participaron en la investigación, es la siguiente:

Cuestionario

Problema No. 1.

Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en (0,1).

Problema No. 2.

Demostrar que la ecuación $x^n + px + q = 0$ no puede tener más de dos raíces reales, si n es par; ni más de tres, si n es impar.

Problema No. 3.

Resolver la desigualdad $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

Problema No. 4.

Comparar las funciones $y = Senx + Tanx$ y $y = 2x$ en $(0, \pi)$.

Problema No. 5.

Supóngase que *f*(*x*) es una función continua y derivable en [0, 1], que f(*x*) está en [0, 1] para todo *x* y que $f'(x) \neq 1$ para todo *x* en [0, 1]. Demostrar que existe exactamente un número *x* en [0, 1] tal que f(*x*)=*x*.

El análisis de las respuestas a cada uno de los problemas, se hizo considerando los diversos momentos de la resolución; es decir, se consideraron los momentos de análisis de la información proporcionada, el del diseño de la estrategia o plan de solución, la instrumentación del plan y la formulación de la respuesta.

Al analizar la etapa en la cual la persona (que está tratando de resolver el problema) está interpretando la información que se le proporciona, el interés estuvo centrado en ver las significaciones evocadas por dicha información, en especial, tratando de determinar si se evocaban los conceptos de función y/o derivada y, en los casos en que así fuera, cuál era la imagen evocada, es decir, si se evocaba la expresión analítica o la representación gráfica o la numérica, o más de una de ellas; así como el papel que estas evocaciones tenían en el diseño de la estrategia a utilizar para intentar resolver el problema.

En la etapa de diseño de la estrategia, nuestra atención se restringió a aquellos casos en los cuales habían sido utilizadas las representaciones de los objetos "función y "derivada de una función", dado el propósito de la investigación, y el interés estuvo centrado en determinar el papel que tales representaciones tienen en el diseño de la estrategia.

De la misma manera fueron analizadas las siguientes etapas del proceso de resolución de los problemas; esto es, las correspondientes a la instrumentación de la estrategia diseñada y a la formulación de la respuesta.

4. LAS RESPUESTAS Y SU ANÁLISIS

Primeramente mostraremos la manera en que procedieron algunos profesores al resolver los problemas, así como el análisis que hicimos del proceso de solución; esto con el objeto de ilustrar, por una parte, la forma en que fueron utilizadas las representaciones en el análisis y resolución de los problemas y, por otra, la manera en que llevamos a cabo el análisis; luego procederemos a hacer una presentación general de las respuestas y, finalmente, haremos un análisis de dichas respuestas y formularemos algunas conclusiones.

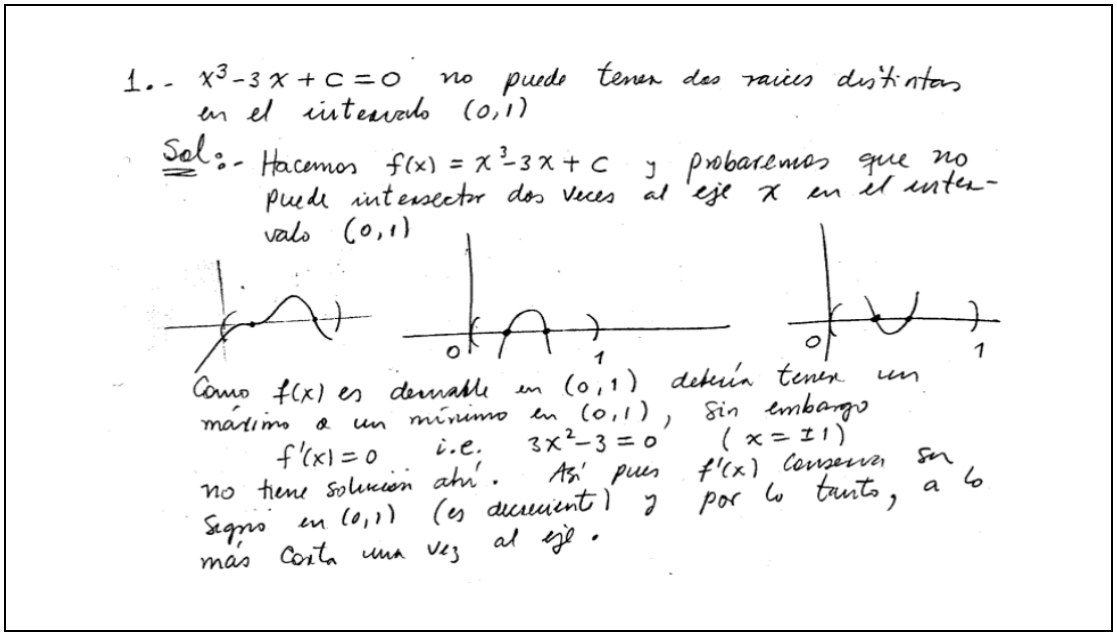
Para mostrar la manera en que procedieron los profesores al resolver los problemas, presentaremos las respuestas de tres de ellos a algunos de los problemas, seguidas del análisis que hicimos de las mismas. A los profesores los nombraremos utilizando números, es decir hablaremos del Profesor 1, del Profesor 2 y del Profesor 3.

Profesor No. 1.

Problema No. 1.

Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en (0,1).

Solución:



Análisis de la solución:

La primera observación es el cambio de contexto que el profesor hace del problema pues la formulación original está en el contexto del Álgebra "Demostrar que la ecuación …" y él dice: "Hacemos $f(x) = x^3-3x+c$ y probaremos que no puede intersectar dos veces al eje X en el intervalo (0,1)…" que, evidentemente está en el contexto del Cálculo. Este cambio de contexto implica varios cambios de significado. Por ejemplo:

La "*x*", en el contexto del Álgebra tiene el significado de incógnita, es decir, de *número desconocido*, mientras que en el nuevo contexto, la *x* es una variable.

Como consecuencia del cambio de contexto, los métodos que evoca y utiliza para analizar y resolver dicho problema, son los del Cálculo y no los del Álgebra.

Cuando el profesor iguala la expresión $x^3 - 3x + c$ a $f(x)$, convirtiéndola en función, crea también una nueva variable, la $f(x)$, cuyo valor está relacionado con el de x.

El cambio de contexto llevó al profesor a concebir la expresión $f(x) = x^3-3x+c$, como la representación analítica de una curva trazada en un sistema de coordenadas cartesianas, lo que, a su vez, lo llevó a reformular el problema, diciendo: "…probaremos que no puede intersectar dos veces al eje X en el intervalo (0,1)"

Estas transformaciones ponen de manifiesto, no sólo algunos de los significados que la expresión x^3-3x+c tiene para el profesor (el que tiene como miembro de la ecuación original, lo mismo que el que tiene como valor de $f(x)$ en la expresión $f(x) = x^3-3x+c$, a la cual, a su vez, le asigna también un significado geométrico viéndola como representación analítica de una curva y, en consecuencia, concibe a x^3-3x+c, como el valor de la y de los puntos de dicha curva); sino también muestran el papel que juegan dichos significados en el diseño de la estrategia de solución del problema, ya que inmediatamente después, aparecen tres bosquejos gráficos en los que la curva corta más de una vez al eje X, con los cuales es evidente que está tratando de ilustrar que, cualquiera que sea el comportamiento de la función, para cortar dos veces al eje X en el intervalo (0,1), es necesario que la curva cambie de dirección ("de vuelta") al menos una vez en dicho intervalo, lo que a su vez, equivale a tener un máximo o un mínimo relativo. Esta necesidad es consecuencia del hecho de que la función sea derivable en el intervalo, lo cual expresa inmediatamente después de los bosquejos gráficos: "Como $f(x)$ es derivable en (0,1) debería tener un máximo o un mínimo en (0,1)". Esta última expresión, además de poner de manifiesto que el profesor sabe, en general, lo dicho para las curvas derivables, también muestra que sabe que esta familia de curvas, en particular, es derivable en (0,1).

Todas estas consideraciones las hizo el profesor para validar su estrategia de solución que consiste en demostrar que la curva no cambia de dirección en el intervalo de referencia. Para hacer esta demostración utiliza el hecho de que para que una función derivable cambie de dirección, es necesario que su derivada valga cero en el punto de cambio y cambie de signo en cualquier intervalo que contenga al punto donde vale cero. Esto lo muestra cuando afirma, inmediatamente después de haber establecido que "Como $f(x)$ es derivable en (0,1) debería tener un máximo o un mínimo en (0,1)…", "…sin embargo $f\,'(x) = 0$ i.e. $3x^2-3=0$ ($x = \pm 1$) no tiene solución ahí. Así pues $f\,'(x)$ conserva su signo en (0,1) (es decreciente) y por lo tanto, a lo más corta una vez al eje".

También se observa que, aunque el problema se reformuló para referirlo a la representación gráfica de una función y la estrategia de solución diseñada, parece haberse inspirado en la gráfica, los conceptos, propiedades y argumentos utilizados en la demostración se presentaron analíticamente. Esto es muy claro cuando dice: "Como $f(x)$ es derivable en (0,1) debería tener un máximo o un mínimo en (0,1), sin embargo $f\,'(x) = 0$ i.e. $3x^2-3=0$ $(x = \pm 1)$ no tiene solución ahí. Así pues $f\,'(x)$ conserva su signo en (0,1) (es decreciente)".

En el caso de este profesor es evidente la diversidad de significados que evoca al analizar la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ presentada en el problema; lo mismo que el papel que juega la representación gráfica de la función $f(x) = x^3-3x+c$, en el análisis e interpretación de la situación, así como en el diseño de la estrategia de solución; así también es observable la diversidad de significados (propiedades) que tiene de la función y el apropiado y creativo uso que hace de tales significados para argumentar su respuesta. Por ejemplo, afirma que la expresión analítica representa una función derivable en el intervalo de referencia; y eso, a su vez, lo lleva a ver a dicha expresión analítica como representante de una curva continua y suave en el intervalo. Esta percepción de la curva lo lleva a argumentar que para que la ecuación tenga más de una solución en el (0, 1), la curva deberá cambiar de dirección en algún punto del intervalo para que haya la posibilidad que toque al eje X, al menos dos veces en el intervalo considerado; este hecho lo asocia, a su vez, con otra propiedad de la expresión analítica, debe tener derivada igual a cero en el valor de la x del punto de la curva donde ésta cambie de dirección y cambiar de signo en cualquier intervalo que contenga a dicha x. Algo que resulta fundamental en todas las etapas del proceso, es la coordinación que hace de los registros analítico y gráfico de la función que resulta clave en el análisis e interpretación de la situación, lo mismo que en el diseño e instrumentación de la estrategia y en la formulación y comunicación de la respuesta.

El análisis hasta aquí hecho, muestra las siguientes asociaciones (funciones semióticas):

a) La expresión x^3-3x+c la asocia con la expresión $f(x) = x^3-3x+c$, lo cual implica que la concibe como función.

b) La expresión $f(x) = x^3-3x+c$ la asocia con una curva, lo cual implica que concibe la expresión como representación analítica de la curva.

c) El asociar la expresión analítica con la curva lo hace reformular el problema a partir de la significación que tienen para él la solución

o soluciones de la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$, que las ve como el caso o los casos particulares en los cuales $f(x)$ vale cero y, en consecuencia, como el caso o los casos en los que la curva corta o toca al eje X; lo cual lo lleva a establecer el problema original en términos de probar que la curva no corta al eje X, en el intervalo de referencia, más de una vez.

d) De la expresión $f(x) = x^3-3x+c$, en particular, sabe que es derivable, al menos en (0,1), y que eso significa que para cortar o tocar más de una vez al eje X en (0,1) es necesario que la curva cambie de dirección ("de vuelta") en algún punto del intervalo y que el punto del intervalo donde la curva cambia de dirección es un máximo o un mínimo relativo de la función y que en tal punto, la derivada de la función debe valer cero.

e) También deja establecido, de manera implícita, que si la curva no cambia de dirección en un intervalo, la derivada de la función conservará el signo y, la función será monótona en el intervalo, esto es, si es decreciente, lo será en todo el intervalo y lo mismo sucederá si es creciente.

f) De estas consideraciones, establece la estrategia de solución, consistente en probar que, en el intervalo de referencia, la curva no cambia de dirección y, en consecuencia, esto será una prueba de que tal curva, no puede tocar al eje X más de una vez en el intervalo (0,1). Esto decide hacerlo calculando los valores de x para los cuales la derivada de la función vale cero, que ya dijimos los asocia con los puntos donde la curva puede cambiar de dirección.

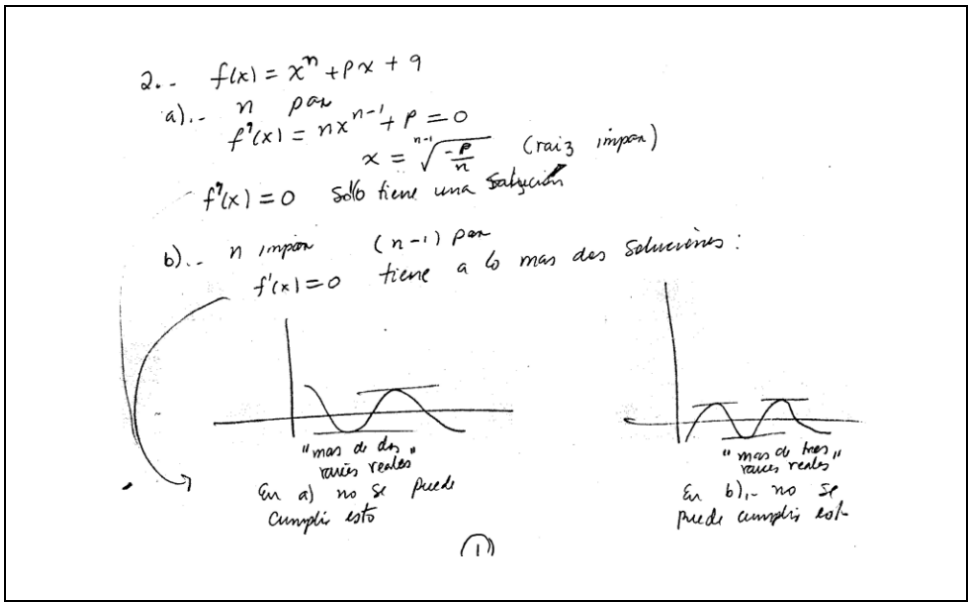
g) Al instrumentar la estrategia aplica las reglas para calcular la función derivada asociada a la función $f(x) = x^3-3x+c$, obteniendo $3x^2-3$, que luego iguala a 0, escribiendo $3x^2-3=0$ y resolviendo la ecuación de donde resulta $x = \pm 1$, que son los valores de x para los cuales la derivada vale cero y, como consecuencia, son las abscisas de los puntos donde la curva puede cambiar de dirección.

h) Como ambos valores están fuera del intervalo (0,1), afirma que la prueba está concluida, lo cual, textualmente, establece diciendo: "Así pues $f\,'(x)$ conserva su signo en (0,1) (es decreciente) y por lo tanto, a lo más corta una vez al eje".

Problema No. 2.

Demostrar que la ecuación $x^n + px + q = 0$ no puede tener más de dos raíces reales, si *n* es par; ni más de tres, si *n* es impar.

Solución:



$f\,'(x) = nx^{n-1} + p = 0$

$x = \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$ (raíz impar)

$f\,'(x) = 0$ Sólo tiene una solución

a) *n* impar (*n*-1) par

$f\,'(x) = 0$ Tiene a lo más dos soluciones

Análisis de la solución:

Al igual que en el problema No. 1, es evidente el cambio de contexto que el profesor hace del problema para reformularlo como un problema relativo a la familia de funciones de la forma $f(x) = x^n + px + q$, la que a su vez concibe como la representación analítica de una familia de curvas. También es claro que el profesor conoce una diversidad de propiedades (significados) de la familia de funciones, en especial el hecho de que la

derivada de cualquier función que pertenezca a la familia tendrá uno y sólo un cero en el caso de que *n* sea par y, a lo más dos ceros, si *n* es impar.

Por otra parte, tomando en cuenta los argumentos expuestos en el problema No. 1 y los bosquejos de las gráficas que hace en éste, es claro que los ceros de la derivada los asocia con la posibilidad de que la curva cambie de dirección y, por tanto con la posibilidad de que corte más de un vez al eje X, que es la significación gráfica de las raíces de la ecuación. Esto es lo que le permite concluir que si la derivada de la función sólo tiene un cero, entonces no es posible que la ecuación tenga más de dos soluciones y que, si la derivada tiene cuando mucho dos ceros, entonces la curva no puede dar vuelta más de dos veces y, por tanto, la ecuación no puede tener más tres raíces.

El análisis de la manera en que el profesor procedió al resolver este problema, nos permitió identificar las siguientes asociaciones (funciones semióticas):

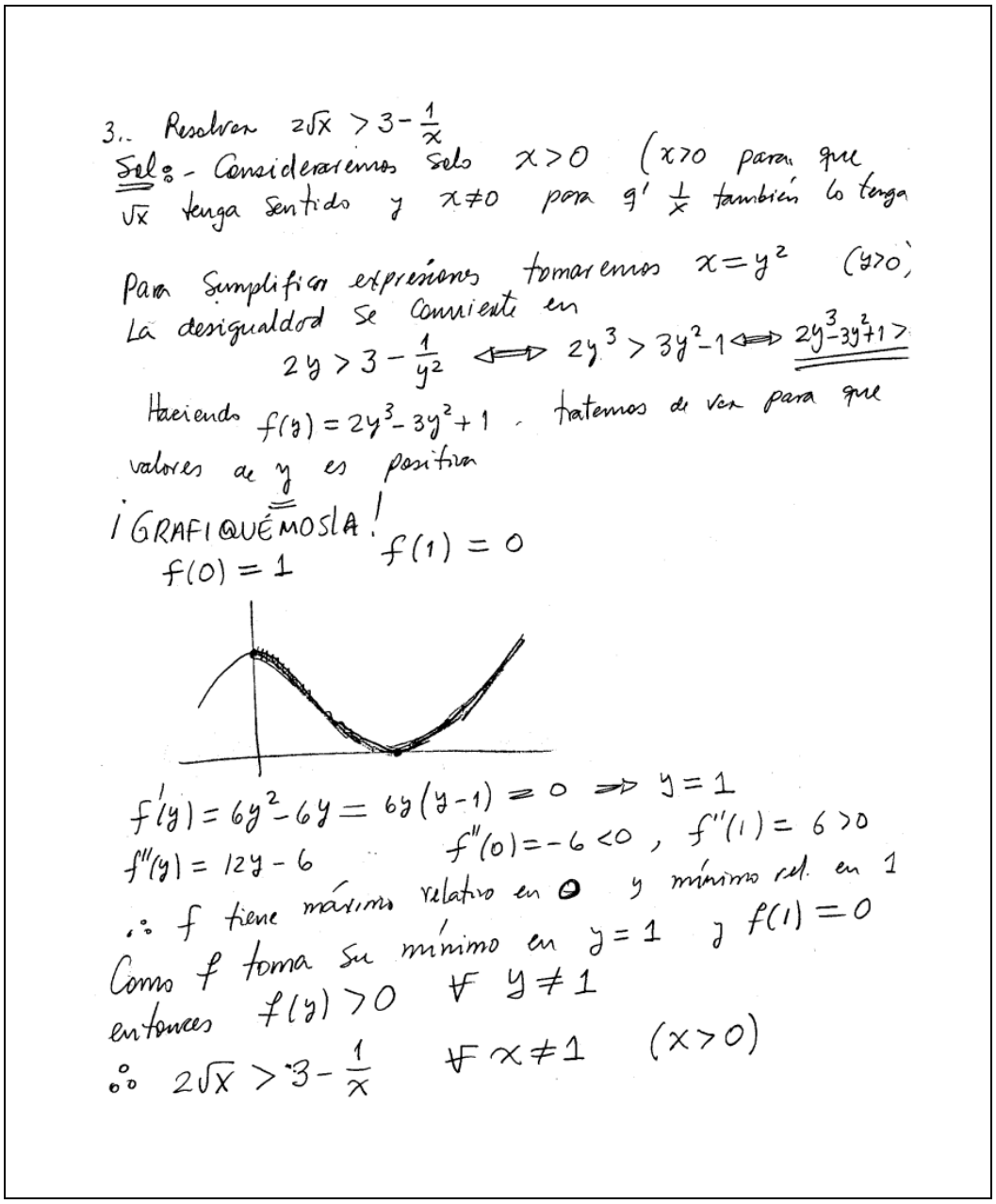
a) La expresión $x^n + px + q$ la concibe como un miembro de la expresión $f(x) = x^n + px + q$; la cual, a su vez, la concibe como la representación analítica de una familia de funciones, cuyos miembros pueden asociarse, por su comportamiento, en dos subconjuntos en función de si el valor de la *n* es un número par o un número impar.

b) Dada la similitud de este problema con el anterior, el proceder del profesor en este segundo caso, resulta menos explícita; sin embargo es fácil concluir que utiliza asociaciones equivalentes a las del problema 1, esto es, la expresión $f(x) = x^n + px + q$ la asocia con una familia de curvas que las agrupa en función del valor de *n*, en aquellas en las que *n* es par y aquellas en las que *n* es impar; el problema lo reformula con base en esta concepción; las condiciones de necesidad para que la curva corte o toque más de dos o tres veces al eje X, las asocia con el cambio de dirección de la curva y la posibilidad de que esto suceda, lo asocia también, como en el primer problema, con la derivada de la función. En general, la estrategia de solución de este problema es totalmente equivalente a la del problema 1, razón por la cual muchas de las asociaciones están implícitas en el proceso de solución.

Problema No. 3.

Resolver la desigualdad $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

Solución.



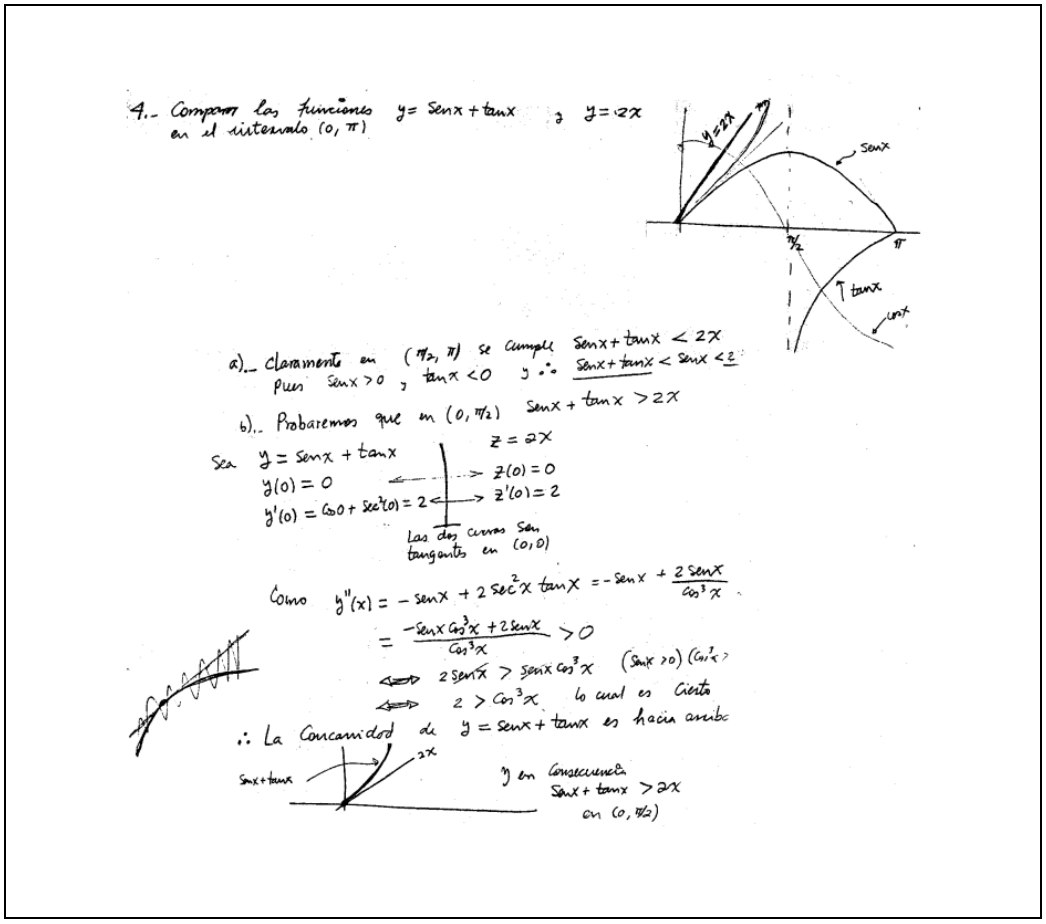
Análisis de la solución:

Todo el proceso de solución de este tercer problema reafirma lo observado en los dos anteriores, en cuanto a la diversidad de significados que el profesor asocia a las expresiones analíticas que aparecen en el problema, así como el papel que juega la representación gráfica de dichas expresiones en el diseño de la estrategia de solución y la coordinación de los registros gráfico y analítico para argumentar y justificar las afirmaciones que validan el proceso de solución.

Problema No. 4.

Comparar las funciones $y = Senx + Tanx$ y $y = 2x$ en $(0,\pi)$.

Solución.



Análisis de la solución:

El proceder del profesor en este problema es equivalente al utilizado en los tres primeros: En este caso no necesitó reformular el problema ya que, de entrada, se trata de un problema relativo a funciones; pero lo que sí hizo fue diseñar la estrategia de solución interpretando las expresiones analíticas como representaciones de curvas, de tal manera que comparar las funciones en el intervalo $(0,\pi)$ implicó determinar cuál de las dos curvas está por arriba y cuál por abajo en dicho intervalo. Incluso lo primero que hizo fue un bosquejo de las curvas. Bosquejó, en el intervalo $(0,\pi)$, las gráficas de *Senx, Tanx* y *2x;* bosquejó también la gráfica de *Cos(x)*. Dichas gráficas le permitieron percibir claramente lo que sucede en el intervalo $(\pi/2,\pi)$, en el cual *Senx + Tanx* resulta evidentemente menor que

2*x*; lo cual hizo que el problema se redujera a analizar lo que sucede en el intervalo $(0, \pi/2)$.

El bosquejo gráfico pone de manifiesto que entre las propiedades que forman parte del significado de las funciones *Senx* y *Tanx* están, al menos, las siguientes: en el intervalo $(0, \pi/2)$, la curva *Senx* permanece por debajo de la recta $y = 2x$; mientras que la curva *Tanx* empieza estando por debajo de la recta, pero hay un valor de la *x*, en el intervalo, para el cual ambas funciones son iguales y, después de dicho valor, *Tanx* queda por arriba de $y = 2x$. Sin hacer explícito el origen de la hipótesis declara que va a probar que, en $(0, \pi/2)$, *Senx + Tanx > 2x*, lo cual hace utilizando la siguiente estrategia: Primero evalúa ambas funciones en *x* = 0, obteniendo que ambas valen cero, luego, utilizando la segunda derivada, demuestra que la curva *y = Senx + Tanx* es cóncava hacia arriba, lo cual considera que es argumento suficiente para probar que, en $(0, \pi/2)$, *Senx + Tanx > 2x.*

El análisis de la manera en que el profesor procedió al resolver este problema, nos permitió identificar, además de las asociaciones (funciones semióticas) equivalentes a las establecidas en los primeros tres problemas, las siguientes:

a) La función *y = Senx + Tanx* la concibe como una curva que resulta de "sumar" las curvas *y = Senx* y *y = Tanx*; de cada una de estas funciones conoce su comportamiento y lo asocia con su respectiva gráfica.

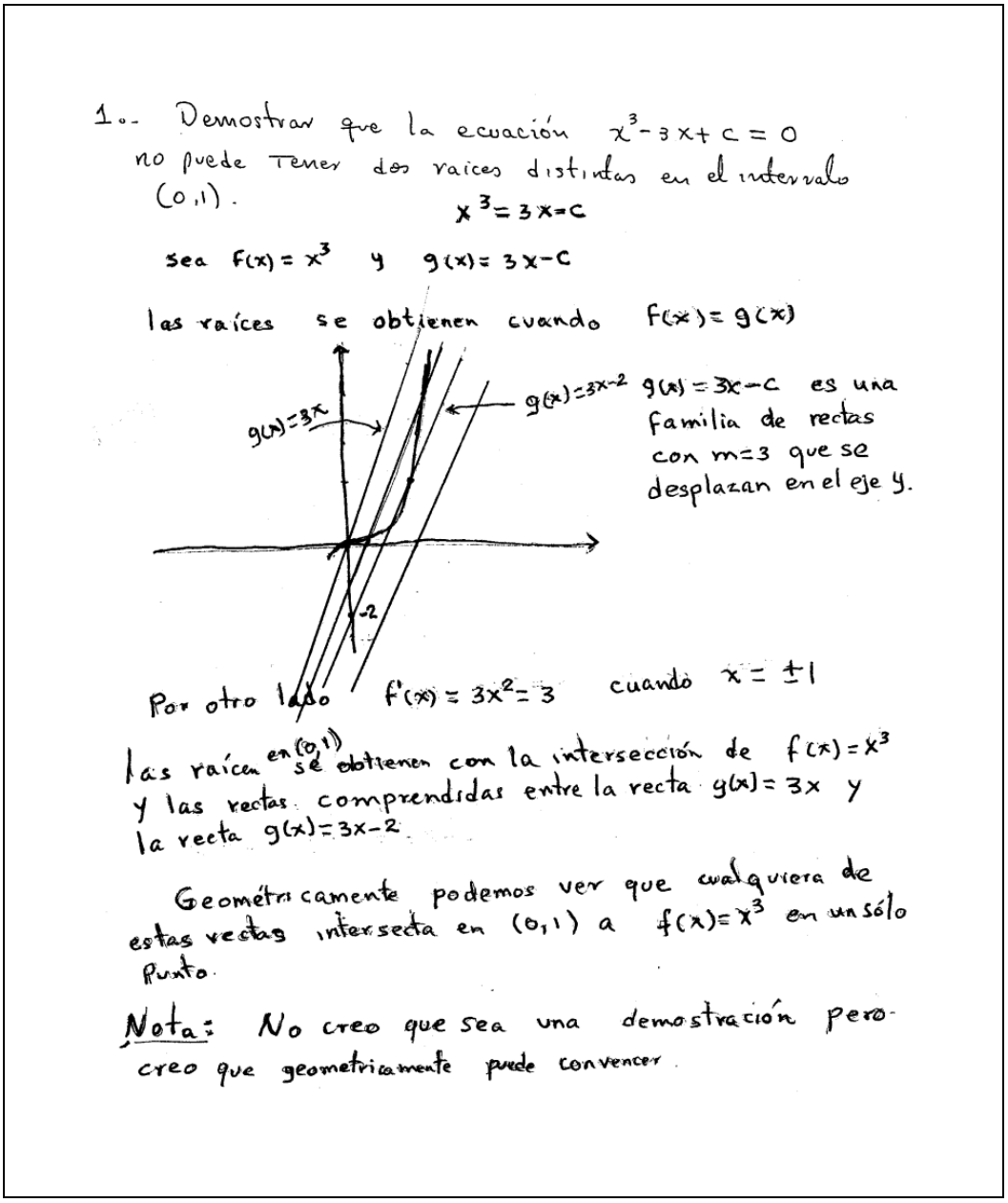
b) A partir de las gráficas correspondientes a *Senx* y *Tanx* sabe cómo operar con ellas para obtener un bosquejo de la gráfica de *y = Senx + Tanx.*

c) Asocia la segunda derivada de la función con la concavidad de la curva correspondiente; sabiendo que si la segunda derivada es positiva, la concavidad es hacia arriba y si la segunda derivada es negativa, la concavidad es hacia abajo.

Profesor No. 2

Problema No. 1.

Solución:



Análisis de la solución:

Este es otro ejemplo en el que el problema fue reformulado para plantearse como un problema relativo a funciones. Primeramente la ecuación $x^3-3x+c=0$, la escribe $x^3=3x-c$ e inmediatamente después dice: "Sea $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x-c$", para luego agregar: "las raíces se obtienen cuando $f(x) = g(x)$"

El problema ha sido reformulado. Ahora se trata de determinar los valores de *x* que hacen que ambas funciones valgan lo mismo.

A continuación aparece el bosquejo de unas gráficas, en donde es evidente que $f(x) = x^3$ es visto como la representación analítica de una curva y $g(x) = 3x\text{-}c$ como la representación analítica de una familia de rectas paralelas (que es una familia de rectas, lo dice explícitamente, y que son paralelas, lo expresa diciendo que m = 3 y dibujando varias de ellas, paralelas). En esta reinterpretación gráfica del problema, la igualdad $f(x) = g(x)$, se cumple cuando la curva y alguna de las rectas de la familia se intersectan, esto lo establece cuando dice: "Las raíces en (0,1) se obtienen con la intersección de $f(x) = x^3$ y las rectas comprendidas entre la recta $g(x) = 3x$ y la recta $g(x) = 3x\text{-}2$". Las rectas $g(x) = 3x$ y $g(x) = 3x\text{-}2$ son las que intersectan o tocan a la curva en los extremos del intervalo y por ello, sirven de cota al conjunto de rectas de la familia que cortan a la curva en algún punto del intervalo (0,1). Con base en estas consideraciones visuales, la estrategia de solución, en esta nueva versión del problema, consiste en probar que *cualquiera de las rectas de la familia que corta a la curva en el intervalo (0,1), lo hace en un solo punto*.

Sin embargo, la imagen gráfica que tiene de la función $f(x)$, en el intervalo (0,1) (una curva creciente, cóncava hacia arriba, que va del punto (0,0) al punto (1,1)) y la imagen gráfica de la familia de funciones, $g(x)$, como una recta de pendiente tres desplazándose de abajo hacia arriba en el eje Y, a medida que el valor de c aumenta, hace tan evidente que las rectas de la familia que intersectan a la curva en el intervalo (0,1) lo hacen una sola vez en dicho intervalo y que éstas se encuentran entre la recta $g(x) = 3x$, que intersecta a la curva en el punto (0,0), y la recta $g(x) = 3x\text{-}2$, que es tangente a la curva en el punto (1,1), que este hecho lo utilizó como argumento de prueba cuando dice: "Geométricamente podemos ver que cualquiera de estas rectas intersecta en (0,1) a $f(x) = x^3$ en un solo punto". Aunque termina con una nota que pone de manifiesto que su significado de prueba matemática no corresponde al tipo de argumento que en este problema utilizó. La nota dice: "No creo que sea una demostración pero creo que geométricamente puede convencer".

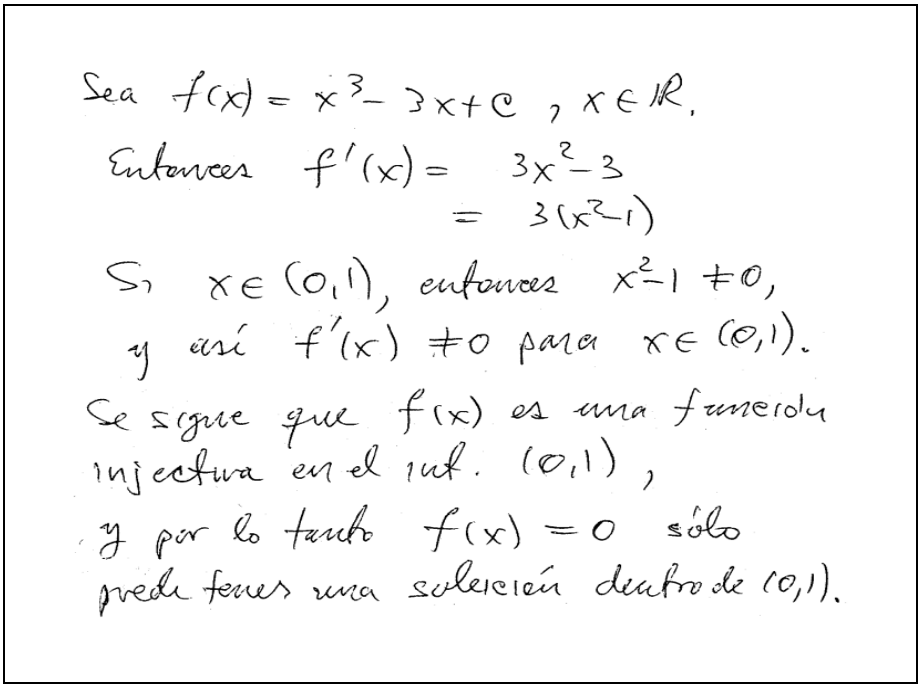
El proceder del Profesor No. 2, en los problemas 2 y 3, al igual que en el caso del Profesor No. 1, es muy similar al que tuvo en el problema 1, y sirve para reafirmar las significaciones que pone en juego en el proceso de resolución de este tipo de problemas. Lo mismo sucede con otros muchos profesores, de donde pudimos establecer que, en general, los profesores que usan los conceptos de función y derivada en el análisis, interpretación y resolución de problemas; utilizan la representación gráfica de la función para analizar e interpretar el problema, lo cual da pie a su reformulación como un problema relativo a las gráficas. En este nuevo

contexto diseñan la estrategia de solución, esto es, la representación gráfica no sólo juega un papel importante en el análisis del problema, sino también en el diseño de la estrategia de solución. Ya diseñada la estrategia, se observan dos maneras de proceder, la de aquellos que consideran que la demostración requiere de argumentos analíticos (esto se refleja desde el momento en que se formula la estrategia) y, aunque dicha estrategia se concibe a partir de la representación gráfica de la función, los argumentos que se utilizan son analíticos, lo cual indica, no sólo la comprensión de las propiedades de la función en ambos registros, sino la coordinación de los mismos, esto es, la comprensión de la correspondencia entre la forma de estar representada una propiedad en un registro y la forma de estar representada en el otro. La otra manera de proceder es la de aquellos que utilizan argumentos visuales, es decir, argumentan la validez de una afirmación diciendo que se ve en la gráfica. Esto parece deberse al significado de demostración matemática o a la falta de un buen nivel de coordinación entre los registros analítico y gráfico; es decir de no saber cómo argumentar analíticamente lo que dicen que es evidente en la gráfica.

Profesor No. 3

Problema No. 1

Solución:

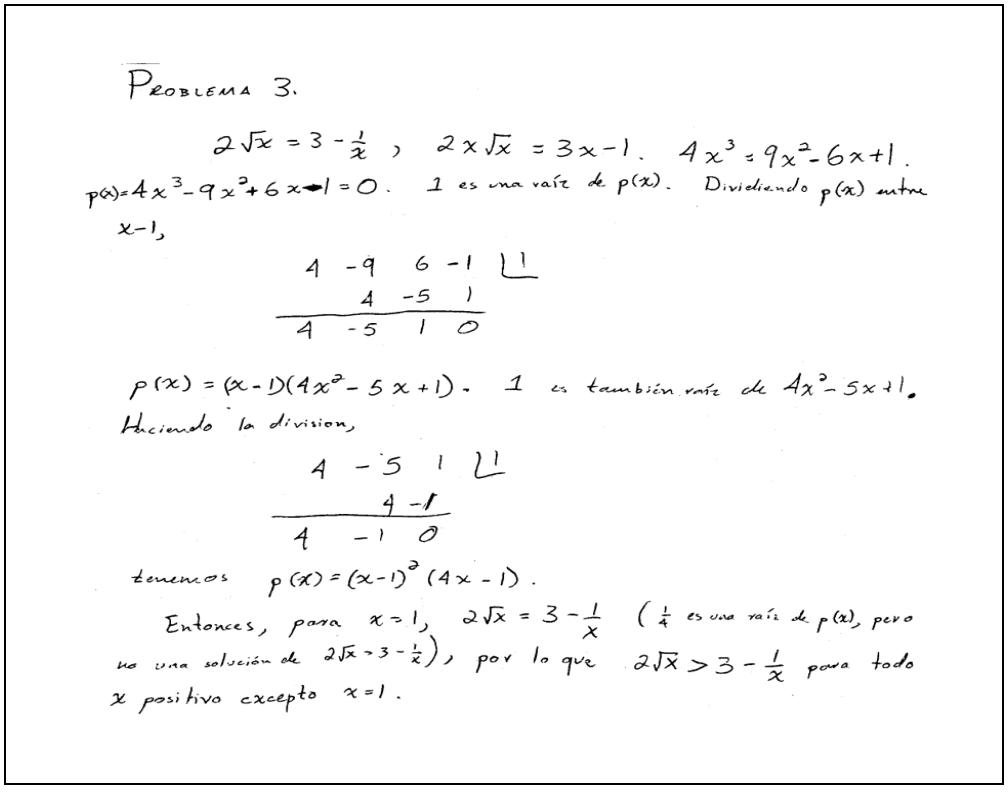


Análisis de la solución.

El análisis de la situación es equivalente al realizado por los profesores 1 y 2, en el sentido de haber reformulado el problema para plantearlo como un problema sobre la función $f(x) = x^3-3x+c$, para luego, sin declararlo, proceder a demostrar que dicha función es inyectiva en el (0,1), evidenciando que el requerimiento del problema original, de demostrar que $x^3-3x+c = 0$ no puede tener más de una solución en el (0,1) significó para este profesor, que probar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^3-3x+c$ es inyectiva en el (0,1). Para probar esto, utilizó varias propiedades de manera implícita, como es el caso de tratarse de un función continua y derivable en el (0,1) y que, por ello era suficiente probar que $f\,'(x) \neq 0$ en el (0,1) para asegurar que $f\,'(x)$ no cambia de signo en el intervalo, que equivale a decir que $f(x)$ es monótona en el (0,1) y, como consecuencia, es inyectiva. Asumiendo que la continuidad y la derivabilidad de $f\,(x)$ en el (0,1) no las enunció por considerar que tales propiedades son obvias para una función polinómica. Queda de manifiesto la diversidad de significados que el profesor tiene de las funciones en general y de esta función en particular; lo mismo que el uso creativo y adecuado que hace de las relaciones entre dichos significados.

Problema No. 3

Solución:



Problema 3.

$2\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{x}$, $2x\sqrt{x} = 3x - 1$. $4x^3 = 9x^2 - 6x + 1$.

$p(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$. 1 es una raíz de $p(x)$. Dividiendo $p(x)$ entre $x-1$,

	4	-9	6	-1	1
		4	-5	1	
	4	-5	1	0	

$p(x) = (x-1)(4x^2 - 5x + 1)$. 1 es también raíz de $4x^2 - 5x + 1$. Haciendo la división,

	4	-5	1	1
		4	-1	
	4	-1	0	

tenemos $p(x) = (x-1)^2(4x-1)$.

Entonces, para $x = 1$, $2\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{x}$ ($\frac{1}{4}$ es una raíz de $p(x)$, pero no una solución de $2\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{x}$), por lo que $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ para todo x positivo excepto $x = 1$.

Análisis de la solución.

En este problema, en el que se pide resolver una desigualdad, el proceso lo inicia determinando algebraicamente el valor o los valores de *x* para los cuales los miembros de dicha desigualdad son iguales. Para ello, transforma la igualdad en un polinomio y utiliza las propiedades de los polinomios que permiten factorizarlos. Logra factorizarlo y, de la expresión factorizada, determina que sólo hay un valor de *x* para el cual los miembros de la desigualdad son iguales e inmediatamente concluye que para cualquier otro valor de *x* se cumple la desigualdad, sin hacer explícito cómo determinó que así es.

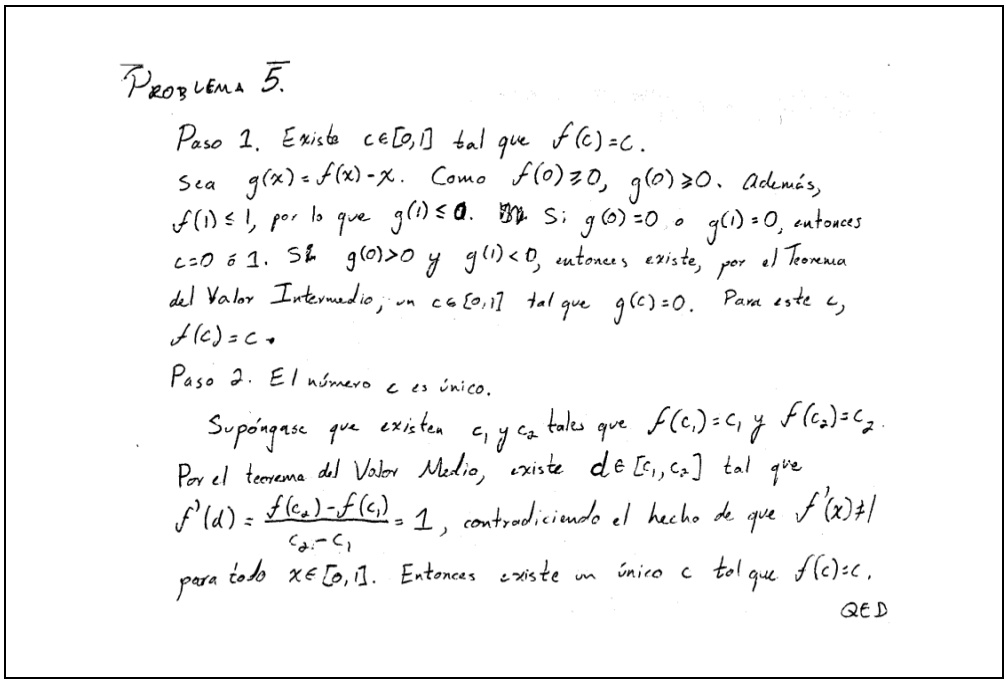
Por otra parte, no estableció explícitamente las condiciones de validez de la equivalencia entre la solución de la ecuación $2\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{x}$ y la solución de la ecuación polinomial $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$; aunque al resolver esta última obtiene dos soluciones y sí toma precauciones sobre la validez de estas dos soluciones en la primera ecuación, lo que lo lleva a descartar una y concluir que sólo una de las dos soluciones es válida.

Al igual que en el problema 1, sólo hace uso de argumentaciones analíticas y, aunque para resolver la ecuación que planteó al inicio, la transformó en una función polinomial, no hay indicios de que haya recurrido a alguna o algunas propiedades de las funciones para concluir que la desigualdad se cumple para todo valor diferente de uno.

Problema No. 5

Supóngase que *f*(*x*) es una función continua y derivable en [0, 1], que *f*(*x*) está en [0, 1] para todo *x* y que $f'(x) \neq 1$ para todo *x* en [0, 1]. Demostrar que existe exactamente un número *x* en [0, 1] tal que *f*(*x*)=*x*.

Solución:



Problema 5.

Paso 1. Existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c)=c$.
Sea $g(x)=f(x)-x$. Como $f(0)\geq 0$, $g(0)\geq 0$. Además, $f(1)\leq 1$, por lo que $g(1)\leq 0$. Si $g(0)=0$ o $g(1)=0$, entonces $c=0$ ó 1. Si $g(0)>0$ y $g(1)<0$, entonces existe, por el Teorema del Valor Intermedio, un $c \in [0,1]$ tal que $g(c)=0$. Para este c, $f(c)=c$.

Paso 2. El número c es único.

Supóngase que existen c_1 y c_2 tales que $f(c_1)=c_1$ y $f(c_2)=c_2$. Por el teorema del Valor Medio, existe $d \in [c_1, c_2]$ tal que $f'(d)=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}=1$, contradiciendo el hecho de que $f'(x)\neq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Entonces existe un único c tal que $f(c)=c$.

QED

Análisis de la solución.

En concordancia con su manera de proceder en los problemas anteriores, sus argumentos se refieren, en todos los casos, a propiedades de las funciones representadas en forma analítica.

Parte del requerimiento y dado que se pide "Demostrar que existe exactamente un número *x* en [0, 1] tal que *f*(*x*)=*x*" planea la demostración en dos pasos: primero probar que existe un valor de x en [0, 1] para el cual se cumple que *f*(*x*)=*x*, y luego probar que dicho valor es único.

Para probar lo primero, a partir de la expresión *f*(*x*)=*x*, crea la función $g(x) = f(x) - x$ que debe valer cero cuando *f*(*x*)=*x* y como esto debe suceder una y sólo una vez en [0, 1] de acuerdo con el requerimiento, esto significa que ha transformado el problema original, en el equivalente de probar que $g(x) = 0$ para un único valor en [0, 1].

Para probar que existe un valor de *x* en [0, 1] para el cual $g(x) = 0$, transfiere las condiciones de $f(x)$ a $g(x)$; diciendo: "Como $f(0) \geq 0$, $g(0) \geq 0$"; (lo cual es evidente ya que para $x = 0$, $g(x) = f(x) - x$ es equivalente a $g(x) = f(x)$) y agregando: "Además, $f(x) \leq 1$, por lo que $g(1) \leq 0$" (esto también resulta evidente).

Reformulado el problema, ahora se trata de probar que la función *g(x)* tiene un cero en [0, 1]; lo cual, dadas las condiciones de dicha función, de ser continua y derivable en [0, 1], ser mayor o igual que cero para $x = 0$ y menor o igual que cero para $x = 1$; resulta elemental a partir del Teorema del Valor Intermedio, que es el argumento que él utiliza para justificar la afirmación de la existencia del número $c \in [0, 1]$ para el cual $g(c) = 0$. Luego establece: "Para este *c*, $f(c) = c$".

Probado lo anterior, falta sólo probar que la solución es única. Lo hace por contradicción utilizando el Teorema del Valor Medio lo cual pone de manifiesto la diversidad de propiedades que forman parte del significado que de función continua y derivable tiene este profesor; lo mismo que el adecuado uso que hace de dichas propiedades, en el diseño de la estrategia de solución del problema, así como en su instrumentación. También resulta evidente la diversidad de significados que tiene de los métodos de prueba en Matemáticas.

5. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA FORMA DE PROCEDER DE LOS PROFESORES EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Los problemas del primer bloque (problemas 1, 2 y 3 del cuestionario) dieron lugar, en total, a setenta y dos intentos de solución, de los cuales, en cincuenta y tres de ellos, dichos problemas fueron transformados en problemas sobre funciones, mientras que en los diecinueve restantes fueron tratados como objetos algebraicos y, en consecuencia, los métodos utilizados, para tratar de resolverlos, fueron los del Álgebra.

De los cincuenta y tres intentos en los que los problemas fueron transformados en problemas sobre funciones, cuarenta y cinco los reformularon haciendo alusión a una curva (representación gráfica de la función); los ocho restantes reformularon los problemas haciendo referencia a la representación analítica de la función.

De los cuarenta y cinco que reformularon los problemas planteándolos como problemas relativos a la gráfica de una función, veinticinco lograron resolverlos correctamente y de ellos, diez lo hicieron utilizando los métodos analíticos del Cálculo, otros doce los resolvieron haciendo sólo consideraciones visuales (es decir, manifestando que lo que afirman es cierto porque se ve en la gráfica); los tres restantes hicieron consideraciones tanto visuales como analíticas. Otros seis de los cuarenta y cinco procedieron de manera similar a los veinticinco ya mencionados,

pero sólo lograron respuestas parcialmente correctas; mientras que los catorce restantes obtuvieron conclusiones incorrectas o no lograron obtener una respuesta.

De los ocho que dieron un tratamiento puramente analítico a las funciones, sólo uno lo hizo de manera incorrecta, los otros siete tuvieron éxito.

De los diez y nueve profesores que abordaron los problemas con los métodos del Álgebra, sólo cinco los resolvieron totalmente bien y dos obtuvieron respuestas parcialmente correctas; mientras que los doce restantes no lograron probar los que se pedía en los dos primeros problemas o no lograron resolver de manera correcta la desigualdad del problema tres.

Por lo que respecta a los problemas cuatro y cinco, que constituyeron el segundo bloque, resulta lógico que todos los intentos de solución hayan sido utilizando los métodos del Cálculo ya que dichos problemas, como puede verse, se refieren a funciones. Hubo veintinueve intentos de resolver el problema cuatro, de los cuales veintiséis recurrieron a la representación gráfica de la función, mientras que los otros tres recurrieron a la representación numérica.

De los veintiséis que recurrieron a la representación gráfica, sólo diez obtuvieron conclusiones correctas, cinco de ellos lo lograron haciendo un tratamiento analítico de la función; cuatro, a partir de consideraciones visuales, y uno haciendo consideraciones numéricas.

Hubo diecinueve intentos fallidos; dieciséis haciendo consideraciones visuales sobre la gráfica (no siempre correctas) y los tres restantes haciendo consideraciones numéricas sobre las funciones.

6. CONCLUSIONES

Las personas que resuelven con éxito problemas de Matemáticas no rutinarios relacionados con los conceptos de función y derivada de una función:

a) Utilizan, con propiedad y creatividad, los diversos registros de representación (verbal, analítico, gráfico, numérico) de dichos objetos, tanto en el proceso comunicativo, como en las diversas etapas del proceso de resolución del problema; es decir, en la etapa de análisis e interpretación de la información, en la de diseño de una estrategia de solución, en la de instrumentación de dicha estrategia, en la de formulación de la respuesta.

b) Tienen un alto dominio de las reglas de operación y de transformación de las expresiones en los diversos sistemas de representación.

c) Muestran capacidad para coordinar los diversos registros de representación de la función, esto es, son capaces de interpretar las características de una función, representada en un registro, y asociarlas con su representación en otro registro.

d) Tienen un repertorio amplio de conceptos y propiedades asociados con las funciones en general y con la función específica del problema, en particular.

e) Ponen de manifiesto una especial habilidad para transformar un problema en otro equivalente que resulta más adecuado para su resolución.

f) Tienen un buen repertorio de estrategias de solución de diversos tipos de problemas y las saben adecuar a las condiciones del problema para el diseño específico de la estrategia a utilizar en el problema concreto que se quiere resolver.

g) Usan, con bastante frecuencia, la representación gráfica de la función para reformular el problema; lo mismo que para diseñar la estrategia de solución.

h) Con frecuencia utilizan el lenguaje asociado a la representación gráfica, como argumento de prueba.

i) Diseñan estrategias de solución a partir de la representación gráfica de la función a que se refiere el problema, pero los argumentos que utilizan para desarrollar dicha estrategia, procuran que se refieran a la representación analítica.

j) Muestran familiaridad con la manera de argumentar en Matemáticas.

k) Tienen una concepción clara y precisa de lo que significa demostrar en Matemáticas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En, P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). Bogotá: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35. http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica. México. Segunda Edición.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. London: Lawrence Erlbaun Ass.

OBTENCIÓN DE EXPRESIONES ANALÍTICAS A PARTIR DE GRÁFICAS: EL CASO DE LAS FUNCIONES SENOIDALES[4]

Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez

Universidad de Sonora

RESUMEN

El objetivo general de este trabajo consiste en explorar el papel que puede jugar la transformación de la gráfica a la expresión analítica, en la organización de una secuencia didáctica que tiene por objetivo el estudio de funciones senoidales de la forma $f(x) = asen(d(x-c)) + b$, como modelo de la variación periódica. Se plantea la posibilidad de un diseño didáctico diferente a los habituales, tomando en consideración el uso sistemático de este tipo de transformaciones, gracias a la incorporación de la calculadora simbólica como recurso didáctico. Se parte del hecho de que a través de distintas representaciones vinculadas dinámicamente se pueden favorecer los procesos de abstracción, de generalización y, en general, el establecimiento de muchas y muy diversas funciones semióticas. Para el análisis de la secuencia didáctica, así como de las actuaciones de los estudiantes se hace uso de la Teoría de las Funciones Semióticas, desarrollada por Godino (2002).

GEETING ANALYTIC EXPRESSIONS FROM GRAPHS: THE CASE OF SINOIDAL FUNCTIONS

ABSTRACT

We explore the role that a transformation from graphical to analytic expression can play in organising a didactic sequence to study sinoidal functions such as $f(x) = asen(d(x-c)) + b$, as a model of periodic variation. This didactic design takes into consideration the systematic use of this transformation, in incorporating the symbolic calculator as a didactic resource. We base on the fact that it is possible to favour the abstractions and generalization processes, as well as the establishing of varied and numerous semiotic functions through the different linked dynamic representations. The analysis of the didactic sequence and the students' performances is carried out from the Theory of Semiotic Functions (Godino, 2002).

[4] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 296-328)

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos básicos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del cálculo es, sin duda, el concepto de función. Numerosas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto. Artigue (2000) sintetiza y presenta algunos resultados de investigaciones didácticas, y en lo que se refiere al concepto de función, encuentra que existen dificultades para relacionar los diferentes registros de representación semiótica (Duval, 1995) que permiten representar y trabajar con funciones, haciendo especial referencia a las dificultades de traducción del registro gráfico al algebraico.

Debido a los grandes avances tecnológicos, es cada vez más usual que en nuestra vida cotidiana se nos presente información a través de gráficas, y para hacer esta información operativa, en muchos casos se requiere de expresiones analíticas o simbólicas asociadas.

Sin embargo, el paso de la gráfica a la expresión analítica ha sido muy poco explotado en el ámbito escolar. Al respecto, Hitt (2000), señala que es poco usual que se le solicite a un estudiante construir una expresión algebraica asociada a una gráfica.

Los sistemas de cómputo simbólico permiten llevar a cabo de manera inmediata transformaciones entre algunas representaciones asociadas al concepto de función: de expresión simbólica a gráfica, de expresión simbólica a expresión simbólica, de expresión simbólica a tabla, de tabla a tabla, de tabla a gráfica, de gráfica a tabla, y también puede llevarse a cabo en muchos casos la transformación de tabla a expresión analítica mediante ajuste de curvas. Sin embargo, el paso directo de gráfica a expresión simbólica no es tan inmediato, y aunque pudiera automatizarse mediante recursos de programación, éste requiere especial atención. Este problema puede abordarse desde la perspectiva de familias de funciones y transformaciones.

Font (2001) menciona que si consideramos la gráfica de una función, una estrategia adecuada para obtener una expresión simbólica consiste en elegir el tipo de función de ajuste, es decir, elegir una familia de funciones $f(x, a_1, a_2, ..., a_n)$ en cuya expresión figuran los parámetros $a_1, a_2, ..., a_n$ y determinar el valor de estos parámetros. Si los estudiantes sólo han realizado actividades en las que se hace referencia a funciones concretas consideradas aisladamente, y no son consideradas como miembros de familias de funciones, es de esperarse que tengan muchas dificultades a la hora de resolver esta tarea, pues no podrán relacionar la variación de los parámetros con la variación de las gráficas. En especial, para lograr el paso

de la gráfica a la expresión simbólica se requiere de una visión global de las familias de funciones. En este trabajo se ha seleccionado la familia de funciones senoidales del tipo $f(x) = asen(d(x-c)) + b$, por la riqueza y diversidad de sus elementos, lo cual nos permite discriminar visualmente los efectos de las transformaciones básicas como son traslaciones, contracciones, dilataciones, reflexiones, tanto en sentido vertical como horizontal. Pensamos que este enfoque puede ser útil para la creación de estrategias por los estudiantes para el estudio de otros tipos de funciones.

2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El propósito de la investigación puede centrarse en la siguiente pregunta:

¿Cuál es el papel que puede jugar el paso de la representación gráfica a la representación analítica en el diseño de una secuencia didáctica que tenga por objetivo el estudio de las funciones senoidales como modelo de la variación periódica, dado que se cuenta con la calculadora simbólica como recurso didáctico?

Esta pregunta puede desglosarse, a su vez, en una serie de preguntas más específicas, las cuales se plantean a continuación:

¿Qué situaciones problémicas permiten considerar el paso de gráfica a expresión analítica en un diseño didáctico? ¿Cómo evolucionan las actuaciones o manifestaciones de los estudiantes en el análisis y resolución de situaciones problémicas asociadas a funciones senoidales, como consecuencia de una organización didáctica que contempla el paso de la representación gráfica a la analítica, mediada por el uso de la calculadora simbólica? ¿Qué dificultades presentan los estudiantes para el paso de la gráfica a la expresión analítica? ¿Qué tareas permiten promover el paso de la representación gráfica a la analítica?

3. TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

En este trabajo de investigación las consideraciones teóricas se hacen en la línea de la Teoría de las Funciones Semióticas, desarrollada por J. D. Godino (2002.). La Teoría de las Funciones Semióticas es un modelo teórico sobre la cognición matemática que atribuye un papel clave a los recursos expresivos, articula las facetas personales e institucionales del conocimiento matemático, y busca asumir coherentemente supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. Se asume que los objetos matemáticos emergen y evolucionan a partir de

situaciones problémicas, es decir, su naturaleza es pragmática. Pero también pueden ser referenciados, por lo que igualmente se les atribuye una realidad cultural.

Una de las nociones claves de esta teoría es la de *sistema de prácticas personales* asociadas a un campo de problemas. Éste está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas. Se define entonces el *objeto personal* como un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Este sistema de prácticas de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal en un momento dado, constituye su *significado personal*.

Por otro lado, también se considera la faceta institucional de los objetos y significados. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problémicas. El compromiso mutuo con una misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Así, se define un *sistema de prácticas institucionales*, asociado a un campo de problemas, como aquél que está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver dicho campo de problemas, y que son compartidas en el seno de la institución. Se define entonces el *objeto institucional* como un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, y este sistema de prácticas sociales del cual emerge, constituye su *significado*, el cual tiene carácter de *institucional*.

Para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se considera necesario hacer explícitos los distintos tipos de objetos mediante los cuales se puede describir la actividad matemática y sus productos. En la Teoría de las Funciones Semióticas se proponen los siguientes tipos de entidades:

Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos).

Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas, ejercicios, etc.).

Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, estrategias, etc.).

Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones.

Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones.

Estos seis tipos de entidades que se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos. Las situaciones problémicas promueven y contextualizan la actividad matemática, y junto con las acciones constituyen el componente praxémico de las matemáticas, por lo que podemos considerarlos como praxis. Los otros tres componentes desempeñan un papel normativo en las matemáticas. Son el resultado de una actividad reflexiva y regulativa de la praxis; y constituyen el componente teórico o discursivo (logos). Este agrupamiento de las entidades matemáticas en praxis y logos no supone su independencia mutua. El lenguaje está presente de manera intrínseca y constitutiva tanto en la praxis como en el logos; el logos encuentra su razón de ser en la praxis y ésta se desarrolla y rige por el logos.

Los objetos matemáticos también pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

Personal – institucional: en relación con una persona o con una institución.

Ostensivo – no ostensivo: Cualquier objeto matemático tiene una faceta ostensiva, esto es, perceptible, en cuanto que es reconocido como tal por una institución, lo que implica que se habla de dicho objeto, se le nombra y se comunica sus características a otras personas, por medio del lenguaje oral, escrito, gráfico o simbólico. Por otro lado, cualquiera de estos objetos tiene otra faceta no ostensiva, en cuando un sujeto es capaz de pensar e imaginar uno de tales objetos sin necesidad de mostrarlo externamente.

Elemental – sistémico: Se trata de tener en cuenta el carácter recursivo y complejo del conocimiento matemático. Cuando nos interrogamos por cualquier objeto (problema, lenguaje, acción, concepto, propiedad, argumento) aparece un sistema en el que de nuevo se ponen en juego los restantes tipos de objetos y la trama de conexiones que los relacionan.

Ejemplar – tipo: En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema.

Expresión – contenido: La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. Son los componentes en una función semiótica.

Entre los significados institucionales pueden distinguirse cuatro tipos: el significado de referencia, el pretendido, el implementado y el evaluado. En el diseño de una secuencia didáctica sobre un determinado objeto

matemático, se comienza por delimitar lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas, consultando programas de estudio, libros de texto, etc., construyendo un sistema de prácticas que se designa como *significado institucional de referencia* del objeto. El *significado institucional pretendido* es aquél que el profesor selecciona, ordena y delimita a partir del significado de referencia, para proponer a sus estudiantes durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta los recursos disponibles. El *significado institucional implementado* es el que efectivamente tiene lugar en el aula y el *significado institucional evaluado* es el constituido por las tareas o cuestiones seleccionadas por el profesor que incluirá en las evaluaciones.

En cuanto a los significados personales podemos distinguir tres tipos: el *global*, que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que el estudiante puede manifestar potencialmente; el *declarado*, que corresponde a las prácticas efectivamente expresadas, incluyendo las consideradas correctas y las incorrectas; y el *logrado*, que corresponde a las prácticas manifestadas que concuerdan con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado que no concuerda con el institucional es lo que usualmente se considera como errores de aprendizaje.

La noción de *función semiótica* es una correspondencia entre un antecedente, también llamado expresión o significante, y un consecuente, (contenido o significado), establecida por un sujeto, sea una persona o una institución, de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. El papel de expresión y de contenido puede ser adoptado por los distintos tipos de objetos matemáticos introducidos en el modelo ontológico y no sólo por las entidades lingüísticas. Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional, cuando un objeto se pone en lugar de otro; instrumental u operatoria, cuando un objeto es usado por otro como instrumento; y componencial o cooperativa, cuando dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos. Así, el papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje, sino que también las situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos pueden ser también signos de otras entidades. Es por eso que en esta teoría se afirma haber generalizado de manera radical la noción de representación, usada en las investigaciones de corte cognitivo en Matemática Educativa. Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional pues se ponen en lugar de las restantes, y también tienen un papel instrumental en la actividad matemática, pues son usadas por las otras entidades.

La noción de función semiótica, la tipología de objetos matemáticos asociada y las dualidades cognitivas se usan para desarrollar una técnica analítica que permite determinar o caracterizar los significados que se ponen en juego tanto en la actividad matemática como en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. El análisis ontológico-semiótico de un texto matemático consiste en su descomposición en unidades elementales, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que pueden establecerse entre las mismas por parte de los sujetos. Cuando se analizan las respuestas de un estudiante, esta técnica permitirá caracterizar sus significados personales, los cuales pueden ser contrastados con el significado institucional de referencia. Un conflicto semiótico es cualquier tipo de disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. En esta teoría se considera que los conflictos semióticos permiten explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos, detectando disparidad de interpretaciones o vacíos de significación, lo cual hará necesarios la negociación de significados y los cambios en los procesos de estudio.

4. METODOLOGÍA

Se considera adecuado emplear un modelo de análisis cualitativo, a través de estudio de casos, ya que el interés está centrado en la evolución de los significados personales de los estudiantes de los objetos matemáticos puestos en juego como consecuencia de la aplicación de una secuencia didáctica. La técnica del análisis ontológico-semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Las dificultades de los estudiantes y las limitaciones de los significados puestos en juego, pueden ser explicadas en términos de conflictos semióticos.

En este trabajo se presentan algunos análisis y resultados siguiendo el siguiente esquema:

- Análisis ontológico-semiótico de las funciones senoidales desde una perspectiva didáctica para caracterizar su significado institucional de referencia, identificando las principales conexiones entre las diferentes entidades lingüísticas, como representaciones gráficas, analíticas, tabulares y de la lengua natural, con el propósito de sustentar el diseño de la secuencia didáctica en el establecimiento intencionado de dichas conexiones durante la enseñanza.
- Presentación de una propuesta propia para el tratamiento didáctico de las funciones senoidales, adecuada a la calculadora simbólica como

recurso didáctico y al enfoque de representaciones dinámicas, la cual contempla el paso de la representación gráfica a la representación analítica. El diseño de la secuencia didáctica, se materializa en un paquete de hojas de trabajo, y en un paquete de archivos y programas interactivos para la calculadora simbólica. Esta propuesta se elabora después de la identificación y análisis de otras propuestas.

- Análisis global de las actuaciones de los estudiantes de un grupo de Cálculo Diferencial e Integral I del Área de Ciencias e Ingeniería durante el desarrollo de la secuencia didáctica, identificando tendencias y regularidades de los significados personales puestos en juego. Las unidades elementales de análisis son cada una de las hojas de trabajo que constituyen la secuencia didáctica. Este grupo se sometió durante un semestre a una innovación curricular que involucra el uso de la calculadora simbólica Voyage 200 de Texas Instruments en un ambiente de laboratorio y con el uso de materiales teóricamente fundamentados.

5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

5.1 Significado institucional de referencia de las funciones senoidales.

Se presenta a continuación un resumen del análisis onto-semiótico, mostrando los elementos constituyentes del significado.

Situaciones: Problemas geométricos, movimiento circular uniforme, nivel de agua en una cuenca de marea, presión sanguínea del corazón, movimiento ondulatorio, vibraciones, consumos eléctricos, corriente alterna, clima, descripción matemática del sonido, fenómenos de naturaleza periódica, series de Fourier, relaciones entre gráficas y expresiones analíticas, discriminación de elementos pertenecientes a una familia de funciones, identificación de transformaciones aplicadas a las gráficas y su relación con la transformación de la expresión analítica, etc.

Acciones: Uso de identidades trigonométricas; graficación de funciones; obtención de expresiones analíticas a partir de gráficas; cálculo del período, amplitud, frecuencia, valor promedio; evaluación de funciones trigonométricas.

Conceptos: ángulos, radianes, grados, triángulos, razones trigonométricas, círculo unitario, ángulo central, longitud de arco, función, familia de funciones, transformaciones, funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, funciones trigonométricas inversas, expresión

analítica, gráfica, crecimiento, decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión, etc.

Propiedades: Periodicidad, Amplitud, Frecuencia, Fase, Valor promedio, Simetría, rango,

Argumentaciones: utilizadas para establecer la relación entre los parámetros presentes en una expresión analítica y las características de la gráfica asociada, etc.

Lenguaje: designaciones nominales para todos los conceptos y propiedades, gráficas, expresiones simbólicas, tablas, etc. Las funciones senoidales son representadas analíticamente mediante la forma general $f(x) = asen(d(x-c)) + b$. Esta expresión involucra una serie de parámetros que determinan las propiedades o características particulares de la función, como rango, período, desfasamiento, frecuencia, etc. Dada la naturaleza periódica de la función, se cuenta con una infinidad de representaciones analíticas para una función senoidal en particular. Esto le confiere una buena dosis de complejidad al tratamiento analítico de las expresiones de este tipo. Estas y otras identidades trigonométricas hacen que la expresión analítica no sea única para un elemento de la familia en particular, lo cual resulta particularmente significativo e importante cuando se recurre al uso de dispositivos CAS. En la representación gráfica se hacen patentes otras características de una función senoidal. Allí aparecen diversos elementos (puntos de corte con los ejes, ejes de simetría, periodicidad, amplitud, frecuencia, crecimiento, decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión, etcétera) que permiten apreciar el papel de los parámetros mencionados en el párrafo anterior. En una representación numérica o tabular, es posible apreciar algunas de las características y elementos identificados en las representaciones analíticas y gráficas, como crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, cortes con los ejes, etc. Se utiliza el lenguaje natural para las designaciones nominales, para descripciones, para relacionar los diferentes elementos del significado, en las definiciones, etc.

La descripción anterior muestra el alto nivel de complejidad de la función senoidal como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Su tratamiento analítico involucra una infinidad de formas; su tratamiento gráfico es rico en elementos y relaciones; y es un objeto que se encuentra involucrado en gran número de fenómenos de naturaleza periódica.

Una revisión de la literatura muestra que la enseñanza de la función seno se inicia a partir de una situación en el contexto geométrico, para obtener así una expresión analítica de la función seno básica $f(x) = senx$. Posteriormente se estudian las características de la función seno a través de la interpretación de los parámetros presentes en la expresión

$f(x) = asen(d(x-c)) + b$ utilizando gráficas para la visualización de dichas características. Cabe señalar que en esta fase se privilegia la obtención de la gráfica a partir de la expresión analítica, ignorándose en la mayoría de los casos el problema inverso, es decir, la obtención de la expresión analítica a partir de la gráfica, objeto de estudio en esta investigación. En este esquema general de enseñanza, y centrando nuestra atención en la articulación de expresiones analíticas y gráficas, podemos apreciar algunas variantes, pero la presencia de las calculadoras avanzadas amplía la posibilidad de un tratamiento más integral del tema, sobre todo por sus capacidades para manejar múltiples representaciones dinámicas, y por permitir el diseño de programas interactivos para el estudiante.

5.2 Significado institucional pretendido

A partir del significado institucional de referencia se seleccionó un subsistema de prácticas, el cual fue llevado al aula. Esto constituye el significado institucional planeado de acuerdo a las preguntas de investigación formuladas. No es un diseño completo, sino que se delimita de acuerdo a los objetivos de la investigación.

La secuencia didáctica quedó estructurada de la siguiente manera:

- Se parte de una situación particular (se toma como contexto el movimiento circular uniforme); se hace una simulación dinámica de la situación utilizando un archivo Cabrí y se construye la gráfica asociada.
- Posteriormente se cambia uno de los elementos de la situación; se simula la nueva situación; se construye la nueva gráfica; se generaliza de una situación particular a un cierto tipo de situaciones y se identifica la familia de curvas asociada al tipo de situaciones.
- Se cambia otro elemento de la situación original y se repite el proceso mencionado en el punto anterior. Esto se hace varias veces, hasta agotar las distintas transformaciones a considerar: traslaciones, contracciones y dilataciones, tanto en sentido vertical como horizontal. Se comparan los diferentes tipos de gráficas obtenidas.
- Se considera la situación que da origen a la función seno básica y se deduce su expresión analítica.
- Estudio de las transformaciones gráficas y su relación con la variación de parámetros en la expresión simbólica $f(x) = asen(d(x-c)) + b$. Se opta por explorar el papel de los parámetros desde el punto de vista de familia de funciones y

transformaciones en el plano para provocar una reflexión más global que pueda ser aplicable a otras funciones.

- Una nueva situación.

El diseño de la secuencia didáctica se materializó en dos archivos Cabri, tres programas interactivos para la calculadora y 23 hojas de trabajo. Una parte de estos materiales se describen en la siguiente sección, aquéllos que tienen que ver con el estudio de las traslaciones en sentido vertical. Para cada una de las otras transformaciones, se hizo un diseño semejante.

5.3 Significado institucional implementado

El grupo en el que se llevó a cabo la investigación había trabajado desde el inicio del semestre en un ambiente de laboratorio de calculadoras, utilizando materiales didácticos teóricamente fundamentados, que involucran el uso sistemático de la calculadora simbólica. Para ellos no fue algo nuevo la dinámica de clase propuesta para el desarrollo de la secuencia didáctica, pero los estudiantes no habían utilizado con anterioridad el software Cabrí, que sirve como apoyo a las primeras hojas de trabajo. Sin embargo, no hubo grandes dificultades, pues los archivos Cabrí se diseñaron para que pudieran ser manejados aunque no se contara con experiencia en su uso. Los estudiantes trabajaron a su propio ritmo y se les informó que podían interactuar con sus compañeros o maestro a voluntad. El maestro encargado del grupo comentó que, aunque los estudiantes habían trabajado de esa manera desde el inicio del semestre, éstos se habían mostrado reacios al trabajo en equipo y preferían trabajar individualmente. Y efectivamente, esa fue la tendencia observada al inicio de las actividades. Sin embargo, conforme los estudiantes fueron avanzando se observó que las interacciones entre ellos empezaron a darse, tal vez debido a la necesidad de negociar significados. Cuando estas interacciones resultaban ser insuficientes para lograr el objetivo deseado, los estudiantes buscaban interactuar con el profesor.

Archivos cabrí.

Los archivos Cabrí senoide y grafica se utilizan para la simulación dinámica del movimiento circular uniforme y la construcción de las gráficas correspondientes. Constituyen representaciones gráficas dinámicas de las situaciones propuestas en las hojas de trabajo 2 a la 7, y sirven como herramientas auxiliares para el análisis del comportamiento de la ordenada del punto del plano que representa a una partícula en movimiento sobre una

circunferencia, así como para la construcción de la gráfica de esta ordenada con respecto al tiempo.

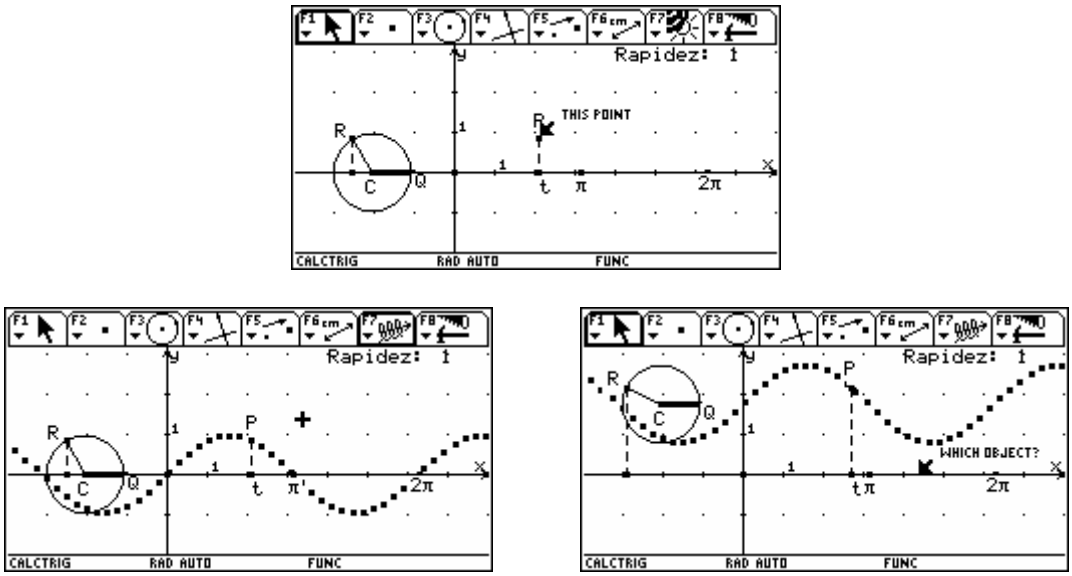


Fig. 1. Gráfica de la situación original y traslaciones en sentido vertical

Los programas para la calculadora

El programa senoidal() muestra representaciones gráficas y simbólicas dinámicamente vinculadas de la familia de funciones $f(x) = asen(d(x-c)) + b$. Estas representaciones dinámicas se logran desplegando en pantalla una secuencia de imágenes relacionadas de manera especial, de modo que al aparecer rápidamente una tras otra, crean la ilusión de movimiento. Con esta puesta en correspondencia de las representaciones gráficas y analíticas se busca favorecer la articulación de los dos registros mencionados, así como promover la construcción de significado para las transformaciones gráficas, como traslaciones, contracciones, dilataciones y reflexiones, las cuales son accesibles a través de un menú de usuario que utiliza esta terminología. La exploración se hace de una manera guiada a través de las hojas de trabajo. Los estudiantes exploran, hacen conjeturas y se les pide argumentar a favor de sus conjeturas.

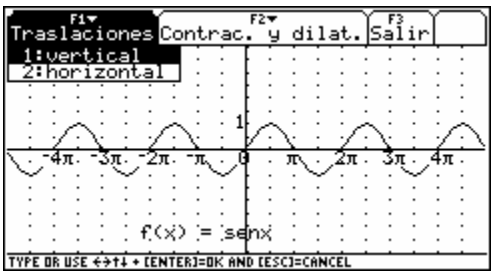


Fig. 2. Seleccionando una animación

Por ejemplo, al seleccionar la opción de traslación vertical (Ver Fig. 2), en la pantalla de la calculadora aparecerá una animación en la que la gráfica sube y baja de manera cíclica un número determinado de veces, al tiempo que se presenta su expresión analítica correspondiente. Para el diseño de la animación se tomaron elementos de la familia $f(x) = senx + b$ haciendo variar el parámetro *b* desde –2 hasta 3, con incrementos de 1/2, lo cual hace un total de 11 imágenes en la secuencia.

Con este programa se busca promover, además, una percepción dinámica operatoria de las representaciones gráficas y analíticas.

En la **Tabla 1** se muestran algunas oposiciones estática/dinámica en relación con las representaciones gráficas y analíticas de la familia de funciones senoidales de la forma $f(x) = asen(d(x-c)) + b$.

	Gráfica	**Analítica**
Estática	Amplitud de la función seno	Parámetro *a* en $f(x) = asenx$
Dinámica	Dilatar o contraer en sentido vertical	$\|a\|$ crece o $\|a\|$ decrece
Estática	Frecuencia de la función seno	Parámetro *d* en $f(x) = sendx$
Dinámica	Dilatar o contraer en sentido horizontal	$\|d\|$ decrece o $\|d\|$ crece
Estática	Ángulo de desfasamiento de la función seno	Parámetro *c* en $f(x) = sen(x-c)$
Dinámica	Trasladar hacia la derecha Trasladar hacia la izquierda	*c* crece *c* decrece [5]
Estática	Valor promedio de la función seno.	Parámetro *b* en $f(x) = senx + b$
Dinámica	Trasladar hacia arriba Trasladar hacia abajo	*b* crece *b* decrece

Tabla 1. Visión estática vs. visión dinámica

El programa cuantos() permite al estudiante aplicar transformaciones sucesivas a una curva senoidal y analizar el efecto de estas transformaciones sobre la expresión analítica de la función. Con este programa se podrá trasladar, contraer, dilatar y reflejar la gráfica.

[5] Se debe tener cuidado con la periodicidad de la función seno.

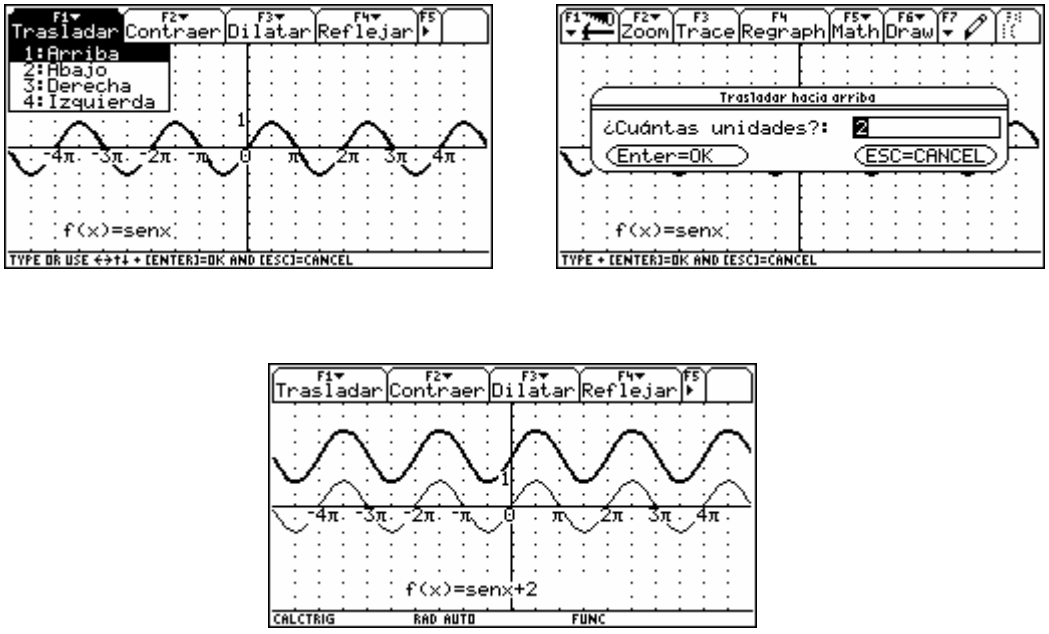


Fig. 3. Seleccionando una transformación

El estudiante debe seleccionar un tipo de transformación e introducir un dato numérico para determinarla. Este es un punto delicado en la ejecución del programa pues se debe tratar de prever cualquier situación anómala en la introducción de los datos, y controlarla mediante recursos de programación para evitar que éste se interrumpa. Este programa se usa conjuntamente con algunas hojas de trabajo de la secuencia, en la que se propone al estudiante seleccionar la transformación adecuada para obtener una gráfica a partir de otra. En la **Fig.3** se muestra una secuencia posible en la operación de este programa.

El programa adivfor() fue creado para que de una manera interactiva y en un ambiente de juego, los estudiantes prueben sus habilidades para el paso de la representación gráfica a su expresión simbólica.

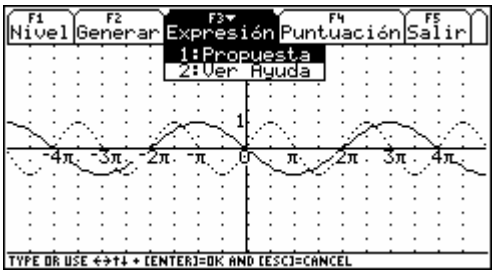


Fig. 4. El paso de la gráfica a la expresión simbólica

Para tal efecto, el programa genera gráficas de funciones senoidales utilizando números aleatorios que dependen del nivel o grado de dificultad seleccionado. Como las gráficas generadas son elementos de la familia $f(x) = asen(d(x-c)) + b$, la cual tiene cuatro parámetros, se consideran cuatro niveles de complejidad dependiendo del número de parámetros a variar en esta expresión. Se asume que el caso más sencillo es el de la función básica $f(x) = senx$ en donde los valores de *a*, *b*, *c* y *d* son, respectivamente, 1, 0, 0 y 1. A partir de allí, se seleccionan y se cambia el valor de un cierto número de ellos dependiendo del nivel de complejidad seleccionado. El estudiante debe proporcionar la expresión analítica a la calculadora, y ésta validará que la expresión sea correcta. La calculadora lleva cuenta de cuántas gráficas genera el estudiante, cuántas logra identificar, cuántos intentos fallidos tuvo para cada una de las gráficas, en qué nivel de complejidad estuvo manejando cada una de ellas. Toda esta información se almacena en una tabla con datos de identificación del estudiante (nombre, apellido) para su posterior revisión. El estudiante no sabe que se genera esta tabla, él registra en una hoja de trabajo toda esta información. El archivo almacenado sirve para contrastar la información proporcionada por el estudiante.

Las hojas de trabajo

En esta sección se presentan los análisis y resultados obtenidos en algunas hojas de trabajo de la secuencia didáctica, específicamente se presentan las que tienen que ver con traslaciones en sentido vertical. Dichas hojas de trabajo se muestran anexas al trabajo. Para el estudio de otras transformaciones se tienen diseños semejantes.

En la Hoja de trabajo #2 se plantea una situación problémica en el contexto del movimiento circular uniforme. En la **Tabla 2** se muestran las unidades elementales de esta hoja de trabajo.

Para simular la situación, se utiliza el archivo Cabrí senoide.

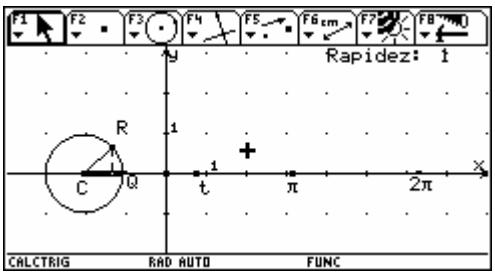


Fig. 5. Archivo *senoide*

El propósito de la actividad es analizar el comportamiento de la ordenada de un punto R que se mueve sobre la circunferencia unitaria con

centro en el origen en función del tiempo, dado que lo hace con rapidez constante unitaria. Para ello se arrastra el punto *t*. En particular, se analizan algunos de los valores de la función, los intervalos donde la función es creciente o decreciente, se analiza su periodicidad, su valor máximo, su valor mínimo, el promedio de estos dos valores, su amplitud, y se trata de bosquejar la gráfica de la función.

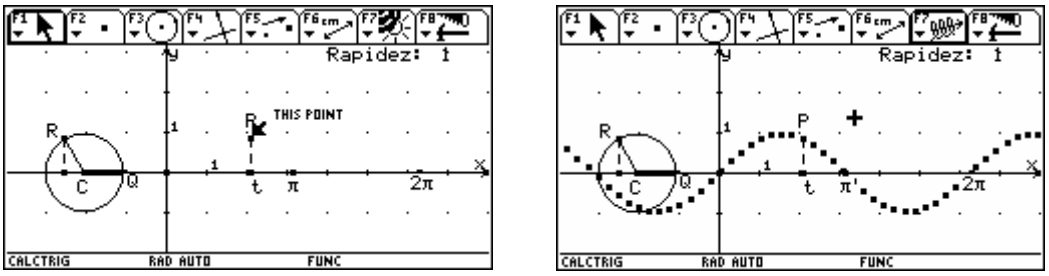


Fig. 5. Archivo *grafica*

Posteriormente se utiliza el archivo grafica, en el que aparece un punto de la gráfica de la función, el cual es dinámico, y puede utilizarse para visualizar la gráfica de la función mediante la traza que deja al manipularse la construcción. Los estudiantes deben comparar la gráfica bosquejada por ellos mismos, con la gráfica construida con Cabrí, la cual corresponde a la función seno básica.

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Movimiento circular uniforme *Acciones*: Manipular archivo Cabrí. Lectura de las coordenadas de un punto en el plano. Completar una tabla. Analizar. Encontrar período. Calcular valor promedio. Calcular diferencia entre el valor máximo y mínimo, y su promedio. Calcular promedio. Graficar.	*Términos y expresiones en lenguaje natural*: Constante, círculo, círculo unitario, plano coordenado, centro, eje X, punto, coordenadas, ordenada, función, gráfica, tabla, signo, creciendo, decreciendo, más lentamente, más rápidamente, función periódica, período, valor máximo, valor mínimo, promedio, valor promedio, diferencia, mitad de la diferencia, amplitud de la función. *Notaciones, lenguaje simbólico*: *X, R, t,* $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π , 4π , $t + 2\pi$, *P* *Representaciones gráficas:* Se utilizan tres gráficas (ver Hoja de Trabajo en Anexo IV)	*Conceptos*: Constante, círculo, círculo unitario, plano coordenado, centro, eje X, punto, coordenadas, ordenada, función, gráfica, tabla, signo, función periódica, período, valor máximo, valor mínimo, promedio, valor promedio, amplitud de la función, trayectoria. *Propiedades*: Crecer o decrecer, cada vez más lentamente, cada vez más rápidamente una función. Periodicidad, amplitud, valor promedio de una función. Ser positivo, ser negativo un valor. *Argumentos*:

	Tablas Se utiliza una tabla (ver Hoja de Trabajo en Anexo V)	Se pide a los estudiantes justificar la respuesta a la pregunta 10.

Tabla 2. Entidades matemáticas (unidades elementales) para la Hoja de Trabajo #2

Se presenta a continuación un gráfico con los resultados obtenidos en esta hoja de trabajo, lo cual nos sirve para identificar tendencias generales en el grupo.

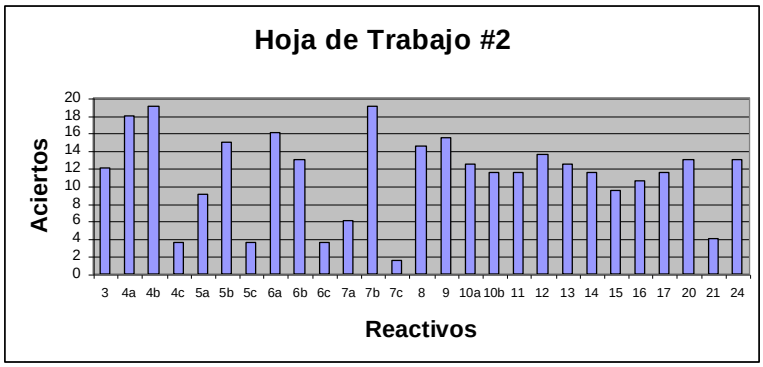


Fig. 6. Resultados globales de la Hoja de Trabajo #2

Se observa que el 40% de los estudiantes tuvo dificultades para determinar el valor de la ordenada del punto R, para un conjunto de valores del tiempo *t* (Reactivo 3). Una posible causa de la dificultad está en la manera de medir el tiempo, en fracciones de π y no en unidades enteras. El significado que los estudiantes asignan a los símbolos $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, tiene que ver con medidas de ángulos en radianes, y es tan fuerte la función semiótica que establecen, que esto los llevó a escribir su equivalente en grados.

3. Arrastra el punto t sobre el eje X y completa la siguiente tabla:

Tiempo t	Ordenada del punto R
0	0
$\frac{\pi}{2}$	90°
π	180°
$\frac{3\pi}{2}$	270°
2π	360°

Fig. 7. Respuesta de un estudiante

Los estudiantes tuvieron dificultades para decidir si en ciertos intervalos donde la función es creciente o decreciente, ésta lo hace cada vez más lentamente, o cada vez más rápidamente. Esto es algo muy difícil de percibir visualmente, dadas las características de la construcción del archivo Cabrí que están manipulando. Para poder dar respuesta a estas interrogantes es necesario ir un poco más allá en el análisis, y la percepción pudiera darse de una manera reflexiva, lo cual quedó fuera del alcance de los estudiantes. La gran mayoría de los estudiantes contestaron que la función crecía o decrecía de manera uniforme, lo que constituye la forma predominante de concebir la variación. Otros más contestaron de modo tal que más bien parecía al azar. Sólo un estudiante dio respuestas correctas, aunque hizo la aclaración de que no lo percibía visualmente. En cuanto a los reactivos que tienen que ver con la identificación de ciertas propiedades de la función, como la de ser periódica, tener valor máximo y mínimo, determinar su amplitud, bosquejar la gráfica, etc., se observa, en general, un buen desempeño por parte de los estudiantes.

En la Hoja de trabajo #3 no se pide que el centro de la circunferencia unitaria esté sobre el eje X. Este será el elemento a variar en esta actividad, con el propósito de construir varias gráficas que representen el movimiento, las cuales dependerán de la posición del centro de la circunferencia asociada al movimiento circular uniforme. Se pretende que el estudiante establezca una función semiótica entre un tipo de situaciones y una familia de curvas.

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Movimiento circular uniforme *Acciones*: Manipular archivo Cabri. Lectura de las coordenadas de un punto en el plano. Analizar. Encontrar período. Encontrar valores máximo y mínimo, Calcular valor promedio. Calcular amplitud. Encontrar diferencias y similitudes entre gráficas. Describir gráfica. Graficar.	*Términos y expresiones en lenguaje natural*: Constante, círculo, círculo unitario, plano coordenado, centro, eje X, punto, coordenadas, ordenada, función, gráfica, período, valor máximo, valor mínimo, valor promedio, amplitud *Notaciones, lenguaje simbólico*: *X, R, t, P* *Representaciones gráficas:* Se utilizan cuatro gráficas (ver Hoja de Trabajo en Anexo V)	*Conceptos*: Constante, círculo, círculo unitario, plano coordenado, centro, eje X, punto, coordenadas, ordenada, función, gráfica, función periódica, período, valor máximo, valor mínimo, valor promedio, amplitud de la función. *Propiedades*: Periodicidad, amplitud, valor promedio de una función. A*rgumentos*:

Tabla 3. Entidades matemáticas para la Hoja de Trabajo #3

La siguiente figura muestra los resultados obtenidos en la aplicación de esta hoja de trabajo.

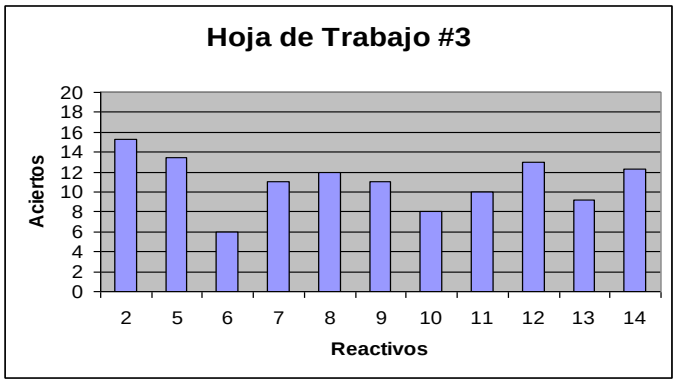


Fig. 8. Resultados de la Hoja de Trabajo #3

Los estudiantes tuvieron dificultades para identificar el período de la función (Reactivo 6), debido, tal vez, a que ésta no necesariamente intersecta el eje X, y puede ser menos conflictivo establecer una función semiótica entre el período de la función y los puntos de cruce con el eje X. Entre los conflictos semióticos detectados en el análisis de las respuestas de los estudiantes, está la significación de la expresión "ordenada del punto R", que al parecer se interpreta como el ángulo QCR, consistentemente con los resultados observados en la Hoja de Trabajo #2. El 60% de los estudiantes logra establecer la función semiótica entre el tipo de situaciones abordadas y la familia de curvas asociada. En la siguiente figura se muestran las respuestas de dos estudiantes. Uno de ellos logra establecer la función semiótica esperada, mientras que el otro tiene dificultades para hacerlo.

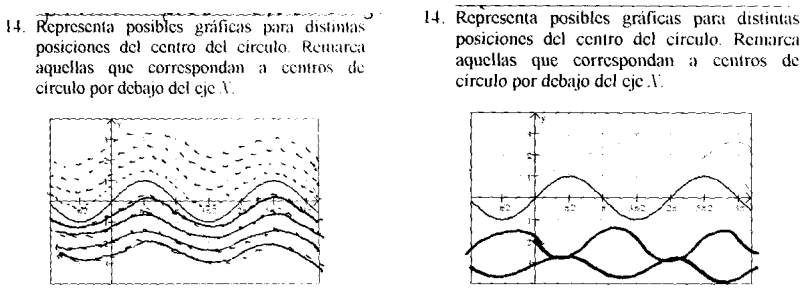


Fig. 9. Respuestas de dos estudiantes

En la Hoja de trabajo #8 se propone el uso del programa senoidal(), específicamente se trabaja con la opción de Traslaciones verticales del menú de usuario. Se intenta establecer una función semiótica entre esta expresión y una animación gráfica. Esto con el propósito de dar significado a la expresión *traslaciones verticales*, la cual generalmente no forma parte del lenguaje natural del estudiante. Al observar la secuencia de gráficas que constituyen la animación, así como las expresiones analíticas correspondientes, se pretende que el estudiante establezca una función semiótica entre las curvas y expresiones presentadas en pantalla con una expresión simbólica del tipo $f(x) = senx + b$, es decir, se espera que el estudiante lleve a cabo una generalización. También se pretende que el estudiante pueda establecer funciones semióticas entre ciertas transformaciones particulares y el valor del parámetro *b*.

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Explorar relaciones entre representaciones gráficas y analíticas de funciones senoidales. *Acciones*: Lectura de las coordenadas de puntos en el plano. Determinar diferencias y similitudes entre gráficas. Determinar diferencias y similitudes entre expresiones analíticas. Analizar. Generalizar. Explicar.	*Términos y expresiones en lenguaje natural*: Representación gráfica, representación analítica, funciones senoidales, traslaciones, traslaciones en sentido vertical, trasladar hacia arriba, trasladar hacia abajo. *Representaciones gráficas:* Se utilizan dos gráficas (ver Hoja de Trabajo en Anexo V)	*Conceptos*: Función, gráfica de una función, expresión analítica de una función, traslación. *Propiedades*: A*rgumentos*: Se pide a los estudiantes que argumenten algunas de sus respuestas.

Tabla 4. Entidades matemáticas para la Hoja de Trabajo #8

La siguiente figura muestra los resultados obtenidos en la aplicación de esta hoja de trabajo.

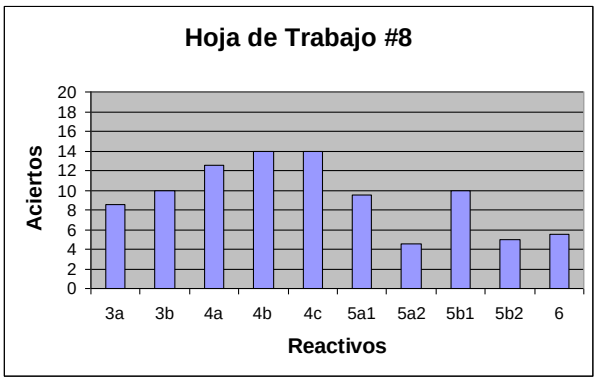


Fig. 10. Resultados de la Hoja de Trabajo #8

Los estudiantes pudieron identificar más fácilmente similitudes y diferencias entre expresiones analíticas, que entre gráficas. Esto es explicable pues los elementos presentes en una expresión analítica son aislables más fácilmente que los elementos presentes en una gráfica, lo cual justifica el hecho de que en los diseños de enseñanza que involucran el uso de representaciones gráficas y analíticas por medio de software de computadora o calculadora, se privilegie la variación de parámetros como medio para establecer funciones semióticas entre estos dos tipos de entidades. Es decir, se promueve el paso de expresión simbólica a gráfica y la transformación en el otro sentido se le deja al estudiante. También se pide a los estudiantes una generalización, la cual es un tipo de función semiótica entre un objeto y un tipo de objetos. En este caso, a partir de un número reducido de expresiones analíticas, se pide al estudiante establecer una expresión general para ellas. Se observa un 70% de aciertos en esta tarea. Se aborda también el problema de relacionar los cambios observados en la gráfica con los observados en la expresión analítica. Al preguntar cómo cambia la expresión analítica cuando la gráfica se traslada hacia arriba, la respuesta esperada era que el parámetro involucrado en la expresión general aumenta su valor. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes contestaron que el parámetro debía ser positivo. Esto nos hace formular la hipótesis de que los estudiantes asignan un significado muy especial a la expresión “la gráfica”: los estudiantes piensan en la gráfica de la función seno básica. El mismo fenómeno se observa al preguntar cómo cambia la expresión analítica cuando la gráfica se traslada hacia abajo: los estudiantes en su gran mayoría responden que el parámetro debe ser negativo, lo cual nos lleva a reafirmar la hipótesis anterior. Esto es lo que se conoce como conflicto semiótico, pues se asignan significados diferentes a la misma expresión en una interacción comunicativa. Otro error, menos común, fue el contestar en el caso de la traslación hacia arriba, que el parámetro cambia de negativo a positivo, lo cual nos lleva a formular la

hipótesis de que el estudiante piensa en las gráficas visibles en la animación, y que el carácter restringido de la misma, lleva al estudiante a comparar las dos gráficas en los extremos de la animación. En el caso de la traslación hacia abajo, estos estudiantes contestan que el parámetro cambia de positivo a negativo. También se pide a los estudiantes que justifiquen lo observado. Sin embargo, esta tarea parece ser especialmente difícil. Los estudiantes no están acostumbrados a argumentar o a tratar de demostrar lo que enuncian. En muchos casos sólo se limitan a repetir lo que se quiere justificar. Esto nos lleva a plantear la necesidad de encaminar esfuerzos en esa dirección, ya que la argumentación forma parte del significado de los objetos matemáticos. Las tareas y técnicas matemáticas (praxis) necesitan ser discutidas y analizadas (logos). Finalmente se le pide al estudiante explicar lo que aprendió con esta hoja de trabajo. Se observa que, en general, los estudiantes tienen mucha dificultad para expresarse verbalmente y, por lo tanto, es necesario plantear también otro tipo de tareas para tener más elementos para determinar los significados que construyen.

En la Hoja de trabajo #9 se propone el uso del programa cuantos(). La situación planteada consiste en determinar la transformación requerida para transformar una gráfica en otra. Al estudiante se le presentan ambas gráficas, distintivamente, en un mismo sistema de coordenadas. El estudiante propone la transformación requerida y a través del programa de la calculadora, verifica si su propuesta es válida. El programa también muestra las expresiones analíticas asociadas, las cuales el estudiante debe comparar y justificar. En esta actividad se proponen tres transformaciones sucesivas partiendo de la función seno básica. Se pretende que el estudiante establezca una función semiótica entre un elemento actuativo, el de trasladar verticalmente hacia arriba o hacia abajo una curva, con otro elemento actuativo, el de sumar un número positivo o negativo a una función, respectivamente.

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Determinar la transformación requerida para transformar una gráfica en otra. *Acciones*: Lectura de las coordenadas de puntos en el plano. Determinar distancias de segmentos verticales. Determinar diferencias y similitudes entre gráficas.	*Términos y expresiones en lenguaje natural*: Transformaciones, gráfica, función seno, expresiones analíticas.. *Representaciones gráficas:* Se utilizan cuatro gráficas (ver Hoja de Trabajo en Anexo V)	*Conceptos*: Función, gráfica de una función, expresión analítica de una función, funciones senoidales, traslación en sentido vertical. *Propiedades*: A*rgumentos*:

Determinar diferencias y similitudes entre expresiones analíticas. Analizar. Explicar.		Se pide a los estudiantes que argumenten algunas de sus respuestas.

Tabla 5. Entidades matemáticas para la Hoja de Trabajo #9

La siguiente figura muestra los resultados obtenidos en la aplicación de esta hoja de trabajo.

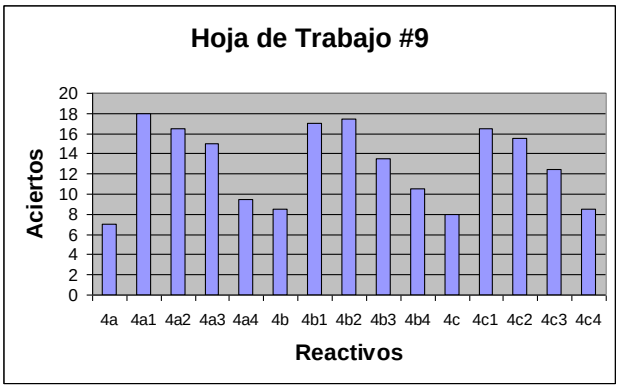


Fig. 11. Resultados de la Hoja de Trabajo #9

En esta actividad se esperaba que los estudiantes se apropiaran del lenguaje utilizado por la calculadora para describir las transformaciones de gráficas. Sólo el 40% de los estudiantes lo hizo. Sin embargo, se observa un buen desempeño en la identificación de las expresiones analíticas asociadas a las gráficas mostradas, lo cual indica que seleccionaron la transformación adecuada en la calculadora. Además, lograron identificar el parámetro que cambia en la expresión analítica. A pesar de ello, las argumentaciones siguen siendo muy pobres, los estudiantes se limitan a repetir lo que se debe justificar.

La tarea en la Hoja de trabajo #10 consiste en discriminar entre varias gráficas de funciones senoidales, aquellas que correspondan a la familia indicada. No se propone el uso de la calculadora, ni se prohíbe. Para tener éxito en esta tarea, el estudiante deberá establecer, primero, una función semiótica tomando como objeto inicial la expresión $f(x) = senx + b$ y como objeto final, una familia de curvas. Después, el estudiante debe establecer una función semiótica entre una curva particular y el tipo de curvas considerado. Así, se pone en juego la dualidad ejemplar-tipo de los objetos

matemáticos. Esta actividad nos permitió explorar las significaciones construidas por los estudiantes alrededor de la familia de funciones $f(x) = senx + b$.

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Discriminar entre varias gráficas de funciones senoidales, aquellas que correspondan a la familia indicada. *Acciones*: Lectura de coordenadas de puntos en el plano. Determinar diferencias y similitudes entre gráficas. Analizar. Explicar.	*Términos y expresiones en lenguaje natural*: Gráfica, relaciones. *Notaciones, lenguaje simbólico*: $f(x) = senx,\ f(x) = senx + b$ *Representaciones gráficas:* Se utilizan siete gráficas (ver Hoja de Trabajo en Anexo V)	*Conceptos*: Función, función seno, gráfica de una función, familias de curvas, expresión analítica, traslación. *Propiedades*: A*rgumentos*: Se pide a los estudiantes que argumenten sus respuestas.

Tabla 6. Entidades matemáticas para la Hoja de Trabajo #10

En la **Fig. 12** se muestran los resultados obtenidos en la aplicación de esta hoja de trabajo.

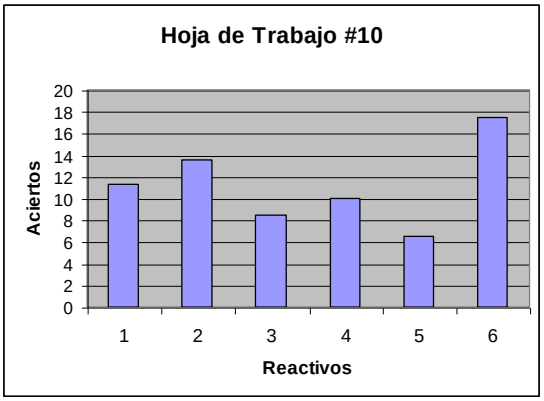


Fig. 12. Resultados de la Hoja de Trabajo #10

Entre las concepciones erróneas o incompletas identificadas podemos consignar las siguientes:

1. Si la gráfica no pasa por el origen, entonces representa una función del tipo especificado y la intersección de la gráfica con el eje Y es el valor de *b*.

2. La gráfica debe estar por encima o por debajo del eje X. No se toman en cuenta otras características de la función como período, amplitud, desfasamiento, reflexión.
3. El valor de *b* se interpreta como un número positivo, de modo que si la gráfica intersecta la parte negativa del eje Y, no se tiene un elemento de la familia.

Se obtuvo un mayor porcentaje de éxitos en la gráfica número 6 ya que la curva mostrada satisface todas las concepciones incompletas o erróneas. Fue seleccionada como elemento de la familia especificada por cerca del 80% de los estudiantes.

La gráfica 1, que no pertenece al tipo de funciones estudiado, fue elegida como elemento de la familia utilizando la concepción 1.

La gráfica 2, que si pertenece al tipo de funciones estudiado, fue rechazada como elemento de la familia utilizando la concepción 3.

La gráfica 3, que no pertenece al tipo de funciones estudiado, fue elegida como elemento de la familia utilizando la concepción 1.

La gráfica 4, que no pertenece al tipo de funciones estudiado, fue elegida como elemento de la familia utilizando la concepción 2.

La gráfica 5, que no pertenece al tipo de funciones estudiado, fue elegida como elemento de la familia utilizando la concepción 2.

6. OBSERVACIONES FINALES

El uso de las nuevas tecnologías, en particular, la calculadora simbólica, permite el diseño e implementación de secuencias didácticas distintas a las tradicionales, dando un mayor énfasis al razonamiento gráfico. La naturaleza exploratoria de las gráficas aunado a las posibilidades de programación de la calculadora, permiten diseños didácticos que promueven el establecimiento de muchas y muy variadas funciones semióticas, buscan estimular la intuición de los estudiantes, así como apoyar los procesos de abstracción y de generalización. En el caso de la secuencia didáctica diseñada e implementada en la presente investigación, se utiliza la traducción de gráfica a expresión simbólica de manera sistemática. Se explora primeramente la conexión entre situaciones problémicas y sus representaciones gráficas, para después obtener expresiones analíticas. La calculadora permite estudiar este tipo de conexiones de manera sistemática, y no de manera aislada. Se pretende

que los estudiantes, al utilizar gráficas, puedan encontrar máximos y mínimos de funciones, e intervalos donde las funciones son crecientes o decrecientes, de manera intuitiva, construyendo significados útiles para posteriores acercamientos analíticos. Sin embargo, los resultados de la investigación muestran que los estudiantes con frecuencia construyen significados que no siguen la pauta institucional, pues los conflictos semióticos potenciales siempre están presentes en la interacción comunicativa, y estos se hacen efectivos con mucha más frecuencia que la esperada o imaginada. Es por eso que el análisis onto-semiótico es muy importante para estar alertas a las posibles dificultades que los estudiantes puedan experimentar en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto hace que el proceso de diseño de secuencias didácticas, sea iterativo, pues con cada implementación existe la posibilidad de detectar nuevos conflictos o significados personales que no concuerdan con los significados institucionales. Esto sugiere una modificación, adaptación o reorganización de la secuencia, lo cual da idea de un proceso en espiral que nos lleva a diseños más finos o mejor fundamentados, pero indiscutiblemente, perfectibles.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2000). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal,* (pp. 93-115). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Contreras, A.; Font, V. (2002) ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?. Ponencia presentada a las XVIII JORNADAS DEL SI-IDM Del 19 al 21 de Abril de 2002. Universitat "Jaume I" de CASTELLÓ. Organizadas por el Grupo de Trabajo: La Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica (DMDC) Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática (SEIEM)

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica: México

Duval, R. (1999) Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Colombia

Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education. Philosophy of Mathematics Education Journal. 14, 1-35

Font, V. (2001), Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola, Revista EMA, 6(2), pp. 180-200.

Font, V. (2000): Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. Uno, 25, 21-40

Godino, J. D.(2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3)

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. y Arrieche, M. (2001). El análisis semiótico como técnica para determinar significados. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería, Septiembre 2001.

Godino, J., Arrieche, M. (2001). Génesis de un tema de investigación: papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Maurio Castro.* Granada: Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 14, No. 3, pp. 325-355.

Hitt, F. (2000). Funciones en Contexto con Calculadora. *Proyecto sobre Visualización Matemática.* Depto. de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Laborde, J.-M. y Bellemain, F. (1994). *Cabrí-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.

Moreno, M.A. y Núñez, J. (1985). Graficación de Funciones. Programa Nacional de Formación de Profesores. Sección Matemática Educativa, CINVESTAV.

Peralta-García, J. X. y Soto-Munguía, J. L. (2003). Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal. Actas de la Relme 16. Vol. 16, tomo 2, pp. 721-727, La Habana, Cuba.

Salinas P., Alanís J. A., Escobedo J. C., Garza J. L., Pulido R. y Santos F. X. (2001), *Elementos de Cálculo: Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza.* Primera Edición. Grupo Editorial Iberoamérica, México

Schoenfeld, A., Smith, J. y Arcavi, A. (1990). Learning: the microgenetic análisis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain, en R. Glaser(Ed.), *Advances in Instructional Psychology, Vol. 4, Hillsdale, N. J., Lawrence Erlbaum Associates.*

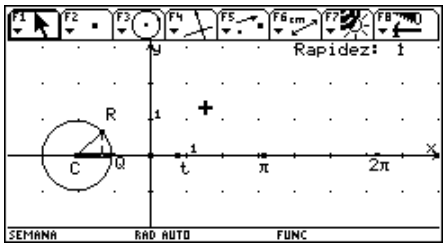
Stewart, J. (1998). Cálculo de una Variable. Trascendentes Tempranas. 3ª. Ed. International Thomson Editores.

Hoja de Trabajo # 2

Situación problémica

Problema. Una partícula se mueve con rapidez constante sobre un círculo unitario en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. El círculo unitario se representa sobre un plano coordenado, de modo que su centro se encuentra sobre el eje *X* y la posición de la partícula se representa con el punto *R*. A medida que el tiempo transcurre, la posición de la partícula cambia y, por lo tanto, las coordenadas del punto *R* también cambian. El propósito de esta actividad es analizar el comportamiento de la ordenada del punto *R* en función del tiempo y construir una gráfica que lo represente.

1. Del escritorio de aplicaciones de la calculadora `Voyage 200` selecciona `Cabri Geometry` y del fólder `calctrig`, abre el archivo `senoide`. En pantalla aparece la siguiente figura. (Si hay problemas con la configuración de la calculadora, consulta la Hoja de Trabajo #1).

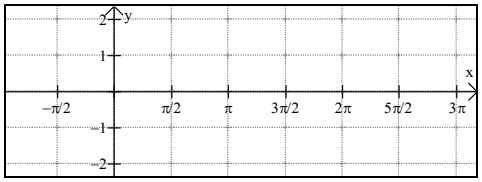


2. En este archivo se ha construido el círculo unitario y el punto `R`. El tiempo `t` se mide sobre el eje *X*. El punto `R` se mueve como consecuencia de arrastrar el punto `t`.
3. Arrastra el punto `t` sobre el eje *X* y completa la siguiente tabla:

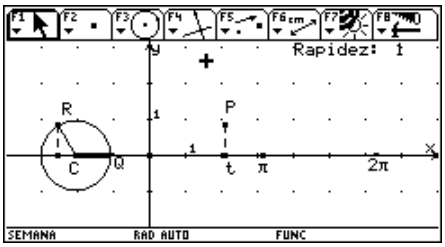
Tiempo t	Ordenada del punto R
0	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

4. Arrastra el punto `t` desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ y observa la ordenada del punto `R`.
   - ¿Qué signo tiene? _____
   - ¿Está creciendo o decreciendo? _____
   - ¿Lo hace cada vez más lentamente o cada vez más rápidamente? _____
5. Arrastra el punto `t` desde $\frac{\pi}{2}$ hasta π y observa la ordenada del punto `R`.
   - ¿Qué signo tiene? _____
   - ¿Está creciendo o decreciendo? _____
   - ¿Lo hace cada vez más lentamente o cada vez más rápidamente? _____
6. Arrastra el punto `t` desde π hasta $\frac{3\pi}{2}$ y observa la ordenada del punto `R`.
   - ¿Qué signo tiene? _____
   - ¿Está creciendo o decreciendo? _____
   - ¿Lo hace cada vez más lentamente o cada vez más rápidamente? _____
7. Arrastra el punto `t` desde $\frac{3\pi}{2}$ hasta 2π y observa la ordenada del punto `R`.
   - ¿Qué signo tiene? _____
   - ¿Está creciendo o decreciendo? _____
   - ¿Lo hace cada vez más lentamente o cada vez más rápidamente? _____

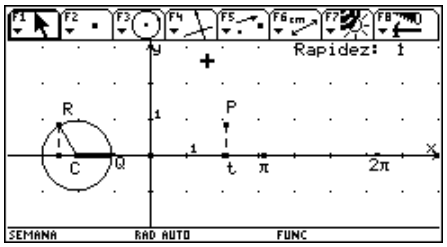
8. ¿Qué crees que suceda al arrastrar el punto t desde 2π hasta 4π ? _____
_____
_____
_____
9. ¿Y de 4π en adelante? _____
_____
_____
_____
10. ¿Qué puedes decir de la posición de la partícula cuando el tiempo *t* cambia a $t + 2\pi$? _____
_____
_____
¿Por qué? _____
_____
_____
_____
11. De acuerdo a lo anterior, decimos que la ordenada del punto R como función del tiempo *t* es una **función periódica**, y su **período** es de _____.
12. ¿Cuál es el valor máximo de la ordenada del punto R? _____
13. ¿Cuál es el valor mínimo de la ordenada del punto R? _____
14. ¿Cuál es el promedio de estos dos valores? _____.
Este se conoce como el **valor promedio** de la función.
15. ¿Cuál es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la ordenada del punto R?
_____
16. La mitad de la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo se define como la **amplitud** de la función ¿Cuál es la amplitud de la función? _____
17. Utiliza los análisis anteriores para construir una gráfica de la ordenada del punto R con respecto al tiempo.



18. Con la herramienta 1:Open, abre el archivo grafica del fólder calctrig. En pantalla aparece la siguiente figura.



19. En este archivo, muy parecido al anterior, se ha construido el punto P.
20. Observa que el punto P se mueve como consecuencia de mover el punto t, debido a que comparten una de sus coordenadas. ¿Cuál? _____.
21. ¿Qué coordenada comparten el punto P y el punto R? _____
_____
_____
22. Por lo tanto, la trayectoria del punto P determina la gráfica buscada.
23. Para observar la huella del punto P cuando t se mueve, presiona la tecla y activa la herramienta 2:Trace On/Off, coloca el cursor sobre el punto P, presiona ÷ y después N para activar el puntero. Arrastra el punto t a lo largo del eje y verás la huella que deja el punto P.
24. Representa en la siguiente figura la trayectoria del punto P. ¿Coincide con la gráfica propuesta en el punto 17? _____

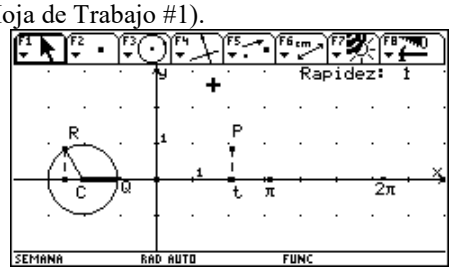


Hoja de Trabajo # 3

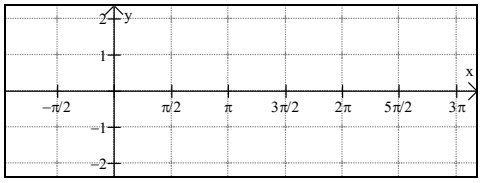
Situación problémica

Problema. Una partícula se mueve con rapidez constante sobre un círculo unitario en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. El círculo unitario se representa sobre un plano coordenado y la posición de la partícula se representa con el punto R. El propósito de esta actividad es construir una gráfica de la ordenada del punto R en función del tiempo.

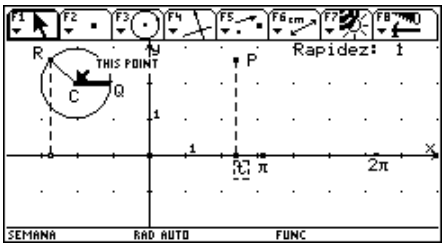
1. Del escritorio de aplicaciones de la calculadora Voyage 200 selecciona Cabri Geometry, y del fólder calctrig abre el archivo grafica. En pantalla aparece la siguiente figura. (Si hay problemas con la configuración de la calculadora, consulta la Hoja de Trabajo #1).



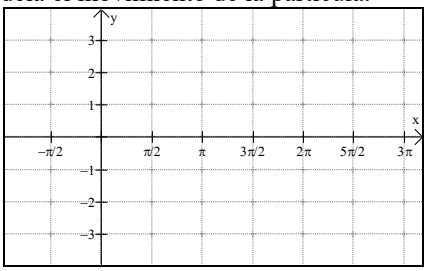
2. Por la actividad anterior, sabemos cómo es la grafica de la ordenada del punto R con respecto al tiempo, cuando el centro del círculo unitario está sobre el eje *X*. Represéntala en el siguiente sistema coordenado.



3. Analizaremos el caso en que el centro de la circunferencia está por encima del eje *X*. Para ello, arrastra el punto C hacia arriba, de modo que obtengas una figura similar a la siguiente.



4. Activa la traza del punto P con la herramienta 2:Trace On/Off y presiona N para activar el puntero. Arrastra el punto t a lo largo del eje y verás la huella que deja el punto P.
5. Con base en lo anterior, traza la gráfica que modela el movimiento de la partícula.

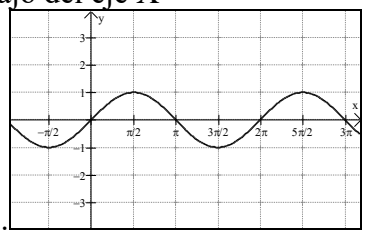


6. ¿Cuál es el período de esta función? _____
7. ¿Cuál es el valor máximo de la ordenada del punto R? _____
8. ¿Cuál es el valor mínimo de la ordenada del punto R? _____
9. ¿Cuál es el valor promedio de la función? _____
10. ¿Cuál es la amplitud de la función? _____
11. Señala las similitudes entre las gráficas del punto 2 y el punto 5 _____
    _____
    _____
    _____

12. Señala las diferencias entre las gráficas del punto 2 y el punto 5 _____
_____
_____
_____

13. ¿Cómo es la gráfica si el centro del círculo se encuentra por debajo del eje *X*?_____
_____
_____

14. Representa posibles gráficas para distintas posiciones del centro del círculo. Remarca aquellas que correspondan a centros de círculo por debajo del eje X



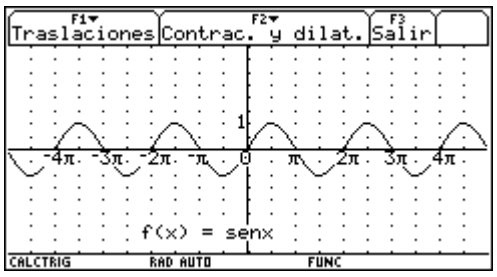
. .

Hoja de Trabajo # 8

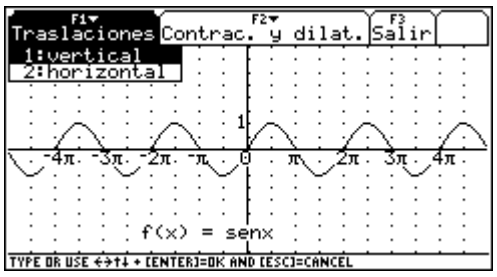
Explorando las representaciones gráfica y analítica de funciones senoidales.

1. Presiona la tecla 3 y asegúrate que las siguientes opciones de configuración estén seleccionadas:
   a. `Current Folder.....calctrig`
   b. `Language..........English`

2. Ejecuta el programa `senoidal()`. En pantalla aparecerá una gráfica de la función seno y un menú de usuario, como se muestra abajo.



3. Del menú de `Traslaciones` selecciona la opción `1:vertical`, observa la secuencia de gráficas en pantalla y contesta lo siguiente:



   a. ¿Qué cambia en la secuencia de gráficas?_____
   _____
   _____

   b. ¿Qué permanece sin cambio?
   _____
   _____

4. Selecciona nuevamente la opción de "Traslación vertical" y observa detenidamente las expresiones analíticas correspondientes a cada una de las gráficas en la secuencia y contesta:
   a. ¿Qué tienen en común todas las representaciones analíticas de la secuencia?
   _____
   _____
   _____

   b. ¿Qué es lo que cambia de una expresión a otra?
   _____
   _____
   _____

   c. ¿Qué expresión analítica general corresponde a las gráficas observadas?
   _____
   _____
   _____

5. Selecciona nuevamente la opción de "Traslación vertical" y observa al mismo tiempo la representación gráfica y la analítica, y contesta:
   a. ¿Cómo cambia la expresión analítica cuando la gráfica se traslada hacia arriba? _____
   _____
   _____
   ¿Cómo explicas este hecho? _____
   _____

b. ¿Cómo cambia la expresión analítica cuando la gráfica se traslada hacia abajo? _____

¿Cómo explicas este hecho? _____

6. Explica ampliamente lo que aprendiste con esta hoja de trabajo.

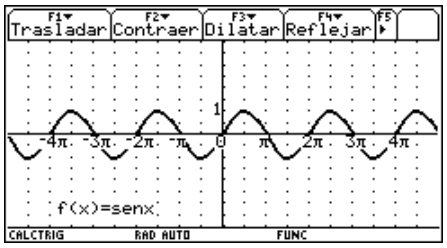
7. Para salir del programa presiona □.

Hoja de Trabajo # 9

Transformaciones

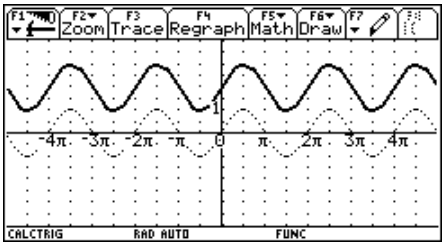
1. Presiona la tecla 3 y asegúrate que las siguientes opciones de configuración estén seleccionadas:
   a. `Current Folder.....calctrig`
   b. `Language..........English`

2. Ejecuta el programa `cuantos()`. En pantalla aparecerá una gráfica de la función seno y un menú de usuario, como se muestra abajo.



3. En la barra de herramientas aparecen posibles transformaciones aplicables a la gráfica remarcada. Explora cada uno de los submenús de cada opción. Fíjate que con la tecla □ tenemos acceso a las opciones de volver a la barra anterior, reiniciar y terminar programa.

4. Escribe, en cada caso, qué transformación debe aplicarse a la gráfica punteada para obtener la gráfica remarcada. Aplica la transformación utilizando el programa `cuantos()` y observa lo que sucede con las expresiones analíticas.

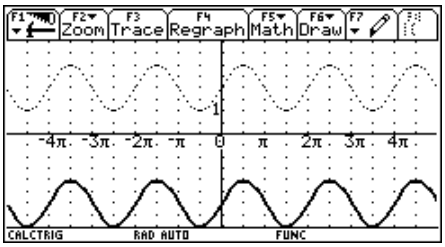


Transformación: _____

Expresiones Analíticas
Gráfica punteada _____
Gráfica remarcada _____

Explica qué cambió en la expresión analítica:

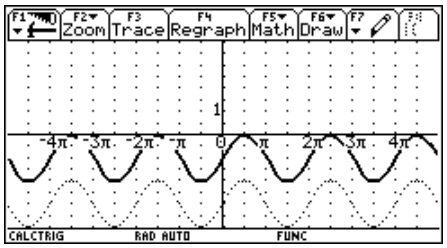
¿Por qué? _____



Transformación: _____

Expresiones Analíticas
Gráfica punteada _____
Gráfica remarcada _____

Explica qué cambió en la expresión analítica:
_____
_____
¿Por qué? _____
_____



Transformación: _____
_____

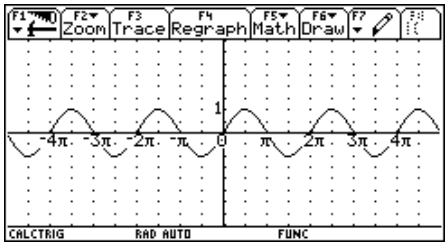
Expresiones Analíticas
Gráfica punteada _____
Gráfica remarcada _____

Explica qué cambió en la expresión analítica:
_____
_____
¿Por qué? _____
_____

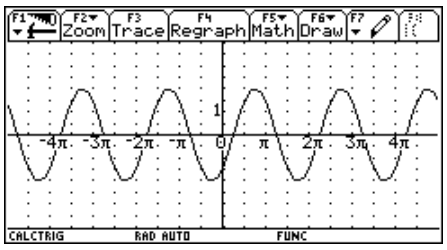
Hoja de Trabajo # 10

f(x)= senx+b

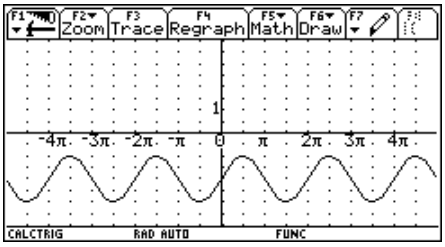
1. Analiza atentamente cada una de las gráficas de esta página. La primera de ellas corresponde a la gráfica de *f(x)=senx*. ¿Cuál o cuáles de las otras gráficas representan relaciones del tipo ***f(x)= senx+b***? Justifica tus respuestas.



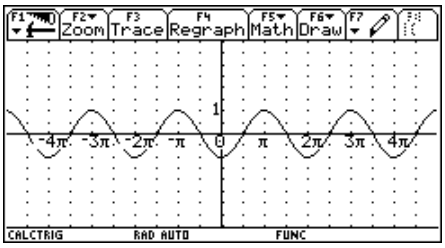
****



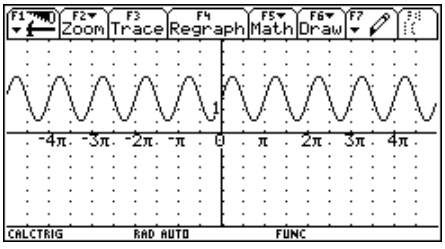
_____
_____
_____
_____

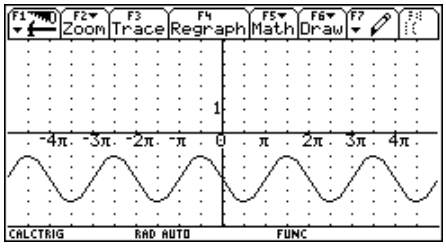


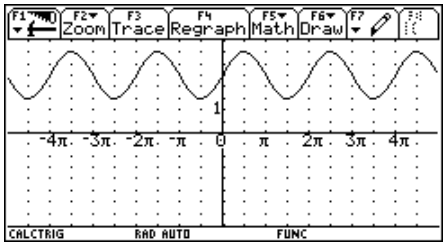
_____
_____
_____
_____



_____
_____
_____
_____




F1
F2 Zoom
F3 Trace
F4 Regraph
F5 Math
F6 Draw
F7
1
-4π -3π -2π -π 0 π 2π 3π 4π
CALCTRIG
RAD AUTO
FUNC


F1
F2 Zoom
F3 Trace
F4 Regraph
F5 Math
F6 Draw
F7
1
-4π -3π -2π -π 0 π 2π 3π 4π
CALCTRIG
RAD AUTO
FUNC

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS A LA NOCIÓN DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR[6]

Silvia Etchegaray
Silvia Colombo
Susana Peparelli
Universidad Nacional de Río Cuarto- Argentina

RESUMEN

A partir de las diversas definiciones de Máximo Común Divisor realizamos una reconstrucción del significado global de dicha noción identificando las configuraciones de objetos y relaciones que lo componen. De este modo, se dispone de un marco de referencia para abordar problemas específicos de enseñanza y aprendizaje de dicha noción matemática.

EPISTEMIC CONFIGURATIONS ASSOCIATED TO THE MAXIMUN COMMON DIVISOR

ABSTRACT

We carry out a reconstruction of the global meaning of maximum common divisor from various definitions, and identify the configurations of objects and relations around this notion. This serve as a reference framework to aboard specific problems in the teaching and learning of this mathematical notion.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los temas de investigación actual en el campo de la Didáctica de las Matemáticas es determinar los significados asociados a los objetos matemáticos dependiendo de los distintos contextos de uso en las instituciones escolares. Bajo el supuesto epistemológico de que conforman un todo complejo, se pretende lograr su organización articulada a lo largo de su enseñanza. En consonancia con Godino (2003) en donde se identifica el "*sistema de prácticas*"[7] con el contenido que se le asigna a un objeto en una determinada institución, el objetivo primario de este trabajo es

[6] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 329-338)

[7] Constructo teórico que describe en su uso ya sea operativo como discursivo el significado institucional o personal de las nociones matemáticas

describir los subsistemas de prácticas asociadas a una noción básica para la enseñanza obligatoria de las matemáticas, a saber: el máximo común divisor entre números enteros, relativa a los distintos contextos en los que esta noción es presentada, a través de libros de textos, por la comunidad científico-matemática. Pero, compartiendo además que "*tanto los sistemas de prácticas como los objetos emergentes están relacionados entre sí constituyendo redes o configuraciones epistémicas*" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004), es que nuestro segundo objetivo es describir tales redes sobre el objeto investigado, a los fines de realizar un análisis epistémico que nos permita construir un marco de referencia para abordar específicos problemas de enseñanza y de aprendizaje de esta noción matemática. Vale aquí señalar que este concepto es el eje central de una investigación[8], a partir de la cual se pretende construir situaciones didácticas dentro de un proyecto global de enseñanza de la matemática para el nivel secundario.

Este tipo de análisis epistémico pretende dejar al descubierto que la relación transparente entre la definición formal o importantes propiedades de un objeto y lo que el objeto realmente significa, es una simple ilusión que veda la posibilidad de detectar los verdaderos problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta posición simplista es la que guía la construcción de un currículo basado en la secuenciación y temporalización de los contenidos.

2. ANÁLISIS EPISTÉMICO DEL MCD

Tomando como base los datos proporcionados en la tesis de maestría "*Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de la Teoría de Números"* (Etchegaray, 2001), a partir de los cuales se plantea la necesidad de ejercer sobre cualquier proceso de transposición didáctica de las nociones de Divisibilidad en Z, vigilancia epistemológica, se delinea esta nueva etapa de la investigación. Adhiriéndonos a la posición de Gentile (1991) que sostiene que el Máximo Común Divisor (MCD) es uno de los componentes esenciales de la Teoría de Números Enteros, y sumado al hecho que para construir cualquier proyecto global de enseñanza un camino fructífero y consensuado por las investigaciones actuales en Didáctica de la Matemática es la descripción de los subsistemas de prácticas ligadas a distintos tipos de situaciones, es que nos preguntamos:

¿Qué significa comprender la noción de MCD?

¿Sintetizan al mismo objeto las distintas definiciones de MCD, presentadas en diferentes instituciones, tales como la educación

[8] Esta investigacion se desarrolla en el Dpto. De Matemática, Fac. Ciencias Exactas, UNRC. Argentina

secundaria o universitaria, o distintos libros de textos del mismo nivel educativo?

¿Será posible estructurar las diferentes definiciones del MCD en un todo complejo pero, articulado coherentemente con el fin de adaptarlo a la enseñanza y al aprendizaje?

Ante este tipo de interrogantes y como primer paso de esta nueva etapa de la investigación, hemos seleccionado como herramientas didácticas la noción de *modelo* y el constructo: *holo-significado* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004*)* para describir y analizar respectivamente la complejidad epistémica del objeto M.C.D y la expresión de los diversos modelos que se describirán de este objeto. Estos modelos emergerán de subsistemas de prácticas ligadas a situaciones específicas, por lo que las denominaremos configuraciones epistémicas locales, las que como ya sabemos pondrán en evidencia aspectos parciales del significado de esta noción.

Entrar a este análisis epistémico por las diferentes definiciones del concepto nos resulta una herramienta óptima para el avance en nuestro propósito, en primer lugar obviamente por las características explícitas que definen a los constructos teóricos: "*Modelo*" y "*Holosignficado*" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004), aunque no podemos dejar de explicitar lo que para nosotros es un nuevo planteo. En efecto: Entrar a develar la complejidad de la noción exactamente por el lugar donde el matemático sintetiza todo lo que para él significa este concepto, ¿no nos brindaría necesariamente el camino más fructífero para poner en evidencia la actitud de transparencia que tiene el docente sobre el contenido matemático?

2.1. Definiciones de la noción Máximo Común Divisor

En esta sección daremos las diferentes definiciones de la noción MCD según el contexto de uso matemático en el cual se desarrolla y se operativiza y tal como se anticipara en el parágrafo anterior utilizaremos como herramientas didácticas los conceptos de *modelo* y *holosignificado* para mostrar cómo los diferentes contextos de uso de la noción de máximo común divisor condiciona y recorta significados .

Asimismo se expondrán breves comentarios sobre cada una de las definiciones a los fines de permitir su mejor interpretación.

En efecto, las definiciones en el dominio aritmético hacen referencia a las relaciones que establece este número entero con respecto a los dos o más números de los cuales depende. La primera de ellas lo relaciona con los demás divisores existentes mediante la relación mayor o igual y está asociada a una técnica que se infiere naturalmente de la proposición que la

define. Además hace referencia directa al "nombre" otorgado a este objeto. Es así como se define:

Definición 1: (MCD como relación de orden total)

"Se llama Máximo Común Divisor entre dos números enteros "a" y "b" (no simultáneamente nulos), al mayor de los números enteros "d" que es divisor de ambos". O sea: d/a y d/b. Además d': $d' \mid a$ y $d' \mid b$, se verifica que $d' \leq d$

También se puede pensar al máximo común divisor relacionado con los dos números y con sus divisores mediante la relación: "divide". O sea caracterizar al MCD como el menor múltiplo de todos los divisores. Es así como se define:

Definición 2: (MCD como relación de orden parcial)

"Se llama Máximo Común Divisor entre dos números enteros "a" y "b" (no simultáneamente nulos), al número entero "d" que cumple:

(i) $d \mid a$ *y* $d \mid b$.

(ii) *d': $d' \mid a$ y $d' \mid b$, se verifica que $d' \mid d$*

Ahora bien, siempre en el contexto aritmético podemos asegurar que dados dos números enteros se pueden descomponer en forma única como producto de números primos. Este hecho formulado y demostrado con el Teorema Fundamental de la Aritmética permite dar la siguiente definición de MCD que explicita en su expresión la técnica asociada para calcularlo.

Definición 3: (MCD como producto de primos comunes)

"Se llama Máximo Común Divisor entre dos números enteros "a" y "b" (no simultáneamente nulos), al único número entero positivo "d" que se exprese como producto de los factores primos comunes de "a" y de "b" con su menor exponente.

El contexto geométrico -contexto de origen- de esta noción nos proporciona dos tipos de definiciones ligadas a prácticas diferentes, a saber:

Definición 4: (MCD como segmento resultante de sustracción sucesiva)

"Se llama Máximo Común Divisor entre dos números "a" y "b" al mayor segmento que mide exactamente a los dos y que se obtiene restando sucesivamente el menor del mayor.

La versión moderna de este procedimiento denominado por Euclides *anthyphaíresis* esta asociada a la división entera, la que nos hace referencia nuevamente al contexto aritmético, y nos permite la siguiente definición:

Definición 5: (MCD como último resto de la división)

"Se llama Máximo Común Divisor entre dos números enteros "a" y "b" al último resto no nulo del algoritmo de Euclides.

Por último, si nos sumergimos en el contexto algebraico y tratamos de determinar las condiciones necesarias y suficientes para resolver una ecuación de congruencia en una variable de primer grado podemos observar que se pone en funcionamiento la siguiente definición de MCD:

Definición 6: (MCD como combinación lineal)

"Se llama Máximo Común Divisor entre dos números enteros "a" y "b" (no simultáneamente nulos), al número entero positivo "d" que cumple:

(iii) $d \mid a \;\; y \;\; d \mid b.$

(iv) $\exists!\, u, v \in Z / d = a.u + b.v$

2.2 Análisis de las definiciones dadas

Este análisis pretende establecer semejanzas y diferencias entre las diferentes definiciones a los fines de ir construyendo el fundamento para estructurar en un todo complejo los subsistemas de prácticas asociados a los distintos contextos de uso y a los objetos emergentes de cada uno de ellos.

Las dos primeras definiciones claramente determinan modelos diferentes, ya que los números *a y b* conjuntamente con todos sus divisores ordenados por distintas relaciones conforman estructuras (la de un reticulado) no isomorfas. En el primer caso es una cadena, donde el M.C.D es un elemento no distinguible, salvo que los números sean coprimos, mientras que la segunda estructura es un retículo donde el MCD es siempre el ínfimo del conjunto formado por los dos elementos. Además este último reticulado muestra explícitamente, a diferencia de la cadena, las propiedades aritméticas que posee el máximo común divisor,. tales como:

- Es el mínimo común múltiplo entre todos los divisores comunes de a y de b.
- Es el número cuyos únicos divisores son aquellos que a y b tiene en común.
- Es el mayor de todos los divisores comunes.

Es debido a esta diferencia fundamental que la primera definición se puede considerar en un contexto pre-aritmético y no aritmético, ya que se está considerando como *Aritmética* el desarrollo de la *Teoría de Números Enteros*. Nos sumamos así a la distinción, ya realizada por los griegos, entre estudio de técnicas calculatorias donde se enmarcaría la primera definición, y el estudio de propiedades de los números enteros, también denominado Divisibilidad en Z, en la que se origina y desarrolla la segunda definición.

Este mismo argumento fortalece la fundamentación para que la definición 3 y 5 sean consideradas dentro del contexto aritmético, más allá de reconocer que emergen de diferentes sistemas de prácticas. En efecto, la definición tres, generada a partir de las propiedades que los números primos poseen como *piedras de construcción de la descomposición multiplicativa de la Teoría elemental de Números* (Newman, 1997), y la definición 5 poniendo en juego el significado que emerge como resto de una división entera ponen en evidencia propiedades aritméticas diferentes. Específicamente en esta última, se pone en evidencia una dualidad del concepto: M.C.D percibiéndose simultáneamente como proceso y como objeto. Como objeto cuando es identificado como el ultimo resto no nulo de la división entera y como proceso cuando a partir del análisis del proceso de la división se obtiene como condición necesaria los coeficientes de una combinación lineal de los números a y b igualada al M.C.D los cuales serán únicos cuando los números sean coprimos. Asimismo, ambas definiciones explicitan una técnica sobre cómo encontrar el máximo, sin embargo sólo la definición número 5 provee un algoritmo, por lo que nos asegura su búsqueda más allá de las características específicas de los números en cuestión.

También este estado dual (como proceso- como objeto) se vuelve a manifestar en el contexto algebraico. Este cambio de "acción a permanencia" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004) nos da pautas para proponer el pasaje del lenguaje aritmético al algebraico. Y nos permite decir que estas prácticas algebraicas sintetizadas en la definición 6, están más cerca sólo de las prácticas de lenguaje aritmético que están asociadas a la definición 5.

Por último vale aclarar que la definición emergente del contexto geométrico surge históricamente a partir de una perspectiva diferente a la actual de la noción de número. En la época euclideana se diferenciaba la magnitud, como medida continua, del número dominado por una visión discreta. Así por ejemplo se afirmaba que "*Un número primo (prótos arithmos) es el medido por la sola unidad"*. Es en este contexto que Euclides ofrece su método denominado, como ya se anticipara, *anthyphairesis* y que parece estar relacionado con un concepto de razón

numérica. Este procedimiento basado en sustracciones sucesivas es la base epistemológica del algoritmo de la división, lo que nos permite asegurar una proximidad sustancial y una relación dialéctica con el sistema de prácticas que permite hacer emerger la definición 5.

Se tratará de sintetizar, en primer lugar, en la siguiente figura la diversidad de sistemas de prácticas asociadas a esta noción, tratando de distinguir los distintos modelos como una forma de estructurar los diferentes contextos de uso con los sistemas de prácticas lo que permite hacer emerger significados diferentes del objeto en cuestión, para luego relacionar estos modelos intentando así caracterizar el *holo-significado* del M.C.D

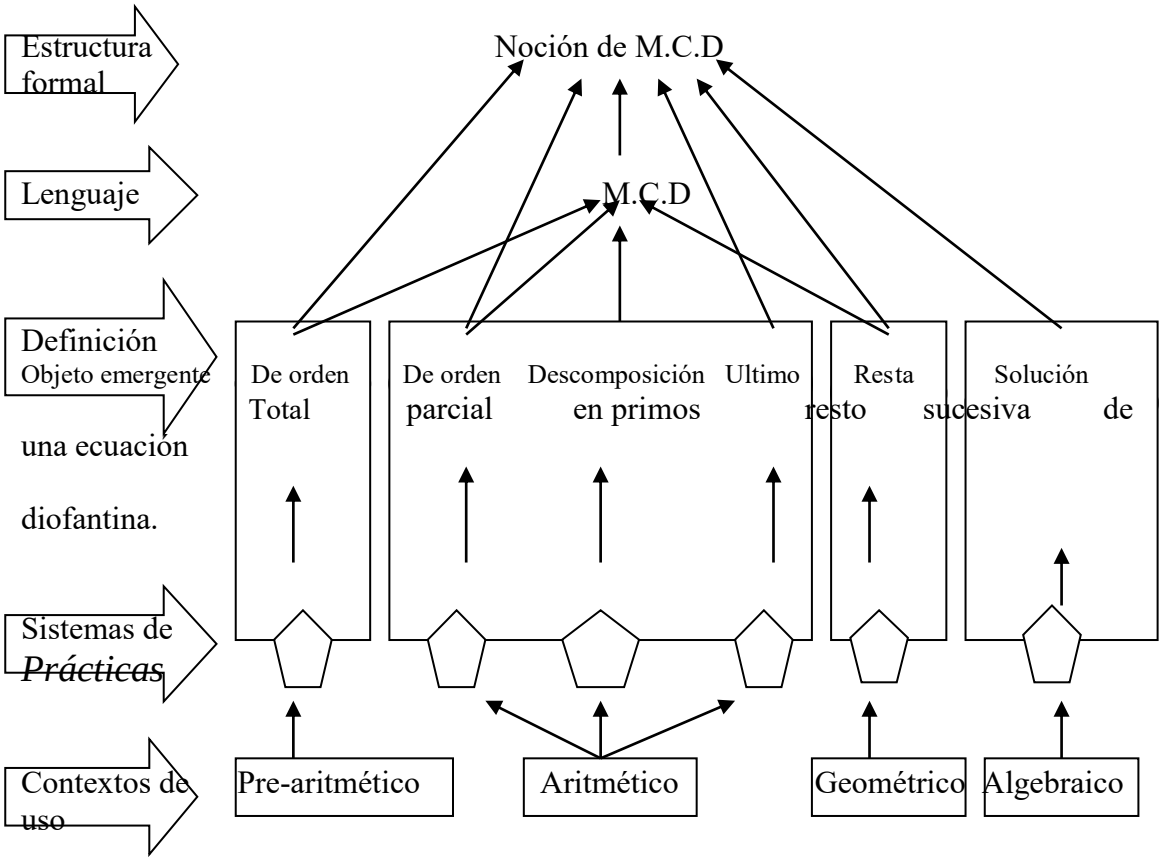


Figura 1. Estructuración en 4 modelos, representados por sendos rectángulos, del significado del M.C.D

2.3. *Holo-significado* de la noción de M.C.D

La descripción sintética de los elementos de significados de las configuraciones epistémicas detectadas en el parágrafo anterior y plasmadas gráficamente en la figura 1, nos permitirá describir con mayor precisión el *holo-significado* de la noción de **MCD,** el cual debe incorporar

relaciones, tensiones, filiaciones y contradicciones entre los distintos modelos. Es por ello que incorporamos la siguiente tabla que trata de atrapar esa información y que trata de sintetizar los diferentes sistemas de prácticas:

MODELO	**Nociones**	**Tipos de Problemas**	**Acciones**	**Propiedades y argumentos**
Pre-aritmético	Relación de orden total entre los divisores comunes	Calcular el M.C.D entre dos números enteros dados.	Uso de técnicas calculatorias: Cálculo de los divisores comunes e identificación del mayor.	Caracterización del M.C.D como el mayor de los divisores comunes a los dos números.
Aritmético	- La relación "divide"de orden parcial. - Primos. - Algoritmo de la división	Determinar resultados aritméticos a partir de las propiedades del M.C.D[9]	Uso de las propiedades aritméticas del M.C.D	Propiedades de la Teoría de números enteros (de la Divisibilidad en Z) asociadas a la noción.
Geométrico	Segmentos asociados a números	Cálculo de la mayor medida que entre en forma justa en otras dos medidas	Sustracción sucesiva de segmentos	El M.C.D entre *a* y *b* es el mismo que entre *b* y el resto de extraer al *a*, la medida de *b*.
Algebraico	Ecuación diofantina	Búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para la resolución de una ecuación diofantina	Desarrollo de Técnicas algebraicas.	Propiedades de la teoría de ecuaciones lineales de Congruencias[10].

Ahora bien, no podemos dejar de reconocer en este estudio la presencia del fenómeno de homonimia ya detectado por otros autores respecto de otras nociones como la de límite o valor absoluto (Wilhelmi, 2003), o en relación con la noción de igualdad (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004), por lo cual la práctica matemática más usual demuestra la equivalencia lógica de todas estas definiciones[11]. De esta manera se trata de evitar que se

[9] Un ejemplo de este tipo de situaciones es: Sabiendo que el M.C.D entre un número *n* y 84 es 14, ¿Cuál o cuáles son los posibles restos de dividir *n* por 14

[10] Un ejemplo de estas propiedades es: Una ecuación del tipo ***a.x ≡ b (m)*** tiene solución si y sólo si el M.C.D entre ***a*** y ***m*** divide al número ***b***.

[11] Este trabajo formal sobre el M.C.D fue realizado por dos alumnos de la licenciatura en Matemática de nuestro Departamento (Avaro, L y Olivero, F), ya que no se pudo encontrar en el rastreo realizado en libros de textos universitarios **todas** las equivalencias entre las 6 definiciones halladas.

designe con nombres distintos cada M.C.D emergente de un modelo diferente. Esta equivalencia lógica es una herramienta óptima en la ciencia matemática, lo cual queda evidenciado con el avance producido desde la teoría de la Divisibilidad en Z a la Teoría de Números Algebraicos. Sin embargo somos conscientes que no es un instrumento didáctico pertinente ya que no da cuenta de las características del significado que cada una de las definiciones aporta a la noción de M.C.D. Es así que estamos convencidos que el constructo teórico didáctico incorporado por Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004, de ***holo-significado*** nos puede ayudar a expresar un marco de referencia epistémico para esta problemática didáctica.

El esquema que tratará de describir el *holosignificado* será adaptado a las características propias de la noción investigada. Es así como debemos diferenciar en este caso tres subsistemas de prácticas diferentes dentro del modelo aritmético, pues se establecen relaciones y filiaciones con otros modelos desde cada subsistema particular. A cada uno de ello denominaremos ***submodelo***. Los tipos de flechas y sus distancias se corresponderán al usado para la noción de igualdad, usándose el halo circundante para aquellos modelos que sólo se diferencian por su contexto de uso. Asimismo la ausencia de flecha significa escasa atracción entre los modelos o los submodelos, más allá de compatir el mismo contexto pero con prácticas muy diferentes. La siguiente figura con sus respectivas referencias representa dicha situación:

Referencias:

M.P.A: Modelo pre-aritmético (orden total)

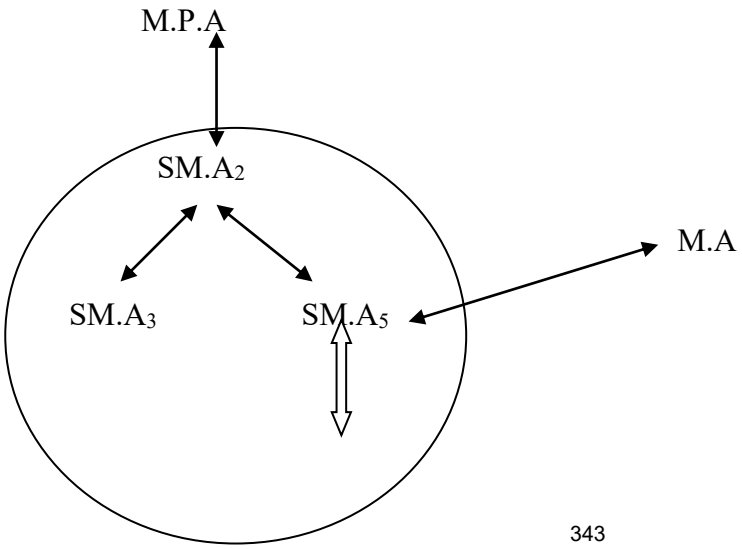
$SM.A_2$: Submodelo aritmético (orden parcial)

$SM.A_3$: Submodelo aritmético (producto de primos)

$SM.A_5$: Submodelo aritmético (último resto no nulo de la división)

M.G: Modelo geométrico

M.A: Modelo algebraico



2. 3. Primeras conclusiones

El análisis realizado a esta noción neural de la Teoría de Números Enteros pretende enriquecer el conjunto de ejemplos que van cargando de significado al constructo didáctico de *holosignificado* determinando su uso y aplicación.

En efecto, esta descripción sistémica de la noción "máximo común divisor entre dos números enteros" nos brinda clara información para la construcción de un sistema de prácticas a plasmar en un libro de texto determinado, según la institución en la que queremos trabajar. Concretamente, preguntas como las que se dejaron planteadas en la tesis de maestría "*Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de la Teoría de Números"* (Etchegaray, 2001) tienen con este trabajo la posibilidad de ser abordadas con un marco epistémico que permita generar una enseñanza de las nociones básicas de la divisibilidad integrada a las propiedades y situaciones que conforman la "razón de ser" de esta teoría.

Asimismo este trabajo permite releer los resultados que al nivel de análisis de significados personales se realizaron en la citada tesis, posibilitando nuevos criterios de descripción y comprensión de los significados que los estudiantes comunicaron, como así también generar nuevos criterios para analizar los significados institucionales pretendidos e implementados en la escuela media.

REFERENCIAS

Etchegaray, S (2001). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones elementales de la Teoría de Números.* Tesis de Maestría. U.N.R.C Argentina

Gentile, E (1991). *Aritmética elemental en la formación matemática*. OMA.

Godino, J. D.(2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. [Disponible en, http://www.ugr.es/local/godino/]

Newman, J. **(**1997**).** *SIGMA: El mundo de las Matemáticas*. *Tomo 4.* Barcelona: Grijalbo.

Wilhelmi, M. R. (2003). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2 : Tesis doctorales, nº 23. Pamplona, ESP: Universidad Pública de Navarra.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2004). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión)

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA DERIVADA[12]

Elsa Ibarra de Gómez
Facultad de Ciencias Forestales, UNSE
José Gómez
Facultad de Agronomía y Agroindustrias, UNSE

RESUMEN

En este trabajo se aplican algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática a la derivada. En concreto, se hace un estudio histórico-epistemológico de las diferentes configuraciones epistémicas activadas en las prácticas que constituyen los diferentes significados parciales de la derivada.

HISTORIC-EPISTEMOLOGIC STUDY OF DERIVATIVE

ABSTRACT

We apply some constructs of the ontosemiotic approach to mathematic cognition to the derivative. More specifically we carry out an historic epistemological study of the different epistemic configurations used in the practices that constitute the different partial meanings of derivative.

1 INTRODUCCIÓN

En diferentes trabajos Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, en prensa; Godino, Batanero y Roa, en prensa; Godino, Contreras y Font en prensa) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Para referirnos a esa manera de enfocar la investigación en didáctica de las matemáticas utilizaremos la expresión "enfoque ontosemiótico" (EOS)[13]. Se trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta línea de trabajo recientemente se ha aplicado a la didáctica del análisis matemático (Font, 2000a, 2000b y 2005; Contreras y Font, 2002; Inglada y Font, 2003;

[12] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 339-365)

[13] En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

Ordóñez y Contreras, 2003; Contreras, Luque y Ordóñez, 2004, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa).

A continuación se presenta un resumen del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y se aplican algunos de los constructos de dicho enfoque a la derivada. En concreto, se hace un estudio histórico-epistemológico de las diferentes configuraciones epistémicas activadas en las prácticas institucionales que constituyen los diferentes significados parciales del objeto institucional "derivada".

2 EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

A continuación se exponen, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico

1 Los objetos institucionales y personales

Un objeto matemático institucional se considera en el enfoque ontosemiótico como un ente que emerge progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado, es reconocido como tal objeto por la institución, pero, incluso después de esta etapa, sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

Los objetos personales (Godino y Batanero 1994) se consideran como emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas. Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

2 Significado de un objeto

En el EOS se entiende el objeto matemático institucional como un emergente y su significado de la siguiente manera:

$S(O)$ = {Conjunto de prácticas P_i tal que en cada práctica P_i, la institución utiliza el objeto O}

Cuando se adopta una perspectiva pragmatista y se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir en el EOS dos

términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos *sentido* y *significado***.** En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, en el EOS se entiende el sentido como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto.

El significado de un objeto matemático, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevas técnicas, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos sistemas de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

El significado de un objeto personal se entiende como el sistema de prácticas matemáticas personales que una persona realiza para resolver el campo de problemas del cual ha emergido el objeto.

Esta manera de entender los objetos y su significado supone que la institución o la persona dispone de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca.

3 Práctica matemática

En el EOS se considera *práctica matemática* (Godino y Batanero 1994) a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo nos permiten realizar "acciones" cuya finalidad es la resolución de "situaciones problemas". Las prácticas discursivas (comunicativas) están relacionadas con el dominio y la creación del "lenguaje" así como en su uso para la realización de "argumentaciones" que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. Las prácticas regulativas (normativas) están orientadas básicamente a conseguir establecer "propiedades" (proposiciones) y definiciones de "conceptos".

Para la realización de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados

anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. Para realizar una práctica matemática (por ejemplo la representación gráfica de una función) el sujeto necesita una serie de conocimientos sobre la representación gráfica de funciones que son fundamentales para: 1) la realización de la práctica que consiste en representar una función determinada y 2) para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Es decir, que hay que tener en cuenta que el sujeto tiene un *conocimiento* sobre la "representación gráfica", (por ejemplo, como resultado del proceso de instrucción). También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general.

Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado *lenguaje* verbal (dominio, puntos de corte, asíntotas, etc.), simbólico (por ejemplo la fórmula de la función) y gráfico (sistema de ejes de coordenadas, gráfica, etc.). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos* (función, gráfica, dominio, etc.) y *propiedades* (por ejemplo, si la derivada es positiva la función es creciente) que son necesarios para justificar las *acciones* que realizará el alumno (por ejemplo calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la *argumentación* (implícita o explícita) que realizará el alumno para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias.

Las consideraciones anteriores nos llevan a considerar que cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama *configuración.* Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

En el EOS se considera que para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal.

4. Dualidades cognitivas

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan

pueden ser considerados desde las siguientes dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002)**.** Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos, dando lugar a distintas "versiones" o “miradas” de dichos objetos.

5 Tipos de significado institucionales

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de significados institucionales y personales: 1) *significado institucional de referencia* — cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas que designamos como significado institucional de referencia del objeto.—, 2) *significado institucional pretendido* — sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional—, 3) *significado institucional implementado* — sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes— y 4) *significado institucional evaluado* —colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes—.

Con la figura 1 (Ramos y Font 2004) se pretende ilustrar que no hay que pensar en los 4 tipos de significado institucional sólo como una secuencia que empieza en el significado de referencia y termina en el pretendido (secuencia representada por las flechas grandes). Al poner el significado de referencia en la columna de la izquierda se pretende ilustrar que éste siempre está interactuando con los otros tipos de significado (flechas horizontales) y no sólo con el pretendido. A su vez, el significado evaluado puede producir cambios en el significado implementado, por ejemplo como resultado de una evaluación inicial, lo cual se representa por una flecha vertical hacia arriba. Por otra parte, la reflexión sobre el proceso de instrucción (significado implementado y evaluado) puede interactuar con el significado de referencia (por ejemplo, modificando el significado se los objetos personales del profesor o bien los libros de texto), lo cual a su vez puede modificar el significado pretendido.

La figura 1 también sirve para ilustrar que si bien conviene distinguir conceptualmente los 4 tipos de significados institucionales, en los procesos de instrucción reales están mezclados e interactuando constantemente entre ellos.

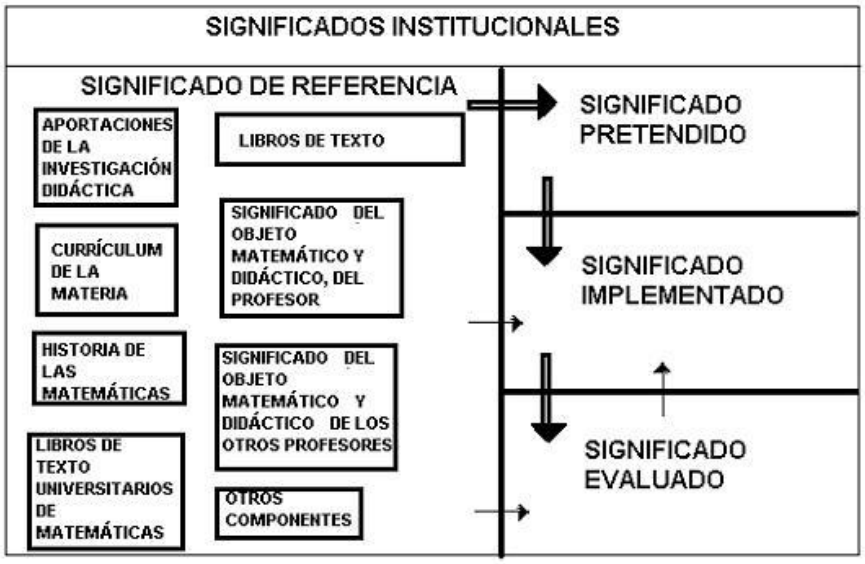


Figura 1

Uno de los aspectos que permite visualizar la columna de la izquierda de la figura 1 es que *el significado institucional de referencia está distribuido*, no reside ni en una sola persona ni sólo en la institución escolar considerada. Otro aspecto que permite destacar la columna de la izquierda de la figura 1 es que *el significado institucional de referencia es holístico* en el sentido de que el sistema de prácticas que lo constituye se analiza, entre otros, desde los siguientes puntos de vista: histórico, epistemológico y didáctico. Esta mirada aporta una perspectiva global sobre los sistemas de prácticas que constituyen el significado de referencia[14].

3 ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTÉMOLÓGICO DE LA DERIVADA.

A continuación se realiza un estudio histórico-epistemológico cuyo objetivo es explicitar algunos de los elementos del significado de referencia del objeto institucional derivada. Para ello, se analizan las configuración epistémicas que se fueron generando en la evolución histórica de dicho

[14] En algunos trabajos realizados en el marco del EOS al significado de referencia también se le llama "holo-significado".

objeto. Este estudio histórico-epistemológico[15] nos ha permitido identificar seis configuraciones epistémicas.

1 Primera configuración (CE1): "La noción de tangente en la matemática griega"

Esta configuración epistémica se articula alrededor de la siguiente situación problema: trazar la recta tangente a una curva determinada, como la parábola, el círculo, la espiral, etc. Apolonio estudió el trazado de tangentes y normales a las cónicas y Arquímedes la construcción de la tangente en un punto dado a la espiral que lleva su nombre.

Los griegos concebían básicamente a la tangente como una recta que corta a la curva en un punto y desarrollaron métodos geométricos para su trazado. Estos métodos diferían entre sí según la curva en consideración. Los griegos se ocuparon del trazado de tangentes a parábolas, hipérbolas, elipse y otras curvas específicas como la espiral de Arquímedes. Los griegos no tenían una idea clara de lo que era la tangente aunque parece ser que focalizaban la atención en la singularidad del punto de intersección, puesto que consideraban que la recta tangente tenía que tener sólo un punto en común con la curva y estar de un mismo lado de ella.

Componentes de la configuración

Situaciones:

La problemática central que se presenta en esta configuración es el trazado de la tangente a una curva determinada en un punto dado (espiral de Arquímedes, cónicas de Apolonio, círculo, etc.). Las situaciones se presentan como problemas geométricos específicos.

Acciones:

Trazado de la recta tangente a una curva (círculo, espiral, cónicas, etc.) usando exclusivamente procedimientos geométricos.

Lenguaje:

El lenguaje es el de la geometría sintética.

Conceptos:

Diferentes definiciones de recta tangente:

- Una recta que tocando a un círculo y que al ser prolongado no la corta, se llama tangente al círculo.

[15] Para elaborar este estudio hemos consultado, entre otros, textos de historia como los siguientes: Andersen 1984, Bos 1984, Bourbaki 1976, Boyer 1959 y 1986, Collette 1985, Kline 1992 y Youschkevitch 1976.

- Una recta toca a un círculo si, al encontrar al círculo y ser prolongada, no la corta.
- La tangente es la recta que cerca de un cierto punto de la curva, deja a la curva a un mismo lado.
- Una recta toca a un círculo si, al encontrar al círculo y ser prolongada, no la corta.
- Una recta es tangente a una curva, si toca a la curva y, en el espacio entre la curva y la recta, no cabe ninguna otra recta.

Propiedades:

Se destacan algunas propiedades de las tangentes relacionadas al trazado de tangentes de círculos y a algunas curvas particulares. Por ejemplo, en Euclides se hallan las siguientes:

- La recta tangente en un punto P a un círculo, es perpendicular al radio del mismo.
- La tangente a una curva tiene sólo un punto en común con ella y está a un mismo lado de la curva.
- La tangente a una curva en un punto corta a la misma en un solo punto.

Argumentos:

La argumentción es la propia de la geometría sintética. Por ejemplo, la propiedad 17 del Libro III de los Elementos de Euclides, presenta, en forma detallada y argumentada, procedimientos de construcción, desde un punto dado, de la recta tangente que toca a un círculo dado.

2 Segunda configuración (CE2): "La nociones de variación y cambio en la Edad Media"

Esta configuración se caracteriza por el tratamiento de nociones como la de cambio o cantidad variable, íntimamente ligadas a la noción de derivada.

En el pensamiento griego, ya existía una idea primitiva de cambio y movimiento aunque ambas ideas se consideraban externas a la matemática. Para los griegos, el concepto de variabilidad era una característica exclusiva de las magnitudes físicas ya que los entes matemáticos eran estáticos.

En la edad media aumentó el interés por el estudio del mundo real, y, por tanto, el interés por el estudio de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. En este período se pueden destacar los trabajos de Nicolás Oresme, que introduce en la geometría la idea de movimiento.

Con el aporte de un grupo de estudiosos del siglo XIV, la cuantificación y la representación gráfica de la variación se desarrollan progresivamente y se refieren tanto a algunos fenómenos físicos como a problemas de índole diversa. Los estudios cuantitativos de las variaciones llevaron a los filósofos del siglo XV a su clasificación según la tasa de variación o de cambio fuese o no uniforme.

Componentes de la configuración

Situaciones:

Se trata de situaciones contextualizadas en las que se presentan fenómenos de la naturaleza relacionados con el cambio, el movimiento y la variabilidad.

Acciones:

Entre las principales acciones pueden destacarse:

- Trazado del gráfico de una variación. (Oresne)
- Trazado del diagrama de la velocidad en función del tiempo para un móvil animado por una aceleración uniforme. (Oresme).
- Cuantificación de las cualidades o de las formas variables (Oresme)
- La determinación de la variación de una cantidad en las proximidades de su máximo (Oresme).
- Elaboración de modelos cinemáticas del sistema del mundo.

Lenguaje:

El lenguaje discursivo predomina en el tratamiento de estos fenómenos de cambio, variabilidad y movimiento. Se inicia el uso del lenguaje gráfico

Conceptos:

Se trata de conceptos como el siguiente:

- Todo objeto mensurable puede imaginarse como una cantidad continua. (Oresme).

Propiedades:

Son propiedades como la siguiente:

- Si un cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, la distancia recorrida será la misma que la recorrida por un móvil que se mueve, durante el mismo tiempo , uniformemente a una velocidad igual a la del primer cuerpo cuando éste ha dejado pasar la mitad del tiempo

Argumentos:

Los principales argumentos son elaborados por Oresme y tienden a justificar lo expuesto con relación a la variación de las magnitudes. Por ejemplo, la verificación geométrica de la ley de Merton mediante el diagrama de la velocidad en función del tiempo para un móvil animado de una velocidad uniforme.

3 Tercera configuración (CE3): "El cálculo de la tangente en el marco de la geometría analítica"

Esta configuración se organiza alrededor del problema de la determinación de la recta tangente y de la normal a una curva en un punto, usando el triángulo determinado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o el triángulo formado por la tangente, la normal y la subnormal.

Históricamente el período que se caracteriza por el uso de dichos triángulos se extiende entre 1630 y 1660 aproximadamente y comienza con los aportes de Descartes y termina con la introducción del triángulo diferencial aportada por Barrow.

El siglo XVII fue de una fecundidad asombrosa para la matemática gracias a la conjunción del álgebra y la geometría en la la geometría analítica. En este contexto resurge el problema, ya planteado en el marco de la geometría de los griegos de la antigüedad, del trazado de las tangentes a una curva. Este problema estaba relacionado con el interés tecnológico que tenía el desarrollo de la óptica en el siglo XVII.

Tal como se ha expuesto en la CE1, en la matemática griega la noción de tangente no era clara. Resultaba muy ambigua. No había una técnica general para construir la tangente de una curva cualquiera, para cada curva había un método específico. En el siglo XVII intersaba hallar un método general para construir tangentes y normales.

Las ideas que fundamentaban en el periodo 1630-1660 los diversos procedimientos de cálculo de la tangente eran bastante diferentes:

- Descartes utilizaba el número de puntos de intersección entre una circunferencia y una curva y el triángulo formado por la ordenada, la normal y la subnormal o el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente. Consideraba el sistema formado por la ecuación de la curva y por la ecuación que se desprende de aplicar el teorema de Pitágoras al formado por la ordenada, la normal y la subnormal. De esta manera consiguía la ecuación de una circunferencia que factorizaba para el caso en que la raíz fuese doble.
- Fermat utilizaba el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, los triángulos semejantes y el concepto de adigualdad;

- Roberval se basaba en una idea intuitiva de la velocidad instantánea y la ley del paralelogramo para la composición de velocidades.

A pesar de las diferencias se pueden encontrar algunos aspectos en común (Font 2001):

1. Una idea dinámica de las curvas, ya que estas se consideran, por una parte, como la traza que deja un punto que se mueve sobre la curva, y, por otra parte, como una relación entre dos cantidades geométricas variables.
2. Un interés por la construcción geométrica de la tangente y de la normal en cada punto
3. La no utilización explícita del concepto de límite (aunque una explicación completa de los métodos propuestos implica dicho concepto)
4. Una concepción de la recta tangente no suficientemente explicitada.
5. El papel fundamental que juega en la mayoría de métodos el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente y el papel secundario (o nulo) del del triángulo diferencial.

Componentes de la configuración

Situaciones:

La problemática central de esta configuración epidémica consiste en la elaboración de métodos generales para la determinación de tangentes, subtangentes, normales y subnormales a una curva.

Acciones:

Entre 1630 y 1660 se elaboran diferentes procedimientos de construcción de la normal y la tangente a ciertas curvas en un punto dado (Descartes, Fermat, Roverbal, ...). Son procedimientos diferentes pero en casi todos ellos destaca el uso del triángulo formado por la tangente, la normal y la subtangente, o el triángulo formado por la ordenada, la normal y la subnormal.

Lenguaje:

En esta configuración se amplía el uso del lenguaje. Además del lenguaje coloquial y el gráfico se introduce el lenguaje algebraico.

Conceptos:

En esta configuración se entienden las curvas como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y se dan definiciones de la tangente en las que se puede considerar que, implícitamente, está la idea de que la tangente es el límite de las secantes:

- Una línea es la traza de un punto móvil.
- Una línea cualquiera variable, que corta a una curva dada en un punto fijo M dado y en un segundo punto p variable que se aproxima indefinidamente a M, llega a ser a su vez, tangente a la curva cuando los dos punto de intersección coinciden.
- Líneas rectas o curvas que tienen dos puntos comunes y que se aproximan indefinidamente, se convierten en tangentes cuando estos dos puntos coinciden.

Propiedades:

Son propiedades como las siguientes:

- La normal y la tangente son rectas perpendiculares.
- El triángulo formado por la tangente, la ordenada y la subtangente es semejante, por ejemplo, al triángulo formado por la normal, la abscisa y la subnormal.

Argumentos:

El tipo de argumentación presenta una ruptura con la argumentación propia de la geometria sintética de la CE1. Las argumentaciones no se organizan de acuerdo al modo axiomático clásico, ni su objetivo es el procedimiento deductivo sino la resolución de problemas específicos y la elaboración de las técnicas apropiadas. Descartes es muy consciente del cambio en el tipo de argumentación ya que considera que él muestra tanto el análisis como la síntesis, mientras que los antiguos geómetras solían servirse, según él, únicamente de la síntesis en sus escritos.

4 Configuración epistémica 4 (CE4): "Los razonamientos infinitesimales"

Esta configuración se origina en el uso de métodos infinitesimales para la determinación de rectas tangentes a curvas, para el cálculo de la velocidad instantánea de un punto móvil y para la determinación de máximos y mínimos de una función.

Los métodos del análisis preconizados por los predecesores de Newton y Leibniz fueron desarrollados con el objeto de resolver una clase de problemas bien definidos tales como la construcción de la tangente a una curva, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas.

Si bien la geometría analítica permitió desarrollar algoritmos eficaces, ninguno de ellos consiguió elaborar el método general que se esperaba.

Por otra parte, pocos fueron los matemáticos que percibieron los estrechos lazos entre los problemas estudiados.

Les cabe a Newton y Leibniz la elaboración de un método general y nuevo aplicable a una gran cantidad de problemas.

Newton descubrió los principios del cálculo diferencial e integral hacia el año 1665 y, a lo largo de 10 años, elaboró tres enfoques diferentes para el mismo. En el comienzo de sus investigaciones sobre las propiedades de las líneas curvas, Newton se apoya principalmente en el método de las tangentes de Descartes y a la regla de Hudde para la determinación de extremos. Toma además de la física ciertos conceptos que se revelan útiles para sus métodos infinitesimales.

En su primera concepción presenta su método conocido como el método de infinitesimales, en el cual define a los momentos como cantidades pequeñas, indivisibles e infinitesimales.

La contribución más importante de Newton a los métodos infinitesimales lo constituyen, su método de las fluxiones, que se corresponde con su segunda concepción del análisis y el método de las primeras y últimas razones, que se corresponden con su primera concepción.

El carácter general del método de las fluxiones fue percibido por el propio Newton según una carta fechada en 1672, en la cual expresa que puede aplicarse no sólo al trazado de tangentes a cualquier curva , sea geométrica o mecánica, sino para resolver cualquier clase de problemas sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad, etc.

El método de las fluxiones surge como respuesta al primer problema planteado por Newton: encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera dada la longitud del espacio descrito. Es de naturaleza geométrica mecánica, pues supone que todas las magnitudes geométricas son engendradas por movimientos de velocidades diferentes, mientras que el tiempo fluye continua y uniformemente; de donde el tiempo no aparece explicitado sino en forma implícita en la velocidad; en la velocidad de la velocidad, etc.

Las magnitudes engendradas son las fluentes, que Newton designa con las últimas letras del alfabeto, en minúscula, por ejemplo; x,y,z. El término "fluente" utilizado por Newton representa una relación entre variables.

Las velocidades de las fluentes son las fluxiones que se representan con las mismas letras coronadas con un punto en su parte superior. Las fluxiones son tan aproximadamente como se quiera, como los crecimientos de las fluentes generados en muy pequeñas partículas de tiempo, iguales y, hablando con más precisión, están en la razón primera de los crecimientos nacientes.

Newton denomina momento al producto del incremento del tiempo por la respectiva función.

Para las fluxiones sucesivas Newton introdujo una notación característica que aún se usa en mecánica, que consiste en colocar puntos encima de la letra que indica la correspondiente fluente. Desde la perspectiva actual las fluxiones y momento de Newton se pueden interpretar como las derivadas y diferenciales actuales.

El segundo problema planteado por Newton trata de la determinación de las fluentes, dada la relación de sus fluxiones. Como este problema es inverso del que le precede, Newton opinó que podía resolverse de manera contraria.

Disponiendo de su método general, Newton determinó máximos y mínimos de funciones, tangentes a curvas, puntos de inflexión, cambios de concavidad de las curvas.

El procedimiento usado por Newton para el cálculo de las fluxiones, es a efectos prácticos, idéntico al actual, salvo que el uso que hace Newton de la palabra "desaparecer ", no corresponde al actual concepto de límite.

Newton utiliza tanto métodos geométricos en sus demostraciones como analíticos.

Desde la perspectiva actual se puede considerar que asoma en Newton, aunque expresada en forma oscura, la importante noción de límite al introducir la expresión "razón de los incrementos evanescentes", introducción que obedecía al intento de levantar ciertas objeciones de orden técnico que su método suscitaba.

La tercera concepción del cálculo de Newton se presenta en forma operacional mediante el método de las primeras y últimas razones. Dicho método se expone en el siguiente lema: Las cantidades o razones de cantidades que tienden constantemente a la igualdad en un tiempo finito y que, antes del final de ese tiempo se aproximan más a una a la otra que cualquier diferencia dada, son al final iguales.

En otras palabras, si Δx y Δy son pequeños crecimientos de x $\wedge$ y y $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son las fluxiones de x $\wedge$ y, entonces la diferencia entre las razones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta \dot{y}}{\Delta \dot{y}}$ puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo un intervalo de tiempo t suficientemente pequeño.

La explicación que da Newton con relación a sus razones últimas, nos permite ver mejor la semejanza entre su última concepción y la derivada actual. En particular, la idea intuitiva de esta razón última se encuentra en

el problema de las tangentes, la que Newton considera la tangente como la posición límite de una secante.

Newton introduce la noción de diferencial a través de su concepto de momento, el que es producido por una cantidad variable: "genita". Así las cantidades llamadas genitas son variables e indeterminadas y aumentan o decrecen mediante un movimiento continuo, y sus momentos son crecimientos temporales que pueden generar partículas finitas.

Newton razona en términos de un universo cinemático, en donde el incremento aparece como el momento $\dot{x}$ x **o,** siendo $\dot{x}$ la velocidad del punto x y **o** una cantidad (de tiempo) infinitamente pequeña.

El cálculo de diferencias puede considerarse como el primer aporte de Leibniz al cálculo. Referido en primero término al caso discreto, introduce desde el comienzo una simbología adecuada: dx que designa la diferencia de orden de dos términos sucesivos y dy, que representa la primera diferencia de dos términos sucesivos.

En una segunda etapa de su estudio consigue pasar del caso discreto al continuo, representando dx y dy, incrementos de una función arbitraria de x. Introduce los símbolos *d* y $\int$ los que son considerados como operadores inversos. Leibniz está convencido que el primero de ellos disminuye la dimensión, mientras que el segundo la aumenta.

Leibniz plantea el problema inverso de las tangentes y utiliza $\int$ para la suma y *dx* para la diferencia. De las consideraciones de sus estudios llega al convencimiento de que el proceso de sumación es el proceso inverso de la diferenciación.

El cociente $\frac{dy}{dx}$ se encuentra especialmente en la resolución del problema de determinar una curva cuya subnormal es inversamente proporcional a la ordenada.

Las consideraciones infinitesimales parten de la consideración de un triángulo especial, el triángulo diferencial que tanto Pascal como Barrow habían usado. Leibniz avanza con relación a estos matemáticos en la determinación de la tangente mediante la diferencia de las ordenadas sobre la diferencia de las abscisas.

Las consideraciones acerca de este triángulo le permitieron reconocer que el problema de las tangentes y el de la cuadratura son inversos

En una nota manuscrita de 1676, Leibniz afirma que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando $\frac{dy}{dx}$, donde *dy* y *dx* son diferencias y $\frac{dy}{dx}$ es un cociente.

Leibniz se da cuenta, que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

La primera publicación de Leibniz acerca del cálculo diferencial aparece en Acta Eruditorum. En ella aparecen definidas las diferenciales como en la actualidad, se presenta las reglas generales de la diferenciación y se sirve de las diferencias más que de las derivadas por medio de la notación *d*. Las diferenciales se definen como incrementos finitos

Proporciona las reglas comunes de diferenciación de las expresiones racionales e irracionales.

Acompaña sus desarrollos analíticos con explicaciones geométricos, como, la búsqueda de la tangente, de los máximos y mínimos y de puntos de inflexión. Introduce la condición dv=0 para el casos de máximos y mínimos y de la anulación de ddv=0 para los puntos de inflexión.

Aunque esta memoria es muy breve, en ella aparecen definidas las diferenciales como en la forma actual.(En este trabajo Leibniz utiliza el triángulo rectángulo formado por las diferenciales dx y dx y que tiene como hipotenusa el segmente de tangente).

En 1675, el diferencial se entendía como una cantidad infinitamente pequeña, mientras que en que en sus primeras publicaciones la consideraba como un segmento finito.

Debe destacarse en Leibniz el aporte métodos y de una notación eficaz que aún hoy se mantienen. Leibniz propone para la derivada $\frac{dz}{dx}$ de una función z de x la notación dz (por oposición a dz que es la diferencial).

Leibniz mantiene la referencia a la geometría, trabajando sobre el triángulo diferencial. Este arraigo a la geometría le permite plantear la noción de distancia infinitamente pequeña y asocia a este concepto la noción de diferencial y la notación dx para el mismo.

Leibniz supone que toda curva se puede generar por una composición de segmentos rectilíneo cuyas extremidades son infinitamente próximas.

Leibniz usa el término "función" para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente o de la subtangente y de la normal.

Componentes de la configuración

Situaciones:

La problemática general de esta configuración tiene como eje la búsqueda de métodos generales que posibiliten la resolución de los problemas de tangentes, de máximos y mínimos, de la velocidad de un móvil y de cuadraturas, que habían preocupado tanto a los matemáticos que precedieron a Newton y Leibniz.

En el centro de la problemática debe destacarse el descubrimiento de los principios del cálculo diferencial e integral, descubrimiento que exigió la asimilación de los métodos analíticos elaborados anteriormente y de la comprensión de la relación de reciprocidad entre el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas; además de la traducción de los problemas de variación, de tangentes, de máximos y mínimos y de sumación a problemas de diferenciación y diferenciación inversa.

Acciones:

- Elaboración de algoritmos que permitieron simplificar el problema de las tangentes.(N).
- Determinación de las fluxiones de fluentes. (N)
- Obtención del momento de una fluxión (N)
- Trazar las tangentes a curvas. (N).
- Obtención del momento de una fluente. (N)
- Determinación del área de un triángulo de líneas por medio de su cálculo de diferencias (L)
- Cálculo de la longitud de una curva conociendo el área. (L)
- Determinación de una curva cuya subnormal es inversamente proporcional a la ordenada(L)
- Determinación de la tangente usando la derivada (L).
- Formulación de reglas de cálculo de diferenciales y derivadas de sumas, productos, cocientes, potencias y raíces. (L)

Lenguajes:

Esta configuración se caracteriza por la aparición de un lenguaje analítico simbólico nuevo, con notación elaborada tanto por Newton como por Leibniz para representar las nuevas nociones; lenguaje que a su vez se usa en las demostraciones y aplicaciones.

Newton representa las cantidades fluentes por las últimas letras del alfabeto y por las mismas letras coronadas por un punto para sus respectivas fluxiones. Identifica con o al momento de la fluente y con la ayuda de esta nueva notación y de desarrollos algebraicos aportados por él mismo demuestra y aplica sus métodos a situaciones específicas.

Leibniz por su parte, aporta con simbología que aún hoy se mantiene, como los símbolos de diferencial, integral y derivada, los que también usa tanto en el cálculo como en la elaboración de propiedades.

El lenguaje gráfico, y el lenguaje coloquial complementan al anterior en la elaboración de las nociones y métodos, así como en la justificación de estos últimos..

Conceptos:

Entre otros conceptos se tienen:

- El momento de la fluente es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.
- La velocidad $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña o representa el momento el momento de una cantidad cualquiera x.
- Las magnitudes matemáticas no están formadas por partes, por muy pequeñas que sean, sino que son descriptas mediante un movimiento continuo.
- Las líneas son descriptas y engendradas, no por la yuxtaposición de sus partes, sino por un movimiento continuo de sus puntos, las superficies por el movimiento de las líneas.
- Las fluxiones son, tan aproximadamente como se quiere, como los crecimientos de fluentes generados en muy pequeñas partículas de tiempo, iguales y están en la razón primera de los crecimientos nacientes; también pueden expresarse mediante líneas (razones) cualesquiera les sean proporcionales.
- Los diferenciales son incrementos infinitamente pequeños.

Propiedades:

Entre otras propiedades se tienen:

- Las cantidades o razones de cantidades que tienden constantemente a la igualdad en un tiempo finito y que, antes del final de ese tiempo se aproximan más la una a la otra que cualquier diferencia dada, son al final iguales.

- Las cantidades llamadas “genitas” son variables o indeterminadas, y aumentan o decrecen mediante un movimiento continuo, mientras que sus momentos son crecimientos temporales que pueden generar partículas finitas.
- Una curva es la unión de una infinidad de segmentos indivisibles de longitud infinitesimal de forma que la prolongación de estos segmentos dan las rectas tangentes a la curva en los distintos puntos.
- Las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores, o menores según que crezcan a una velocidad mayor o menor.
- Las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente las razones de cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales se aproximan constantemente las razones de cantidades, que decrecen sin límite, y hacia los cuales pueden aproximarse tanto como cualquier diferencia dada, pero sin sobrepasarlos o alcanzarlos antes de que las cantidades disminuyan indefinidamente.
- Una figura curvilínea debe ser considerada lo mismo que un polígono con un infinito número de lados.
- La integración, en cuanto proceso de sumación es la inversa de la diferenciación.

Argumentos:

Los argumentos utilizados en esta configuración son argumentos de tipo infinitesimal que, si bien permitían llegar a resultados correctos, son inadmisibles desde un punto de vista riguroso, ya que los infinitesimos en ciertos momentos de la argumentación eran considerados diferentes de cero, mientras que en otros momentos eran considerados igual a cero.

5 Quinta configuración epistémico (CE5): “La derivada como límite”

Los métodos infinitesimales de Newton y Leibniz no fueron conocidos hasta las últimas décadas del siglo XVII. El carácter novedoso de las mismas, las notaciones inusitadas y diferentes, su publicación en memorias aisladas y fragmentarias contribuyeron para que los nuevos métodos no se extendieran rápidamente. A fines del siglo XVII, aparte de los autores, pocos conocían tales métodos.

Los hermanos Bernoulli dieron conocer el cálculo de Leibniz por todo el continente europeo, mientras que la difusión del método de las fluxiones de Newton fue más lenta.

Las cuestiones de notación no estuvieron ausentes en este período. Juan Bernoulli propone una notación diferente para la derivada: Δz

Mientras que en el siglo XVII, la geometría analítica y los métodos infinitesimales habían servido de instrumentos analíticos para la solución

de problemas geométricos o para la investigación de leyes naturales, en el siglo XVIII, el análisis, aun prosiguiendo esos fines, se estudia además por si mismo, y hasta la geometría y los fenómenos naturales llegan a servirle de pretexto para nuevos desarrollos y nuevos problemas analíticos.

Los hermanos Bernoulli, Francois de L'Hopital, Colin MacLaurin, Brook Taylor, entre otros usaron los resultados obtenidos por los creadores del cálculo en sus investigaciones. McLaurin en Inglaterra y Euler en el continente, permanecen fieles a las tradiciones de las que son herederos. El primero se esfuerza en aclarar algo las concepciones newtonianas, mientras que el segundo, llevando a su extremo el formalismo leibniziano se inclina por basar el cálculo en un oscuro paso al límite a partir del cálculo de diferencias, cálculo del que da una exposición muy cuidada.

A fines del siglo XVII comienzan los primeros interrogantes sobre las bases lógicas de este cálculo y sobre las definiciones vagas de ciertos conceptos fundamentales. Comienza una etapa controvertida en que participaron una gran cantidad de matemáticos de renombre liderada por Euler (1707-1783) y D'Alembert (1713-1783).

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange (1736-1813) y Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Dirichlet quién propuso su definición en los términos actuales.

Euler usa el concepto de función en la forma en que se mantuvo durante mucho tiempo: "función de x es toda expresión analítica de una variable obtenida mediante una combinación finita o infinita de símbolos algebraicos o trascendentes".

Otra definición sostenida por Euler presentaba a la función como toda relación entre x e y tal que se represente en el plano mediante una curva trazada a mano libre, es decir, una curva continua dentro de la acepción vulgar de la continuidad. Euler sostuvo un concepto de cociente diferencial poco riguroso.

Euler concibe al cálculo como una teoría formal de funciones que no requiere de concepciones geométricas.

Las ideas de Euler sobre las bases lógicas del cálculo son elementales y reposan esencialmente sobre una concepción formal de las operaciones que intervienen para la obtención de los resultados.

Para este matemático, el cálculo de lo infinitamente pequeño consiste en el estudio de las razones geométricas de las cantidades infinitamente pequeñas.

Las cantidades infinitamente pequeñas tienden a cero en comparación con las cantidades finitas, y además, pueden ser despreciadas cuando están implicadas con cantidades finitas.

Con el propósito de evitar los infinitamente pequeños o los incrementos evanescentes, y al mismo tiempo con la idea de independizarlo de toda consideración geométrica o mecánica, Lagrange funda su cálculo de manera algebraica, tomando como fórmula fundamental la serie de Taylor.

En el mismo, considera al cálculo integral como inverso al cálculo de derivadas, aunque su método de derivadas no es riguroso.

En 1821, Cauchy consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de función continua. Basó su visión del cálculo sobre cantidades finitas y el concepto de límite. El concepto de límite fortaleció los fundamentos del análisis y permitió esencialmente dar una definición más precisa de derivada.

D'alembert sostuvo que Newton tuvo la correcta noción de derivada y expresó que la derivada debía estar basada sobre el límite de la razón de las diferencias de variables dependientes e independientes, sin embargo no llegó a dar una definición de derivada por cuanto su pensamiento estaba muy unido a la intuición geométrica, sin embargo sus seguidores llegaron a dar una definición clara de la misma.

Bolzano fue el primero en definir la derivada f(x) como la cantidad f`(x) a la cual la razón $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ se aproxima indefinidamente cuando Δx se aproxima a cero a través de valores positivos y negativos. Bolzano construye un ejemplo de una función continua sin derivada finita en ningún punto

Para D'Alembert la derivada consistía en encontrar el límite de la razón entre la diferencia finita de dos cantidades y la diferencia finita de otras dos cantidades. La razón será exactamente igual al límite en el momento en que estas diferencias sean nulas, pues entonces la razón desaparece y es reemplazada por un valor, el del límite. La formulación del concepto de límite en D'Alembert adoleció de una fraseología insuficientemente definida y a veces demasiado vaga para que fuera aceptada por sus contemporáneos. D'Alembert propone la derivada como un límite, y su definición de límite en términos de una variable que se aproxima a una cantidad fija tanto como cualquier cantidad dada no engloba el paso al límite, pero representa probablemente la mejor definición de límite de esa época.

Lagrange (173-1813) manifestó una actitud escéptica con respecto a los infinitamente pequeños, rechaza el concepto de límite formulado por

DÁlembert, critica el método de las fluxiones de Newton y muestra insatisfacción con las cantidades infinitesimales de Leibniz y Bernoulli. Trató de sustituir todo lo hecho hasta entonces por un método algebraico simple, que esté exento de objeciones y cuyo objeto sea proporcionar al cálculo todo el rigor de las antiguas demostraciones.

Su método para calcular la derivada de una función consiste en desarrollar la función en Serie de Taylor y despreciando todos los términos del desarrollo salvo los dos primeros, obtiene la expresión para la derivada.

Pese a las objeciones del método utilizado, fundamentalmente las referidas al hecho de que no toda función es necesariamente desarrollable en serie de Taylor, sus trabajos influyeron notablemente en la teoría de las funciones de una variable real.

Tanto la notación habitual para las derivadas f′(x), f′′(x),…. como el término derivada se deben a Lagrange.

Louis Cauchy (1789-1857) desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite en el cual trató de conciliar el rigor con la simplicidad que resulta de la consideración de cantidades infinitesimales.

En los textos de Cauchy, el concepto de límite se convierte claramente en un concepto aritmético, sin apoyo geométrico. La definición de derivada de Cauchy aparece en el Compendio de 1823 ligada a la noción de continuidad. Esta definición es esencialmente igual a la de la derivada de la función utilizada en la actualidad, si se exceptúa la utilización del límite a la derecha y el límite a la izquierda que no aparecen en Cauchy.

El término diferencial es definido por Cauchy en términos de la derivada, término que luego usa para definir diferenciales de orden superior.

Al igual que Bolzano , Cauchy definió la derivada f′(x) de una función f en el punto x como el límite del cociente incremental $\frac{f/x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. [16]

A pesar del rigor introducido por Cauchy en el análisis, quedan aún todavía puntos por clarificar con relación a la derivada: la relación entre la función continua y la función diferenciable no está comprendida perfectamente aunque Cauchy sostiene que toda función continua admite necesariamente una derivada.

Se debe a Riemann (1826-1866) la primera distinción neta entre continuidad y derivabilidad.

[16] Según nota Kline," Cauchy unificó esta noción con la de diferenciales de Leibniz definiendo dx como cualquier cantidad finita y dy como f′(x) dx. En otras palabras, se introducen dos cantidades dx y dy cuya razón, por definición es f′(x). Las diferenciales tienen significado en término de derivadas y son meramente una noción auxiliar.

El proceso de aritmetización del análisis, culmina a mediados del siglo XIX con la obra de Weierstrass (1815-1897). Este gran analista fue quién descubrió la existencia de funciones analíticas sin derivada.

Cauchy, Riemann, Weirstrass desarrollaron la teoría de las funciones de variable compleja y definieron la derivada de tal función.

En 1821, Cauchy, que ya había dado en su Análisis algebraico la primera exposición rigurosa de la teoría de las funciones elementales de una variable compleja, en la que dilucidaba completamente el concepto de límite, de continuidad y de convergencia, emprendió el estudio general de las funciones derivables de una variable compleja.

En los siglos posteriores, la derivada aparece ligada a otros conceptos mas avanzados como los cuaterniones de Hamilton quién introdujo además un operador diferencial importante; el gradiente.

Situaciones:

La problemática general de esta configuración se basa en la necesidad de dar rigor a las nociones descubiertas en el siglo XVII. La noción de derivada se funda sobre un concepto central; el concepto de límite logrando un desarrollo tal que se extiende hacia otras funciones como las analíticas y se vincula formalmente con la noción de continuidad desarrollada en este período. Los conceptos aritméticos otorgan rigor a los fundamentos del análisis hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará eliminada, en especial cuando mas tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir, curvas sin tangentes.

Acciones:

Entre las primeras acciones podemos destacar las siguientes:

- Cálculo del diferencial de funciones utilizando métodos algebraicos.
- Estudio sistemático de todas las funciones elementales, así como de su derivada e integral. (Euler).
- Cálculo de lo infinitamente pequeño. (Euler).
- Calculo el límite de la razón entre la diferencia finita de dos cantidades y la diferencia finita de otras dos cantidades.
- Elaboración de una notación para la derivada que aún se mantiene (Lagrange).
- Establecimiento de órdenes sucesivos de infinitesimales.(Cauchy).
- Utilización de la fórmula de Taylor como base de la teoría de la derivada. (Lagrange).

- Elaboración del concepto de límite como un concepto aritmético. (Cauchy).
- Elaboración del concepto de continuidad de una función. (Cauchy).

Lenguajes:

Esta configuración se caracteriza por la presencia del lenguaje formal de la matemática. El lenguaje predominante es el lenguaje algebraico, en algunos momentos apoyado por el geométrico. En esta instauración del rigor en el cálculo, el lenguaje formal juega un papel importante. La simbología elaborada en este período es hoy usada en el cálculo.

Conceptos:

- Las cantidades infinitamente pequeñas tienden a cero en comparación con las cantidades finitas, y, además, pueden ser despreciadas cuando están implicadas estas cantidades finitas. (Euler)
- Definición de la función de una cantidad variable como una expresión analítica formada de cualquier manera con esta variable, con números y con constantes**.** - Definición de la derivada como un límite. *- Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él; este último se llama el límite de todos los demás (Cauchy).
- Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente de manera que disminuyen por debajo de todo número dado, esta variable resulta ser lo que se llama un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene cero como límite.(Cauchy).
- Sea f(x) una función de la variable x, y supongamos que esta función pose un valor único y finito para cada valor de x en un entorno dado. Si para un valor de x en este intervalo, se añade un valor infinitesimal h, la función aumente en la diferencia f(x+h)-f(x), que depende, a su vez, de la nueva variable h y del valor de x. Establecido lo anterior, la función f(x) será continua con respecto a x entre los límites dados si, entre esos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la función.
- Se dice además que la función f(x) es continua en el entorno de un valor particular atribuido a la variable, siempre que sea continua entre dos límites de x, incluso muy próximos, que contengan el valor de que se trata.

- Cuando una función $y=f(x)$ es continua entre los dos límites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre los dos límites de que se trata, un crecimiento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un crecimiento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente, si se hace $\Delta x=i$, los dos términos de la razón de diferencias $\frac{f(x+i)+f(x)}{i}$ serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, mientras que estos dos términos se aproximarán indefinida y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger hacia otro límite, sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor determinado de x, pero varía con x.
- Si dx es una cantidad finita, entonces la diferencial dy de $y=f(x)$ está definida simplemente como $f'(x)\,dx$.- f(x) es continua en $x=x_0$, si para un número positivo, arbitrariamente pequeño ε, es posible encontrar un "entorno" de x_0 de amplitud δ Tal que para todos los valores en ese entorno la diferencia $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ cuando $|x-x_0|<\delta$. - Como la diferencial $dy=f'(x)dx$ es una función tendrá por derivada $f''(x)dx$ y una diferencial de orden dos $d^2y=f''(x)\,dx^2$. En general $d^ny=f^n(x)dx^n$, ,donde $f^n(x)$ es el cociente diferencial**.** ***-** Como Euler elimina las diferenciales la derivada $\frac{dy}{dx}$, , que significa para él el cociente $\frac{0}{0}$, puede ser igual a un número, de la manera siguiente: para todo número n, n.0 = 0 entonces n = $\frac{0}{0}$ y en consecuencia la derivada resulta ser un método apropiado para determinar el cociente $\frac{0}{0}$.* - $\frac{ddy}{dx^2}$ es el límite de la razón $\frac{ddy}{dx}$ dividido por dx, o más claramente, es el límite de $\frac{dz}{dx}$ donde $z=\frac{dy}{dx}$.

Propiedades:

- La función f(x) es continua en el entorno de un valor particular atribuido a la variable, siempre que sea continua entre dos límites de x, incluso muy próximos, que contenga el valor de que se trata.
- Una cantidad infinita multiplicada por cero o nada puede ser igual a una cantidad finita.

- Una cantidad infinitamente pequeña no es otra cosa que una cantidad que va disminuyendo y, consecuentemente, es en realidad igual a cero.
- Una cantidad finita no cambia si se le añade o quita una cantidad infinitamente pequeña.

Argumentos:

Se trata de un tipo de argumentación que no presenta las incoherencias de las argumentaciones con infinitesimos ya que se ha conseguido fundamentar el análisis infinitesimal sobre conceptos aritméticos.

REFERENCIAS

Andersen, K. (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660, en Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pàgs. 22-68). Madrid: Alianza Universidad

BOS, H.J.M. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana, en Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (págs. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

Bourbaki, N. (1976) *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

Boyer, C.B.: (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover

Boyer, C.B.: (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol I i II). Madrid: Siglo XXI.

Contreras, A. y Font, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (Boletín nº 14), pp. 1-21. [URL: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin14.htm]

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (en prensa), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 25(2).

Contreras, A. Luque, L. y Ordóñez, L. (2004), Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo, *Educación Matemática*, pp. 59-87.

Font, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000b), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Uno,* 25, pp. 21-40.

Font, V (2001). Construcció de tangents i normals en el període 1630-1660. Aplicacions a l'ensenyament del càlcul diferencial en el Batxillerat, en *El valor de la ciencia* (pp. 255-263). El viejo Topo: Barcelona

Godino, J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22(2/3), pp. 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14(3), pp. 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 25(3).

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/boletin15.htm]

Kline, M.:. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias* (Vol, I,II i III). Madrid: Alianza Universidad.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2003), El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida en E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (ed): *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 277-287. Granada: Universidad de Granada.

Ramos, A.B.y Font, V. (2004) Creencias y concepciones del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales *Actas III. Congreso Internacional Docencia Universitaria e Innovación*.

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, núm. 16, págs 37-85.

ALGUNAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN ACERCA DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE DESDE LA PERSPECTIVA DEL ENFOQUE ONTOLÓGICO – SEMIÓTICO[17]

María Elena Markiewicz

Universidad Nacional de Río Cuarto – Argentina

RESUMEN

Este trabajo se enmarca en la tesis de maestría en Didáctica de la Matemática "El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática del nivel medio" y tiene como objetivo plantear algunas cuestiones de investigación acerca del razonamiento plausible, según la agenda de investigación para la didáctica de la matemática proporcionada por el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2003).

Palabras claves: Razonamiento plausible; Conjeturas; Agenda investigación

SOME RESEARCH QUESTIONS ABOUT PLAUSIBLE REASONING FROM THE ONTOLOGICAL-SEMIOTIC PERSPECTIVE

ABSTRACT

This work is framed in a Master thesis in Mathematics Education: The role of plausible reasoning in secondary school mathematics teaching". The aim is set some research questions following the research agenda provided for mathematics education by the Ontological- semiotic approach to mathematic instruction (Godino, 2003).

Keywords: Plausible reasoning; Conjectures; Research agendas

1. EL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El objeto de estudio elegido es el razonamiento plausible o conjetural, definido por Polya (1954) como aquel que nos permite elaborar hipótesis y conjeturas que nos parecen acertadas, examinar su validez, contrastarlas y reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba.

Dado que este tipo de razonamiento se pone en juego en la actividad matemática, es que podemos considerarlo como un objeto matemático. El

[17] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 366-374)

motivo de la elección de este objeto de investigación tiene relación con el importante papel que juega el razonamiento plausible o conjetural dentro de la matemática. Sabemos que si bien la misma, presentada en su forma final, parece ser una ciencia puramente deductiva, en el momento de su construcción, no lo es: antes de probar un teorema matemático, hay que imaginarlo, conjeturarlo, contrastarlo en diferentes situaciones; así mismo antes de enfrentar los detalles de la demostración de un teorema hay que imaginarse la idea de la misma, relacionar, realizar analogías, etc.

En el ámbito educativo, después de muchos años en que se ha manejado la idea de que la matemática se debe enseñar tal como está estructurada como ciencia, desde los medios académicos se ha ido imponiendo un enfoque de enseñanza a partir de la resolución de problemas, que involucre al alumno en un ambiente similar al que se encuentran los matemáticos al trabajar. Esto implica, entre otras cosas, que el estudiante debe tener la posibilidad de observar, relacionar, buscar regularidades o analogías, generalizar, contrastar sus conjeturas de diversos modos, particularizar, reformular sus conjeturas, todo lo cual forma parte del razonamiento plausible.

Sin embargo, la observación de la práctica escolar, realizada en el campo experimental de nuestro ámbito de investigación, nos permitió detectar el siguiente problema didáctico: *En el contexto escolar, en particular en la escuela media, no hay demasiados espacios que permitan el desarrollo del razonamiento plausible, y la toma de conciencia de su papel y de su importancia dentro de la matemática. Esto genera, en el ámbito de la clase de matemática, una suerte de "confusión argumentativa", producto de la falta de discriminación entre la fase de acción y la fase de validación en la resolución de problemas, y de la falta de distinción entre distintas formas de validación.*

Este problema fue el que nos llevó a indagar con más profundidad al razonamiento plausible y a preguntarnos acerca del papel que juega o que debería jugar en la enseñanza de la matemática del nivel medio. Sin embargo, la respuesta a esta pregunta no es sencilla, ya que cuando comenzamos a pensar en el tema, aparecen numerosas cuestiones a considerar, cuestiones que tienen una naturaleza muy diferente, pero que es necesario abordar si se quiere realizar un estudio sistemático del tema. El Enfoque Ontológico- Semiótico (Godino, 2003) nos da pautas para plantear y clasificar las preguntas referidas a nuestro objeto de investigación. Esta clasificación se realiza teniendo en cuenta dos ejes o dimensiones complementarias, según el FIN y el FOCO de la investigación.

El FOCO de la investigación comprende las siguientes categorías:

- EPISTÉMICA: cuando el énfasis está puesto en los *significados institucionales.*
- COGNITIVA: cuando el interés gira en torno a los *significados personales*.
- INSTRUCCIONAL: cuando el foco está centrado en la *interacción entre significados personales e institucionales.*

El FIN de la investigación, comprende a su vez, las siguientes categorías:

- SEMIOMETRÍA: cuando se trata de *describir* significados (institucionales y personales)
- ECOLOGÍA: cuando el fin es estudiar las *relaciones* entre los significados de un objeto así como su relación con otros objetos.
- DINÁMICA: si el fin es analizar los *cambios* de los significados, ya sea institucionales o personales.

A continuación mostraremos cuáles son las preguntas que nos planteamos en cada una de las categorías consideradas, destacando que en el trabajo de tesis antes mencionado se profundizan aquellas correspondientes a la dimensión epistémica.

2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE RAZONAMIENTO PLAUSIBLE

2.1. Dimensión epistémica

Dentro de la faceta epistémica nos preguntamos acerca de la naturaleza misma de nuestro objeto de investigación, lo cual implica comenzar a identificar los significados institucionales del mismo. En especial, nos interesa caracterizar su significado en la institución matemática, explicitando los sistemas de prácticas vinculados al razonamiento plausible en este contexto y delimitando los elementos praxémicos y discursivos correspondientes. Es decir, trataremos de determinar en qué situaciones se pone en funcionamiento el razonamiento conjetural, qué procedimientos están vinculados al mismo, y qué definiciones, propiedades y argumentaciones forman parte de su significado. Esto nos permitirá contar con un marco de referencia para luego poder analizar las características del significado de razonamiento plausible en las instituciones de enseñanza, en particular para poder detectar ciertas trazas o indicios de razonamiento plausible presentes en el currículo y en los libros de texto de nivel medio. Como hasta aquí nuestro fin es la descripción o caracterización de

significados institucionales, estas cuestiones están dentro de lo que consideramos como semiometría.

Ahora bien, el razonamiento plausible no sólo está presente en la matemática: la evidencia inductiva de un físico, la evidencia circunstancial de un abogado, la evidencia documental de un historiador así como la evidencia estadística de un economista pertenecen al razonamiento plausible. Esto es, este tipo de razonamiento se encuentra en diferentes "lugares", aparece en diferentes contextos institucionales, y, dado que, tal como lo expresan Godino y Recio 2001), el estudiante se encuentra sujeto simultáneamente a algunas de estas instituciones, en particular la vida diaria y las ciencias experimentales, en cuyo seno se ponen en práctica distintos esquemas argumentativos, y en particular el razonamiento plausible, consideramos que es necesario analizar su función, su papel en dichos contextos, haciendo énfasis en las relaciones entre su uso en uno y otro contexto. También nos interesa analizar la relación del razonamiento plausible con otros objetos con los cuales entra en asociación, en particular, con la demostración deductiva. Estas cuestiones corresponden a la "ecología" ya que tienen como fin el análisis de las relaciones entre significados.

Por otra parte, en la categoría correspondiente a la dinámica de significados, nos interesa determinar los cambios que el significado institucional de nuestro objeto sufre para convertirse en un saber a enseñar, a través de distintas instituciones de enseñanza. Estos cambios se analizarán a través de la comparación de aquellas trazas o indicios de razonamiento plausible detectados en el currículo y en los libros de texto con el significado de referencia descripto en la semiometría.

Así mismo, dicho marco de referencia nos proporcionará pautas para la construcción de un significado institucional adecuado acerca del razonamiento plausible para el nivel medio, es decir, nos dará criterios para la elaboración de praxeologías que permitan superar la problemática planteada en nuestro problema didáctico.

En resumen:

❖ ***Semiometría***

- ¿Cuál es el significado del razonamiento plausible en la institución matemática? ¿Cuáles son los elementos praxémicos (situaciones, procedimientos) y discursivos (definiciones, propiedades, argumentaciones) que constituyen el sistema de prácticas vinculado al razonamiento plausible en la matemática?

- ¿Qué características tiene el significado del razonamiento plausible en las instituciones de enseñanza?, ¿Qué trazas o indicios de razonamiento

plausible podemos hallar en el currículo y en los libros de texto de nivel medio?

❖ **Ecología**

- ¿ Qué papel desempeña el razonamiento plausible en otros contextos institucionales en los que aparece, en particular en la vida cotidiana y en las ciencias experimentales? ¿Qué relaciones hay entre su uso en estos contextos y en la matemática?

- ¿Cuál es su relación con otros objetos, en particular con la demostración deductiva?

❖ **Dinámica**

- ¿Cómo cambia el significado institucional en distintas instituciones de enseñanza, en particular en el currículo y en los textos más comúnmente utilizados por los docentes del nivel medio?

- ¿Qué elementos de significado (situaciones, procedimientos, elementos discursivos) deberían tenerse en cuenta para la construcción de un significado institucional adecuado sobre el razonamiento plausible en el nivel medio?

2.2. Dimensión cognitiva

Esta dimensión está referida a la caracterización de los significados personales de los sujetos acerca de nuestro objeto de investigación. Es por ello que nos interesa aquí determinar en qué situaciones o momentos del proceso de estudio utilizan los alumnos del nivel medio el razonamiento plausible o conjetural, qué acciones o procedimientos ponen en juego, qué patrones de inferencia plausible utilizan. Queremos saber hasta qué punto el alumno utiliza de manera legítima o pertinente los procedimientos y patrones del razonamiento plausible, y si es conciente de su alcance y limitaciones.

Nos interesa determinar también qué relaciones establece el sujeto entre distintas formas de validación, más específicamente entre el razonamiento plausible y el deductivo. En particular, nos preguntamos si el razonamiento plausible puede convertirse en un obstáculo para avanzar en la demostración deductiva o si, por el contrario, puede facilitar su construcción.

También nos interesa identificar los conflictos semióticos que se pueden plantear a los estudiantes y que, por tanto, requerirán una atención

especial en los procesos de estudio, y nos preguntamos acerca de la evolución de los conocimientos de los alumnos, es decir, la transformación de los significados personales como consecuencia de la instrucción.

En resumen, las preguntas que nos planteamos en esta dimensión son las siguientes:

❖ **Semiometría**

- ¿En qué situaciones o momentos utilizan los alumnos del nivel medio el razonamiento plausible?

- ¿Qué procedimientos utilizan en la elaboración y contrastación de una conjetura?, ¿Qué patrones ponen en funcionamiento?

- Los alumnos, ¿utilizan estos procedimientos y patrones de manera pertinente, siendo concientes de su alcance y de sus limitaciones?

❖ **Ecología**

-¿Qué relaciones establece el alumno entre distintas formas de argumentación, en particular, entre el razonamiento plausible y el deductivo?

- El razonamiento plausible, ¿puede constituir un obstáculo para el alumno en la elaboración de una demostración deductiva o por el contrario, puede facilitar la construcción de la misma?

❖ **Dinámica**

- ¿Qué dificultades cognitivas pueden presentar los alumnos en la utilización del razonamiento conjetural?, ¿Cuáles pueden ser los motivos de tales dificultades?

- ¿Cómo cambian los significados personales como consecuencia de un determinado proceso de instrucción?

2.3. Dimensión instruccional

Esta dimensión está referida a la relación docente-alumno-contenido y apunta, fundamentalmente a la elaboración de un proceso instruccional viable y óptimo vinculado al razonamiento plausible para ser implementado en la escuela, en función de los análisis epistémico y cognitivo realizados previamente. Ello incluirá no sólo la selección de una praxeología matemática adecuada y la determinación de las funciones del docente y del alumno sino también el análisis de las interacciones entre elementos de

significado y tales funciones docentes y discentes. Deberá tenerse en cuenta también cuáles son los factores que condicionarán el proceso de instrucción y cómo se desarrollará este proceso a lo largo del tiempo.

En resumen:

❖ **Semiometría**

- ¿Qué situaciones deberían plantearse para favorecer el desarrollo del razonamiento plausible en el alumno del nivel medio? ¿Qué procedimientos deberían ponerse en funcionamiento? ¿Qué elementos discursivos deberían explicitarse?

- ¿Cuáles deberían ser las funciones del docente? ¿Cuáles deberían ser las funciones del alumno?

- ¿Qué patrones de interacción debe haber entre las funciones docentes y discentes y los distintos componentes del contenido pretendido del proceso de estudio?

❖ **Ecología**

- ¿Qué factores deberían tenerse en cuenta en el diseño de un proceso instruccional orientado a lograr que el alumno pueda distinguir entre distintas formas de argumentación, y comprenda la relación entre razonamiento plausible y deductivo?

❖ **Dinámica**

- ¿Cómo se debería desarrollar el proceso de instrucción a lo largo del tiempo?

3. REFLEXIONES FINALES

Debemos destacar que, tal como lo expresan Godino y Arrieche (2001), las cuestiones referidas a la dimensión epistémica tienen un carácter primario, esto es, deben estudiarse en primer lugar, ya que sus resultados y conclusiones determinan las restantes facetas. Aunque entre las facetas cognitiva e instruccional hay una dialéctica más compleja ya que, por una parte, los significados construidos por los estudiantes dependen del proceso de estudio seguido; pero este proceso debe tener en cuenta también los significados personales y los potenciales conflictos cognitivos identificados en investigaciones previas.

Respecto al enfoque metodológico a emplear en la investigación, según lo expresado por Godino (2003), se deben combinar diversos métodos y técnicas de recogida y análisis de datos según las diferentes fases de la

investigación y dependiendo del problema abordado. Así, en la dimensión epistémica el estudio será fundamentalmente documental, recurriéndose al análisis de trabajos relacionados al razonamiento plausible de varios autores del ámbito científico, de textos de historia de la matemática, del currículo nacional oficial correspondiente a la Educación General Básica y de textos de enseñanza correspondiente a este nivel. En las dimensiones cognitiva e instruccional, en cambio, se deberá combinar el enfoque cuantitativo- experimental con el cualitativo- interpretativo. Como los métodos cuantitativos muestran las tendencias existentes en la población, pero no toda la riqueza de la variabilidad individual, estos deben ser complementados con métodos cualitativos, en particular, el estudio de casos, que permitirá analizar los significados personales, detectando las dificultades, conflictos y grado de comprensión logrado por los estudiantes de la muestra y también enfocar algunas de las cuestiones relativas a la faceta instruccional. Claro que estos estudios de tipo cualitativos, al realizarse con muestras reducidas, tendrán un carácter exploratorio y permitirán formular hipótesis que luego deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

REFERENCIAS:

Godino, J. D.(2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. [Recuperable en: http://www.ugr.es/local/jgodino]

Godino, J. D. y Arrieche, M. (2001). Génesis de un tema de investigación: Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Maurio Castro* (pp. 245-255). Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración matemática. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 19 (3), 405-414.

Polya, G.(1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. New Jersey: Princeton University Press.

TALLERES

METÁFORAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS. EL CASO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES[18]

Jorge I. Acevedo
Universidad de Barcelona
Vicenç Font
Universitat de Barcelona
Janete Bolite
Pontificia Universidade Católica de São Paulo (Brasil)

RESUMEN

En la investigación que presentamos hemos intentado responder primero a las cuatro preguntas siguientes: ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?,¿es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?¿qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos?.¿qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?. A continuación abordamos una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico.

METHAPHORES AND SEMIOTIC FUNCTIONS. THE CASE OF GRAPHICAL REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS

ABSTRACT

We try to reply to the following questions: Which type of metaphors use teachers to explain the graphical representation of functions at secondary school level? Is the teacher conscious of the use of metaphors in the discourse and to which extend does he/she controls them? Which are the effects of these metaphors on students? Which role do metaphors play in the negotiation of meanings? We then involve in a theoretical reflection with the aim of situation the metaphor in relation with the five dual dimensions in the ontosemiotic approach.

1 INTRODUCCIÓN

Si por algo se caracteriza la metáfora es por su capacidad de aparecer, de una manera o de otra, en el centro de las investigaciones sobre la cognición, el lenguaje y la ciencia. Por lo que respecta al área de la didáctica de las

[18] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 375-389)

matemáticas, el interés por la metáfora no ha dejado de crecer en los últimos años. En la investigación que presentamos nos hemos situado en esta línea de trabajo y hemos intentado responder primero a las cuatro preguntas siguientes: ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?,¿es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?¿qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos?.¿qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?.

La investigación en didáctica de las matemáticas sobre las metáforas ha permitido resaltar por una parte la importancia que tienen éstas en el proceso de instrucción y, por otra, han puesto de manifiesto que cualquier reflexión sobre las metáforas tiene que tener presente la gran complejidad de factores relacionados con ellas. En nuestra opinión, una investigación sobre metáforas será más fructífera si se enmarca en alguno de los programas de investigación que últimamente se están desarrollando en el área de la didáctica de las matemáticas, ya que esta es la manera de poder afrontar la complejidad de factores asociados a las metáforas. Esta convicción nos ha llevado a un segundo tipo de preguntas más teóricas que las cuatro comentadas anteriormente, éstas son fundamentalmente dos: ¿Qué tipo de constructos elaborados por el enfoque ontosemiótico son útiles para el estudio de las metáforas?¿cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en dicha teoría?

El trabajo que presentamos se divide en seis secciones. En la primera se hace una introducción y se comenta el problema de investigación. En la segunda sección se hace una revisión de la investigación sobre metáforas y se comenta el marco teórico del embodied cognition. En la tercera sección se comentan los sujetos estudiados y la metodología utilizada. En la sección 4 realizamos un análisis de los datos e intentamos respondemos a las cuatro primeras preguntas que hemos marcado como primeros objetivos de nuestra investigación. En la sección 5 abordamos una reflexión teórica compleja cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico. Por último, en la sección 6, exponemos algunas consideraciones finales.

2 MARCO TEÓRICO

Recientemente, varios autores (e.g., Font & Acevedo 2003; Johnson, 1987; Lakoff & Núñez, 2000; Leino & Drakenberg, 1993; Núñez, 2000, Presmeg, 1992, 1997; Sfard, 1994, 1997) han puesto de manifiesto el importante rol que juega la metáfora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro. Según Lakoff y Núñez

(2000), las metáforas se caracterizan por crear una relación conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades e inferencias del dominio de partida en el de llegada. Puesto que las metáforas conectan sentidos diferentes, son esenciales en la construcción del significado de los objetos matemáticos que realiza el sujeto *"...a large number of the most basic, as well as the most sophisticated, mathematical ideas are metaphorical in nature"* (Lakoff and Núñez p. 364). Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Otra de las funciones que cumple la metáfora es la de conectar diferentes sentidos y, por tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático.

Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales.

- Grounding metáforas: Son las que relacionan un dominio de llegada dentro de las matemáticas con un dominio o de partida fuera de ellas. Por ejemplo: "Las clases son contenedores", "los puntos son objetos", "una función es una máquina", etc.
- Linking metáforas: Tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo, "los números reales son los puntos de una recta", las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc..

Cuando las grounding metáforas se enmarcan en el proceso de enseñanza y aprendizaje se manifiestan en el aula en dos direcciones diferentes. Por una parte, las metáforas que utiliza el profesor, de manera consciente o inconsciente, tienen por objetivo relacionar las matemáticas con situaciones no matemáticas de la vida cotidiana de los alumnos para facilitar la comprensión de estos. En este caso el dominio de partida son las matemáticas y el de llegada está fuera de ellas. A su vez, los alumnos utilizan su conocimiento de la situación cotidiana para comprender el contenido matemático. En este caso el dominio de partida está fuera de las matemáticas y el de llegada son las matemáticas.

3 METODOLOGÍA

La investigación que presentamos es una reflexión teórica basada en el análisis de diferentes procesos de instrucción sobre la representación gráfica de funciones en el Bachillerato español. Los episodios de aula y las entrevistas que se comentan en este trabajo son parte del material de campo que ha servido de base a las reflexiones y resultados que aquí exponemos.

La información se ha obtenido en el lugar de trabajo de los sujetos investigados. Los profesores que han participado en esta investigación lo han hecho de manera voluntaria y han consentido de forma consciente la intromisión en sus tareas docentes (observación de sus clases, grabación en vídeo, análisis de materiales de trabajo, etc.). Los alumnos han participado a petición de su profesor. La elección de los profesores y de los alumnos grabados en vídeo no se ha realizado bajo ningún criterio estadístico, simplemente se ha tenido en cuenta su disponibilidad a colaborar y a ser grabados.

En este trabajo vamos a considerar, sobre todo, la grabación en video de una sesión de clase del profesor A. También se hace referencia a otro profesores (B) y a las producciones de los alumnos de estos profesores.

Para poder analizar los procesos de instrucción efectivamente realizados por los profesores necesitamos textos escritos. Por este motivo, primero los hemos grabado en video y después se han transcrito. Hemos estructurado la transcripción en tres columnas: (1) transcipción del discurso oral de los profesores y de los estudiantes (2) lo que se escribe en la pizarra y (3) comentarios, sobre todo los gestos del profesor. En este trabajo el foco de interés es la práctica y el discurso del profesor, el discurso y la práctica del alumno se considera sólo cuando éste interactua con el profesor.

Una vez que tenemos estos textos escritos necesitamos descomponerlos en unidades de análisis. Una posible manera de realizar esta descomposición es tomar como unidad de análisis básica el constructo "configuración didáctica". En Godino, Contreras y Font (2004) se considera que una *configuración didáctica* –CD a partir de ahora- está constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática

El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. Aunque el criterio básico para determinar una CD es la realización de una tarea, la agrupación en configuraciones didácticas es flexible y queda a criterio del investigador.

El análisis de las configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso de instrucción se facilita si disponemos de algunos modelos teóricos que nos sirvan de referencia. En Godino, Contreras y Font (2004) se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar este papel y que se designan como configuración *magistral*, *adidáctica*, *personal* y *dialógica*. Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen en los procesos de instrucción efectivamente realizados están más o menos próximas a alguna de estas cuatro configuraciones teóricas.

La división de la sesión de clase en configuraciones didácticas permite realizar análisis a posteriori de tipo macroscópico sobre un conjunto amplio de configuraciones didácticas, mientras que los análisis más finos (microscópicos) se realizarán fundamentalmente sobre un número muy reducido de estas configuraciones didácticas. En nuestra investigación, después de delimitar una CD, hemos enfocado nuestro análisis a los fenómenos relacionados con el uso de metáforas que se observan en ella.

4 ANÁLISIS DE LOS DATOS

En esta sección realizamos un análisis de los datos e intentamos responder a las primeras cuatro preguntas formuladas.

4.1 Respuesta a las tres primeras preguntas

A continuación vamos a intentar responder a las tres preguntas siguientes: ¿qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?,¿es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?¿qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos?

2.1 Metáforas orientacionales

Con relación a la primera pregunta, en las explicaciones de los profesores se puede observar el uso de metáforas orientacionales. Por ejemplo, el profesor del siguiente episodio utiliza el término “horizontal” en lugar de utilizar la expresión “paralela al eje de abscisas”, “eje horizontal” en lugar de “eje de abscisas” y el término “eje vertical” en lugar de “eje de ordenadas”. Hay que resaltar que en la transcripción de la clase de este profesor solamente en una CD el profesor deja de hacer la identificación entre eje de ordenadas y eje vertical y entre eje de abscisas y eje horizontal. En cambio, el libro de texto que se utiliza es muy escrupuloso con este aspecto y nunca hace esta identificación.

Ejemplo

El profesor había propuesto previamente la resolución de un problema seleccionado del libro de texto que consistía primero en dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $f(x)=2x^4$, $g(x)=-2x^4$ y $h(x)=-2x^5$ y después determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de manera visual a partir del esbozo de las gráficas de estas tres funciones.

A continuación el profesor propuso la tarea de determinar la derivada segunda en $x = 0$ para cada una de las tres funciones anteriores, que en los tres casos resulto ser cero.

El profesor resolvió esta tarea en la pizarra e hizo observar a los alumnos que la derivada primera en los tres casos es cero debido a que en las tres gráficas la recta tangente en $x = 0$ es horizontal.

Cálculo de la derivada segunda

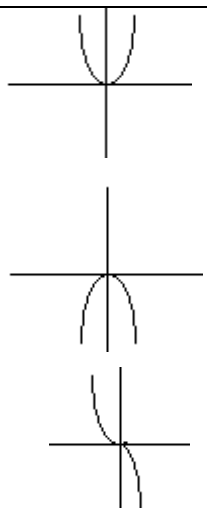
Transcripción	Pizarra	Observaciones
....., para cada una de las funciones se ha de encontrar una derivada en $x = 0$, comencemos por la primera, la efe, la primera derivada…… $8x^3$ … la segunda derivada $24x^2$, pensemos que la primera en la función $f(x)$ en $x = 0$ presenta un mínimo y la derivada en $x = 0$ es 0, como cabía esperar, **porque ahora esta tangente es horizontal**, y la segunda derivada en $x = 0$ también da 0.		El profesor hace el gesto de poner la mano indicando la posición horizontal de la recta tangente en cada gráfica.

Tabla 1

Esta metáfora es muy habitual en las clases de bachillerato y puede facilitar errores en los alumnos, puesto que éstos ante la gráfica siguiente pueden considerar que, cuando x es la abscisa del máximo, la derivada no es cero ya que la recta tangente no es "horizontal"

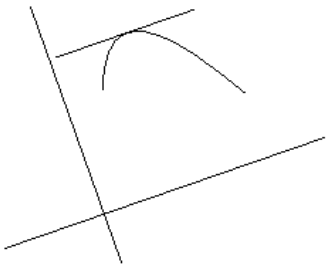


Figura 1

Este posible error no suele manifestarse debido a que en los libros de texto, y en las explicaciones de los profesores, se suelen presentar sistemas de coordenadas que tiene el eje de abscisas en posición horizontal y el eje de ordenadas en posición vertical. Se trata de un típico fenómeno de generación de ejemplos prototipos.

Las metáforas orientacionales surgen del hecho de que tenemos cuerpos de un tipo determinado y que se relacionan de una determinada manera con su entorno físico -nuestro cuerpo determina un sistema de referencia egocéntrico. Las metáforas orientacionales dan a un concepto una orientación espacial: por ejemplo *más es arriba, menos es abajo*. Estas

metáforas no son arbitrarias, tienen una base en nuestra experiencia física y cultural y, a su vez, son la base de las teorías científicas. En el caso que nos ocupa, los sistemas de ejes coordenados, la metáfora orientacional actúa a tres niveles, por una parte se encuentra ya fosilizada en los conceptos teóricos (por ejemplo, los valores del eje de ordenadas que están por encima del origen son positivos, mientras los que están por abajo son negativos), por otra parte está presente en la explicación del profesor cuando, para hacer más intuitivos los conceptos teóricos, recurre a metáforas que se ajusten a la experiencia personal de los alumnos (por ejemplo cuando identifica eje de ordenadas con eje vertical y eje de abscisas con eje horizontal). También está presenta en la manera en la que el alumno organiza su conocimiento de los ejes de coordenadas ya que éste recurre a metáforas orientacionales basadas en su experiencia corporal.

2.2 Movimiento ficticio

También se observan metáforas que facilitan que los alumnos entiendan que "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica".

Ejemplo

Antes de la siguiente transcripción el profesor comentó el hecho de que si la derivada segunda es cero, podemos tener máximos, mínimos o puntos de inflexión. Primero calculó las derivadas primera y segunda de las tres funciones anteriores haciendo observar a los alumnos que en los tres casos en $x = 0$ la derivada segunda se anulaba. Después utilizó las gráficas de las funciones cuyo esbozo estaba dibujado en la pizarra para hacerles ver que en la primera función en $x = 0$ había un máximo, en la segunda un mínimo y en la tercera un punto de inflexión. No hubo hay diálogo por parte de los alumnos y el profesor se limitó a explicarlo.

A continuación el profesor sugirió la siguiente técnica para determinar si tenemos un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$ cuando $f\,'(a) = 0$ y $f\,''(a) = 0$: realizar el estudio de la variación de la derivada primera en un entorno del punto.

Criterio suficiente de máximos, mínimos y puntos de inflexión. Estudio de la variación de la derivada en un entorno del punto

Transcripción	Pizarra	Observaciones
En la actividad anterior se ha de observar que si la primera derivada en $x=a$ es 0, y la segunda derivada en $x = a$ también es 0, son posibles	Siguen dibujadas las	El profesor lee este párrafo

diversas situaciones. En este caso, es conveniente hacer el estudio del comportamiento del signo de la derivada primera en un entorno de $x = a$, para determinar en que situaciones nos encontramos. Esto quiere decir que si nosotros sabemos que hay en $x = a$ un máximo o un mínimo o un punto de inflexión, y al hacer la segunda derivada da cero. La segunda derivada no nos aporta nueva información. Lo que se ha de hacer es una tabla de variación. Si antes del cero es creciente, si después de cero es creciente, si antes del cero y después del cero es creciente tenemos un punto de inflexión. Si antes del cero es creciente y después del cero es decreciente, un máximo. Si antes del cero es decreciente y después de cero es creciente, un mínimo. Haced la tabla de cada función. ¿Hay alguna pregunta?	gráficas de la trnascripción anterior	literalmente del libro de texto. Acompaña este comentario con gestos sobre las gráficas dibujadas en la pizarra.

Tabla 2

En el discurso del profesor podemos observar el uso de una poderosa metáfora: *el movimiento ficticio* (Lakoff and Núnez 2000). En esta transcripción, el discurso metafórico del profesor puede inducir al alumno a entender el cero como un punto determinado sobre un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Palabras como "antes de cero", "después de cero" pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacial, se tiene un origen ("de"), un camino ("pasa por", "aquí", "a lo largo"), y un fin ("a", "hasta") y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado.

Font (2000) y Bolite Frant et al. (2004) hallaron que cuando los profesores explican la gráfica de una función en términos de la trayectoria de un punto que se mueve, hay estudiantes que piensan que el punto siempre es el mismo. Lo interpretan como si se tratara de un coche que se mueve sobre una carretera, el coche está en lugares diferentes pero siempre es el mismo coche.

2.3 Metáforas ontológicas y mezclas de metáforas

Otro tipo de metáforas observadas son las *ontológicas* -permiten considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.)- y también *mezclas de metáforas*. Por ejemplo, en la siguiente transcripción de una parte de otra CD se observa una mezcla de metáforas ontológicas y dinámicas en el discurso del profesor.

Ejemplo

Profesor A: Una de las cosas que estudiamos para representar la gráfica de una función es el comportamiento al infinito. ¿Qué hace la función cuando la equis tiende al infinito?, ¿Qué hace la gráfica de la función cuando la equis tiende al infinito? Podría hacer así, tirar a más infinito. [mientras dibuja la gráfica de la izquierda] Puede hacer así tirar a menos infinito. [sobre la gráfica anterior dibuja la del centro] También podría crecer y estabilizarse hasta un número, así. [sobre la gráfica del centro dibuja la de la derecha. Por otra parte, en las tres gráficas el profesor mueve la mano haciendo movimientos que son la continuación de la parte

de la gráfica dibujada, sugiriendo la continuación indefinida.

Figura 2

Para poder contestar a la segunda pregunta se realizó una entrevista semiestructurada a los profesores que también fue grabada en vídeo. El nivel de conciencia que tienen los profesores sobre el uso que hacen de las metáforas dinámicas y su posible efecto en la comprensión de sus alumnos, difiere según los profesores. El profesor que impartió la clase que hemos utilizando hasta el momento, el profesor A, era más consciente que otros. En cambio, en Font y Acevedo (2003) se expone el caso del profesor B y se observa que éste no es consciente de que usa metáforas dinámicas y, por tanto, no las controla. Como consecuencia de las preguntas del entrevistador, el profesor B se da cuenta de que las usa, pero considera que dicho uso facilita la comprensión y no da importancia a las posibles dificultades que pueda generar en sus alumnos. De hecho, considera que el uso de metáforas no genera ningún tipo de error conceptual en sus alumnos. Para poder contestar a la tercera pregunta se entrevistó y grabó en video a algunos alumnos, se pasó cuestionarios también a algunos alumnos y se analizaron algunas de las producciones realizadas por los alumnos en el

proceso de instrucción (por ejemplo, los exámenes). Las producciones de los alumnos permiten observar como el uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en su comprensión de la representación gráfica de funciones (Font y Acevedo (2003)

4.2 Función de la metáfora en la negociación de significados.

En Acevedo y Font (2004) se describe una CD de la clase del profesor A que permite observar el papel que juega la metáfora en la negociación de significados, entendida ésta como el acoplamiento entre significados personales e institucionales en un proceso de instrucción (Acevedo y Font 2004). En esta CD se observa como la combinación de metáforas dinámicas expresadas verbalmente y el movimiento de la mano permite una negociación de significados en el aula que lleva a los alumnos a entender el dominio de la función, un caso de infinito actual puesto que es el intervalo abierto $(0, +\infty)$, como el resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio, aunque después se prescinde del principio.

5 LAS METÁFORAS EN EL MARCO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO.

En nuestra opinión, una investigación sobre metáforas será más fructífera si se enmarca en alguno de los programas de investigación que últimamente se están desarrollando en el área de la didáctica de las matemáticas, ya que esta es la manera de poder afrontar la complejidad de factores asociados a las metáforas. Esta convicción nos ha llevado a un segundo tipo de preguntas más teóricas que las cuatro comentadas anteriormente, éstas son fundamentalmente dos: ¿Qué tipo de constructos elaborados por la Teoría de la Funciones Semióticas son útiles para el estudio de las metáforas?¿cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en dicha teoría?. Con relación a la primera, en los apartados anteriores ya hemos visto la utilidad del construto "configuración didáctica". Con relación a la segunda pregunta, en esta sección vamos ver la relación de la metáfora con las dimensiones duales.

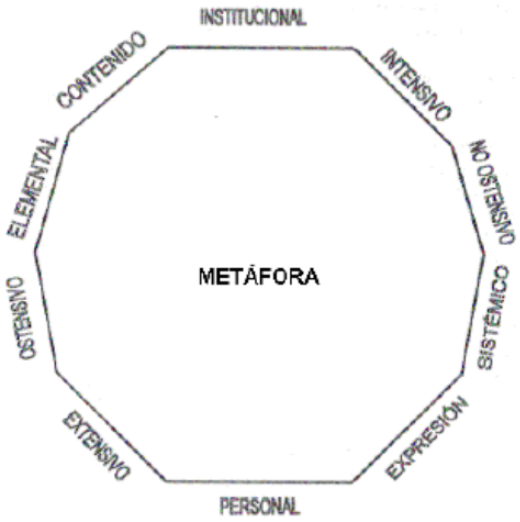


Figura 4

La dimensión personal - institucional

El caso estudiado, las metáforas relacionadas con las gráficas de funciones, es un buen ejemplo de cómo se sitúa la metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional". Por una parte, tenemos que la metáfora estática se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales y, por otra parte, tenemos que la metáfora dinámica es un recurso utilizado por el profesor que resulta determinante en la estructuración de los objetos matemáticos personales de los alumnos.

Puesto que las metáforas dinámicas y las estáticas estructuran de manera diferente a la gráfica de una función es necesario preguntarnos por el tipo de coexistencia que se produce entre ambas. Si intentamos responder a partir de un análisis histórico, la respuesta es que más que coexistencia lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas.

Aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función.

Si nos preguntamos por la coexistencia de ambos tipos de metáfora en la negociación de significados en el aula, se observa, en el bachillerato, una mayor presencia de las metáforas dinámicas ya que el profesor las utiliza

ampliamente para facilitar la comprensión de los alumnos. El uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la comprensión de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista.

El objetivo que se tiene en el currículum de bachillerato fundamentalmente es la enseñanza de una técnica analítica de representación gráfica de funciones. Para facilitar su comprensión el profesor utiliza de manera poco consciente, y según él de manera inocua, expresiones que implican metáforas del tipo «la gráfica es la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica» o similares. Las respuestas de los alumnos sugieren claramente que este tipo de metáforas tiene mucho más peso del que normalmente se considera, ya que son las que muchos de ellos utilizan para responder a las preguntas, en lugar de las definiciones más precisas formuladas en términos conjuntistas estáticos, que tienen recogidas en sus cuadernos y libros de texto.

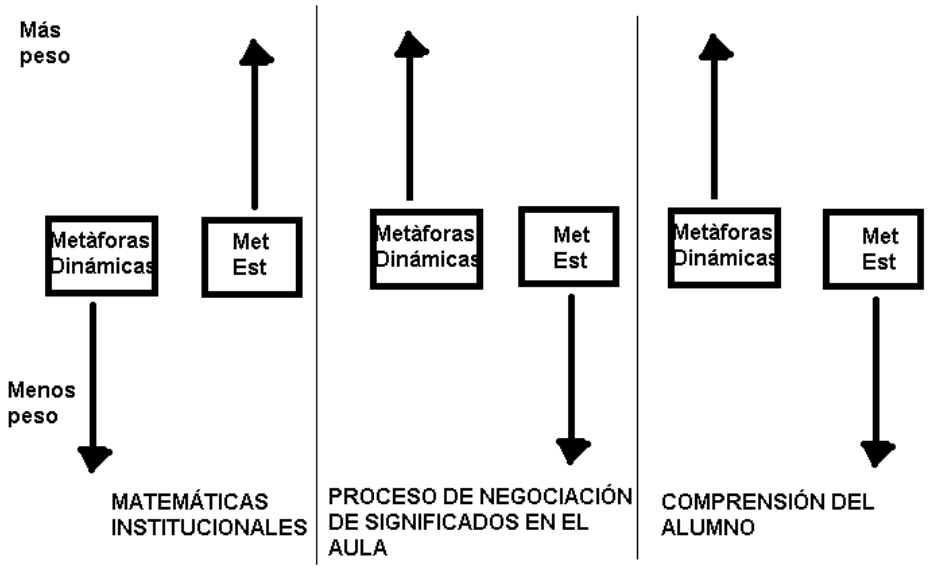


Figura 5

La dimensión ostensivo – no ostensivo.

Con relación a esta dimensión dual, la metáfora actúa en ambos niveles ya que, por una parte, se presenta de manera ostensiva en los textos y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos. La metáfora juega un papel importante en la estructuración y organización de los objetos, matemáticos y

didácticos (sobre todo) personales del profesor y también en los objetos personales del alumno.

La dimensión elemental – sitémica

Por una parte, la metáfora es elemental (A es B) y, por otra parte, genera un nuevo conjunto de prácticas como resultado de estructurar el dominio de llegada en términos del dominio de partida. En nuestra opinión, la mayoría de investigaciones sobre la metáfora se han dedicado al estudio de esta dimensión. Por ejemplo, Bolite (2004) considera primero la metáfora elemental "los puntos son objetos físicos". A continuación descompacta el dominio de partida (los objetos físicos) y el dominio de llegada (los puntos) para ver que relaciones, prácticas, etc. del dominio de partida se trasladan al dominio de llegada:

La dimensión extensivo – intensivo

Una objeción importante que se puede poner a la afirmación, por ejemplo, de que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora estática, consiste en afirmar que no se trata de una metáfora sino de una relación de tipo extensivo-intensivo. Esto es, afirmar que la gráfica es un ejemplo de conjunto y que no hay ningún tipo de metáfora, se trata simplemente de una subcategorización..

Se trata de una objeción importante ya que, en muchos casos, no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización. En el caso de las gráficas de funciones, sólo un análisis histórico permite afirmar que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora que se ha convertido con el tiempo en una subcategorización.

Tanto la subcategorización como la metáfora tienen una estructura del tipo A es B por lo que se pueden considerar ambas como extremos de un continuum único. En el caso de algunas metáforas es muy claro que A y B son muy diferentes y nos situamos en un extremo de este continuum, mientras que en la subcategorización A se considera un extensivo de un intensivo B y también es claro que nos situamos en el otro extremo del continuum. Pero cuando no está claro si A y B son muy diferentes o bien si se pueden relacionar como extensivo e intensivo, entonces la relación A es B cae en algún punto de la mitad del continuum. Por otra parte, metáforas que en el momento de su aparición se situaban claramente en un extremo del continuo con el paso del tiempo se han convertido en subcategorizaciones situadas en el otro extremo.

La forma en que las linking metáforas estructuran un campo de las matemáticas en términos de otra consiste precisamente en relacionar, mediante la dimensión extensivo-intensivo, objetos matemáticos que antes no se relacionaban entre sí de esta manera. Este es, por ejemplo, el caso del nacimiento de la geometría analítica.

La dimensión expresión - contenido

Si se reflexiona sobre la metáfora desde la esta dimensión dual vemos que la metáfora actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto.

Con relación a la dimensión expresión contenido tenemos que A es B' es una expresión que permite entender los elementos de B (partimos previamente de que A es B) como elementos de B'. Es decir, A es B' permite estructurar los elementos de B en términos de B'. Dicho de otra manera, la metáfora dota de una nueva estructura a B. Visto de esta manera la expresión A es B' se puede considerar que funciona de manera icónica con respecto al contenido B.

6 CONSIDERACIONES FINALES

Este trabajo muestra que las metáforas conceptuales son herramientas relevantes para analizar y comprender mejor las prácticas operativas y discursivas que se realizan en el aula. También muestra como el enfoque ontosemiótico permite afrontar el estudio de la complejidad de factores asociados a las metáforas presentes en dichas prácticas.

Esta investigación muestra que el uso de diferentes tipos de metáforas (orientacionales, movimiento ficticio, ontológicas y conceptual blendings) está presente tanto en el discurso del profesor como en el de los alumnos. Ello es invitable y muchas veces inconsciente, pero es fundamental para la construcción de los objetos matemáticos.

La representación gráfica de funciones necesita, además de una descripción en términos globales, la introducción de conceptos locales tales como crecimiento y decrecimiento en un punto, etc. formulados con precisión en términos conjuntistas estáticos Estos conceptos locales presentan una gran dificultad para los alumnos de bachillerato, motivo por el cual muchos profesores los dejan en un segundo plano y prefieren utilizar explicaciones dinámicas, que ellos consideran más intuitivas, en las que el uso de las metáforas dinámicas es fundamental. Por otra parte, las producciones de los alumnos muestran que el uso de éstas metáforas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la comprensión de los alumnos.

El uso de metáforas tiene sus ventajas y sus inconvenientes. En nuestra opinión, no se trata de renunciar a ellas, sino que el objetivo ha de ser un uso controlado por parte del profesor, que ha de ser consciente de la importancia que tienen éstas en la construcción de los objetos personales de los alumnos y de que, por tanto, no todo son ventajas.

REFERENCIAS

Acevedo, J. I.; Font, V. (2004). Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. En E. Castro y E. de la Torre (eds.). *Investigación en Educación matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* Universidade da Coruña: Coruña.

Bolite Frant, J. et al. (2004). Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking. TSG 28, ICME 10, Denmark [http://www.icme-organisers.dk/tsg28/]

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Font, V. & Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias,* 21, 3, 405-418.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2004). *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática*. XX Jornadas del SI-IDM. Madrid 2004.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason.* Chic

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Leino, A-L. & Drakenberg, M. (1993). *Metaphor: An educational perspective.* Research Bulletin 84, Department of Education, University of Helsinki.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics, en Nakaora T. y Koyama M. (eds.). *Proceedings of PME24* (vol.1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (6), 595-610.

Presmeg, N. C. (1997a). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 267-279). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44-54.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339-371). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

LOS PROCESOS DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA Y EL LÍMITE[19]

Manuel García
Universidad de Jaén
Carmen Sánchez
Universidad de Jaén

RESUMEN

Dado que el concepto de límite de una función es uno de los más controvertidos de la Matemática, en cuanto a su comprensión, al estar asociado a las ideas de infinito potencial y actual, su enseñanza siempre ha representado una fuente de problemas didácticos de muy difícil solución. Esto hace que no extrañe la existencia de numerosos trabajos de investigación relacionados con su aprendizaje. Incluso, se puede apreciar en la literatura al uso que, la profundización acerca de la naturaleza y fundamentación de esta noción, junto a otras del Análisis Matemático, ha sido motor de la construcción y formalización de algunas de las teorías más conocidas hoy en la Didáctica de las Matemáticas, como es el caso de la teoría APOS (Dubinsky, 1996; Asiala y als., 1996; Baker y als., 2001).

Esta situación, nos ha impulsado a proponer en este trabajo, dentro del enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática (Godino, Contreras y Font, en prensa), un tema de investigación de naturaleza epistemológica-cognitiva-curricular sobre "las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos, respecto al concepto de límite de una función en 1º de Bachillerato". Se trata de un estudio que busca describir, explicar e identificar factores condicionantes de la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un contexto institucional fijado.

MATHEMATICAL INSTRUCTION PROCESES AND LIMITS

ABSTRACT

Since the concept of functional limit is very controversial in mathematics, because of its understanding been linked to the ideas of potential and actual infinite, its teaching has always posed many didactical problems hard to solve. It is not strange, then the numerous research work related to its learning. We even observe that the analysis of the nature and base of this notion, as well as other from mathematical analysis lead to the building and formalization of some of the better known mathematics education theories, such as APOS (Dubinsky, 1996; Asiala y als., 1996; Baker y als., 2001).

[19] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 390-412)

This situation lead us to start an epistemological-cognitive-curricular research work on the ontosemiotic nature of reasons for secondary students's difficulties as regards the functional limit concept, from the ontological semiotic perspective of mathematics cognition (Godino, Contreras y Font, in press). We try to describe, explain and identify conditioning factors for teaching and learning of functional limit in a given institutional context.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación en Didáctica de las Matemáticas relativa a los procesos de instrucción matemática es una temática que últimamente está tomando un interés creciente. Así nos lo confirman, por ejemplo, artículos como los de Leutenegger (2000) –sobre el método clínico aplicado a la observación del aula–, Sensevy, Mercier y Schubauer-Leoni (2000) –donde se describe el trabajo de regulación llevado a cabo por un profesor en el aula– y Hache (2001) –un método de descripción de las tareas y actividades de la clase–. Sin embargo, consideramos que no se dispone de una metodología capaz de realizar observaciones pertinentes del proceso de estudio del aula y de detectar los fenómenos didácticos asociados. El marco teórico de la TFS, en su reciente enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática aplicado a los procesos de instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, en prensa), sí ofrece diversos constructos que, modelizando dicho proceso de estudio, permiten analizar los fenómenos didácticos presentes en el aula.

Por otra parte, existen numerosos trabajos en torno a la enseñanza-aprendizaje del límite, aunque no se conocen estudios en los que se analicen los fenómenos del aula, bajo la perspectiva teórica de la TFS, cuando se realiza la instrucción del límite a estudiantes de Bachillerato. Es decir, las ricas interrelaciones que se producen en las interacciones del aula entre el profesor y los alumnos y entre éstos, junto con el análisis de las entidades y facetas y de los fenómenos didácticos correspondientes a los conflictos semióticos, es un problema de investigación aún no abordado. De aquí nuestro interés en realizar aportaciones de investigación relacionadas con estos aspectos.

Esta Comunicación se propone entrar en la problemática descrita, aportando datos pertenecientes a una memoria de tesis en elaboración acerca del proceso de instrucción correspondiente a la enseñanza del límite de una función en estudiantes de primero de Bachillerato. En el apartado segundo se describe la trayectoria epistémico del proceso de estudio; en el tercero, la trayectoria docente, en el siguiente, la discente. Por último, en el 5º apartado, se extraen las conclusiones pertinentes.

Las fases que se seguirán en el trabajo son las siguientes:

2. TRAYECTORIA EPISTÉMICA

En este apartado se describe el *análisis epistémico* del proceso de instrucción. Como se señala en Godino, Contreras y Font (en prensa), se trata de descomponer el texto en unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. Con este fin consideramos útil introducir las nociones de configuración epistémica (matemática), trayectoria epistémica y estados potenciales de dichas trayectorias.

Tendremos en cuenta seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución de estos componentes en un proceso de estudio, que se desarrollan según los seis estados posibles siguientes:

E1: Situacional: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: Actuativo: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: Lingüístico: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: Conceptual: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: Proposicional: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: Argumentativo: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

En la tabla 1 se muestra la trayectoria epistémica de una parte del proceso de estudio sobre el "Límite de funciones" (Anexo). Para cada una de las unidades epistémicas en que se divide dicho texto, hacemos una breve descripción de dicha unidad, e identificamos el estado de la trayectoria epistémica.

Tabla 1

TRAYECTORIA EPISTÉMICA DE LA SESIÓN DEL 07-05-03				
Unidad Natural	**Configuración Epistémica**	**Unidad epistémica**	**Descripción**	**Estado**
0	CE1	0	Idea intuitiva de límite en el infinito en modo	E1: Situacional

			gráfico.	
1-3		1	Dibujo y presentación de gráficas.	E1: Situacional
4-8		2	Estudio de f para $x \to +\infty$	E2: Actuativo
9-11		3	Estudio de f para $x \to -\infty$	E2: Actuativo
12-18		4	Estudio de g para $x \to +\infty$	E2: Actuativo
19-23		5	Estudio de g para $x \to -\infty$	E2: Actuativo
24		6	Definición de Asíntota Horizontal.	E4: Conceptual
25-28		7	Estudio de h para $x \to \pm\infty$	E2: Actuativo
29-31		8	Estudio de una asíntota horizontal	E1: Situacional
32-37		9	Estudio de i para $x \to \pm\infty$	E2: Actuativo
38-42		10	Asignación de una fórmula a una gráfica de función.	E4: Conceptual
43-50	CE2	11	Límites finitos en un punto	E1: Situacional
51-62		12	Límite en punto que no está en el dominio de la función	E2: Actuativo
63	CE3	13	Notación de límites laterales	E3: Lingüístico
64-67		14	Estudio de límites laterales en modo gráfico	E1: Situacional
68-85		15	Cálculo de límites laterales en modo gráfico	E2: Actuativo

86-87		16	Estudio de límites laterales en modo gráfico	E1: Situacional
88		17	El valor de una función en un punto no influye en el valor del límite en ese punto.	E4: Conceptual
89		18	Estudio de límites laterales	E1: Situacional
90-97		19	Cálculo de límites laterales	E2: Actuativo

En esta clase de límites hemos detectado tres configuraciones epistémicas con una función específica dentro del proceso de instrucción. Globalmente consideradas, las configuraciones detectadas tienen un carácter esencialmente *actuativo*, ya que se pretende que los estudiantes ejerciten y dominen unas técnicas de cálculo de límites apoyadas en la representación gráfica de determinadas funciones. No hay, por lo general, caracteres *proposicional* ni *argumentativo* en toda la trayectoria epistémica, en parte porque no se pretende enunciar ni justificar propiedades propias del trabajo con límites. Hay un predominio del cálculo de límites desde un punto de vista puramente intuitivo, con abuso de lenguaje gráfico y carencia de lenguaje analítico, postergado a futuras clases.

Las tres configuraciones epistémicas identificadas en esta clase quedan analizadas a continuación.

Configuración epistémica 1.

El proceso de estudio se inicia con un estado "situacional", es decir, con el planteamiento de cuatro gráficas para que, desde un punto de vista intuitivo, se dé solución a un cierto tipo de problema de modelización matemática: la determinación del límite de estas funciones en el infinito ($+\infty$ y $-\infty$), por medio del uso del lenguaje gráfico, buscando la definición intuitiva de asíntota horizontal.

Para el éxito de la tarea, el tipo de actividad matemática requerida en estos ejemplos, basándose en el conocimiento escolar de gráficas de funciones, es el recuerdo e interpretación de la gráfica de una función, con el fin de analizar el comportamiento de la misma según valores de x y su *tendencia* a los infinitos.

La realización de la tarea requiere una acción de modelización, lo que implica establecer una correspondencia entre dos sistemas de prácticas: el ligado a la interpretación gráfica de unas funciones y el correspondiente al objeto límite de función como resultado del comportamiento gráfico de las mismas. Es decir, se trata de una función semiótica de tipo epistémico, donde la expresión sería el planteamiento gráfico y el contenido sería el objeto límite de función.

Se utilizan de manera implícita unas restricciones de trazado de figuras, que de alguna manera habría que problematizar, puesto que se muestran funciones en las que la gráfica de las mismas nunca toca a la asíntota, ni la atraviesa, ignorando, por tanto, los casos más complejos donde esto no ocurre.

Se resalta el hecho de que en el discurso del profesor se están realizando funciones semióticas de cara a eludir el conflicto semiótico de que *el infinito es un número.* En el apartado 31 de la trascripción, el profesor comenta explícitamente este hecho.

Las cuatro gráficas escogidas por el profesor tienen comportamientos muy diversos: una gráfica es estrictamente creciente y sin asíntotas, en otra aparece implícitamente la idea de asíntota horizontal, sin especificar cuál es para que el estudiante la deduzca , en otra hay dibujadas sus asíntotas horizontales –esperando conducir heurísticamente al alumno a su definición– y, por último, aparece una gráfica tipo "parábola".

Es más, como actividad matemática de recuerdo, el profesor plantea a los alumnos intentar asignar a esta última gráfica de función una expresión analítica, con lo que se pone de manifiesto un estado *conceptual* al interpretar definiciones de los objetos puestos en juego, buscando que el alumno efectúe una función semiótica del lenguaje gráfico al analítico.

Configuración epistémica 2.

Para el estudio del límite finito en un punto, se analizan dos casos: el primero, corresponde a una función continua en el punto, y el segundo, a una función discontinua en el punto a tratar.

Se inicia el estudio con una función conocida, a saber, cuadrática. La técnica a aplicar requiere recordar el cálculo del valor numérico de una función en un punto y deducir que el límite en ese punto coincide, en este caso, con su valor numérico. A continuación, se utiliza una tabla de variación, a fin de aclarar términos como "cerca del 5", así como que a la izquierda es una sucesión creciente y a la derecha es decreciente, tratando de hacer ver al alumno que el valor de límite en el punto se obtiene de manera independiente al valor de la imagen de la función en el punto

–aunque en este caso coincidan–. Esto ha supuesto la elaboración de funciones semióticas, de manera implícita, entre el lenguaje gráfico y el numérico, así como el numérico y el gráfico.

Como únicamente se desarrolla una idea intuitiva, es necesario resaltar de algún modo que las restricciones institucionales impiden una aritmetización del límite, es decir, una medida del "tan cerca como queramos".

El hecho de basar la enseñanza en los aspectos intuitivos visuales, mediante una potenciación excesiva de la faceta ostensiva, acorta un tiempo importante que debería utilizarse en el lenguaje tabular variacional, como medio de acercarse al aspecto formal del límite.

Como complemento a esta actividad se propone un segundo caso gráfico, el cálculo del límite en un punto que no pertenece al dominio de definición de la función. El profesor, mediante la intersubjetividad, trata de negociar y reconducir ciertos conflictos semióticos muy arraigados en el estudiante, que tiene conocimientos rudimentarios adquiridos sobre la noción de límite, tales como: *si un punto no está en el dominio de definición de una función, no hay límite en ese punto*, o también, *el límite de una función en un punto coincide con la imagen del mismo*.

Configuración epistémica 3.

Se comienza abordando los límites laterales –usando el ejemplo de la unidad 51– lo que permite completar la noción de límite finito en un punto. Se insiste en lo pertinaz del conflicto semiótico del límite como valor de la función, pues incluso aunque exista el límite, si no hay valor de la función en el punto, el estudiante niega la existencia del límite, con lo que se observa, una vez más, la existencia de los conflictos semióticos anteriores. La cuestión vuelve a ser aclarada en las unidades 86 y 88.

Se muestran ejemplos gráficos de funciones a trozos –unidades 64 y 86–, donde se puede detectar de forma más clara si el alumno ha superado los conflictos semióticos anteriores. La propia notación del lenguaje, al especificarse "por la izquierda" o "por la derecha", presupone confusión en el estudiante con "valores positivos" o "valores negativos", puesto que esto sólo es cierto para el 0, pero no en los demás casos. Precisamente por eso, el profesor cree pertinente el estudio de los límites laterales en el 0 como un primer acercamiento al problema del cálculo de límites laterales.

Acaba la configuración con el planteamiento de un cuarto caso: funciones cuyo dominio no es todo $\Re$. Si el dominio de una función –ejemplo gráfico de la unidad 89– es sólo $\Re^-$ (o $\Re^+$), el problema del cálculo de límites puede verse acentuado al no encontrar sentido al estudio

de algún límite lateral, provocando una cierta “desconfianza” en las producciones del estudiante.

3. TRAYECTORIA DOCENTE

El profesor realiza un conjunto de tareas docentes, implicadas en el desarrollo de la clase, que se denomina trayectoria docente. La configuración docente se circunscribe a la configuración epistémico asociada. Como se señala en Godino, Contreras y Font (en prensa), estas actividades o acciones del profesor son su respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, para las cuales proponemos la siguiente categorización.

Funciones docentes:

P1: Planificación: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

P2: Motivación: creación de un clima de afectividad, respeto, y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

P3: Asignación de tareas: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: Regulación: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: Evaluación: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.

P6: Investigación: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

La trayectoria docente del proceso de estudio del "Límite de funciones" (Anexo) se describe en la tabla 2.

Tabla 2

TRAYECTORIA DOCENTE DE LA SESIÓN DEL 07-05-03				
Unidad Natural	**Configuración Docente**	**Unidad docente**	**Descripción**	**Estado**

0-3	CD1	1	Límites en el infinito	P4: Regulación
4-8		2	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
9-11		3	Resolución de f	P4: Regulación
12		4	Motivación (“Chiquitín…”)	P2: Motivación
13-23		5	Interrogación colectiva sobre g	P5: Evaluación
24		6	Definición de asíntota horizontal	P4: Regulación
25-28		7	Interrogación colectiva sobre h	P5: Evaluación
29-31		8	Justificación de asíntota horizontal	P4: Regulación
32-35		9	Interrogación individual sobre i	P5: Evaluación
36-37		10	Motivación (“Votos a favor…”)	P2: Motivación
38-42		11	Asignación de expresión analítica a una gráfica	P4: Regulación
43	CD2	12	Límites finitos en un punto	P3: Asignación
44-50		13	Resolución del cálculo	P4: Regulación
51		14	Se aborda el estudio de otra gráfica	P3: Asignación
52-57		15	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
58-62		16	Resolución del cálculo	P4: Regulación
63	CD3	17	Se introduce notación sobre	P4:

			límites laterales	Regulación
64		18	Se aborda el estudio de límites laterales	P3: Asignación
65-72		19	Resolución del cálculo	P4: Regulación
73		20	Motivación ("Votos a favor…")	P2: Motivación
74-76		21	Resolución del cálculo	P4: Regulación
77		22	Motivación ("Votos en contra…")	P2: Motivación
78-85		23	Resolución del cálculo	P4: Regulación
86		24	Planteamiento de un nuevo ejemplo gráfico	P3: Asignación
87-88		25	Institucionalización del saber	P4: Regulación
89		26	Planteamiento de un ejemplo gráfico por un alumno	P3: Asignación
90-97		27	Resolución del ejemplo	P4: Regulación

Configuración docente 1.

El trabajo del profesor comienza con la revisión de cuatro gráficas de funciones en las que se pedía el límite de la función representada cuando la variable independiente tiende a infinito.

El trabajo de modelización que hace el profesor requiere un proceso de *regulación*: recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios de gráficas de funciones y comportamiento de las mismas cuando la variable se hace muy grande en valor absoluto.

Una manera de mantener la atención del alumno es la *evaluación* colectiva que realiza el profesor a los alumnos sobre los límites encontrados en las cuatro funciones, motivo principal de este tramo –unidades 1 a 42–.

Aparecen también actividades de *regulación* cuando el profesor fija reglas concretas, como la definición de asíntota horizontal –unidad 24– y la búsqueda de una expresión analítica a una gráfica –unidades 38 a 42–.

El profesor, en su interés por captar la atención del estudiante, intenta crear un clima de afectividad y estímulo del trabajo con expresiones como "chiquitín…" –unidad 12– y "votos a favor" o "votos en contra" –unidad 36–.

Configuración docente 2.

Comienza esta configuración con la *asignación* de una tarea –unidad 43–, retomando un ejemplo que acaba de construir en la unidad anterior. De esta manera el alumno no ve un cambio brusco en la secuenciación del tema, pero pasa del cálculo de límites en el infinito al cálculo de límites finitos en un punto.

Como es una cuestión que da mucho juego, se proponen distintos casos para abordarlo: uno, analítico –unidades 43 a 50– y otro, gráfico –unidades 51 a 61–. El proceso de interrogación colectiva predomina en la metodología del profesor pero, aunque la resolución es asumida por él mismo, a lo largo de la presentación trata de dar una cierta participación a los alumnos, intentando dejar bajo su responsabilidad una parte de la tarea, con objeto de lograr su devolución.

El proceso de *regulación* para la resolución del cálculo finaliza esta configuración. El profesor los ha conducido heurísticamente –es decir, utilizando elementos de la situación que buscan conducir al estudiante a los estados emocionales de interés, compromiso personal, ...– a considerar el caso de que una función puede tener límite en un punto y, sin embargo, no estar definida en ese punto, situación que de no estar bien conducida, favorece la emergencia de conflictos semióticos ya comentados en situaciones anteriores. Además, el profesor los lleva a esta conclusión por medio de un ejemplo gráfico –unidad 51–, al considerar que de esta forma se "ve" mejor que cuando se utiliza un lenguaje puramente numérico.

Configuración docente 3.

Por medio de los tramos anteriores a esta configuración –unidades 58 a 62– el profesor conduce al alumno a una nueva situación: el cálculo de límites laterales.

Se produce un estado de *regulación*, en el que el profesor introduce la notación sobre límites laterales, seguido de una *asignación* de tareas, con el cálculo de los límites laterales en tres ejemplos gráficos de funciones dadas (unidades 64, 86 y 89).

Estas funciones de regulación y asignación de tareas se van repitiendo en esta configuración, mediante las cuales el profesor establece reglas concretas sobre el cálculo de límites laterales. En el caso de aparición del error, el profesor indaga sobre los orígenes del mismo, buscando su superación mediante el debate.

Dado que el objetivo del docente es estimular al estudiante, aparecen con frecuencia funciones de motivación, con expresiones como "votos a favor" –unidad 73– o "votos en contra" –unidad 77–, lo que hace provocar una participación del estudiante, sin que éste abandone la responsabilidad de asumir las tareas que aquél les ha propuesto.

4. TRAYECTORIA DISCENTE

El estudiante, a lo largo del proceso de estudio, realiza una serie de actividades, que se denomina trayectoria discente, la cual queda asociada a la trayectoria epistémica. Como se señala en Godino, Contreras y Font (en prensa), la siguiente relación constituye un inventario de tipos potenciales de estados o funciones del estudiante en el proceso instruccional.

A1: Aceptación del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: Exploración, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: Recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: Formulación/comunicación de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: Argumentación y justificación de conjeturas (al profesor o los compañeros).

A6: Recepción de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

A7: Demanda de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (por ejemplo, cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

A8: Ejercitación: Realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: Evaluación: Estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

La trayectoria discente del fragmento del proceso de instrucción del "cálculo de derivadas" (Anexo) se describe en la tabla 3.

Tabla 3

TRAYECTORIA DISCENTE DE LA SESIÓN DEL 07-05-03				
Unidad Natural	**Configuración Discente**	**Unidad discente**	**Descripción**	**Estado**
0	CDI1	0	Revisión de gráficas	A3: Recuerdo
1-3		1	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
4-8		2	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
9		3	Recepción de la explicación	A6: Recepción
10-11		4	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
12-18		5	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
19-23		6	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
24		7	Recepción de la explicación	A6: Recepción
25-28		8	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
29-30		9	Recuerdo de asíntota horizontal	A3: Recuerdo
31		10	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
32-35		11	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
36-37		12	Adopción de una actitud positiva	A1: Aceptación
38-42		13	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
43	CDI2	14	Recepción del planteamiento	A6: Recepción

44-50		15	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
51-52		16	Recepción de la explicación	A5: Recepción
53		17	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
54-57		18	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
58		19	Recepción de la explicación	A6: Recepción
59		20	Los alumnos argumentan que no existe un valor	A7: Demanda de información
60		21	Un alumno pregunta por una asíntota	A7: Demanda de información
61-62		22	Recepción de la explicación	A6: Recepción
63	CDI3	23	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
64-65		24	Recepción de la explicación	A6: Recepción
66-69		25	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
70		26	Recepción de la explicación	A6: Recepción
71-72		27	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
73-77		28	Adopción de una actitud positiva	A1:Aceptación
78-81		29	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
82-83		30	Recepción de la explicación	A6: Recepción
84		31	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
85-86		32	Recepción de la explicación	A6: Recepción
87		33	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
88		34	Recepción de la explicación	A6: Recepción
89		35	Un alumno plantea otra gráfica	A7: Demanda de información

90-97		36	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación

Configuración discente 1.

Comienza la sesión con una actividad de *recuerdo* al implicarse el alumno en la solución de unos problemas gráficos propuestos el día anterior.

En toda esta configuración domina el estado de *formulación*, es decir, comunicación de soluciones a las tareas propuestas, mediante la emisión de conjeturas. Paralelamente el profesor va validando o desechando dichas conjeturas de cara a que el propio alumno pueda realizar un trabajo de autoevaluación sobre lo encomendado el día anterior.

El alumno, a la hora de recibir la explicación del profesor, adopta una actitud de *recepción* de la información presentada. En todo este proceso se observa que los alumnos están atentos, tratan de seguir las explicaciones y se produce la aceptación de las pautas marcadas para resolver los ejercicios que plantea el profesor.

Configuración discente 2.

Esta nueva configuración trata del cálculo de límites en un punto. En ella el alumno adopta una postura de *recepción* del planteamiento, respondiendo a las preguntas del profesor, estado que domina en la metodología empleada para implicar al alumnado.

Los alumnos, por medio de la formulación de conjeturas, argumentan al profesor a cerca de la solución de los ejercicios y le preguntan sobre los mismos. Ello supone que dichos alumnos *demandan* información, estado que se consigue por los intentos del docente de hacerles participar en la solución de algunas de las subtareas.

Configuración discente 3.

En esta configuración surge un nuevo estado de *recepción* activa de la información presentada por el profesor, al exponer el planteamiento sobre el cálculo de límites laterales. Los alumnos reciben la explicación, que viene motivada con ejemplos gráficos, y responden a las preguntas del profesor.

Hay un estado de *aceptación*, es decir, de adopción de una actitud positiva al estudio, y los alumnos plantean más casos a los gráficos ya propuestos –unidad 89– con lo que se produce una situación de *demanda*

de información, esto es, los alumnos no participan como meros espectadores del trabajo del profesor, sino que se ven implicados en el desarrollo de estas tareas.

5. CONCLUSIONES

El análisis del proceso de estudiado de la clase “límite de funciones” se ha realizado según las configuraciones epistémicas, docentes y discentes. Las configuraciones epistémicas muestran cómo surgen varios conflictos semióticos acerca del límite de una función: *el infinito es un número*, resuelto por el profesor al proponer varias funciones semióticas (entre el lenguaje gráfico y el analítico), dialogar con los estudiantes y llegar al acuerdo institucional pertinente; *el límite de una función en un punto coincide con el valor de la función en dicho punto*, el cual ha sido abordado proponiendo funciones semióticas (entre los lenguajes gráfico, numérico y analítico) y utilizando el modelo dialógico de enseñanza; por último, otro conflicto semiótico derivado del anterior: *si un punto no está en el dominio de definición de una función, no hay límite en dicho punto*, también ha sido tratado didácticamente de modo similar al anterior.

El análisis que hemos realizado del ejemplo sobre "límite de funciones" ha permitido mostrar que la determinación de los significados institucionales finalmente implementados en una clase de matemáticas (que describimos aquí como una secuencia de configuraciones epistémicas) es el resultado de complejas interacciones entre las trayectorias epistémico, docente y discente. Esto nos conduce a que la adquisición de los conocimientos personales de los estudiantes (el aprendizaje) está condicionada por dichos significados implementados y la variedad de los factores que los determinan.

En nuestra clase sobre "el límite de una función", los momentos de comunicación y validación son interactivos, aunque el profesor va institucionalizando los significados. Es decir, no se dan momentos a-didácticos propiamente dichos, sino que algunas de las etapas son consensuadas entre profesor-estudiantes buscando poder asumir el tiempo de enseñanza institucional, el cual ejerce una presión real en las aulas. Además, en ciertas etapas del desarrollo del proceso de instrucción, el profesor basa su acción en la emisión-recepción, sobre todo en momentos de definiciones o criterios de cálculo, que él considera fundamentales para el seguimiento del discurso.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

REFERENCIAS

GODINO, J. D., CONTRERAS, A., Y FONT, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

HACHE, CH. (2001), L'univers mathématique proposé para le professeur en classe, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 21/1.2, pp. 81-98.

LEUTENEGER, F. (2000), Construction d'une clinique pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 20/2, pp. 209-250.

SENSEVY, G. ; MERCIER, A. y SCHUBAUER-LEONI, M.L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 20/3, pp. 263-304.

ANEXO

TRANSCRIPCIÓN DE LAS CLASES SOBRE LÍMITES

- I.E.S. "La Pandera" de Los Villares (Jaén).

- Curso: 1º de Bachillerato-LOGSE

- Clase de 17 alumnos/as

- Entorno: pupitres individuales, colocados dos a dos y situados frente a la pizarra.

- Profesor. D. Manuel García Armenteros

- Fecha: **7-5-2003**

- Hora: 10,55 (50')

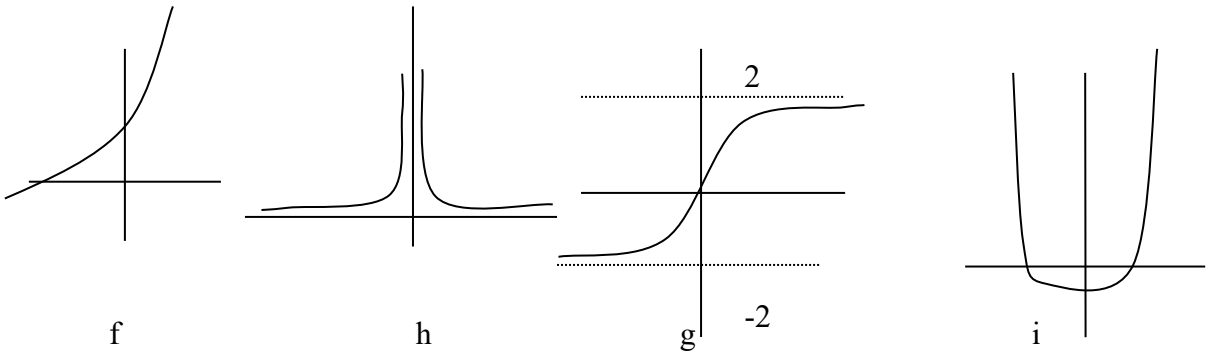
Unidad de análisis 1: Idea intuitiva de límite en el infinito.

La clase comienza con la revisión de 4 gráficas de funciones en las que se pedía el límite de la función representada cuando x tiende a infinito (límites en el infinito).

1. **Profesor**: ¿Tenéis hechos los límites de las 4 funciones de las gráficas (f, g, h, i)?

2. **Profesor**: Usando tizas blanca y roja mate, las dibuja en la pizarra, ¿éstas son?, ¿os suena la 2ª?

3. *Alumnos:* Sí, los tenemos.



4. **Profesor:** Toma y observa la libreta de una alumna.

5. **Profesor:** ¿Cómo pueden determinarse los límites?

6. **Profesor:** ¿Cuánto vale para el caso f?

[Va señalando las diversas gráficas en la pizarra, haciendo ver la "tendencia"]

7. *Alumna (Yurena):* Según la tendencia.

8. *Alumna (Yurena):* Vale: +∞ y se expresa: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

9. **Profesor:** Se centra en la gráfica f y explica el comportamiento de la gráfica para x tendiendo a + infinito y – infinito: *Cuando la gráfica va para infinito, se hace mayor la y..., ¿cuánto? indefinidamente.*

Y el $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *, ¿qué valores puede tomar la x en este caso?, ¿0,-1?[se dirige a un alumno]*

10. *Alumnos:* El alumno interrogado no contesta y dice que no lo sabe.

11. *Alumnos:* Otro alumno: *pues –5000, - lo que se quiera...*

12. **Profesor:** *Chiquitín¡, dime el* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

13. *Alumnos:* El alumno no contesta.

14. *Alumnos:* Otros alumnos dicen: *¡2!*.

15. **Profesor:** *Dime la monotonía.*

16. *Alumno: Creciente.*

17. **Profesor:** *Pero, ¿crece siempre?*

18. *Alumno**:** Sí, porque hay infinitos números decimales. Desde luego, no crece igual que la f.*

19. **Profesor:** *¿Y* $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ *?*

20. *Alumnos: ¡-2!.*

21. **Profesor:** *¿Cómo lo interpretas Antonio?*

22. *Alumnos:* Antonio no contesta, pero una alumna: *la función toma valores menores que –2.*

23. *Alumnos: Es la x la que interesa.*

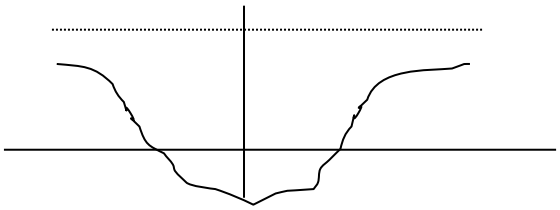
24. **Profesor:** *Toma valores muy grandes, pero en valor absoluto, aunque con signo -. ¿Cómo son estas rectas?[Señala las asíntotas] Se denominan asíntotas horizontales.*

Define lo que es una asíntota horizontal con la expresión analítica:

Y = k es una asíntota horizontal $\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$

"La recta se va a pegar a la función".

Ahora sí que si es + infinito o – infinito, intervienen las semirrectas. Por ejemplo:



$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$

25. **Profesor (respecto a la gráfica h).** Veamos, Isabel, ¿cuál es el límite cuando x tiende a más infinito de h(x)?

26. *Alumna:* Isabel responde 0, pero no lo explica.

27. **Profesor:** El profesor lo aclara y heurísticamente llega a 0. Y pregunta ¿qué ocurre con la otra rama? (es decir límite cuando x tiende a menos infinito de h(x)).

28. *Alumna:* Responde Mª José que es 0. Va pegándose al eje X.

29. *Profesor:* ***Hay una asíntota horizontal en y=0.***

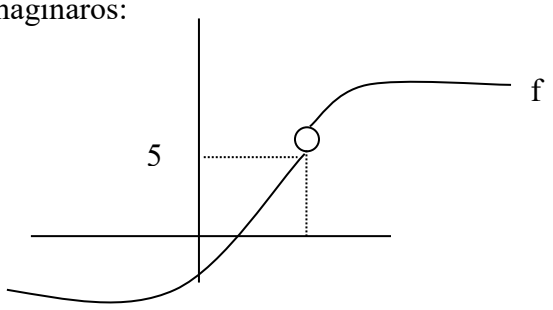
30. **Profesor:** con h sí podemos aplicar que el límite cuando x tiende a infinito de h(x) es igual a k.

31. **Profesor:** Ya vimos que infinito no es un número, pero cuando me acerco a él tengo que especificar si es por la derecha o por la izquierda.
32. **Profesor (respecto a la gráfica i(x)).** ¿Y con esta gráfica, Lucía, ...? ¿María?
33. *Alumna:* María responde que el límite cuando x tiende a más infinito es más infinito.
34. **Profesor**: Señala la parte de la izquierda de la gráfica: ¿qué pasa aquí?
35. *Alumna:* María responde que el límite cuando x tiende a menos infinito de i es menos infinito.
36. **Profesor:** Votos a favor!! (3 o 4 votos). Votos en contra!! (todos los demás).
37. *Alumna:* María rectifica y dice más infinito.
38. **Profesor:** Podemos intuir lo que es una asíntota. ¿Podemos intuir una función para la parábola? El profesor escribe $y = x^2 + ¿$
39. Alumna: $x^2 \pm 50x$.
40. **Profesor:** pasa por el origen y es contradictorio.
41. *Alumna:* La alumna rectifica y dice $y=x^2+k$.
42. **Profesor:** El patrón nuestro es $f(x) = x^2$ con el V(0,0). Heurísticamente el profesor los conduce a $y = x^2 – 2$.

Unidad de análisis 2: Límites cuando x $\rightarrow$a (finito).

43. **Profesor:** ¿qué pasará si quiero calcular límite cuando x tiende a 5 de x^2-2?
44. *Alumna:* sustituyo x por 5.
45. *Alumno:* se dan valores mayores que 5 o menores que 5.
46. **Profesor:** ¿no cercanos? ¿Cuál es el número real que hay antes del 5?
47. *Alumnos:* Algunos dicen 4’1, 4’9, ...
48. *Alumnos:* Otros alumnos dicen que no se sabe.
49. **Profesor:** ¿dónde van a parar las imágenes?
50. *Alumno:* cerca de 23, que es la imagen del 5 (antes ha habido fallos y por ensayo y error llegan a la verdad).
51. **Profesor:** luego límite cuando x tiende a 5 de x^2-2 es igual a 23. Cuando me acerco a 5, las imágenes se acercan a 23. Pero todo esto no siempre ocurre así.

Imaginaros:



3

52. **Profesor:** ¿Dominio de f? Él mismo contesta que es $\Re - \{3\}$.

53. **Profesor:** ¿Y f(3)? No caigáis en la trampa de decir 5, porque no está en el dominio y no puede haber imagen. Pero no nos preocupa f(3), pero sí el acercarme a 3 lo más que pueda y antes del 3.

54. **Profesor:** Ojo, ¿dónde están las imágenes? No tengo ahora fórmula.

55. *Alumnos:* cerca del 5.

56. **Profesor:** ¿Y si ahora me acerco a 3 por la derecha, dónde están sus imágenes?

57. *Alumnos:* por encima del 5.

58. **Profesor:** analiza lo dicho hasta ahora. Tiza amarilla. Sí podemos decir límite cuando x tiende a tres de f(x).

59. *Alumnos:* pero si no existe f(3).

60. *Alumno* (Jaime): pero la asíntota tampoco lo toca. El profesor obvia el comentario.

61. **Profesor:** luego es curioso pero $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$. No está definida en 3 pero sí existe su límite. Ahora existe ese límite sin tener la expresión analítica y sin tener f(3).

62. **Profesor:** los conduce heurísticamente a los límites laterales, con lo cual llegamos a una nueva unidad de análisis.

Unidad de análisis 3: Límites laterales.

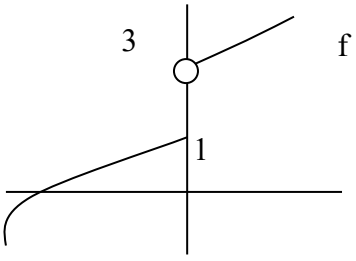
63. **Profesor:** (en relación al ejemplo gráfico anterior, unidad 51) límite cuando x tiende a 3 por la izquierda y aclara la expresión de 3 por la izquierda, será igual a 5. Y límite cuando x tiende a 3 por la derecha será igual a 5.

Aclara los valores cercanos a 3.

Pues bien, cuando existen los límites laterales y los dos coinciden, se escribe

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

64. **Profesor:** Situación que se nos puede presentar:



65. **Profesor:** No todas las funciones son parabolitas. Lo primero que interesa es ver si el Dom(f) = R.

66. *Alumnos:* algunos caen en los valores 1 y 3, dudan, hasta que admiten que el Dom(f) es R.

67. **Profesor:** ¿Y la imagen de 0? Vale 1. (él mismo contesta).

68. **Profesor:** Ahora vamos a investigar $\lim_{x\to 0} f(x)$

69. *Alumnos:* hay que ver a la derecha y a la izquierda.

70. **Profesor:** Eso hay que verlo, esta función tiene dos comportamientos, derecha e izquierda, luego es necesario calcular: $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

71. *Alumno* (Francisco José): Por la izquierda es – infinito.

72. *Alumno:* Otro alumno dice que es 1.

73. **Profesor:** Votos a favor. Nada. Ahora 3, ahora 4.

74. *Alumno* (Julio): es – infinito.

75. **Profesor:** Estamos en 0.

76. *Alumno* (Julio): Ah!, es 1.

77. **Profesor:** Votos en contra de 1. Ninguno. Aclara, si tomo valores cerca de 0 por la izquierda, las imágenes se me pegan a 1.

78. **Profesor:** ¿y límite cuando x tiende a 0 por la derecha?

79. *Alumno (*Emilio): Duda algo, es 3. Se acercan a 3, pero no llega a tocarlo.

80. **Profesor:** ¿Y cuánto me acerco? ¡Todo lo que quiera ¡

81. *Alumno:* Duda y dice 1. El profesor lo saca a la pizarra.

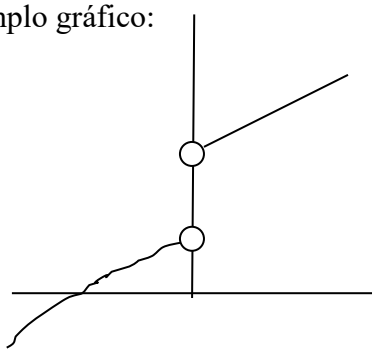
82. **Profesor:** Pone un valor de x. Pero, aunque el profesor intenta aclarar, el 1 sigue siendo una barrera para este alumno.

83. **Profesor:** Fijaos, está definida en 0, pero los límites laterales existen, pero son distintos. El límite cuando x tiende a cero por la izquierda de f(x) es 1. El límite cuando x tiende a cero por la derecha de f(x) es 3. ¿Cuál es el límite cuando x tiende a 0 de f(x)?

84. *Alumnos:* No se puede saber. No hay. Pero, si tiene dos. (varias intervenciones).

85. **Profesor:** Antes vimos que existían los límites laterales para x tendiendo a 3 de f(x) y era 5. Aclara que, ahora, no existe el límite cuando x tiende a 0 de f(x).

86. **Profesor:** Distinguiremos el valor de la función y el valor del límite. Pone un nuevo ejemplo gráfico:

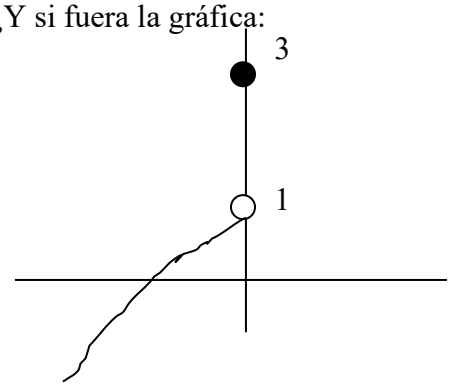


¿Qué pasa ahora? ¿Y el Dom(f)?

87. *Alumnos:* Es R menos el 0.

88. **Profesor:** ¿Y el límite? Observad que el resultado del límite no cambia con respecto al caso anterior. Luego, corroboramos la idea de que el valor de la función en el punto puede no influir en el límite.

89. *Alumno:* ¿Y si fuera la gráfica:



?

90. **Profesor:** Mª Lucía, ¿cuánto vale f(0)?

91. *Alumna* (Mª Lucía): No tiene imagen.

92. **Profesor:** ¿Por qué?

93. *Alumna* (Mª Lucía): porque el Dominio llega hasta el 0.

94. **Profesor**: Luego, independientemente de la imagen del 0, no existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. No hay nada. ¿Y a la izquierda hay límite?

95. *Alumnos:* Es 1.

96. *Alumno:* Pues, yo creo que es 3 porque el 3 entra y el 1 no entra en el rango.

97. **Profesor:** Aclara otra vez. Miraos el apartado 6.3.

LOS PROCESOS DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA Y EL LÍMITE [20]

Lourdes Ordóñez
IES "Albariza", Mengíbar (Jaén)
Lorenzo Luque
IES "Az-Zait", Jaén

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años la mejora de la calidad de la educación, y en particular de la educación matemática, ha constituido una permanente preocupación en nuestra sociedad y un constante objeto de estudio, debate y análisis. Sin embargo, y a pesar de esta innegable "preocupación" social, los deficientes resultados obtenidos a escala mundial por nuestros estudiantes en la evaluación acerca de conceptos elementales de matemáticas, muestran claramente que no basta con "preocuparse" para poder solucionar los problemas del fracaso académico en Matemáticas.

Es decir, la inquietud viene objetivamente fundamentada ante el hecho, cada vez más incuestionable, del aumento del fracaso escolar no solo en niveles preuniversitarios (ESO y Bachillerato) sino que también está afectando ya a los primeros cursos de Universidad. Además, el bajo rendimiento en Matemáticas de los alumnos que ingresan en la Universidad se acrecienta en aquellas materias en las que es básica la comprensión de conceptos fundamentales del Análisis Matemático (límite, continuidad, derivada e integral)

Aunque el análisis de las causas de dicho fracaso es muy complejo "constituye un verdadero programa de investigación, que es el de la identificación de los factores y fenómenos didácticos que influyen en una adecuada comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos básicos del análisis matemático" (Contreras y otros 2003 p.400) desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas podemos encontrar algunas argumentaciones que nos permitan, al menos en parte, explicar este hecho. Uno de los aspectos en el que últimamente se están centrando gran parte de las investigaciones, en esta área de conocimiento, es el salto cualitativo que hay entre el Bachillerato y la Universidad y, más concretamente, los problemas que conlleva el paso a la formalización del lenguaje matemático. En la actualidad, la enseñanza de los conceptos del Análisis Matemático en el nivel de Secundaria se centra principalmente en métodos intuitivos y

[20] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Universidad de Jaén, noviembre 2004, (pp. 413-430)

algorítmicos, quedando la formalización muy relegada, mientras que, en la Universidad la enseñanza se ve dominada por una fuerte formalización.

Por este motivo, cabe cuestionarse si el conocimiento intuitivo que tienen los alumnos del Bachillerato sobre los conceptos matemáticos y el lenguaje que ello conlleva, les permite, de un curso a otro, alcanzar el grado necesario de abstracción y formalización que se requiere para el estudio de esas nociones en el primer curso académico de la Universidad, donde el conocimiento deductivo y el lenguaje formal sustituyen de una manera radical al intuitivo y al trabajo mecánico muy basado en reglas algebraicas. En este sentido Artigue (2003), afirma: "... en el análisis algebraico de su primer contacto, el trabajo técnico no rompe realmente con el algebraico ordinario. Sin embargo, esto deja de ser así cuando se entra en el campo del Cálculo formal. Por ejemplo, los alumnos deben reconstruir el significado de igualdad y comprender que éstas no vienen dadas, necesariamente como en álgebra, por una serie de equivalencias sucesivas, sino a partir de la proximidad para cualquier positivo(…) Los alumnos tienen un mundo técnico completamente nuevo a identificar y que aprender a dominar. Esta tarea está lejos de ser fácil y es, necesariamente, un proceso a largo plazo" (Artigue 2003, p.127)

Todo lo anterior nos lleva a plantear que sería deseable y necesario establecer una armonización y una progresiva continuidad evolutiva en cuanto al tipo de enseñanza de las Matemáticas a impartir en ambos niveles educativos, las estrategias de enseñanza-aprendizaje utilizadas y la evaluación del rendimiento de los estudiantes.

En este trabajo, a fin de poder poner en evidencia las deficiencias, en cuanto a su complejidad semiótica, entre dos modos de razonamiento propios del Análisis Matemático, el infinitesimal y el formal, abordamos la solución a un problema típico del Análisis Matemático –la acotación (mayoración o minoración) de funciones reales de variable real– desde ambas perspectivas: una haciendo uso del lenguaje asociado a los métodos infinitesimales, y otra a través del lenguaje formal basado en el Álgebra abstracta asociado a los métodos de lo que llamaremos "Análisis clásico".

Para analizar la complejidad semiótica de ambos métodos utilizaremos la teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, en prensa), puesto que ésta, mediante la trama de funciones semióticas que aparecen en los mismos, nos permite poner de manifiesto cómo el lenguaje asociado a los métodos infinitesimales –métodos prácticamente desaparecidos de los currículos del Bachillerato– posibilita la conexión con el lenguaje intuitivo usado en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria y en el propio Bachillerato, pudiendo llegar a representar, de alguna manera, un primer acercamiento a la formalización y, por tanto, un nexo de unión o puente con la

formalización propia del lenguaje algebraico asociado a los métodos del "análisis clásico" característicos de la enseñanza universitaria.

Primeramente, realizaremos un estudio histórico-epistemológico de ambos métodos, buscando los motivos y justificación de su existencia, es decir, su razón de ser, a la vez que sus limitaciones o su campo de aplicación. Hemos de dejar claro, que tal y como se indica Farfán (1997): "no pretendemos enseñar matemáticas como en los siglos anteriores; nuestro contexto es totalmente distinto y por tanto nuestras estrategias educativas", sino que: "Reconocemos en el hecho histórico aquellos puntos neurálgicos que nos permitan conducir nuestra labor educativa y adaptamos ésta al momento presente" (p. 3)

Observaremos cómo los métodos infinitesimales surgen de forma intuitiva; estando, por tanto, fuertemente ligados a la intuición, apoyándose en ella. Sin embargo, no carecen de rigor, a pesar de que en el momento actual ya haya sido definido el límite de forma rigurosa. Es también importante recordar como han sido herramientas productivas, fáciles de utilizar, en la búsqueda y resolución de resultados. Esta última cualidad unida a su fuerte conexión con la intuición y a su carácter formal, los hace idóneos para un primer acercamiento a las cuestiones del análisis, tal y como sucedió en el desarrollo histórico-evolutivo. Pero este desarrollo también mostrará la debilidad del método infinitesimal y la necesidad de aritmetizar el Análisis para estudios superiores, lo que nos conduce a la Matemática formal actual.

2. BREVE DESCRIPCIÓN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Ya en las primeras manifestaciones del pensamiento crítico griego surgen cuestiones de índole infinitesimal al plantearse la composición de los entes geométricos o cuestiones relacionadas con el cambio y el movimiento, y aún antes problemas relacionados con el ángulo de contingencia. La respuesta nos sitúa ante dos posturas o puntos de vista: por un lado el segmento más pequeño que cualquiera dado, que sería el resultado final de la división y, por tanto, indivisible; y, por otra, el punto sin extensión pero componiendo los cuerpos.

Ambos puntos de vista fueron cuestionados por las aporías de Zenon, lo que provocó el "horror al infinito" que caracterizó toda la época griega y cuya consecuencia fue el desarrollo de la matemática fuera de toda noción de infinito, eso sí, consiguiendo el rigor mediante el método de exhausción.

En la Edad Media se volvió a las especulaciones sobre el infinito, la naturaleza del continuo y los indivisibles. El estudio del cambio y el movimiento fue un tópico de la especulación filosófica medieval, convirtiéndose el tiempo en el prototipo del continuo. De hecho,

Brawardine (1290-1349) especula sobre el continuo, el infinito y el ángulo de contingencia. Sobre el continuo y el indivisible. En González (1992), se señala: "Brawardine insiste en que una magnitud continua no puede estar formada por un número finito de magnitudes indivisibles, sino que incluyen un número infinito de indivisibles, pero no están constituidos por eso átomos matemáticos, sino que cada continuo está formado por un número infinito de elementos continuos de la misma naturaleza; así por ejemplo, un segmento, área o volumen está compuesto por infinitos segmentos, áreas o volúmenes" (p.42)

En la época del Renacimiento se produce una recuperación de la cultura clásica. Se traducen las principales obras de los clásicos, aunque enriqueciéndolas con la extensión de los resultados y métodos. En este sentido será fundamental la naciente álgebra simbólica. Sin embargo, el progreso continuado de las ciencias y las artes, del momento, plantea nuevos problemas geométricos y mecánicos que no pueden ser resueltos por procedimientos antiguos como es el método de exhausción. Asimismo, éste no es un método heurístico, esto es, es necesario conocer previamente el resultado que se quiere probar (hay que tener en cuenta que el Método de Arquímedes nos se conocerá hasta 1906). En este contexto los matemáticos del momento necesitan desarrollar nuevas herramientas que permitan el avance de las matemáticas aunque para ello se pierda el rigor, dejando paso a la intuición lo que planteará problemas de fundamentación que tardarán siglos en resolverse.

Como respuesta a estas nuevas necesidades se introduce en matemáticas el infinitamente pequeño. Es Giordano Bruno (1548-1600) quien invierte "la cuestión de donde surge el infinitamente pequeño, afirmando que debe mirarse el elemento (minimum) no como el último resultado de la división del continuo, sino como el primer elemento generador de la extensión."(Mnemosyne2, p.7)

Cavalieri, uno de los artífices de la introducción del concepto de movimiento como fundamento de la geometría, en consonancia con la tradición escolástica, consideraba que las superficies eran engendradas por el movimiento de una línea. Sin embargo, en el análisis del momento sólo se trabaja con magnitudes extensivas, puesto que aún han de pasar algunos siglos para el desarrollo de los números reales, por lo que Cavalieri funda su método de los indivisibles sobre un principio bien distinto: el de la división de las superficies en una infinidad de rectas, que luego extenderá a volúmenes.

Este principio planteó grandes problemas de fundamentación ya que contradice el principio de homogeneidad aunque resultaran fructíferas en la búsqueda de resultados. Por este motivo los indivisibles serán sustituidos por bandas muy delgadas, por tanto de la misma dimensión, y cuya

anchura podía hacerse arbitrariamente pequeña, es decir, se ha introducido el infinitamente pequeño. El precio fue el rigor, por lo que los matemáticos iniciaron la búsqueda de elementos que les permitieran justificar de forma rigurosa los resultados encontrados.

Durante los siglos XVII y XVIII el infinitamente pequeño sufre diversas modificaciones. En concreto, siguiendo los procesos de la cuadratura de la espiral de Arquímedes, se va aritmetizando. Matemáticos como Fermat, Pascal o Wallis encontraron, por ejemplo, fórmulas para las potencias de los primeros enteros, por ejemplo, que se obtienen por métodos de inducción completa e incompleta. Como reacción a este abuso de la intuición utilizada en la aritmetización, se produce una vuelta al purismo geométrico protagonizada por Barrow, quien rechaza también los métodos algebraicos de la geometría analítica de Fermat y Descartes.

Corresponderá a Leibniz y a Newton reunir y sistematizar los múltiples resultados que se habían obtenido por métodos infinitesimales, independizando al análisis de la geometría.

Newton muestra tres significados distintos del cálculo infinitesimal. En el primero, significado infinitesimal, opera con cantidades infinitamente pequeñas que denomina momentos. El segundo, conocido como método de las fluxiones, considera las cantidades matemáticas como engendradas por un aumento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento e imagina las velocidades de los movimientos que las engendran (fluxiones). Para fundamentar su método, se inspira en el modelo de la mecánica teórica e introduce el tiempo como variable universal de toda correspondencia funcional. La introducción de la noción de fluxión modifica muy poco el significado infinitesimal anterior. Posteriormente, Newton trata de eliminar toda huella de los infinitamente pequeños, primeramente no considerando más que sus relaciones, después concibiendo lo que fue su tercer método, el método de las primeras y últimas razones.

Por su parte, Leibniz creará una auténtica álgebra de infinitamente pequeños al obtener reglas de cálculo. Todo ello le permitirá trabajar con ellos y utilizarlos en múltiples problemas con lo que adquieren un gran auge debido a su simplicidad, su notación elegante y su forma de operar que permite obtener resultados fácilmente. Son considerados como meros auxiliares sin una definición rigurosa, aunque el propio Leibniz sugiere que son cantidades inferiores a cualquier cantidad dada, sin magnitud, pero que por un principio de continuidad conservan el carácter de relaciones entre las magnitudes de las que provienen. Por último, hay que resaltar que esta etapa supone un gran avance al utilizar métodos más algebraicos y formales.

Sin embargo, debido a su naturaleza aún poco clara, matemáticos como Lagrange intentan desarrollar una matemática sin utilizar los infinitésimos. Como afirma De Lorenzo(1976, p.39) en esta época el análisis se encontraba muy limitado, enfocado a meros desarrollos algorítmicos en función de la mecánica celeste o problemas físicos. Por otra parte, los matemáticos de la época se ven obligados a enseñar debido a la importancia que adquieren, después de la Revolución francesa, las Universidades y las Escuelas Politécnicas como la de París. A la vez empiezan a aparecer revistas dedicadas a la matemática. Es obvio, que todos estos elementos obligan a fundamentar la matemática.

Lo anterior conduce a un cambio de mentalidad en el hacer matemático del siglo XIX, produciéndose una inversión. La matemática ha alcanzado unos límites que no le permiten resolver algunos problemas nuevos, sin poder explicar los motivos. La inversión consistirá en cuestionar los propios fundamentos buscando afrontar los mismos problemas desde una perspectiva más general y que permita explicar los motivos de estas limitaciones a la vez que resolver los problemas surgidos.

El principal artífice de este proceso de inversión en el análisis es Cauchy. Cuestiona la noción de continuidad y hasta la misma noción de función, que eran conceptos aceptados hasta el momento de forma intuitiva. Observa que conceptos fundamentales como la derivación e integración dependen del paso al límite por lo que se propone clarificarlo, estableciéndolo como la noción central. Intenta además justificar los infinitésimos y los métodos puramente mecánicos que se estaban utilizando en ese momento (De Lorenzo, p.45). Para ello utiliza el concepto de límite de D'Alembert que, a su vez, se basa en una modificación del método de Newton de las primeras y últimas razones. Prescinde de la geometría y le da un carácter más aritmético aunque aún impreciso. Asimismo, define los infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero. (Blázquez 1999, p.72)

Por último será Weierstrass quien aritmetiza el análisis con una construcción precisa del número real lo que permite dar una definición estática del concepto de límite. Con ello depura la definición de Cauchy pues elimina la subjetividad del término "se acerca" que sugiere una idea movimiento y de tiempo. Es decir, queda establecida la formulación actual.

3. MARCO CONCEPTUAL

Dado que tratamos de efectuar un análisis pormenorizado de la actividad matemática presente en el desarrollo de determinadas demostraciones matemáticas, utilizaremos el modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002), que se designa brevemente como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS, a

partir de ahora), puesto que el mismo proporciona un marco unificado para el estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones en el seno de los sistemas didácticos. Dentro de la investigación en Didáctica del Análisis Matemático se han desarrollado algunos trabajos que se refieren a este marco conceptual (Font, 2000; Contreras, García y Sánchez, 2003; Ordóñez y Contreras, 2003)

Como se señala en Godino (2003), este modelo trata de responder a importantes cuestiones ontológicas, epistemológicas, cognitivas y socioculturales de la Didáctica de las Matemáticas, algunas de las cuales son:

• ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?

• ¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?

• ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?

• ¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

La TFS aporta herramientas teóricas que permiten efectuar un análisis globalizado del pensamiento matemático, la faceta ostensiva inherente al mismo, las situaciones problema y todos aquellos factores implicados en el proceso. Por otra parte, también intervienen las facetas del conocimiento matemático, los cuales facilitan la confrontación y la articulación de diversos enfoques de investigación sobre la Didáctica de las Matemáticas.

3.1. *La función semiótica, las entidades primarias y sus funciones duales*

Como se indica en Godino (2003), el análisis de los procesos de estudio matemático requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los agentes participantes, y los acontecimientos que tienen lugar en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. El investigador en didáctica dispone finalmente para realizar su trabajo de los textos con la planificación del proceso instruccional. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática y didáctica desarrollada en el manual correspondiente.

De las teorías del lenguaje y de la semiótica una de las nociones utilizadas es la de función signo (según la teoría del lenguaje de Hjelmslev, 1943), que Eco (1991) denominó función semiótica. La TFS adopta dicha noción y la complementa con las entidades primarias, que son los constituyentes básicos de la actividad matemática: lenguaje, situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos. Además, hay

que tener en cuenta que los distintos objetos matemáticos pueden ser considerados según las facetas duales siguientes: personal - institucional, ostensivo - no ostensivo, elemental - sistémico, ejemplar - tipo (o extensivo - intensivo) y expresión - contenido.

La función semiótica puede ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), o instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), o componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos), con lo que se generaliza la noción de representación, utilizada en las investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas. El papel de representación no se da exclusivamente al lenguaje, sino que, por el contrario, de acuerdo con la tríada de Peirce (1965), las otras cinco entidades primarias: situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos, pueden ser también signos.

3.2. *El análisis ontológico - semiótico*

Se denominará análisis ontológico-semiótico de un texto matemático a su descomposición en unidades y la consiguiente identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre las mismas. Se aplica al texto que registra la actividad matemática y didáctica desarrollada en el manual correspondiente y facilita la indagación sistemática, a través de las funciones semióticas, de los significados que interviene y de las relaciones que se establecen.

Por otra parte, se define el conflicto semiótico como cualquier tipo de disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa (en este caso por la institución investigador y por la institución manual). Los conflictos semióticos juegan el papel de verdaderas explicaciones posibles de las dificultades y errores que caracterizan a todo aprendizaje matemático.

Así, por medio del análisis ontológico-semiótico se pueden formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos sujetos en los que puede haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

4. SITUACIÓN-PROBLEMA. ESTUDIO SEMIÓTICO

Del recorrido histórico realizado nos centraremos en la evolución de los diferentes tipos de lenguaje utilizados en la actividad matemática, así como en los métodos de demostración asociados. Resumiendo, podemos afirmar que, en la evolución histórica del Cálculo, a partir de un primer lenguaje intuitivo, basado principalmente en la práctica, surgen las primeras necesidades de formalización que traerán consigo importantes conflictos semióticos, cuya superación requerirá la construcción de nuevos

objetos o constructos matemáticos, por otra parte necesarios para resolver los nuevos problemas que plantea la vida cotidiana en cada momento histórico.

La mayor parte de los esfuerzos de los matemáticos se dedicarán a encontrar el equilibrio entre la eficacia de los métodos utilizados y la resolución de dichos conflictos semióticos, dando lugar al lenguaje de los infinitesimales. Posteriormente, éste se mostró insuficiente para dar respuesta a los problemas teóricos que se presentar, por lo que surgió el Análisis aritmetizado.

En cuanto a la enseñanza actual de los conceptos y proposiciones del Cálculo, el estudiante comienza utilizando un lenguaje intuitivo, que podemos ubicar en el Bachillerato, para pasar en la Universidad, de un modo rupturista, al lenguaje aritmetizado, el cual presenta unos métodos de demostración que requieren una gran abstracción para su dominio. Como se sabe, esta ruptura, en general, conduce a numerosos fracasos académicos en el aprendizaje de los conceptos del Análisis. Sin embargo, como se ha podido observar en la evolución histórica del Cálculo, el funcionamiento histórico fue distinto ya que desde el lenguaje intuitivo se pasó al infinitesimal y de éste al artimetizado.

Cabe preguntarse si en la enseñanza del Cálculo, a nivel didáctico, no sería aconsejable utilizar el lenguaje infinitesimal como intermediario entre el intuitivo y el aritmetizado, como recurso para que el estudiante no encuentre un escalón demasiado fuerte entre la intuición y la formalización. Sin embargo, para ello habría que demostrar la hipótesis siguiente: los métodos infinitesimales están dotados de una menor complejidad semiótica que los aritmetizados, lo cual puede presentarlos, a nivel de enseñanza, como más idóneos en el nivel preuniversitario.

A fin de poder resaltar la diferente complejidad semiótica de los métodos de demostración considerados, el infinitesimal y el propio del Análisis clásico, se ha tomado un típico problema matemático de acotación y que podría corresponder al ejemplo que un profesor hace en clase para enseñar a sus alumnos este tipo de ejercicios. Por tanto, en el contexto de enseñanza del profesor el estudiante debería de entenderlo y ser capaz de trasladarlo a otras situaciones que perciba como similares.

Sin embargo analizaremos la complejidad semiótica subyacente inherente a la demostración y veremos cómo esta supuesta transparencia cognitiva puede resultar algo ingenua.

4.1. *Situación 1*

Las situaciones que analizamos han sido extraídas y adaptadas de Thiénard, 1991. A continuación transcribimos la situación 1 (pp. 36-38), que posteriormente analizaremos.

4.1.1. Enunciado y resolución

Enunciado:

Sea $f: R \to R$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ *Dom(f)=* $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

Una tabla de valores conduce a las cuestiones:

a) ¿Está f mayorada (acotada superiormente) sobre el intervalo $]1,+\infty[$*?*

b) ¿Está f minorada sobre el intervalo $[2, +\infty[$ *(o sobre* $]1,+\infty[$*)? y además ¿Es 2 el ínfimo para f sobre el intervalo* $[2, +\infty[$ *(o sobre* $]1,+\infty[$*)?*

Resolución:

Apartado a)

1) Método intuitivo: $f(x)$ aumenta si se da a x valores cada vez más próximos a 1. La calculadora muestra $2+3\cdot 10^{n}$ para $f(1+10^{-n})$ para $n \leq 99$, y error de ahí en adelante.

2) Método infinitesimal: Si $x=1+\alpha$, α ip[21]>0. Entonces $f(x) = \frac{3+2\alpha}{\alpha} = 2 + \frac{3}{\alpha}$ es ig>0, de donde f no está mayorada (acotada superiormente) sobre el intervalo $]1,2]$ y f ig >0 si $x \approx 1$.

3) Método del Análisis artimetizado: Sea $A>0$, $f(x)>A$ sii:

Así pues $f(x) > A \quad si \quad 1 < x < 1 + \frac{3}{A-2}$

Nótese que es necesario suponer que $A>2$ pero esto no supone ninguna restricción pues $f(x) >2$ siempre.

Apartado b)

1) Método intuitivo: La calculadora muestra $f(n)=2$ para n suficientemente grande.

[21] En adelante escribiremos ip por infinitamente pequeño e ig por infinitamente grande

2) Método infinitesimal: Si ω ig>0 entonces $f(\omega)=\dfrac{2+\dfrac{1}{\omega}}{1-\dfrac{1}{\omega}}\approx 2$ y $f(\omega)\approx 2$ ya que $2+\dfrac{1}{\omega}\approx 2$ y $1-\dfrac{1}{\omega}\approx 1$ lo que muestra que 2 será el límite de $u_n=f(n)$.

Además 2 es un minorante de f sobre [2, +∞[y 2 es el ínfimo ya que si $a>2$ entonces $f(\omega)\approx 2<a$.

Más precisamente $f(\omega)\approx 2$ si ω ig>0

3) Método del Análisis aritmetizado: 2 es un minorante de f sobre [2, +∞[ya que podemos expresar

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=2+\frac{3}{x-1} \quad \text{de donde} \quad f(x)-2=\frac{3}{x-1}>0.$$

Además 2 es el ínfimo. En efecto, sea $A>2$, $f(x)<A$ sii:

$$f(x)=2+\frac{3}{x-1}<A;\quad \frac{3}{x-1}<A-2;\quad \frac{3}{A-2}<x-1;\quad \frac{3}{A-2}+1<x.$$

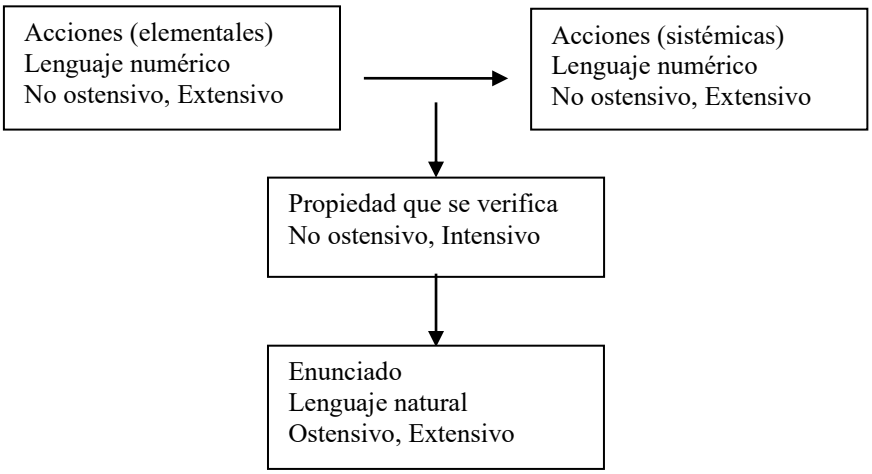
Luego $2<f(x)<A \Leftrightarrow x>1+\dfrac{3}{A-2} \Leftrightarrow x\in \left]1+\dfrac{3}{A-2},+\infty\right[$ con lo que hemos demostrado que 2 es el ínfimo.

4.1.2. Análisis semiótico, trama de funciones semióticas

Analizamos el conjunto de entidades que nos encontramos en este texto y que componen el enunciado y realización

• Situación-problema: El enunciado.

En el enunciado, el lector se encuentra con un conjunto de acciones elementales, no ostensivas y extensivas (elaboración de la tabla de valores), en un lenguaje numérico que intenta producir unas acciones sistémicas, no ostensivas y extensivas y que nos llevan, mediante una generalización (el paso al intensivo), a enunciar las situaciones-problema elementales que se proponen. Es decir, se formulan las funciones semióticas siguientes:



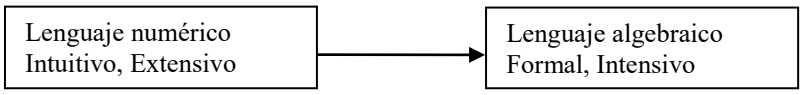
Puede observarse que en el propio enunciado aparecen propiedades de carácter intensivo –"cada vez que se dan valores más cercanos a 1, $f(x)$ se hace mayor"–, lo cual puede dar lugar a un conflicto semiótico que, en caso de no ser superado, puede impedir al lector la continuidad en la interpretación del problema.

• Solución: Apartado a)

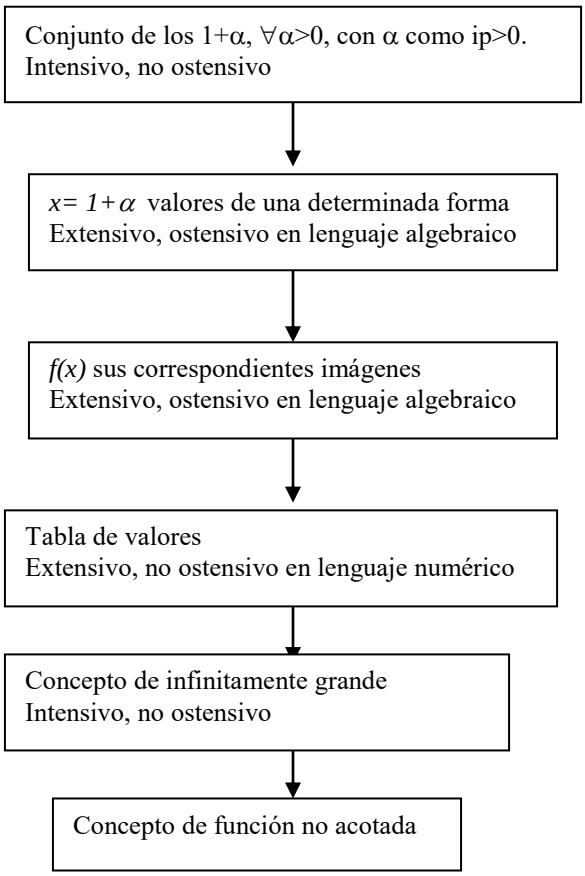
Argumentación 1: Corresponde al método intuitivo y está basada en un lenguaje numérico no ostensivo y extensivo, lo que proporciona una visión intuitiva de la resolución del problema, aunque dicha argumentación no es válida como demostración. Son este tipo de argumentaciones las que se utilizan con frecuencia en el Bachillerato.

Argumentación 2: En el método infinitesimal se plantea una demostración formal utilizando el lenguaje infinitesimal, a raíz de lo obtenido con el lenguaje numérico por medio del paso del lenguaje numérico al algebraico y ejecución de acciones dentro de dicho lenguaje algebraico.

Establecemos el paso siguiente:



Consideramos que la trama de funciones semióticas puede ser la siguiente:

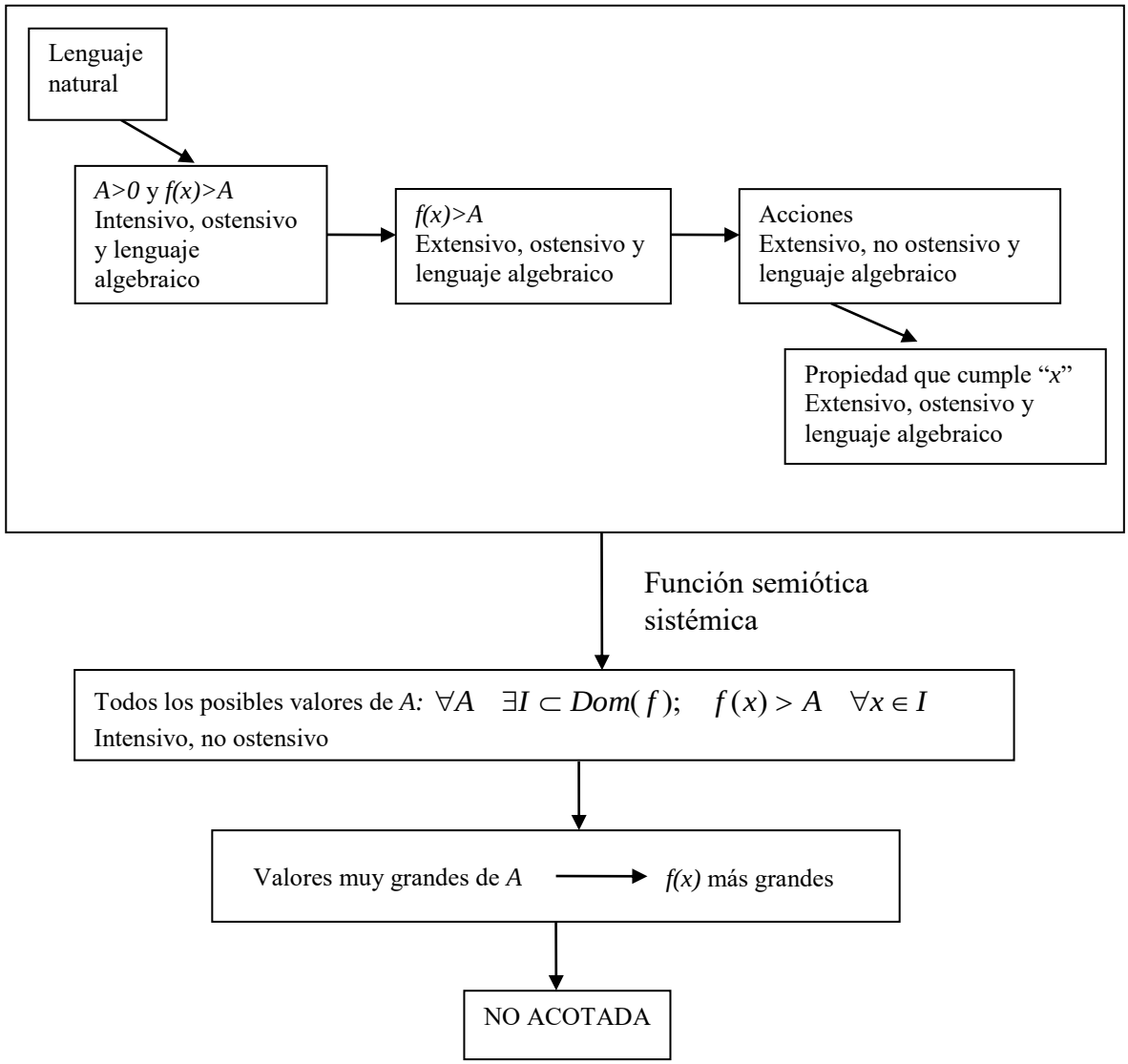


En principio, para el nivel de análisis que estamos realizando, todas las funciones semióticas se consideran elementales.

Argumentación 3: En el método 3º aparece una argumentación que utiliza casi exclusivamente el lenguaje algebraico. La primera dificultad surge al no conectar con la intuición como en el caso anterior. Por otra parte, se dejan a cargo del lector varias acciones así como la interpretación, y teniendo en cuenta que el texto es menos explícito en su resolución.

Mientras que en la argumentación 2ª, correspondiente la método infinitesimal, hay congruencia semántica (Duval, 2000), ya que se parte de valores muy próximos a 1 hasta llegar a la no acotación de f(x), en la argumentación 3 hay una no congruencia: "dada una cota se buscan los valores por encima, lo que puede conducir al lector a interrogarse sobre si esto significa no acotada".

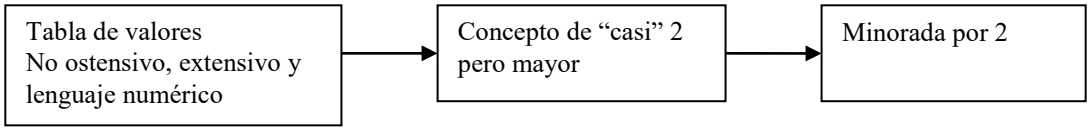
Consideramos que la trama de funciones semióticas puede ser la siguiente:



Como puede observarse, además de la no congruencia semántica, la trama de funciones semióticas muestra una gran complejidad semiótica, dejando a cargo del lector un conjunto de acciones, lo que dificulta la comprensión del discurso. Además aparece una función semiótica sistémica que es necesario establecer para realizar la generalización. Esta introduce una mayor complejidad semiótica y es, por ello, una posible fuente de conflictos semióticos.

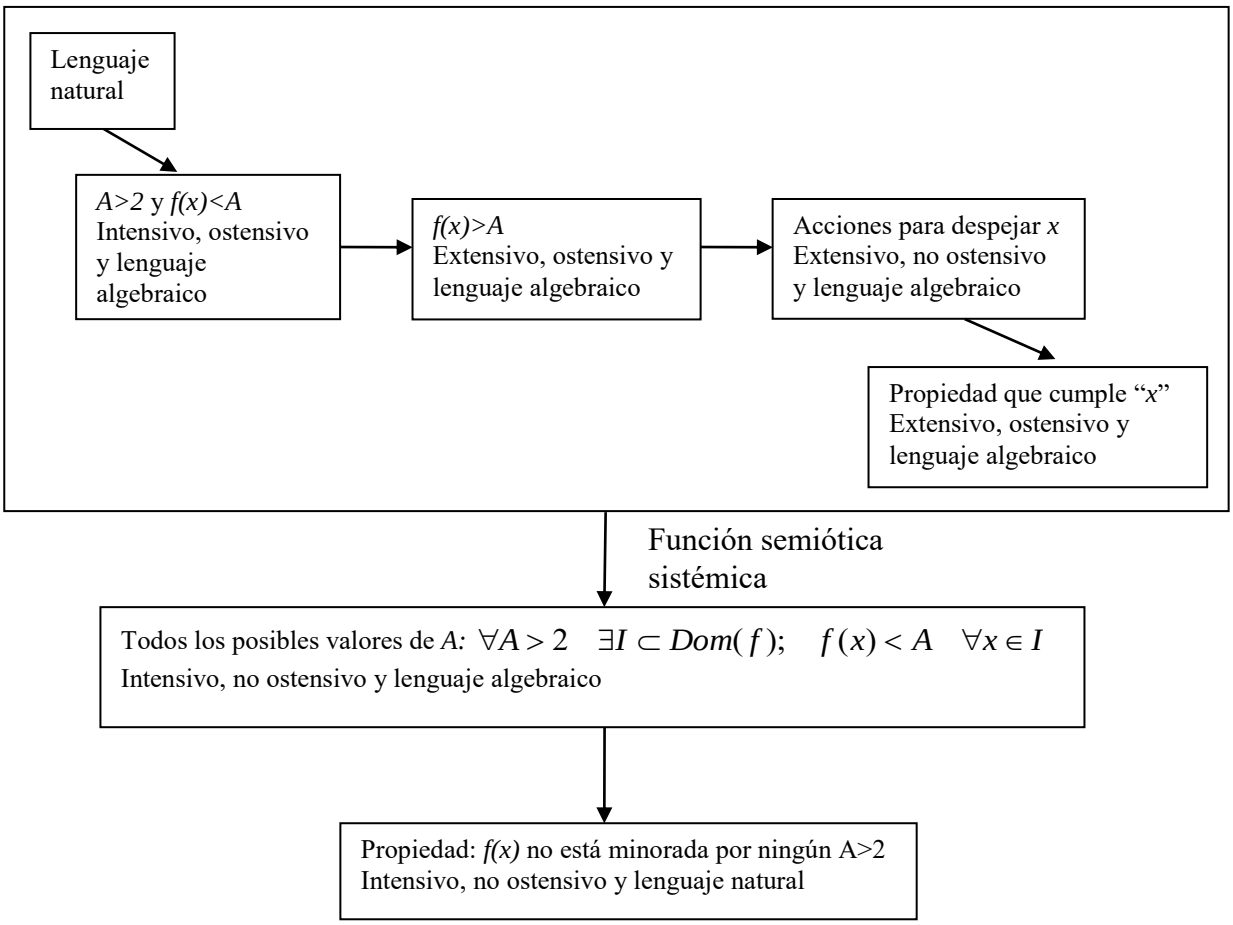
• Solución: Apartado b)

Argumentación 1: Argumentación: La trama de funciones semióticas que se establecen en a) se puede utilizar nuevamente en este apartado. Sólo cambian las dos últimas funciones semióticas:



Estas funciones semióticas que cambian no deben suponer ningún conflicto para el alumno ya que se basan igualmente en la interpretación de una tabla de valores.

Argumentación 2: Nos encontramos en las mismas circunstancias del apartado anterior. Ahora la trama de funciones semióticas se puede expresar de la siguiente forma:



4.2. *Situación 2*

El trabajo que se propone en este taller consiste en considerar la siguiente situación y realizar el análisis semiótico como se ha hecho en la situación anterior.

Enunciado: Sea $f: R \to R$, $f(x) = x\cos x$

¿Está f mayorada (acotada superiormente) sobre R?

Resolución:

Observemos que $f(x)=x$ sii $x=2k\pi,\ k \in Z$

1) Método infinitesimal: Sea ω ig>0, $f(\omega)= \omega\cos\omega$ es infinitamente grande >0 si cos $\omega>0$ y no infinitamente pequeña.

En particular $f(2k\pi)= 2k\pi$ es infinitamente grande positivo si k es un entero infinitamente grande.

Por lo tanto *f* no está mayorada sobre *R*.

Nota importante: No sucede como en la situación anterior, esto es, $f(\omega)$ig>0 si ω ig >0, sino simplemente $f(\omega)$ ig >0 para algunos ω ig >0. Más precisamente en la situación anterior para todo ω ig >0, se tiene $f(\omega)$ig>0, mientra que en esta nueva situación se puede simplemente enunciar: Existe ω ig >0 tal que $f(\omega)$ sea ig>0.

2) Método del Análisis aritmetizado: Sea $A>0$; $f(2k\pi)=2k\pi>A$ sii $k = \frac{A}{2\pi}$ lo que pruebe que *f* no está mayorada sobre *R*.

Nota importante: No se tiene como en la situación anterior para todos los *x* de un intervalo]β, +∞[. En efecto, $f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0,\ k\in Z$, y todo intervalo]β, +∞[contiene de tales números.

5. CONCLUSIONES

A modo de conclusiones resaltaremos los siguientes puntos:

El análisis histórico epistemológico muestra su pertinencia en la detección y aportación de posibles soluciones a problemas didácticos.

La TFS es una herramienta potente que hace aflorar la complejidad semiótica de cada lenguaje permitiendo la discriminación de complejidad entre ambos métodos y, aportando, de esta manera, pautas para establecer criterios de "idoneidad".

La TFS permite a través de la idea y noción de función semiótica sistémica dar una interpretación al difícil paso de la generalización en el campo del Análisis Matemático.

Dada la no pertinencia de desarrollos intuitivos basados casi exclusivamente en las gráficas cabe preguntarse si los métodos infinitesimales pueden servir de puente entre los métodos intuitivos y el "Análisis aritmetizado" ya que suponen una 1ª formalización menos dura pues parten de la intuición como se ha visto en la situación 1.

Observamos cómo los métodos infinitesimales surgen de forma intuitiva; Sin embargo, no carecen de rigor. Además, han sido herramientas productivas, fáciles de utilizar, en la búsqueda y resolución de resultados.

6. REFERENCIAS

ARTIGUE, M. (2003) "¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario?" *Boletín de la Asociación Venezolana*, Vol. X nº 2, pp. 117-134

BLAZQUEZ, M.S. (1999) “Noción de límite en Matemáticas Aplicadas” Tesis doctoral. Universidad de Valladolid

CONTRERAS, A.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L. (2003) “Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad” *Revista de Educación* nº 331 pp.399-419

CONTRERAS, A., GARCÍA, M. Y SÁNCHEZ, C. (2003), Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de la teoría de las funciones semióticas, en E. Castro y cols (eds.), Investigación en Educación Matemática, Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (pp. 189-199), Granada: Universidad de Granada.

DAHAN-DALMEDICO, A., PEIFFER, J. (1986) “Une histoire des mathématiques. Routes et dédales” Paris : Éditions du Seuil

DE LORENZO, J. (1977). “La matemática y el problema de su historia”. Madrid: Tecnos

ECO, U. (1991), Tratado de semiótica general, Barcelona, Lumen, 1979.

FARFAN, R.M. (1997) “Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio”. Mexico D.F.: Grupo editorial Iberoamérica.

FONT, V. (2000), Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques, Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.

GODINO, J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22, (2/3):237-284

GODINO, J. D. (2003), Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática, Monografía de Investigación para el Concurso a Cátedra de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, recuperable en:

http://www.ugr.es/local/jgodino

GODINO, J. D. Y BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3: 325-355.

GONZÁLEZ, P.M. (1992) “Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII” Madrid: Alianza Universal.

HJEMSLEV, L. (1943), Prolegómenos a una teoría del lenguaje, Madrid: Gredos, 1971.

MNEMOSYNE nº 2 (1992), Mathématiques Approche les Textes Historiques. IREM. Université Paris VII

ORDÓÑEZ, L. Y CONTRERAS, A. (2003), El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida, en E. Castro y cols. (eds.), Investigación en Educación Matemática, Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), (pp. 277-287), Granada: Universidad de Granada.

PEIRCE, CH. S. (1965), Obra lógico-semiótica, Madrid: Taurus, 1987.

THIÉNARD, J.C. (1991), Pour une approche de l'enseignement de l'analyse par le calcul infinitésimal", Université de Poitiers IREM.

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS DEL PROFESORADO SOBRE LA CONTEXTUALIZACIÓN DE FUNCIONES[22]

Ana Beatriz Ramos Pereira
Universidad de Carabobo, Venezuela
Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona

RESUMEN

En este trabajo se presenta el tipo de análisis que estamos realizando para averiguar el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura "Introducción a la Matemática" impartida en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FaCES) de la Universidad de Carabobo (Venezuela),

1 INTRODUCCIÓN

Para conseguir el objetivo general de nuestra investigación: *Analizar el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura "Introducción a la Matemática" impartida en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FaCES) de la Universidad de Carabobo (Venezuela),* era necesario, en primer lugar, conseguir problematizar una práctica cotidiana de la institución (la ausencia de problemas contextualizados) que hasta el momento no se había considerado como tal en la institución. Una vez conseguida esta problematización, tendría sentido introducir la posibilidad de una reflexión para el posible cambio de dicha práctica problemática. Este hecho nos llevó a dividir la investigación en dos fases claramente diferenciadas. La primera tendría como objetivo conseguir la problematización y la segunda la reflexión a partir de dicha problematización.

Los resultados de la primera fase se pueden consultar en Font y Ramos (2005), Ramos y Font (2004a y 2004b).

La segunda fase se caracterizó por el diseño e implementación de un "Seminario-taller". Esta estrategia metodológica permitió al colectivo

[22] Actas del *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas.* Universidad de Jaén, Noviembre 2004, (pp. 431-441)

docente debatir sus posturas sobre la posibilidad (o no) de introducir el enfoque contextualizado en la enseñanza de las funciones. El debate entre los docentes permitió recopilar información relevante sobre los significados de los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado sobre las funciones.

A continuación se muestra, mediante el análisis de dos segementos de la transcripción del seminario taller, el tipo de análisis que estamos realizando.

2 PRIMER SEGMENTO

Este segmento tuvo lugar en el proceso de reflexión y discusión de las respuestas al formato diseñado para la reflexión posterior a lectura del artículo *Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas* (Reeuwijk, 1997) En concreto, a la pregunta: ¿Qué piensas de la posibilidad de usar contexto?

A1 *Existen temas para los cuales es más factible la enseñanza a través de contexto; con la conveniente aplicación de las dos metodologías (formal y la contextualizada) de manera armónica, tomando en consideración el entorno real*.

A3 *Yo pienso que cuando ellos dicen que se presta más esta forma de enseñanza para un tema, que para otro; es por la misma falta de preparación que nosotros podemos tener para implementar esto. De repente todos los temas se prestan, pero nosotros no estamos preparados para afrontar estas formas o enfoques*

A4 *Aunado a eso, por ello nosotras decimos, que primero que todo se deben efectuar otras lecturas complementarias a éstas sobre didáctica de las matemáticas empleando la contextualización, es decir, que el docente debe estar preparado e instruido sobre las implicaciones del contexto en el área de matemática: Esto no es una labor difícil sobre todo si cambiamos las estructuras o esquemas mentales (tanto de los alumnos como de los docentes) y esto nos permitiría que fluyeran estrategias de enseñanza para que el aprendizaje de los alumnos sea más efectivo***.** *Una vez que esta contextualización tenga sentido para nosotros los docentes, en esta misma medida lo tendrá para los alumnos*.

Participantes discursivos

A1 Proponente

A3 Oponente-Proponente

A4 Oponente-Proponente

Tesis

El uso de contextos en la enseñanza no es del todo sencillo

Razones Argumentativas:

T1: Existen temas para los cuales es más factibles la enseñanza a través de contextos

T2: Todos los temas se pueden enseñar de manera contextualizada, el problema está en la falta de preparación del profesorado.

Trayectoria argumentativa

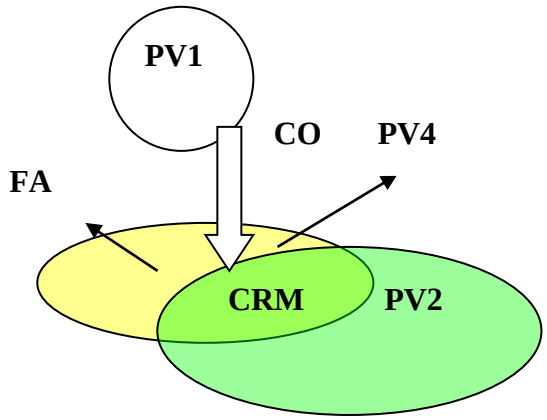
A1 Plantea que, para algunos temas, en la enseñanza de las matemáticas es más difícil el uso de contextos que para otros. (Pretensión de validez 1, (PV1))

A3 Inválida la pretensión de validez esgrimida por A1 con una nueva pretensión de validez en la cual afirmar que lo puntualizado por A1 no es del todo cierto. Afirma que esa visión se tiene por la falta de preparación que tienen los profesores para contextualizar las matemáticas. [(PV2), (Invalida la pretensión de validez de A1 (InvPV1)]

A4 Asume una postura similar a la puntualizada por A3**,** al afirmar: *que el docente debe estar preparado e instruido sobre las implicaciones del contexto en el área de matemática* (PV3). A continuación, enfatiza además que: *ésta no es una labor difícil, sobre todo si cambiamos las estructuras o esquemas mentales (tanto de los alumnos como de los docentes), y esto nos permitiría que fluyeran estrategias de enseñanza para que el aprendizaje de los alumnos sea más efectivo Una vez que esta contextualización tenga sentido para nosotros los docentes, en esta misma medida lo tendrá para los alumnos.* Se trata de una nueva pretensión de validez ya que no se puede considerar igual a la anterior (PV4)

En está nueva pretensión de validez A4 da más detalles y agrega lo del "sentido", que parece que lo entiende como el dominio de la contextualización por parte del docente. Establece en su afirmación una implicación de sentidos. *Una vez que esta contextualización, tenga sentido para nosotros los docentes, en esta misma medida lo tendrá para los alumnos*. Es un planteamiento condicional de implicación directa, que tiene el efecto de dar más fuerza argumentativa a la afirmación inicial de A3 (Fuerza Argumentativa, (FA)) y que además logra conseguir un cierto consenso entre los hablantes, puesto que a partir de su intervención se termina la discusión sobre este aspecto y se pasa a otro diferente. ([PV4) ≅ (PV3) & (CRM)].

El consenso alcanzado en este segmento argumentativo se puede representar mediante el siguiente esquema:



CRM: Consenso racionalmente motivado alcanzado entre A1, A3 y A4.

El consenso se alcanza básicamente entre A3 y A4 y A1 participa en el consenso por omisión (CO).

La fuerza argumentativa (FA) que determina la consecución del consenso se halla en la argumentación de A4

Análisis de la trayectoria argumentativa desde la perspectiva de los Criterios de Idoneidad

La PV1 está enfocada, de entrada, desde la perspectiva de la enseñanza, por tanto cuando A1 cuestiona que la enseñanza contextualizada se pueda aplicar a todos los contextos se puede entender que tiene en mente la idoneidad semiótica, la mediacional o bien la cognitiva, Ahora bien, en nuestra opinión se trata en el fondo de la idoneidad epistémica ya que lo que parece que quiere decir es que debido al nivel de abstracción y generalización que tienen los objetos matemáticos no siempre es fácil hallar las situaciones que los contextualizen.

A1 *La enseñanza a través del contexto se presta más para unos temas que para otros*

Las pretensiones de validez de A3 y A4 trasladan claramente la problemática planteada por A1 al campo de la formación de los profesores (los profesores no están preparados). La formulación de A4 vuelve a situar la problemática en la enseñanza, ya que afirma que si el profesorado está capacitado para la enseñanza contextualizada, entonces podrá diseñar secuencias didácticas que tengan "sentido" para los alumnos (idoneidad semiótica, epistémico y cognitiva)

A4 *(…) Una vez que esta contextualización, tenga sentido para nosotros los docentes, en esta misma medida lo tendrá para los alumnos. (…) Esto no es una labor difícil sobre todo si cambiamos las estructuras o esquemas mentales (tanto de los alumnos como de los docentes) y esto nos permitiría que fluyeran estrategias de enseñanza para que el aprendizaje de los alumnos sea más efectivo (…)*

Análisis de la trayectoria argumentativa desde la perspectiva de los Objetos Personales Matemáticos y Didácticos

Las argumentaciones de A1, A3 y A4 ponen de manifiesto que el significado de los objetos matemáticos y didácticos de los profesores no

incorpora prácticas de enseñanza en las que se utilicen contextos. Los profesores(as) están acostumbrados a realizar unas prácticas de enseñanza de las matemáticas en las que sólo se contemplan los objetos matemáticos formales, pero no su aplicación a contextos no matemáticos.

3 SEGUNDO SEGMENTO

Este segmento tuvo lugar en el proceso de reflexión y discusión de las respuestas al formato diseñado para la reflexión posterior a lectura del artículo *Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas* (Reeuwijk, 1997) En concreto, a la pregunta: ¿Qué piensas de la posibilidad de usar contexto? a continuación del primer segmento.

***A5**: Nosotros pensamos que esto es una necesidad, porque pensamos que con ello se logra un aprendizaje realmente significativo en el alumno, el alumno aprende a aplicar la matemática y no solamente aprende matemática, sino que aprende sobre el contexto donde está el problema, que para nosotros debería ser siempre problemas enmarcados dentro de la facultad donde estamos; es decir, en el área de las Ciencias Económicas y Sociales. Pero el problema real es que ese tipo de enseñanza necesita de un docente que tendría que hacer un trabajo multidisciplinario, para lo cual muchas veces no está preparado. Por otra parte también se necesita modificar el currículo que tenemos, modificarse los planes de evaluación. El docente debe prepararse en Ciencias Sociales; es decir aprender de estas ciencias en el área de la contaduría, administración, economía, etc. Para poder preparar problemas acordes a esas áreas (…) como se puede ver, todo eso involucra un trabajo mayor, de allí la gran dificultad.*

***A7**: Es posible su aplicación y además interesante, porque partiría de situaciones cercanas a la vida, lo que redundaría en mayor atención, motivación y aprendizaje. Nosotros estamos planteando que nos parece interesante su aplicación, sobre todo porque va a incrementar la participación de los alumnos, partiendo de que si algo te llama la atención, porque es algo que vives o que vas a vivir, o es algo que esperas encontrar, tú en ese momento vas a prestar mayor atención y te va a quedar más, lo vas a internalizar. Esto nos lleva a pensar que después eso será mucho más sencillo; es decir traducir eso que ya aprendiste, digamos de manera informal, llevarlo a la formalización. Discutimos que nosotros a veces, lo hacemos para aclarar a los alumnos, cuando les colocamos ejemplos a los alumnos, siempre utilizamos ejemplos de casos de la vida real, pero sólo lo utilizamos cuando ellos no nos entienden la parte formal; es decir lo buscamos como una vía de escape. ¡Ah cómo no me entiendes de esta manera, entonces, yo les pongo un ejemplo que yo sé, que está cercano a ti, entonces lo vas a entender (…) una vez que lo hacemos,*

obtenemos inmediatamente la expresión ¡ah sí¡ ya lo entendí¡ y allí volvemos a lo nuestro, bueno miren esto es así. Que quizás es parte de nuestra formación profesional, bueno no es parte, es un hecho significativo de nuestra formación. Pero debo decir, que no estamos tan alejados, y que tampoco estamos tan negados a poder utilizar el contexto en la asignatura. Pero yo creo que lo hemos utilizado de alguna u otra manera, no como deberíamos, pero algo. Sería posible en la medida que el semestre se alargara en el tiempo y/o la modificación curricular (contenido programático) y además se necesita preparar a los alumnos y docentes a través de cursos de inducción para enfrentar estos cambios

A3: *Yo pienso que de repente, lo que dice A7, cuando él se refiere a que nosotros utilizamos los ejemplos para que los alumnos entiendan, no creo que sea la manera como viene aquí enfocada esta parte. A mí me parece que aquí lo que se está señalando es que vamos a comenzar las clases ya con estos eventos, con estos problemas de contextos en particular, para luego llevarlos a ellos, a los alumnos a que generalicen , llevarlos donde nosotros queremos que ellos lleguen, o sea nosotros como dice él empleamos como un recurso adicional un ejemplo de la vida práctica para que el alumno entienda, pero no es nuestra manera de dar las clases, y yo creo que lo que quiere decir esto, es que debemos de usar ya en las clases el contexto y luego llegar a conclusiones matemáticas. Como dice él, es que nosotros utilizamos a veces ejemplos adicionales para aclarar un concepto que no se entiende"*

A7*: Estoy de acuerdo, yo lo que dije fue no es que demos las clases en forma contextualizada, yo dije que lo utilizamos como último recurso, cuando vemos que no nos entienden, yo lo utilizo siempre que observo que no me entienden, pero luego que me entienden vuelvo a mi matemática formal.*

Participantes discursivos

Proponente A5, A7

Oponente A3, A7

Tesis

El uso de contextos es interesante para un aprendizaje significativo pero está condicionado por la preparación del docente.

De alguna manera, ya se están usando contextos en la enseñanza impartida en la institución.

Razones argumentativas

T1.- El uso de contextos es interesante para un aprendizaje significativo

T2.-El uso del contexto en la enseñanza y aprendizaje de la matemática resulta difícil de introducir en la asignatura básicamente porque los profesores(as) no están preparados en el tema.

T3.- El uso del contexto en la enseñanza y aprendizaje de la matemática es posible de introducir en la asignatura y de hecho ya lo estamos haciendo

T4.- Hay ocasiones donde se usan ejemplos tomados de la realidad, los cuales podrían ser considerados como caso del uso de contextos en la enseñanza, para aclarar un concepto que no se entiende.

T5.- No utilizamos los contextos para la construcción de los objetos matemáticos

T6 Para realizar una enseñanza basada en contextos se necesario preparar a los docentes y alumnos a través de un curso de inducción para enfrentar los cambios

Trayectoria argumentativa

A5: Expresa cinco pretensiones de validez, de las cuales, sólo nos vamos a referir a las dos que consideramos más significativas para el análisis que nos proponemos. Comienza su intervención planteando la necesidad del uso de contexto en la enseñanza de las matemáticas: *Nosotros pensamos que esto es una necesidad, porque pensamos que con ello se logra un aprendizaje realmente significativo (...)* (PV1), pero puntualiza la gran dificultad de su implementación por la falta de preparación de los docentes: *Pero el problema real es que ese tipo de enseñanza necesita de un docente que tendría que hacer un trabajo multidisciplinario, para lo cual muchas veces no está preparado*. (PV2)

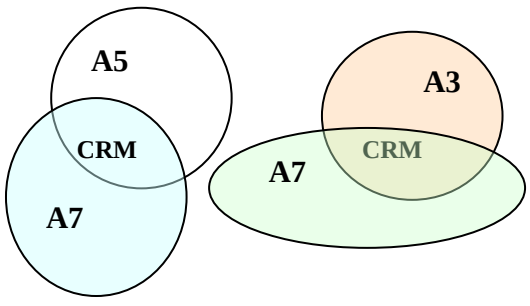
A7: En su planteamiento expresa cinco pretensiones de validez conectadas entre si y que están basadas en su práctica de aula. Las dos primeras pretensiones: *Es posible su aplicación y además interesante, porque partiría de situaciones cercanas a la vida* (PV3) y : (…) *Nosotros estamos planteando que nos parece interesante su aplicación, sobre todo porque va a incrementar la participación de los alumnos* (PV4) coinciden con la PV1 de A5. De las tres restantes queremos destacar la siguiente: *Discutimos que nosotros a veces, lo hacemos para aclarar a los alumnos, cuando les colocamos ejemplos a los alumnos, siempre utilizamos ejemplos de casos de la vida real, pero sólo cuando ellos no nos entienden la parte formal (...)* (PV5). Con esta pretensión A7 da a entender que utiliza en algunas ocasiones la contextualización, pero de manera muy exigua. Su última pretensión de validez la expresa en forma de un resumen de las condiciones que hacen posible la introducción de contextos en la enseñanza: *Sería posible en la medida que el semestre se alargara en el tiempo y/o la modificación curricular (contenido programático) y además*

se necesita preparar a los alumnos y docentes a través de cursos de inducción para enfrentar estos cambios. (PV6).

En síntesis, de lo expresado por A7 se tiene que: 1.- coincide con la PV1 de A5. 2.- esboza, en cierta forma, una invalidación parcial de la pretensión de validez 2 (InvPV2) al matizarla (*Pero debo decir, que no estamos tan alejados, y que tampoco estamos tan negados a poder utilizar el contexto en la asignatura*) y al especificar las condiciones que hacen posible la introducción de contextos en la enseñanza (PV6). Por tanto, como resultado de esta matización se produce un segundo consenso entre A5 y A7.

A3: Esboza, en cierta forma, una invalidación parcial de la PV5 expresada por A7 (InvPV5): *cuando él se refiere a que nosotros utilizamos los ejemplos para que los alumnos entiendan, no creo que sea la manera como viene aquí enfocada esta parte. A mí me parece que aquí lo que se está señalando es que vamos a comenzar las clases ya con estos eventos, con estos problemas de contextos en particular, para luego llevarlos a ellos, a los alumnos a que generalicen* (PV7). Está invalidación tiene mucha fuerza argumentativa (FA) con la cual se genera una respuesta inmediata de A7 en la que le da la razón. De esta manera, se llega a un consenso racionalmente motivado (CRM) entre ellos.

Los consensos parciales alcanzados en este segmento argumentativo se pueden representar mediante el siguiente esquema:



Se establecen dos consensos: 1.- entre A5 y A7 y 2.- entre A7 y A3

Análisis de la trayectoria argumentativa desde la perspectiva de los Criterios de Idoneidad

En La PV1 se enfatiza que el alumno aprende a aplicar la matemática (idoneidad epistémico) y no solamente aprende matemática (idoneidad semiótica y cognitiva). El criterio epistémico está presente cuando se considera que la enseñanza contextualizada sirve para desarrollar una capacidad necesaria en los profesionales de las ciencias económicas y sociales: la capacidad de aplicar las matemáticas en su vida profesional.

Este criterio se enfatiza cuando se precisa que los problemas deben ser pensados en el área de las Ciencias Económicas y Sociales. Por otra parte, cuando se considera que la contextualización facilita un aprendizaje significativo están presentes los criterios cognitivos (adaptación a los conocimientos previos de los alumnos relacionados con la vida cotidiana y con otras ciencias) y semiótico (se facilita el proceso de generalización)

A5 *Nosotros pensamos que esto es una necesidad, porque pensamos que con ello se logra un aprendizaje realmente significativo en el alumno, el alumno aprende a aplicar la matemática y no solamente aprende matemática, sino que aprende sobre el contexto donde está el problema, que para nosotros debería ser siempre problemas enmarcados dentro de la facultad donde estamos; es decir, en el área de las Ciencias Económicas y Sociales (…)*

Por otra parte, en la siguiente afirmación de A7 destaca sobre todo el criterio emocional

A7 *Es posible su aplicación y además interesante, porque partiría de situaciones cercanas a la vida, lo que redundaría en mayor atención, motivación y aprendizaje. Nosotros estamos planteando que nos parece interesante su aplicación, sobre todo porque va a incrementar la participación de los alumnos, partiendo de que si algo te llama la atención, porque es algo que vives o que vas a vivir, o es algo que esperas encontrar, tú en ese momento vas a prestar mayor atención y te va a quedar más, lo vas a internalizar. Esto nos lleva a pensar que después eso será mucho más sencillo; es decir traducir eso que ya aprendiste, digamos de manera informal, llevarlo a la formalización (…)*

Con la PV5, A7 destaca sobre todo el criterio de idoneidad semiótica ya que considera que el uso de contextos sirve para resolver las dificultades de los alumnos.

A7 *(…) Discutimos que nosotros a veces, lo hacemos para aclarar a los alumnos, cuando les colocamos ejemplos a los alumnos, siempre utilizamos ejemplos de casos de la vida real, pero sólo lo utilizamos cuando ellos no nos entienden la parte formal; es decir lo buscamos como una vía de escape. ¡Ah cómo no me entiendes de esta manera, entonces, yo les pongo un ejemplo que yo sé, que está cercano a ti, entonces lo vas a entender (…) una vez que lo hacemos, obtenemos inmediatamente la expresión ¡ah sí¡ ya lo entendí¡, y allí volvemos a lo nuestro, bueno miren esto es así(…)*

En su invalidación parcial de la afirmación de A7, A3 también recurre sobre todo al criterio de idoneidad semiótico ya que destaca el papel de los contextos para facilitar el proceso de generalización.

A3: (…) *cuando él se refiere a que nosotros utilizamos los ejemplos para que los alumnos entiendan, no creo que sea la manera como viene aquí enfocada esta parte. A mí me parece que aquí lo que se está señalando es que vamos a comenzar las clases ya con estos eventos, con estos problemas de contextos en particular, para luego llevarlos a ellos, a los alumnos a que generalicen*

En la PV6 de A7 destacan sobre todo los criterios mediacional y cognitivo.

A7 *(…) Sería posible en la medida que el semestre se alargara en el tiempo y/o la modificación curricular (contenido programático) y además se necesita preparar a los alumnos y docentes a través de cursos de inducción para enfrentar estos cambios.*

Análisis de la trayectoria argumentativa desde la perspectiva de los Objetos Personales Matemáticos y Didácticos

Las argumentaciones de A5 pone de manifiesto que el significado de los objetos matemáticos y didácticos de los profesores no incorpora prácticas de aplicación de las matemáticas a las ciencias sociales. Para A5 y su equipo, resulta difícil la implementación de un enfoque contextualizado, básicamente por esta falta de preparación del docente en el uso de contextos en el área de las Ciencias Económicas y Sociales.

En el análisis realizado sobre el significado institucional pretendido no se observaron prácticas en las que se aplicaran los objetos matemáticos a situaciones no matemáticas. Ahora bien, en este segmento argumentativo se obtiene una información relevante sobre el significado implementado por algunos de los profesores participantes: *la incorporación de ejemplos contextualizados con el objetivo de resolver las dificultades de los alumnos*. Este hallazgo es un caso particular de un fenómeno más general que consideramos relevante. Nos referimos al fenómeno de que los significados institucionales implementados y evaluados no son una mera ejecución del significado institucional pretendido. Los significados implementados y evaluados son el resultado de un proceso en el que no sólo cuenta el currículum oficial sino muchos otros factores entre los cuales se encuentran los significados personales de los objetos matemáticos y didácticos que tienen los profesores. Los significados institucionales pretendidos son personalizados por el profesor que los encarna y ejecuta, dado que nadie hace exactamente las mismas cosas de la misma manera. Los profesores imprimen en cierta manera su propio sello al concretar el significado pretendido en el implementado y el evaluado.

Es importante resaltar que A3, en su matización a A7, le hace observar que las prácticas que él comenta forman parte del significado implementado, pero no del significado pretendido, y que la cuestión que se está debatiendo

es la posible incorporación del uso de contextos en el significado pretendido. Esta matización tiene que ver con el hecho de que, si bien la institución es bastante homogénea con relación al significado pretendido, es heterogénea con respecto a la diversidad de prácticas que conforman el significado implementado.

De cara al posible cambio del significado pretendido en la institución investigada este hallazgo es importante, ya que es ingenuo pensar que el cambio es algo que viene de fuera, penetra y modifica el significado pretendido. Cuando una institución, que podría continuar haciendo lo mismo, se siente provocada a cambiar el significado pretendido por algo que le viene de fuera, este "algo" ya tiene que estar dentro, tiene que formar parte de su significado implementado. Lo que cambia es el peso que tiene este tipo de prácticas, que pasan de ser marginales a centrales. Este cambio se produce cuando la institución se convence, mediante argumentos, de que su proyecto exige tener en cuenta lo que antes se consideraba secundario o poco relevante.

REFERENCIAS

Font, V.; Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación.* (en prensa)

Ramos, A.B.; Font, V. (2004a) Creencias y concepciones del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales *Actas III. Congreso Internacional Docencia Universitaria e Innovación*. Girona 2004, 1-21.

Ramos, A.B.; Font, V. (2004b) Cambios curriculares y su relación con las concepciones y creencias del profesorado sobre la contextualización de las funciones. *Actas XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*. Castellón 2004.

Reeuwijk, V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *Revista Uno,* 12, 9-16.